

## SPIS TREŚCI NUMERU 7 (326)

Telefony <i>Jacek Izydorczyk</i>	str. 1
Entropia <i>Adam Bednorz</i>	str. 4
W uścisku Erosa <i>Krzysztof Ziolkowski</i>	str. 6
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str. 9
Mała Delta	str.10
Twierdzenie Guldina <i>Piotr Żmijewski</i>	str.12
Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Lipiec	str.16
Gammalimatias	str.17

### W następnym numerze:

Jak rozpoznać chaos?

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*

Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim  
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delt*  
 można znaleźć w portalu Eduseek  
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:	Redaguje kolegium w składzie:
Andrzej Białynicki-Birula	Wiktor Bartol
Bogdan Cichocki	Krzysztof Biesaga
– wiceprzewodniczący	Ewa Czuchry
Krzysztof Ciesielski	Krzysztof Kordos – sekr. red.
Jan A. Gaj	Marek Kordos – red. nac.
Piotr Goldstein	Tomasz Kwast
Andrzej Hryniewicz	Anna Ludwicka
Wiesław A. Kamiński	Anna Rudnik
Marta Kicińska-Habior	Witold Sadowski
Krzysztof Maślanka	Joanna Udalska
Janusz Matkowski	Anna Wojtyra
Andrzej Mąkowski	Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
Zdzisław Pogoda	
Michał Różyczka	Adres Redakcji:
Konrad Rudnicki	ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
Grzegorz Sitarski	tel. 853-59-61
Andrzej Woszczyk	BARTOL@MIMUW.EDU.PL
Eligiusz Złotkiewicz	Skład systemem T <sub>E</sub> X wykonała Redakcja.
Wiesław Żelazko – przewodniczący	Wydrukowano
	w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
	w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)  
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2001 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2001 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2001 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl), e-mail: [prenumerata@okdp.ruch.com.pl](mailto:prenumerata@okdp.ruch.com.pl)
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
 

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,



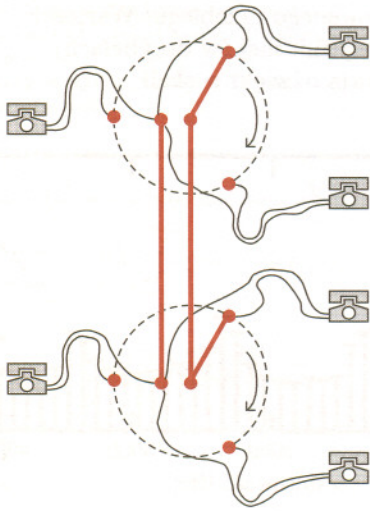
# Telefony

Jacek IZYDORCZYK

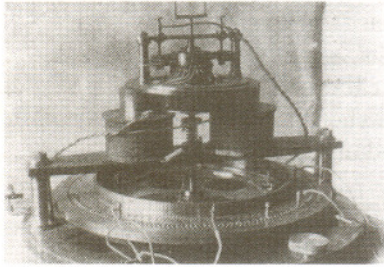
## Geneza problemu próbkowania

Czy wiecie, że telefon ma już 125 lat? Choć aparat telefoniczny przez cały ten czas służył głównie do przenoszenia głosu ludzkiego na odległość, to jednak współczesny, cyfrowy aparat GSM jest nieporównanie mniejszy i bardziej skomplikowany niż pierwszy aparat telefoniczny skonstruowany przez A.G. Bella (1847–1922). Istota zmian zawiera się chyba w słowie „cyfrowy”.

Proces przetwarzania cyfrowego polega na zamianie sygnału analogowego, np. przebiegu drgań prądu elektrycznego w obwodzie mikrofonu wywołanych przez padające na membranę mikrofonu dźwięki, na sygnał cyfrowy, tzn. ciąg liczb o ograniczonej dokładności. Czy można jednak sygnał analogowy przekształcić na sygnał cyfrowy zupełnie bez strat? Czy funkcję ciągłej zmiennej  $t$  można zastąpić ciągiem liczb? Podejrzenia, że jest to możliwe, pojawiły się już 150 lat temu, gdy tylko skonstruowano telegraf. Później zaczęto budować urządzenia do przesyłania wielu rozmów telefonicznych za pomocą jednej pary przewodów. Idea była prosta. Dwa sprzężone komutatory połączone na stałe jedną parą przewodów kolejno, wiele razy na sekundę, łączyły kilka par aparatów telefonicznych (rys. 1). Pierwszy w pełni sprawny system tego typu został skonstruowany około 1900 roku (fotografia). Rozmowa telefoniczna stawała się możliwa wtedy, gdy para aparatów telefonicznych łączona była i rozłączana około 4300 razy na sekundę. Zjawisko to sugeruje, że jeżeli wartość sygnału mowy próbkujemy (czyli sprawdzamy) co około 230  $\mu$ s, to przebieg sygnału w międzyczasie jest stosunkowo „mało istotny”.



Rys. 1. Zasada działania systemu zwielokrotniania kanału transmisyjnego przez podział czasu.



Wartości współczynników  $a_n$  i  $b_n$ , które minimalizują różnicę pomiędzy sygnałem  $x(t)$  i szeregiem funkcji trygonometrycznych, obliczamy według wzorów

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(2\pi nft) dt,$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(2\pi nft) dt.$$

Wzory Eulera ( $i^2 = -1$ )

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Współczynniki  $c_n$  oblicza się za pomocą wzoru

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2\pi inf t} dt.$$

## Widmo

Pojedynczy ton o częstotliwości  $f$  to sygnał opisywany funkcją kosinus

$$x(t) = A \cos(2\pi ft + \phi),$$

gdzie  $A$  to amplituda dźwięku, a  $\phi$  to przesunięcie fazowe. Korzystając ze znanej tożsamości trygonometrycznej, można to też zapisać jako

$$x(t) = a_1 \cos 2\pi ft + b_1 \sin 2\pi ft,$$

gdzie  $a_1 = A \cos \phi$  oraz  $b_1 = -A \sin \phi$ .

Z czystymi tonami spotykamy się stosunkowo rzadko. Częściej mamy do czynienia z dźwiękiem o ustalonym okresie  $T = 1/f$  i kształcie, który jednak trudno uznać za sinusoidę lub kosinusoidę. Można się jednak uprzeć i tak próbować dobrać amplitudy  $a_1$  i  $b_1$  pojedynczego tonu o częstotliwości  $f$ , aby przebieg czasowy czystego tonu był możliwie bliski sygnału  $x(t)$ . Gdy chcemy poprawić jakość przybliżenia, możemy użyć też tonów o częstotliwości  $2f$ ,  $3f$ ,  $4f$ , itd. W ten sposób powstaje trygonometryczny szereg Fouriera związany z okresowym sygnałem  $x(t)$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi nft + b_n \sin 2\pi nft).$$

Jeżeli tylko moc sygnału  $x(t)$  jest skończona, to moc sygnału będącego różnicą między sygnałem  $x(t)$  i jego trygonometrycznym szeregiem Fouriera jest równa zeru. A zatem próbkowanie powinno być możliwe!

Korzystając ze wzorów Eulera, trygonometryczny szereg Fouriera można przekształcić w szereg wykładniczy

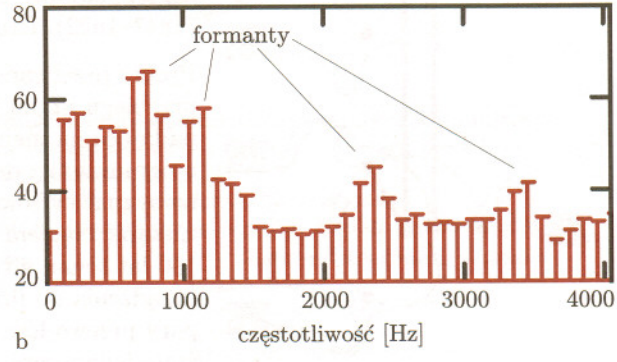
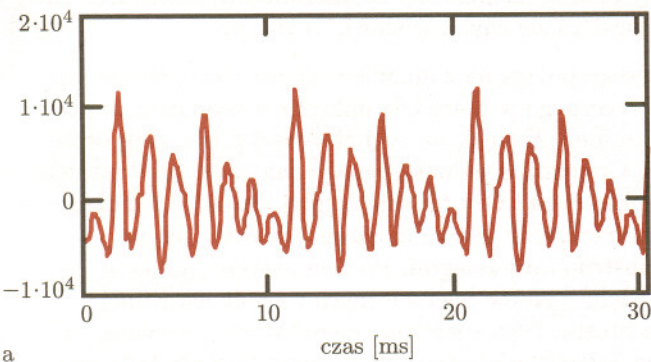
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inf t}.$$

Współczynniki rozwinięcia w wykładniczy szereg Fouriera są liczbami zespolonymi i tworzą tzw. widmo sygnału. Jeżeli sygnał  $x(t)$  jest sygnałem rzeczywistym, to jego widmo wykazuje symetrię, tzn.  $c_{-n} = \bar{c}_n$ . Moduły liczb  $c_n$  tworzą widmo amplitudowe sygnału. Argumenty liczb  $c_n$  tworzą widmo fazowe sygnału.

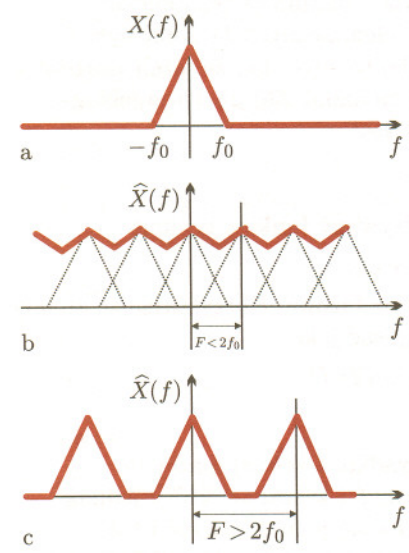


Dla głosu męskiego częstotliwość  $f = 1/T$ , zwana częstotliwością tonu kraniowego, jest równa ok. 100 Hz. Dla głosów żeńskich częstotliwość tonu kraniowego jest odpowiednio wyższa i może dochodzić do 200 Hz – żeńskie głosy są wyższe od męskich.

W ludzkiej mowie można znaleźć fragmenty bardzo zbliżone do sygnału okresowego. Przykładowo, na rysunku 2a przedstawiony jest przebieg sygnału powstałego w wyniku rejestracji głoski „a”. Okres  $T$ , z jakim sygnał powtarza się, odpowiada okresowi drgań więzadeł głosowych. Na rysunku 2b przedstawione jest widmo amplitudowe zarejestrowanego przebiegu. Wartości współczynników  $c_n$  przedstawione są w skali logarytmicznej (w decybelach) między innymi dlatego, że narządy słuchu odbierają dźwięki w skali logarytmicznej.



Rys. 2. Fragment przebiegu czasowego głoski „a” i jego widmo.



Rys. 3. Przykład nałożenia widm.

Jeżeli okres  $F$  jest mniejszy niż  $2f_0$ , przesunięte względem siebie wersje widma sygnału nakładają się i na podstawie przebiegu funkcji  $\hat{X}(f)$  (rys. 3b) nie da się odtworzyć widma sygnału  $X(f)$ . Jeżeli okres  $F$  jest większy lub równy  $2f_0$ , to przedział obejmuje obszar, w którym widmo  $X(f)$  jest różne od zera, przy czym przebieg funkcji  $\hat{X}(f)$  jest w tym przedziale identyczny z przebiegiem widma  $X(f)$  (rys. 3c).

Ze wzoru na współczynniki mamy bowiem

$$c_n = \frac{1}{F} \int_{-f_0}^{f_0} X(f) e^{-2\pi i \frac{n}{F} f} df = \frac{1}{F} x\left(-\frac{n}{F}\right).$$

Mowa ludzka oraz otaczające nas dźwięki zawierają jednak także fragmenty nieokresowe, a nawet takie, które wykazują wiele cech losowości. W takim przypadku dźwięk nie jest już sumą tonów tylko o częstotliwościach  $f, 2f, 3f$ , itd., gdyż pojawiają się w nim dowolne częstotliwości, przy czym jedne w większym, inne w mniejszym natężeniu. Zamiast sumowania mamy więc całkowanie (bo bierzemy continuum częstotliwości, a nie tylko ich przeliczalną ilość), a zamiast współczynników  $a_n$  i  $b_n$  mamy całą funkcję  $X(f)$ , która określa, z jakim natężeniem poszczególne częstotliwości wchodzi w skład całego sygnału. Funkcję tę nazywamy widmem sygnału. Sygnał dany jest zatem wzorem

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{ift} df.$$

Cechą charakterystyczną systemów telekomunikacyjnych jest to, że widmo przekazywanych sygnałów jest różne od zera tylko w ograniczonym zakresie częstotliwości. Na przykład ludzie porozumiewają się za pomocą mowy, której widmo z pewnością kończy się na częstotliwości 22 000 Hz, a w praktyce wystarcza im mowa, której widmo ograniczono do 4 000 Hz, bo w tym obszarze zawarta jest cała wypowiedana informacja tekstowa, wszystkie informacje prozodyczne (np. akcentowanie) oraz wiele danych pozwalających na rozpoznanie mówcy. Ta właściwość głosu ludzkiego została wykorzystana w telefonii, która przesyła sygnały o częstotliwości nie przekraczającej 3 500 Hz.

### Twierdzenie Shannona o próbkowaniu

Załóżmy, że mamy do czynienia z sygnałem  $x(t)$ , którego widmo  $X(f)$  jest różne od zera jedynie w przedziale  $(-f_0, f_0)$ . Chcielibyśmy rozwinąć widmo w szereg Fouriera. Ale zrobić to można tylko z funkcją okresową. Tworzymy więc z widma funkcję o okresie  $F$

$$\hat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF),$$

gdzie  $F$  jest nie mniejsze niż  $2f_0$ . W tym przypadku współczynniki rozwinięcia funkcji w wykładniczy szereg Fouriera opisują jednocześnie przebieg widma  $X(f)$ . Można nietrudno wyliczyć, że są one równe

$$c_n = \frac{1}{F} x\left(-\frac{n}{F}\right).$$

Aby odtworzyć sygnał  $x(t)$ , należy pobierać próbki tego sygnału w odstępach czasu  $t = 1/F$ . Wielkość  $F$  ma znaczenie częstotliwości próbkowania sygnału



**Claude Elwood Shannon**, ur. 1916, amerykański matematyk i inżynier.  
**Władimir A. Kotielnikow**, ur. 1908, radiotechnik rosyjski.

**I. Somey**, radiotechnik japoński, twierdzenie o próbkowaniu sformułował w książce pt. „Hakei Denso” (Transmisja sygnałów).

**Harry Nyquist**, 1889–1976, amerykański elektrotechnik.

Wiemy bowiem, że  $x(t)$  jest dany wzorem

$$\frac{1}{F} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{F}\right) \int_{-F/2}^{F/2} e^{2\pi i f(t-n/F)} df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{F}\right) \frac{\sin \pi(Ft-n)}{\pi(Ft-n)}$$

Dźwięki zapisywane są na płycie kompaktowej w postaci próbek pobieranych z częstotliwością  $F = 44,1$  kHz. Zgodnie z twierdzeniem o próbkowaniu zapewnia to poprawną rejestrację dźwięków, których widmo rozciąga się do częstotliwości 22 050 Hz, czyli poza obszar słyszalności większości ludzi. Każda próbka sygnału zapisana jest w systemie dwójkowym z wykorzystaniem szesnastu cyfr binarnych – bitów. Na płycie zapisywany jest dźwięk stereofoniczny, tzn. dwa osobne sygnały: jeden pochodzący z kanału lewego, a drugi pochodzący z kanału prawego. W rezultacie strumień bitów odczytywany podczas odtwarzania muzyki wynosi

$$2 \cdot 44\,100 \frac{\text{próbek}}{\text{s}} \cdot 16 \frac{\text{bitów}}{\text{próbka}} = 1\,411\,200 \frac{\text{bitów}}{\text{s}}$$

Muzyka zapisana w postaci sygnału stereofonicznego to sygnał, którego widmo rozciąga się w zakresie od 16 Hz do 50 kHz. Obraz telewizyjny przekazywany jest w postaci sygnału, którego widmo nie przekracza 10 MHz.

Aparat głosowy człowieka ma charakter akustycznej rury rezonansowej. Podczas artykulacji mowy kluczową rolę odgrywają dwie najniższe częstotliwości rezonansowe tej „rury” nazywane formantami. Częstotliwości te mieszczą się w zakresie od 100 Hz do 700 Hz (pierwszy formant) i od 100 Hz do 2 000 Hz (drugi formant). To właśnie dlatego, kiedy na początku wieku prowadzono prace nad komutowaniem wielu rozmów telefonicznych po jednej parze przewodów, stwierdzono, że możliwą do przyjęcia jakość połączenia uzyskuje się, gdy każda para aparatów łączona jest 4 300 razy na sekundę. Odpowiada to poprawnemu odtwarzaniu sygnałów o częstotliwości do 2 150 Hz.

i, jak zauważyliśmy wcześniej, powinna być przynajmniej dwa razy większa od największej częstotliwości występującej w widmie sygnału próbkowanego. Jest to treść twierdzenia Shannona–Kotielnikowa–Someya o próbkowaniu. Minimalną częstotliwość próbkowania sygnału nazywa się częstotliwością Nyquista.

Ciąg kolejnych próbek sygnału analogowego nazywa się sygnałem dyskretnym. Wartości próbek sygnału zapisuje się zwykle z ograniczoną dokładnością w binarnym systemie zapisu liczb. Taki sygnał nazywa się sygnałem cyfrowym.

Pozostaje problem odtworzenia oryginalnego sygnału analogowego na podstawie sygnału dyskretnego (cyfrowego). Wartości próbek sygnału  $x(t)$  pobrane z częstotliwością Nyquista lub wyższą wyznaczają wartości współczynników rozwinięcia  $c_n$  okresowej wersji widma w wykładniczy szereg Fouriera. Po wyzerowaniu funkcji poza przedziałem otrzymuje się widmo sygnału analogowego. Ten ostatni uzyskuje się w standardowy sposób z widma, co prowadzi do wzoru

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{F}\right) \frac{\sin \pi(Ft-n)}{\pi(Ft-n)}$$

Aproksymacja sygnału pomiędzy próbkami odbywa się zatem z wykorzystaniem funkcji typu  $\sin t/t$ . Funkcja ta dla  $t \rightarrow 0$  dąży do wartości 1 i zeruje się w punktach  $k\pi$ ,  $k$  – całkowite. W ten sposób odtworzony sygnał jest równy dokładnie pobranej próbce w każdej z chwil  $t = n/F$ . Wartość sygnału pomiędzy próbkami odtwarzana jest na podstawie wszystkich próbek wcześniejszych i późniejszych. Im odleglejsza próbka, tym mniejszy jej wpływ na przebieg sygnału. W praktyce do aproksymacji stosuje się funkcję ograniczoną do skończonego zakresu wartości argumentu  $t$ .

Połączenie abonenta z centralą telefoniczną w znakomitej większości ma charakter analogowy. Tymczasem cyfrowa centrala telefoniczna przenosi rozmowy abonentów, faksy, sygnały analogowe generowane przez modemy itd. w postaci sygnału cyfrowego. Sygnał analogowy po stronie centrali przechodzi przez filtr dolnoprzepustowy, który ogranicza widmo sygnału do 3,5 kHz. Następnie sygnał jest próbkowany z częstotliwością 8 kHz. Każda próbka sygnału zapisywana jest z wykorzystaniem ośmiu bitów. Generowany strumień danych wynosi

$$8\,000 \frac{\text{próbek}}{\text{s}} \cdot 8 \frac{\text{bitów}}{\text{próbka}} = 64\,000 \frac{\text{bitów}}{\text{s}}$$

W przypadku telefonii cyfrowej ISDN zamiana sygnału analogowego na cyfrowy następuje wewnątrz aparatu telefonicznego. Transmisja między centralą a abonentem ma charakter cyfrowy. Od abonenta do centrali płynie strumień danych 64 000 bitów/s. Centrala nadsyła taki sam strumień niosący głos abonenta zdalnego. Łącze cyfrowe można tak skonfigurować, aby przesyłać w jednym kierunku strumień 128 000 bitów/s z wykorzystaniem obu kanałów jednocześnie. Taki tryb pracy łącza przydaje się podczas pracy z Internetem. Cyfrowy aparat telefonii komórkowej GSM przesyła do centrali cyfrowy sygnał mowy łączem radiowym. Sygnał ten jeszcze wewnątrz aparatu poddaje się procesowi kompresji, tzn. usuwa się z sygnału te wszystkie elementy, które są przez zmysł słuchu słabo odbierane. W rezultacie odtworzony u abonenta zdalnego sygnał mowy może dość istotnie różnić się od sygnału zarejestrowanego. Tyle tylko, że różnice te są słabo słyszalne. Natomiast łączem radiowym przesyła się dzięki temu strumień danych równy 13 000 bitów/s lub w nowszych wersjach systemu zaledwie 6 500 bitów/s.

\*\*\*

Przywykliśmy, że telefon komórkowy otrzymujemy od operatora za symboliczną złotówkę. Jest zwykle taki mały i niepozorny. Wielkością przypomina otoczaki znajdujące na dnie potoku. Ale w rzeczywistości jest rezultatem pracy i docieklivosti całej rzeszy ludzi genialnych, którzy przez wieki starali się dociec istoty Przyrody. Jednak nawet ten telefon nie jest ostatnim słowem techniki. Może więc warto wziąć udział w przygodzie z telekomunikacją?



Grecki przedrostek *en-* oznacza wewnętrzny, a wyraz *tropos* oznacza skłonność, zwracanie się ku czemuś. Nadaje to entropii znaczenie jakiejś wewnętrznej tendencji ciała do osiągnięcia równowagi.

Temperaturze punktu potrójnego wody, czyli kiedy woda występuje jednocześnie w postaci stałej, ciekłej i gazowej, odpowiada 273,16 K.

Stan równowagi termodynamicznej oznacza, że układ nie zmienia się w czasie bez pomocy z zewnątrz.

Stałą  $k$  można wyznaczyć doświadczalnie ze wzoru

$$\frac{3}{2} NkT = E,$$

gdzie  $T$ ,  $E$  i  $N$  oznaczają odpowiednio temperaturę, energię i liczbę cząsteczek w jednoatomowym gazie doskonałym. Obecnie przyjmujemy  $k = 1,380\,658(12) \cdot 10^{-23}$  J/K.

Odwiecznym marzeniem ludzkości jest zbudowanie *perpetuum mobile*, czyli maszyny dającej darmową energię. Pesymiści włożyli jednak sporo wysiłku, aby to uniemożliwić: sformułowali dwie *zasady termodynamiki*. Pierwsza zasada to prawo zachowania energii – nie można energii produkować z niczego. Druga zasada mówi, że nie można odebrać energii bezładnie poruszającym się cząsteczkom, np. powietrzu, bo to spowodowałoby zmniejszenie *entropii*. Entropia, która jest miarą nieporządku, stopnia wymieszania w układzie fizycznym, musi zawsze wzrastać w czasie. Młodzi (starsi może też) Czytelnicy z pewnością pamiętają bajkę o Kopciuszku, który musiał oddzielić mak od popiołu. To właśnie przez drugą zasadę termodynamiki była to dla biednego Kopciuszka taka ciężka praca.

Przede wszystkim powinniśmy wiedzieć, czym jest entropia. Pierwsza definicja entropii została podana przez niemieckiego fizyka, Rudolfa Emanuela Clausiusa, w 1865 roku. Opiera się ona na pojęciach *ciepła* i *temperatury*. Ciepłem pobranym (oddanym) przez dane ciało nazywamy tę część energii dostarczonej (odebranej) ciału, która nie jest wynikiem pracy mechanicznej wykonanej nad układem (wykonanej przez układ). Definicja entropii i temperatury składa się z dwóch części: entropia  $S$  jest równa 0, jeśli temperatura  $T$  jest równa 0; zmiana entropii w procesie odwracalnym w czasie spełnia związek

$$\Delta S = \frac{Q}{T},$$

gdzie  $Q$  oznacza ciepło pobrane z otoczenia przez ciało w temperaturze  $T$ . Taki wzór określa entropię i temperaturę z dokładnością do stałego czynnika, który jest określany przez wybór jednostki temperatury – kelwina.

Warto podkreślić, że definicja Clausiusa sprawdza się tylko dla prostych modeli zjawisk fizycznych, w których możemy odróżnić ciepło od pracy mechanicznej i proces odwracalny od nieodwracalnego. Rzeczywistość jest jednak skomplikowana i dlatego w celu głębszego zrozumienia entropii zejdziemy do mikroskopowego opisu świata. Każde ciało, gaz lub ciecz, potraktujemy jako układ  $N$  pojedynczych atomów w pudle o objętości  $V$ . Taki układ w każdej chwili znajduje się w pewnym *mikroście* scharakteryzowanym przez położenia i pędy atomów, jeśli używamy opisu klasycznego za pomocą równań Newtona, lub przez zespół liczb kwantowych, jeśli używamy opisu kwantowego za pomocą równania Schrödingera. W przypadku klasycznym przestrzeń pędów i położeń jest ciągła, ale uprościmy sobie życie i podzielimy ją na małe kawałki, tak aby można było numerować mikrostanty liczbami naturalnymi.

Nie da się zmierzyć jednocześnie wszystkich położeń i pędów atomów (liczb kwantowych) w naszym układzie, bo w ciałach, z jakimi spotykamy się na co dzień, liczba atomów jest rzędu  $10^{23}$ . Potrafimy co najwyżej określić prawdopodobieństwo tego, że układ znajduje się w konkretnym mikroście. Austriacki fizyk, Ludwig Boltzmann, założył, że w *stanie równowagi termodynamicznej* wszystkie mikrostanty, odpowiadające ustalonej wartości całkowitej energii  $E$ , są równie prawdopodobne. Pozostałe odrzucił zakładając, że mają zerowe prawdopodobieństwo. Zbiór takich mikrostantów jest skończony i nazywa się *makrostanem*. Twierdzenie Liouville'a głosi, że taki rozkład prawdopodobieństwa nie zmienia się w czasie. W 1877 roku Boltzmann podał wzór na entropię

$$S = k \ln W,$$

w którym  $W$  oznacza liczbę wszystkich mikrostantów w ustalonym makroście. Stała  $k$  jest dziś nazywana *stałą Boltzmanna*. Wzory Clausiusa i Boltzmanna dają **tę samą entropię**, ale wymagają różnych pojęć.

Chcielibyśmy jednak, aby entropia była zdefiniowana dla dowolnego rozkładu prawdopodobieństw mikrostantów. Zrobił to na szczęście amerykański matematyk, Claude Elwood Shannon, w 1948 roku, dając początek *teorii informacji* (patrz *Delta 7/2000*). Podał on wzór na entropię

$$S = -k \sum_{i \in X} p_i \ln p_i,$$





gdzie  $p_i$  oznacza prawdopodobieństwo, że układ znajduje się w  $i$ -tym mikro stanie,  $X$  jest zbiorem wszystkich mikro stanów, a  $k$  jest stałą Boltzmanna (Shannon nie pisał tej stałej, gdyż jego rozważania nie miały jeszcze interpretacji fizycznej). W fizyce podobny wzór stosował już około 1900 roku inny Amerykanin – Josiah Williard Gibbs. Tak zdefiniowaną entropię nazywa się często entropią informacyjną, ponieważ jest ona miarą wiedzy o danym układzie. Im większa jest entropia, tym trudniejsze jest określenie, w którym mikro stanie znajduje się nasz układ, bo rozkład prawdopodobieństwa mikro stanów jest bardziej równomierny, a Kopciuszek ma więcej pracy. Aby to zobaczyć, prześledzimy kilka ważnych własności entropii.

1. Jeśli zamienimy dwa mikro stany, to entropia się nie zmieni. Oznacza to, że dowolna permutacja (zamiana) mikro stanów nie zmienia entropii. Ma to kolosalne znaczenie dla ewolucji czasowej układu fizycznego. Zgodnie z twierdzeniem Liouville'a ruch atomów daje się przedstawić jako dokonywanie kolejnych permutacji w zbiorze mikro stanów.
2. Jeśli układ jest złożony z dwóch części  $A$  i  $B$ , to każdy mikro stan całego układu jest w istocie parą mikro stanów  $i$  w części  $A$  oraz  $j$  w części  $B$  i występuje z prawdopodobieństwem  $p_{ij}$ . Prawdopodobieństwo tego, że części  $A$  i  $B$  układu znajdują się w mikro stanach  $i$  oraz  $j$ , są odpowiednio równe

$$p_i^A = \sum_j p_{ij} \quad \text{oraz} \quad p_j^B = \sum_i p_{ij}.$$

Zgodnie ze wzorem Shannona entropia całego układu oraz entropia części  $A$  i  $B$  wyrażają się przez

$$S = -k \sum_{i,j} p_{ij} \ln p_{ij}, \quad S^A = -k \sum_i p_i^A \ln p_i^A, \quad S^B = -k \sum_j p_j^B \ln p_j^B.$$

Wtedy zachodzi ważna nierówność

$$S \leq S^A + S^B,$$

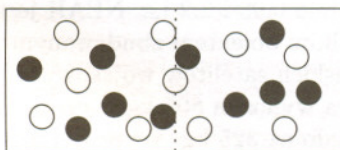
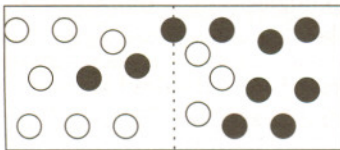
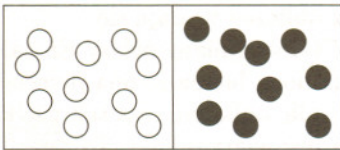
przy czym równość zachodzi tylko, gdy  $p_{ij} = p_i^A p_j^B$ , czyli gdy części  $A$  i  $B$  są niezależne. Z tej nierówności wynika, że jeśli między dwiema częściami układu występują jakieś zależności, to całkowita entropia wzrośnie, kiedy usuniemy te zależności (rys. 1). Dlatego np. kubek po stłuczeniu ma większą entropię. W przypadku równości całkowita informacja o układzie jest sumą informacji o jego częściach.



Rys. 1

3. Jeśli wyrównamy prawdopodobieństwa dwóch mikro stanów  $i$  oraz  $j$ , czyli zastąpimy  $p_i$  i  $p_j$  przez  $(p_i + p_j)/2$ , to entropia wzrośnie. Odpowiada to całkowitej utracie zdolności określenia, czy układ jest w stanie  $i$  czy  $j$ .

Z własności 1 wynika, że entropia nie zmienia się w czasie, jeśli do opisu ruchu użyjemy wyłącznie równania Newtona (w przypadku klasycznym) lub równania Schrödingera (w przypadku kwantowym). Własności 2 i 3 są jednak wskazówką, że w dynamice układu potrzebny jest mechanizm zapominania. Musimy się zgodzić, że ewolucja w czasie powoduje rozdrobnienie informacji początkowej i spora jej część zostaje utracona (jest za trudna do wydobycia nawet dla Kopciuszka, rys. 2). Wiedział to już Boltzmann i dzięki temu udowodnił ściśle zasadę wzrostu entropii dla gazu doskonałego. Dlatego drugą zasadę termodynamiki najłatwiej pamiętać jako **zasadę ciągłego zapominania informacji**.



Rys. 2. Kiedy usuniemy przegrodę, kulki się wymieszają i o ich ponowne rozdzielanie trzeba poprosić Kopciuszka.

Z entropią wciąż wiąże się wiele pytań. Nie umiemy stworzyć dobrego modelu zapominania dla skomplikowanych układów fizycznych. Wielu fizyków nie jest przekonanych, że entropia Boltzmanna oraz informacyjna to ta sama entropia. Nie wiemy, dlaczego potrafimy przemieniać świat wokół nas, podczas gdy teoretycznie w naszej świadomości jest za mało informacji, aby uznać, że Wszechświat miał dostatecznie niską entropię na początku. Na koniec światełko nadziei dla konstruktorów *perpetuum mobile* i Kopciuszków. Mimo pierwszej i drugiej zasady termodynamiki ciągle nie wiadomo, jak dużo informacji ukrytej jest w otaczającym nas powietrzu, wodzie lub piasku. Gdyby tej informacji było dużo (wbrew oficjalnym przypuszczeniom fizyków), moglibyśmy ją zamienić na darmową energię.



Imię greckiego boga miłości nadano odkrytej ponad sto lat temu planetoidzie, która zaskoczyła ówczesnych astronomów możliwością zbliżeń do Ziemi. W końcu XIX wieku wiadomo było, że ponad 400 znanych już wtedy małych planet krąży wokół Słońca po prawie kołowych orbitach w odległościach większych niż Mars, ale mniejszych niż Jowisz. W rozpościerającym się między orbitami Marsa i Jowisza pierścieniu planetoid skatalogowano dotychczas kilkanaście tysięcy obiektów. Planetoida Eros (mająca numer katalogowy 433) była pierwszą, której ruch okazał się nietypowy. Wyraźnie eliptyczny kształt jej orbity sprawia, że najmniejsza jej odległość od Słońca jest niewiele większa od odległości Ziemi. Obiegając Słońce Eros i Ziemia mogą więc przybliżyć się na odległość zaledwie 22 mln km.

Bliskie przeloty Erosa koło Ziemi uczyniły z tej planetoidy obiekt szczególnego zainteresowania m.in. z tego powodu, że śledzenie jej stosunkowo szybkiego ruchu po niebie w czasie zbliżenia dawało szanse wyznaczenia, z większą niż dotychczas uzyskiwaną dokładnością, wartości różnych stałych astronomicznych, np. odległości Słońca od Ziemi. Ostatnio Eros stał się pierwszym obiektem wśród małych ciał Układu Słonecznego, który uchylił rąbka swych tajemnic sondzie kosmicznej wprowadzonej na orbitę wokół niego. Otóż w październiku 1991 roku kierownictwo amerykańskiej agencji kosmicznej NASA zdecydowało, że pierwszą misją nowego programu Discovery będzie spotkanie z planetoidą bliską Ziemi. Ten cel misji dowcipnie wyeksponowano przez nazwanie jej NEAR (od ang. *Near Earth Asteroid Rendezvous*). Na początku 2000 roku nazwę tę zmieniono na NEAR-Shoemaker dla uczczenia tragicznie zmarłego w 1997 roku Eugeniusza Shoemakera, wybitnego amerykańskiego astronoma i geologa planetarnego, znawcy małych ciał Układu Słonecznego, współodkrywcy słynnej komety Shoemaker-Levy 9, która w 1994 roku zderzyła się z Jowiszem. Jego prochy spoczęły w 1999 roku na Księżycu wraz z zasłużoną w badaniach Srebrnego Globu sondą Lunar Prospector, która je tam dostarczyła. Wzrost zainteresowania Erosem spowodował, że zaczęto go znowu intensywnie

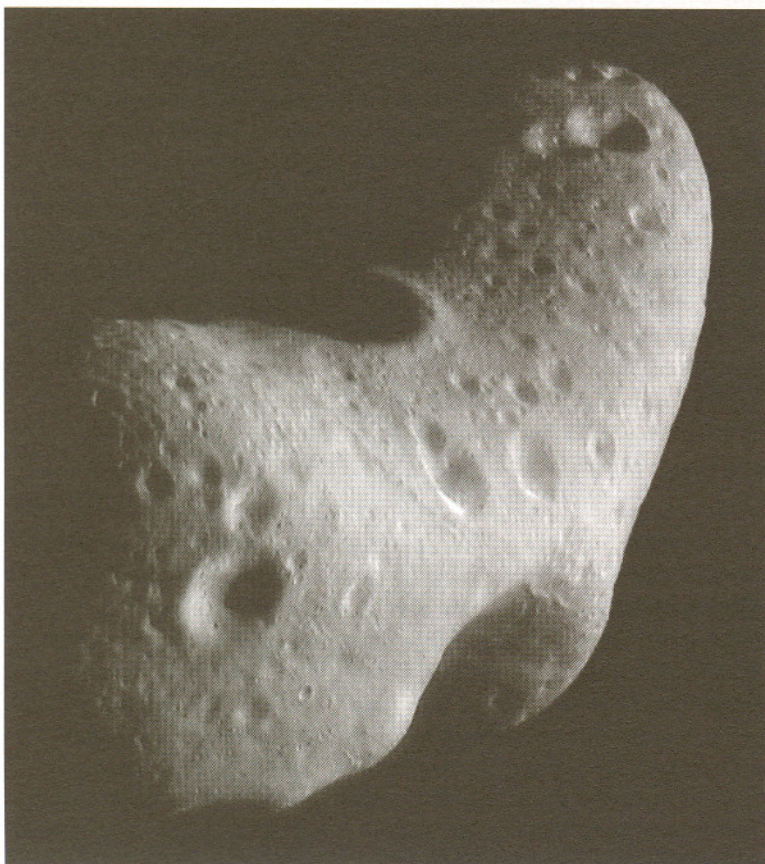
obserwować oraz reinterpretować obserwacje wykonane podczas jego bliskiego przelotu koło Ziemi w 1975 roku. Warto tu wspomnieć o ciekawych wnioskach co do ewolucji jego orbity w przyszłości. Trudno nie zwrócić uwagi na fakt, że z obliczeń wydaje się wynikać możliwość takiej zmiany orbity Erosa, że w czasie rzędu miliona lat może ona przeciąć się z orbitą Ziemi (o ile obliczenia na tak wielki odstęp czasu mogą być wiarygodne). To zaś prowadzi do pojawienia się niebezpieczeństwa zderzenia Erosa z Ziemią, ale – podkreślmy – w perspektywie kilkudziesięciu, a może nawet kilkuset milionów lat.

Start sondy kosmicznej NEAR odbył się 17 lutego 1996 roku z Przylądka Canaveral na Florydzie. Trzyletnią podróż do Erosa sonda rozpoczęła po eliptycznej orbicie, której odległości peryhelium i aphelium wynosiły odpowiednio 0,99 i 2,2 j.a. NEAR jest stosunkowo niewielkim obiektem zbudowanym na bazie amerykańskich satelitów wojskowych. Jego masa startowa wynosiła 805 kg, z czego na paliwo przypadało aż 325 kg. Wyposażony jest w silnik główny o sile ciągu 450 N, cztery pomocnicze mające ciągi po 21 N i siedem silniczków korekcyjnych po 3,5 N. Energii



#### Rozwiązanie zadania M 958.

Podzielmy wierzchołki 12-kąta na 6 par przeciwległych wierzchołków  $A_1A_7$ ,  $A_2A_8$ ,  $A_3A_9$ , ...,  $A_6A_{12}$ . Przy każdej operacji znak zmienia się dokładnie przy jednym wierzchołku z każdej pary. Dlatego po nieparzystej liczbie operacji w każdej z par  $A_2A_8$ ,  $A_3A_9$ , ...,  $A_6A_{12}$  będziemy mieli różne znaki przy wierzchołkach, po parzystej zaś liczbie operacji – takie same. Stąd nie może się zdarzyć, by w parze  $A_2A_8$  znaki były różne, a w  $A_3A_9$  – takie same.

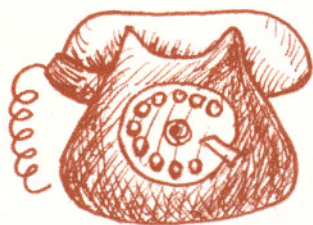






### Rozwiązanie zadania M 959.

Rozbijmy wierzchołki 12-kąta na 4 grupy po 3 wierzchołki  $A_1 A_5 A_9$ ,  $A_2 A_6 A_{10}$ ,  $A_3 A_7 A_{11}$ ,  $A_4 A_8 A_{12}$ . Zauważmy, że przy każdej operacji parzystość liczby minusów w każdej trójce zmienia się, a ponieważ w trójkach  $A_2 A_6 A_{10}$ ,  $A_3 A_7 A_{11}$  jest ona na początku taka sama, więc nie możemy otrzymać sytuacji żądanej w zadaniu, w której parzystości liczb minusów w owych trójkach są różne.



### Rozwiązanie zadania M 960.

Zauważmy, że dowolne dwie operacje opisanego w treści typu „komutują”, tzn. wynik jest ten sam, jeśli zmieniamy kolejność ich wykonywania. Wykonanie dowolnej operacji dwa razy nic nie zmienia, więc można zakładać, że każdą operację wykonujemy co najwyżej raz. Wreszcie możemy rozpatrywać tylko operacje dla  $k = 3, 5$ , ponieważ operację dla  $k = 15$  można otrzymać przez złożenie odpowiedniej liczby operacji dla  $k = 3$  lub  $k = 5$ . Istnieje 5 operacji dla  $k = 3$  i 3 operacje dla  $k = 5$ . Mamy więc 8 operacji (kolejność ich wykonywania nie ma znaczenia) i wykonując każdą co najwyżej raz, otrzymamy wszystkie osiągalne rozstawienia. Wynika stąd, że wychodząc ze zbioru samych plusów otrzymamy co najwyżej  $2^8$  różnych rozstawień. Wszystkich możliwych rozstawień jest  $2^{15}$ , więc teza zadania jest prawdziwa.

dostarczają sondzie cztery panele baterii słonecznych, każdy o rozmiarach  $1,8 \times 1,2$  m, dające moc 1800 W w odległości 1 j.a. od Słońca i 400 W, gdy odległość ta wzrośnie do maksymalnej podczas misji wartości 2,2 j.a. Łączność z Ziemią odbywa się za pomocą anteny o średnicy 1,5 m.

Instrumentarium naukowe sondy składa się z pięciu podstawowych przyrządów: kamery wielospektralnej, dwóch spektrometrów (bliskiej podczerwieni oraz promieniowania rentgenowskiego i gamma), dalmierza laserowego i magnetometru. System telemetryczny sondy jest wykorzystany również do badań pola grawitacyjnego Erosa (pomiar przesunięć dopplerowskich sygnałów radiowych może wykryć zmiany prędkości sondy rzędu 0,1 mm/s wywołane niejednorodnościami oddziaływań grawitacyjnych planetoidy).

W rok po starcie z Ziemi, 18 lutego 1997 roku, NEAR pobił rekord odległości od Słońca, w jakiej znalazł się obiekt zasilany energią słoneczną. W odległości 327 mln km (około 2,2 j.a.) od Słońca nigdy dotąd nie pracowała sonda nie mająca ogniw jądrowych na pokładzie. 27 czerwca 1997 roku NEAR przeleciał w pobliżu planetoidy (253) Matylda, stosunkowo dużego (o rozmiarach  $66 \times 48 \times 44$  km) obiektu pasa głównego małych planet. Zbliżenie sondy na odległość 1212 km umożliwiło wyznaczenie masy planetoidy i w konsekwencji jej gęstości, która okazała się niewiele większa od gęstości wody ( $1,3 \pm 0,2$  g/cm<sup>3</sup>). Jest to o tyle zaskakujące, że typowe gęstości planetoid są na ogół dwukrotnie większe.

Kilka dni po przelocie NEARa koło Matyldy, 3 lipca 1997 roku po raz pierwszy został uruchomiony główny silnik sondy w celu takiej zmiany jej orbity, aby mogło dojść do bliskiego przelotu koło Ziemi, której wspomaganie grawitacyjne skierowałyby sondę do Erosa. Manewr w pełni się udał i 23 stycznia 1998 roku sonda ponownie znalazła się w pobliżu Ziemi. Przeleciała w minimalnej odległości 540 km od powierzchni (nad południowo-zachodnim Iranem). W rezultacie oddziaływania grawitacyjnego Ziemi płaszczyzna orbity NEARa zwiększyła nachylenie względem płaszczyzny ekliptyki z  $0^{\circ}5$  do  $10^{\circ}2$ , a odległość aphelium zmniejszyła się z 2,17 do 1,77 j.a. Zmiany te umożliwiły osiągnięcie Erosa.

Pod koniec 1998 roku nastąpiły wydarzenia dramatyczne. Po rozpoczęciu manewrów, mających spowodować wejście sondy na orbitę wokół Erosa, sonda nagle zamilkła na ponad dobę. Po odzyskaniu z nią łączności okazało się, że wszystkie jej urządzenia działają sprawnie, ale utracono już szanse uczynienia jej sztucznym satelitą Erosa w planowanym terminie 10 stycznia 1999 roku. Tak więc 23 grudnia 1998 roku NEAR minął Erosa ze względną prędkością 932 m/s w minimalnej odległości 3827 km. Z przekazanych na Ziemię obrazów wywnioskowano, że planetoida ma rozmiary  $33 \times 13 \times 13$  km. To niepowodzenie pierwszego „podejścia” do Erosa nie przekreśliło jednak możliwości zrealizowania celu misji w przyszłości. Okazało się bowiem, że drugą próbę wprowadzenia NEARa na orbitę wokół planetoidy będzie można podjąć na początku 2000 roku, co też stało się 14 lutego. Gdy NEAR zbliżył się do Erosa na odległość 327 km, uruchomienie silnika na 57 s zmniejszyło ich wzajemną prędkość do zaledwie 1 m/s, co spowodowało przejście przez Erosa kontroli nad ruchem sondy, która stała się w ten sposób jego księżycem. Eros został więc siódmym ciałem niebieskim (po Ziemi, Księżycu, Słońcu, Marsie, Wenus i Jowiszu), wokół którego krąży zbudowane przez człowieka urządzenie. Dzień 14 lutego 2000 roku (nota bene uroczystość św. Walentego, czyli od niedawna popularne także i w Polsce „walentynki”) zapisał się w historii astronomii niezwykle wyjątkowym wydarzeniem, za jakie trudno nie uznać utworzenia pierwszego sztucznego satelity planetoidy; wystrzelony z Ziemi obiekt pozostał już na zawsze w uścisku kosmicznego Erosa.

Orbita NEARa wokół Erosa była wielokrotnie zmieniana, co wynikało przede wszystkim z konieczności pogodzenia zadań naukowych misji z możliwościami technicznymi sondy. Najdłużej NEAR pracował na prawie kołowych orbitach o promieniach około 200, 100 i 50 km, ale doprowadzono też do jego przelotu w odległości zaledwie 5,3 km od powierzchni (na wykonanych wtedy zdjęciach





można zobaczyć szczegóły o rozmiarach trochę mniejszych niż półtora metra). Analiza ruchu sondy umożliwiła wyznaczenie masy planetoidy na  $(6,687 \pm 0,003) \cdot 10^{15}$  kg. Siła ciężenia na powierzchni jest zatem tak mała, że astronauta ważący na Ziemi np. 70 kg, na Erosie ważyłby nie więcej niż 38 g, a prędkość ucieczki z planetoidy zawiera się w granicach od 3,1 do 17,2 m/s. Eros rotuje wokół osi nachylonej pod bardzo małym kątem do płaszczyzny własnej orbity, a okres obrotu jest równy 5,27 h. Pomiar wykonany dalmierzem laserowym pozwolił określić kształt planetoidy, a tym samym jej objętość. W rezultacie gęstość materii Erosa, wynoszącą  $2,67 \pm 0,03$  g/cm<sup>3</sup>, udało się wyznaczyć ze stosunkowo dużą dokładnością.

Ukształtowanie powierzchni Erosa charakteryzuje się ogromną różnorodnością struktur powstałych zapewne w wyniku silnych uderzeń i spowodowanych nimi wstrząsów, pęknięć czy osuwisk. Najbardziej typowymi są, oczywiście, kratery, z których największy ma średnicę 5,5 km. Wśród nierówności terenu pojawiają się prostoliniowe łańcuszki kolistych zagłębień, wielokształtne zapadliska z płaskimi dnami, równoległe ciągnące się wyżłobienia i rowy, strome uskoki, pasma pagórków itp. Obserwowane utwory nie mogłyby powstać, gdyby nie zdolność materii powierzchniowej do ulegania trwałym odkształceniom, a więc świadczy to przede wszystkim o tym, że Eros jest litą bryłą, a nie konglomeratem drobniejszych fragmentów tworzących jeden obiekt dzięki siłom ich wzajemnego przyciągania grawitacyjnego. Zdziwienie budzą ogromne głązy rozrzucone po całej powierzchni Erosa. Ich rozkład nie wydaje się jednolity, ale nie dopatrzonego się w nim żadnych korelacji z dużymi kraterami ani z innymi utworami rzeźby terenu. Mają najrozmaitsze kształty: od wyraźnie zaokrąglonych jak ziemskie otoczaki brył, po nieforemne bloki z ostrymi krawędziami. Ich pochodzenie trudno zrozumieć. Gdyby założyć, że zostały wybite z powierzchni podczas uderzeń meteoroidów, to pojawia się pytanie, dlaczego nie odleciały w przestrzeń kosmiczną, skoro prędkość ucieczki jest tak mała. A może odlatywały, ale krążąc wokół Słońca po orbitach niemal identycznych z orbitą Erosa po jakimś czasie znów trafiały na jego powierzchnię i dlatego dziś nie obserwujemy w ich rozkładzie żadnego związku z kraterami uderzeniowymi?



#### Rozwiązanie zadania F 551.

Ciało znajdujące się na powierzchni Ziemi jest przyciągane do jej środka siłą

$$Q = G \frac{mM}{R^2},$$

gdzie  $M$  to masa Ziemi,  $m$  – masa danego ciała, a  $R$  – promień Ziemi. Ale ciężar ciała jest równy

$$Q = mg.$$

Stąd

$$G = \frac{gR^2}{M}.$$

Masa Ziemi jest równa  $M = (4/3)\pi R^3 \rho$  i ostatecznie

$$G = \frac{3g}{4\pi R\rho} \approx 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{kg} \cdot \text{s}.$$



#### Rozwiązanie zadania F 552.

Pod działaniem siły przyciągania Słońca

$$G \frac{M_Z M_S}{r^2}$$

Ziemia porusza się z przyspieszeniem dośrodkowym

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Zgodnie z drugim prawem dynamiki mamy

$$M_Z \frac{4\pi^2 r}{T^2} = G \frac{M_Z M_S}{r^2},$$

stąd

$$M_S = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}.$$

Jednym z najważniejszych wyników badania składu chemicznego powierzchni Erosa jest stwierdzenie jego podobieństwa do składu meteoroidów zwanych chondrytami. Te bryłki materii kosmicznej znajdowane na Ziemi są pozostałościami pierwotnego tworzywa, z którego uformowały się planety grupy ziemskiej. Skład pierwiastkowy tworzących je minerałów jest niemal identyczny ze składem atmosfery Słońca, jeśli pominąć, oczywiście, pierwiastki lotne, czyli przede wszystkim wodór i hel. Gdyby na powierzchni dominowała materia złożona z pierwiastków lekkich, to można by podejrzewać, że w wyniku jakiegoś naturalnego procesu segregacji materia składająca się z pierwiastków cięższych skupiła się w centrum bryły planetoidy. Z pomiarów pola grawitacyjnego Erosa wynikało jednak, że jest on obiektem jednorodnym pod względem gęstości. Ewentualna przewaga pierwiastków lżejszych lub cięższych mogłaby też świadczyć o pochodzeniu Erosa odpowiednio z warstw powierzchniowych lub z wnętrza jakiegoś większego, rozwarstwowanego obiektu, który uległ rozpadowi. Podobieństwo powierzchni Erosa do chondrytów wyklucza jednak te możliwości i prowadzi do wniosku, że planetoida ta jest prawdopodobnie najbardziej pierwotnym ciałem, które od czasu początkowej kondensacji przed ponad 4 miliardami lat pozostaje niezmienione, oprócz, oczywiście, powierzchni bombardowanej przez meteoroidy.

Zakończenie misji NEAR-Shoemaker planowane jest w lutym 2001 roku zrzuceniem sondy na powierzchnię planetoidy. Właściwie będzie to raczej łagodne położenie sondy na powierzchni. Prowadzące do tego manewry rozpoczną się już w połowie grudnia 2000 roku. Podczas opadania sonda będzie cały czas intensywnie badać powierzchnię Erosa aż do utraty łączności, co najprawdopodobniej nastąpi w momencie zetknięcia się z powierzchnią.

(Artykuł napisany został w listopadzie 2000 roku – red.)



## Pożoga sposobem na inflację?

Według monetarystów źródłem inflacji jest nadmierna emisja pieniądza przez banki centralne, niemająca pokrycia we wzroście podaży dóbr i usług. Choć nie wszyscy zgadzają się z tym poglądem, to mało kto podaje w wątpliwość negatywny wpływ inflacji przekraczającej kilka procent rocznie. Wydawałoby się więc, że nikomu nie powinno zależeć na hiperinflacji, przez którą, ile byś nie miał wczoraj, to nic nie będziesz miał jutro.

A jednak od ponad 20 lat właśnie (hiper)inflacja pozostaje w centrum zainteresowania... kosmologów. Wydaje się najlepszym wytłumaczeniem obserwowanej (i) płaskości (euklidesowości) Wszechświata, (ii) jego jednorodności, (iii) wielkoskalowej struktury i (iv) braku obserwacji defektów topologicznych (np. monopoli). Inflacja ta miałaby dotyczyć samej przestrzeni we wczesnej fazie ewolucji Wszechświata. Dzięki nadświetlnej ekspansji (która nie jest sprzeczna z teorią względności, bo odległości rosną na skutek „przybywania przestrzeni”, a nie ruchu w przestrzeni) Wszechświat stałby się „płaski” i jednorodny, stężenie monopoli spadłoby praktycznie do zera, a kwantowe fluktuacje pozwoliłyby na zapoczątkowanie wielkoskalowej struktury.

Niestety, inflacja nie jest pozbawiona wad. Pomimo lat prób nie udaje się jej w zadowalający sposób powiązać z teoriami kandydującymi do wytłumaczenia najwcześniejszej fazy ewolucji Wszechświata, w której najprawdopodobniej ujawniała się kwantowa natura samej przestrzeni (kwantowa grawitacja).

Nie my pierwsi próbujemy zrozumieć (wymyślić), jak powstał Wszechświat. W myśl zasady „wszystko już było”, pierwowzoru dowolnej teorii kosmologicznej można doszukać się w filozofii starożytnej.

Według stoików, którzy rozpoczęli działalność w Atenach w III wieku przed Chrystusem, a podjęli filozofię przyrody filozofów jońskich (głównie Heraklita z Efezu), Wszechświat był jednorodny, przepelniony ognistym, materialnym tchnieniem (pneuma,  $\piνεϋμα$ ), które zastąpiło niematerialną formę Arystotelesa, podlegającym wewnętrznemu napięciu (tonos,  $τόνος$ ). Według nich Wszechświat cyklicznie kończy się i zaczyna w pożodze (ekpyrosis,  $ἐκπύρωσις$ ), w której z pneuma, żywej, ognistej materii powstają pozostałe trzy żywioły.

Przenikająca wszystko „napięta” materia? Przecież to nic innego jak (jednowymiarowe) struny i brany (obiekty wielowymiarowe ze współczesnych teorii strun). Czy w takich teoriach jest miejsce na początkującą Wszystko kosmiczną pożogę? Okazuje się, że tak. Właśnie taki, zastępujący (standardową) inflację model został zaprezentowany pod koniec marca tego roku [1]. Zamiast nadświetlnej ekspansji autorzy odwołują się do „zjawisk fizycznych pojawiających się w sposób naturalny w teoriach opartych na dodatkowych wymiarach i branach”. Niestety, naturalność ta jest raczej hermetyczna dla zwykłego śmiertelnika.

Popularny obrazek jest jednak na tyle sugestywny, że pojawił się nawet w prasie codziennej. Operacyjny model

został zbudowany w ramach tzw. heterotycznej M-teorii (nie będziemy bliżej tłumaczyć, co to jest, przyjmijmy to jako nazwę własną obiecującej teorii wielowymiarowej, która w niskoenergetycznej granicy zawiera model standardowy oddziaływań fundamentalnych).

Płaski Wszechświat spoczywa na czterech słoniach, które stoją na wielorybie, który... nie, zaraz, to nie ta bajka. W tej Wszechświat jest pięciowymiarową czasoprzestrzenią ograniczoną dwiema (3 + 1)-wymiarowymi hiperpowierzchniami (3-branami) oddzielenymi objętością (ang: *bulk volume*), w której rozprzestrzeniać się mogą jedynie oddziaływania grawitacyjne. Jedna z 3-bran odpowiada widzialnej 4-wymiarowej czasoprzestrzeni, a druga jest tzw. ukrytą braną. Wbrew pozorom jest to rzeczywiście dość standardowa i prosta konstrukcja. Piąty wymiar zwijamy w okrąg i „składamy na pół”, tak że powstają dwa wyróżnione (nieutożsamione) punkty, w których umieszczamy widzialny i ukryty świat. Obecność ukrytego świata jest w tego typu teoriach naturalna i pożądana.

W ekpyrotycznym scenariuszu Wszechświat jest początkowo zimny, płaski i pusty. Jedynie piąty wymiar jest „wygięty” (ang: *warped*). Jego krzywizna jest mała przy ukrytej branie i duża przy widzialnej. Spontanicznie trzecia, „cienka” brana odrywa się od ukrytej brany i wolno podąża przez piąty wymiar w stronę naszej, widzialnej brany. Gdy do niej dociera, rozpala w niej gorący Wielki Wybuch.

Scenariusz ten tłumaczy (i) euklidesowość – warunkami początkowymi niezbędnymi do odtworzenia modelu standardowego, (ii) jednorodność – długim czasem wędrowki trzeciej brany, wystarczającym do zaistnienia przyczynowego kontaktu między odległymi punktami, (iii) wielkoskalową strukturę – fluktuacjami trzeciej brany, (iv) brak defektów topologicznych – stosunkowo niską temperaturą „zapłonu” Wielkiego Wybuchu, która miałaby być niewystarczająca do wytworzenia obiektów o masie porównywalnej z masą Plancka.

Tak przedstawiony model raczej nie budzi zaufania, ale w pracy [1] zawarte są twarde rachunki pokazujące jego działanie. Możliwość stworzenia sensownej całości wcale nie była oczywista. Wskazuje na zaskakującą przydatność heterotycznej M-teorii. Dodatkowo model ten ma bezcenną zaletę. Już w niedługiej przyszłości może zostać obalony. Wprawdzie pozostawione przez niego ślady w kosmicznym promieniowaniu tła (CBR) powinny być takie same jak w teoriach inflacyjnych, to przewiduje on twardsze spektrum fal grawitacyjnych. Mogą one zostać wykryte podczas przygotowanych pomiarów polaryzacji CBR. Dokładniej: wykryte mogą być bardziej miękkie (czerwieńsze) fale wywołane przez inflację. Ich ewentualna detekcja wykluczyłaby tę antyinflacyjną pożogę.

Piotr ZALEWSKI

[1] J. Khoury, B.A. Ovrut, P.J. Steinhardt, N. Turok, *The Ekpyrotic Universe: Colliding Branes and the Origin of the Hot Big Bang*, hep-th/0103239.



## Akrobatyka na Erosie

W epoce coraz większej rywalizacji mediów, oglądanie co roku tych samych zawodów sportowych może być nużące. Pojawia się zresztą wiele nowych, coraz dziwniejszych konkurencji, wszystko po to, aby przyciągnąć widza. Uatrakcyjniane są też tradycyjne rozgrywki, ale tutaj możliwości zmiany są niewielkie. Zawodnicy są ograniczeni prawami fizyki, a przede wszystkim siłą ciężenia – wszystko dzieje się na Ziemi. Już w niedalekiej przyszłości będzie jednak możliwe przeniesienie wielu zawodów sportowych poza nasz glob, np. na Księżyc albo inne ciała niebieskie o stałej – tzn. nie płynnej – powierzchni i niezbyt dużej sile ciężenia.

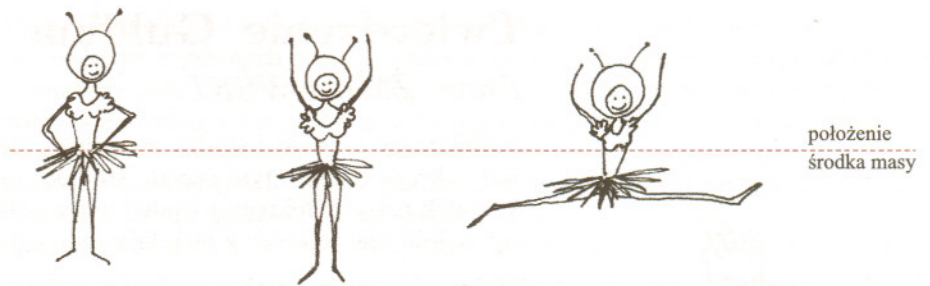
Pod względem możliwości reklamowych i marketingowych (między innymi ze względu na samą nazwę) świetnie się do tego może nadawać planetoida Eros (opisana na poprzednich stronach). Małe ciężenie, urozmaicona powierzchnia to dobry teren do przeprowadzenia zawodów np. w gimnastyce (sportowej albo artystycznej). Zawodnicy pole do popisu mogą mieć spore – począwszy od dużo łatwiejszych i dłuższych skoków (ileż więcej salt można wykonać w tym czasie!) po możliwość wzbicia się na orbitę okołerosową (przy bardzo małej pierwszej prędkości kosmicznej, rzędu kilku metrów na sekundę).

Na powierzchni jak to na powierzchni – w zasadzie wiemy, co jest możliwe, a co nie. Ciekawy jest ewentualny dodatkowy element choreograficzny – swobodny lot po orbicie. Ograniczony zakres ruchów gimnastyka/gimnastyczki jest niwelowany atrakcyjnością tego popisu jako pewnego rodzaju nowości. A co dopiero dodatkowa dawka emocji związana z możliwością odbicia się przez zawodnika od powierzchni planetoidy z prędkością ucieczki (także w zakresie ich możliwości) i poszybowania w otwarty Kosmos!

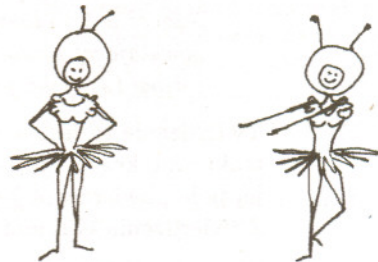
W czasie swobodnego lotu po orbicie okołerosowej zawodniczka (skupmy się na paniach, chociaż nie wiem dokładnie dlaczego) nie ma punktu podparcia. Jej środek masy porusza się po ściśle określonym (przez wartość i kierunek prędkości początkowej oraz miejsce odbicia) torze, nie można zmieniać jego położenia bez użycia siły zewnętrznej. Zawodniczka może co najwyżej „tańczyć” wokół własnego środka masy. Czyli w zasadzie wyciągać ręce oraz nogi, albo zginać się – posługując się cały czas tylko siłą własnych mięśni. Oczywiście wszelkie dodatkowe silniczki, sprytnie poukrywane, powinny być surowo zabronione i traktowane jako niedozwolone środki dopingujące. Czy to nie za mało na atrakcyjne widowisko? Popatrzmy na rysunki:







Gdy zawodniczka unosi ręce, całe jej ciało przemieszcza się w dół, tak aby środek masy pozostał w tym samym miejscu. Podobnie po ugięciu nóg czy bardziej efektownym szpagacie. Małe „oscylacje” są więc możliwe do zrealizowania w takich warunkach. A jak jest z obrotami? Czy można wykonać piruet w warunkach nieważkości (poza oczywiście takim przypadkiem, gdy zawodniczka odbijając się nabiera pewnej prędkości obrotowej)? Raczej nie (o tym jeszcze za chwilę), ale choreografię można wzbogacić o parę skrętów typu



Jeśli gimnastyczka odchyła ręce w prawo, reszta tułowia obraca się w lewo tak, że całkowity moment pędu zawodniczki jest zachowany (pewne odchylenie od „pionu” spowodowane jest tym, że ręce są położone dużo wyżej niż środek masy ciała, i stąd dodatkowy moment siły). Oczywiście nie wygląda to tak efektownie jak piruet. Można jednak wykorzystując podobny mechanizm wykonywać salta! Zawodniczka machając rękami w jednym kierunku może spowodować obrót całego ciała w kierunku przeciwnym (rysunek obok)



Dodatkowe zginanie/wyprostowywanie nóg przyspiesza lub zwalnia szybkość ruchu. Gimnastyczki artystyczne mają do dyspozycji jeszcze dodatkowe rekwizyty: piłkę, wstęgę, obręcz lub hantle. Piłka czy hantle są raczej mało przydatne – raz wyrzucone nie powrócą już do zawodniczki. Ale mogą być elementem efektownego zakończenia występu – wyrzucone „w górę” pozwolą opaść z orbity na powierzchnię. Z kolei hantle w obu rękach, ze względu na ich dodatkową sporą masę, wzmacniają efekt podskoków i obrotów już opisanych.



Wstęga i obręcz to już zupełnie nowe możliwości. Wprawiając szarfę w ruch obrotowy dookoła siebie – tzn. przekładając jej początek z ręki prawej do lewej i potem, za plecami, z lewej do prawej – tancerka zacznie wirować w przeciwnym kierunku. Niestety bardzo wolno, bo gęstość materiałów zazwyczaj używanych na wstęgi nie jest duża. Ale może zmodyfikowane przepisy pozwolą na używanie np. blachy stalowej? Podobnie, mając do dyspozycji obręcz, zawodniczka może obracać ją dookoła siebie i wirować w środku.

Jest jeszcze wiele innych możliwości urozmaicenia choreografii, np. konkurencja zespołowa – co już pozostawiam wyobraźni Czytelnika.

*Małą Deltę przygotowała Ewa CZUCHRY*



# Twierdzenie Guldina

Piotr ŻMIJEWSKI

Środek masy trójkąta i środek masy jego wierzchołków pokrywają się. Środki masy okręgu i koła o tym samym środku i promieniu również są identyczne. A środek masy półokręgu i środek masy półkole nim ograniczonego? Pokrywają się? A jeśli nie, to który z nich leży dalej od środka okręgu?



Zanim odpowiemy na to pytanie, zauważmy, że na ogół wyznaczanie położenia środka masy różnych brył wymaga stosowania rachunku całkowego. Istnieją jednak pewne triki, które pozwalają czasem tego uniknąć. Jeden z takich trików oparty jest na następującym twierdzeniu Guldina:

*Jeśli obracamy płaską, jednorodną i spójną (w jednym kawałku) figurę  $F$  względem osi leżącej w tej płaszczyźnie i nie przecinającej wnętrza  $F$ , to objętość powstającej bryły jest iloczynem pola figury  $F$  i drogi, jaką przebył jej środek masy.*

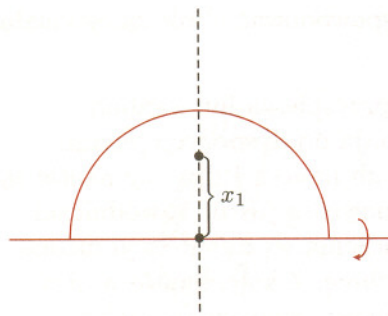
Jak łatwo zauważyć w przypadku przesuwania krzywej otrzymamy twierdzenie:

*Jeśli obracamy płaską, jednorodną i spójną krzywą względem osi leżącej w tej płaszczyźnie i nie przecinającej tej krzywej, to pole ( $S$ ) powstającej powierzchni jest iloczynem długości ( $L$ ) tej krzywej i drogi ( $s$ ), jaką przebył jej środek masy.*

Twierdzenie to jest w istocie konsekwencją twierdzenia Guldina, gdyż można traktować krzywą jako bardzo wąską (o szerokości  $dx$ ) figurę płaską. Wtedy jej pole powierzchni jest  $L \cdot dx$ , a objętość powstającej bryły wynosi  $S \cdot dx$ . Z twierdzenia Guldina mamy:  $Sdx = Ldx \cdot s$ , co daje  $S = Ls$ .

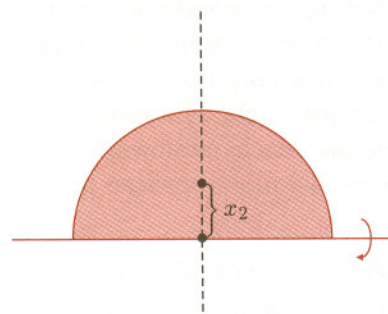
Twierdzenie Guldina służy zazwyczaj do wyznaczania objętości i pól powierzchni brył, można jednak skorzystać z niego przy wyznaczaniu środka masy.

Pewna rzecz wymaga tutaj wyjaśnienia. Stosowanie pojęcia środka masy dla figur trójwymiarowych jest zupełnie jasne, ale mówienie o środku masy figur jednowymiarowych lub dwuwymiarowych może wzbudzać wątpliwości. Przecież nie mają one objętości, a więc nie powinny mieć również masy! Z fizycznego punktu widzenia, gdy mówimy np. środek masy koła o promieniu  $r$ , mamy wtedy na myśli punkt, do którego dąży środek masy jednorodnego walca o promieniu  $r$  i wysokości  $H$ , gdy  $H$  dąży do 0. Przykładowo środki masy okręgu lub koła wygodnie sobie wyobrazić jako środki masy jednorodnego, cienkiego (o stałym przekroju) drutu wygiętego w ten sposób, że przypomina okrąg lub kawałka jednorodnej, cienkiej (o stałej grubości) blachy w kształcie koła.



Rys. 1

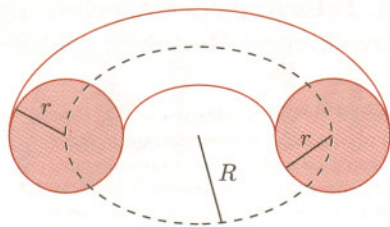
Wróćmy teraz do naszego początkowego problemu i spróbujmy znaleźć położenie środka masy jednorodnego półokręgu o promieniu  $r$ . Wiadomo z symetrii, że środek masy leży na prostej przechodzącej przez środek półokręgu i prostopadłej do średnicy półokręgu (ta prosta jest jedyną osią symetrii rozważanej figury). Wystarczy więc znaleźć odległość  $x_1$  środka masy od środka średnicy półokręgu (rys. 1). Jeśli półokrąg obrócimy wokół średnicy tak, aby powstała sfera, to środek masy poruszać się będzie w czasie tego obrotu po okręgu o promieniu  $x_1$ , przebędzie więc drogę  $2\pi x_1$ . Zgodnie ze sformułowanym wcześniej twierdzeniem, iloczyn tej drogi i długości półkole jest równy polu powierzchni powstającej sfery, tzn.  $2\pi x_1 \cdot \pi r = 4\pi r^2$ , stąd dostajemy  $x_1 = \frac{2}{\pi}r$ .



Rys. 2

Rozważmy teraz jednorodne półkole o promieniu  $r$ . Środek masy tej figury leży na jej osi symetrii, tzn. na prostej prostopadłej do średnicy półkole i przechodzącej przez środek tej średnicy (rys. 2). Gdy obracamy to półkole wokół średnicy, powstaje kula o objętości  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , a środek masy przebywa drogę  $2\pi x_2$ . Pole półkole wynosi  $\pi \frac{r^2}{2}$ , więc zgodnie z twierdzeniem Pappusa mamy  $\frac{2\pi x_2 \pi r^2}{2} = \frac{4}{3}\pi r^3$  stąd  $x_2 = \frac{4}{3\pi}r$ . Warto zauważyć, że  $x_1 > x_2$ .





Rys. 3

Na koniec podajmy jeszcze jeden przykład pokazujący, że twierdzenie Guldina może służyć w pewnych przypadkach do wyznaczania objętości brył. Rozważmy jednorodny koło o promieniu  $r$ . Jego środek masy leży, oczywiście, w środku koła. Wyobraźmy sobie teraz, że koło porusza się w przestrzeni w ten sposób, że jego środek zatacza okrąg (prostopadły do koła w punkcie przecięcia z kołem w każdej chwili ruchu) o promieniu  $R$ . Powstaje w ten sposób dętka rowerowa, czyli torus (rys. 3). Objętość  $V$  tego torusa zgodnie z twierdzeniem Guldina jest iloczynem pola powierzchni przemieszczanego koła i drogi, jaką przebył jego środek masy, zatem:  $V = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2$ . Udało się więc wyprowadzić wzór na objętość torusa w prosty sposób, bez skomplikowanego całkowania. Rozważając analogiczne przesuwanie okręgu, możemy łatwo otrzymać następujący wzór na pole powierzchni torusa  $S = 4\pi^2 Rr$ .

<http://www.gimps.w.pl> Liczba pierwsza Mersenne'a to liczba pierwsza postaci  $2^n - 1$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$ .

GIMPS czyli Wielkie Internetowe Poszukiwanie Liczb Pierwszych Mersenne'a ma na koncie wiele rekordów Guinnessa – już czterokrotnie w ramach tego matematycznego programu badawczego odkrywano największe znane podówczas liczby pierwsze. Obecna rekordzistka ma ponad dwa miliony cyfr! Co zrobić, aby zostać odkrywcą kolejnej ogromnej liczby pierwszej? Wystarczy odwiedzić stronę <http://www.gimps.w.pl>, z której można ściągnąć za darmo najnowsze oprogramowanie do poszukiwania tych kolosów.

Jak go używać, dowiemy się z prosto napisanego przewodnika. Wystarczy jedynie trochę szczęścia i można zostać kolejnym wielkim odkrywcą! Każdy zainteresowany matematyką zapewne chętnie zapozna się z rezultatami badań liczb pierwszych lub ściągnie rozwinięcia dziesiętne 38 liczb pierwszych Mersenne'a. Wśród atrakcji jest także możliwość subskrypcji biuletynu z najświeższymi informacjami o liczbach pierwszych i GIMPS. Autor strony zaprasza!

Krzysztof WILKOSZ

<http://www.gimps.w.pl> Liczba pierwsza Mersenne'a to liczba pierwsza postaci  $2^n - 1$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$ .



## Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

**M 958.** W wierzchołku  $A_1$  dwunastokąta foremnego  $A_1 A_2 \dots A_{12}$  stoi znak minus, a w pozostałych plusey. Możemy dokonywać operacji, polegających na zmianie znaków stojących przy dowolnych sześciu kolejnych wierzchołkach dwunastokąta. Wykazać, że za pomocą takich operacji nie da się dojść do sytuacji, w której przy  $A_2$  stoi minus, a przy pozostałych wierzchołkach – plusey. Rozwiązanie na str. 6

**M 959.** W wierzchołku  $A_1$  dwunastokąta foremnego  $A_1 A_2 \dots A_{12}$  stoi znak minus, a w pozostałych plusey. Możemy dokonywać operacji, polegających na zmianie znaków stojących przy dowolnych czterech kolejnych wierzchołkach dwunastokąta. Wykazać, że za pomocą takich operacji nie da się dojść do sytuacji, w której przy  $A_2$  stoi minus, a przy pozostałych wierzchołkach – plusey. Rozwiązanie na str. 7

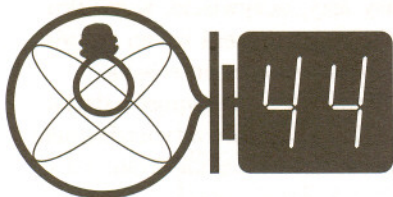
**M 960.** W wierzchołkach piętnastokąta foremnego o środku  $O$  rozstawiono plusey i minusey. Możemy dokonywać operacji, polegających na zmianie znaków wszystkich znaków stojących przy wierzchołkach pewnego  $k$ -kąta foremnego o środku  $O$  ( $k \in \{3, 5, 15\}$ ). Udowodnić, że istnieje takie rozstawienie znaków, że nie da się go za pomocą powyżej opisanych operacji otrzymać wychodząc ze zbioru samych plusów. Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 551.** Obliczyć stałą grawitacji przyjmując, że promień Ziemi jest równy  $R = 6370$  km, przyspieszenie ziemskie  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>, a średnia gęstość Ziemi wynosi  $\rho = 5,5 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>. Rozwiązanie na str. 8

**F 552.** Wyznaczyć masę Słońca, gdy znany jest okres obiegu Ziemi dookoła Słońca  $T$  i promień orbity ziemskiej  $r$ . Rozwiązanie na str. 8



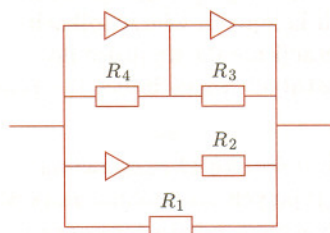
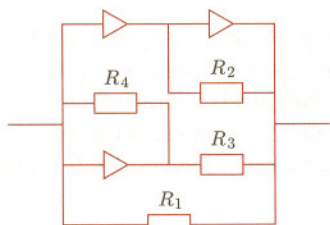
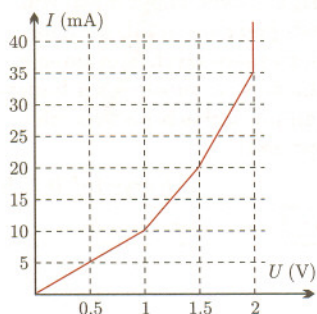


Czołówka ligi zadaniowej

### Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 312 ( $WT=2,13$ ) i 313 ( $WT=4,00$ )  
z numeru 2/2001

Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	38,32
Aleksander Surma	- Myszków	37,60
Tomasz Rudny	- Warszawa	28,28
Tomasz Wietecha	- Tarnów	22,29
Jacek Piotrowski	- Rzeszów	22,19



Czołówka ligi zadaniowej

### Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 409 ( $WT=2,13$ ) i 410 ( $WT=1,19$ )  
z numeru 11/2000

Konrad Patkowski	- Gdańsk	44,75
Bartłomiej Marczak	- Warszawa	44,27
Paweł Kubit	- Kraków	42,22
Piotr Kumor	- Olsztyn	39,50
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	38,19
Janusz Olszewski	- Suwałki	36,60

Pan Konrad Patkowski po kilku miesiącach milczenia znów się włączył do gry i zakończył swoją drugą rundę. A pana Marczaka witamy w Klubie 44 M z kolejnym numerem członkowskim 94.

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2001

### Przypominamy treść zadań:

**314.** Kula naładowana powierzchniowo stałą gęstością ładunku składa się z dwóch zetkniętych półkul o tej samej masie. W wyniku wzajemnego odpychania półkule zaczęły się poruszać i oddaliły się na bardzo dużą odległość (ruch zachodzi bez oporów). W którym przypadku prędkość uzyskana przez półkulę będzie większa: gdy są przewodzące, czy gdy są nieprzewodzące?

**315.** Mamy do dyspozycji dowolne oporniki oraz dowolną liczbę idealnych diod o napięciu progowym 1 V (tzn. nie przewodzących prądu przy niższym napięciu, a przewodzących dowolnie duży prąd przy napięciu minimalnie większym). Zaprojektować jak najprostszy obwód o dwóch wyjściach, którego charakterystyka prądowo-napięciowa jest dana na przedstawionym obok wykresie.

Poza konkursem: Czy istniałoby rozwiązanie, gdyby punkt łamanej o współrzędnych (2; 35) przesunąć w górę do (2; 50)? (Autorowi nie udało się ani znaleźć tego rozwiązania, ani udowodnić, że nie istnieje.)

**314.** Na przewodzących półkulach ładunek rozkłada się tak, aby energia potencjalna (energia pola elektrostatycznego) była najniższa – dlatego energia kinetyczna półkul będzie w tym przypadku wyższa, czyli rozbiegną się z większą prędkością. A oto inny argument: podczas oddalania się od siebie półkul przewodzących część ładunku przejdzie na podstawy półkul i będą się one odpychać nieco silniej niż wtedy, gdy pozostanie on rozłożony tylko na zewnętrznej powierzchni.

**315.** Jak się wydaje, najprostszymi obwodami zgodnymi z podaną charakterystyką są dwa przedstawione obok.

Gdy  $U < 1$  V, prąd płynie tylko przez 2 gałęzie – przez  $R_1$  oraz przez  $R_3$  i  $R_4$ . Ponieważ według charakterystyki opór jest wtedy równy  $100 \Omega$ , więc pomijając jednostki, możemy napisać

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3 + R_4} = \frac{1}{100}.$$

W przedziale  $1 \text{ V} < U < 1,5 \text{ V}$  prąd zaczyna płynąć przez jedną z diod i opornik  $R_2$ , a jego natężenie jest dane wzorem

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_3 + R_4} + \frac{U - 1}{R_2},$$

czyli

$$\Delta I = \Delta U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3 + R_4} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Z wykresu odczytujemy  $\Delta U = 0,5 \text{ V}$ ,  $\Delta I = 10 \text{ mA}$ , a porównując z poprzednim równaniem znajdujemy  $R_2 = 100 \Omega$ . Aby kolejne załamanie wykresu następowało przy napięciu  $1,5 \text{ V}$ , opory  $R_3$  i  $R_4$  muszą pozostawać w stosunku 1:2 (na dolnym schemacie także odwrotny stosunek jest dopuszczalny) – wtedy w przedziale  $1,5 \text{ V} < U < 2 \text{ V}$  prąd płynie także przez diodę równoległą do opornika  $R_4$ , a natężenie prądu całkowitego wynosi

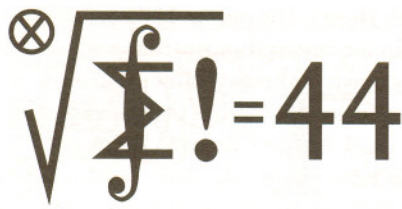
$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U - 1}{R_3} + \frac{U - 1}{R_2},$$

stąd

$$\Delta I = \Delta U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} \right).$$

W tym przedziale mamy  $\Delta U = 0,5 \text{ V}$ ,  $\Delta I = 15 \text{ mA}$ , a dalej wyznaczamy  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_3 = 66,7 \Omega$  i  $R_4 = 133,3 \Omega$ . Gdy napięcie przekracza  $2 \text{ V}$ , prąd płynie przez dwie połączone szeregowo diody bez oporu.

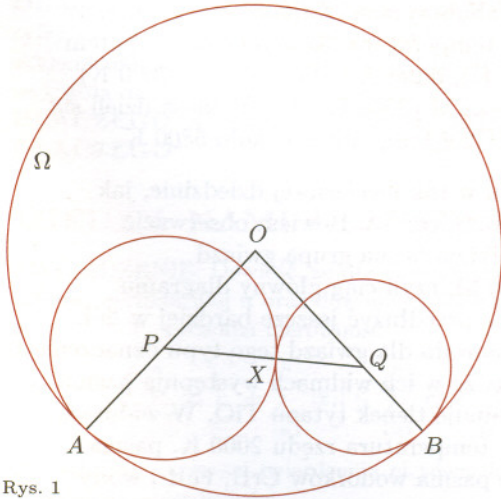




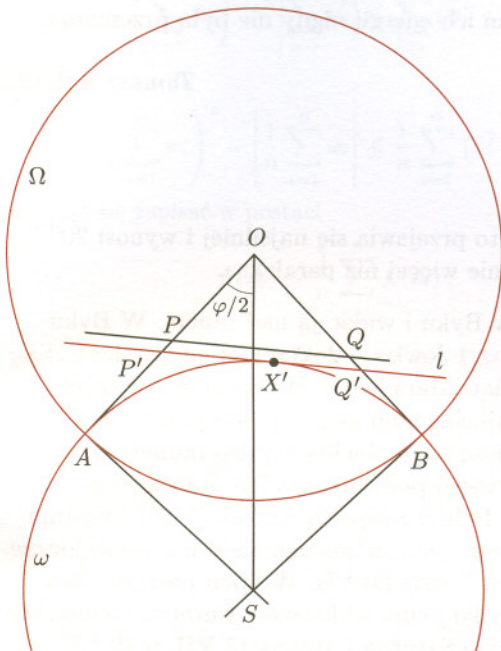
Przypominamy treść zadań:

**417.** Niech  $n$  będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Znaleźć największą możliwą wartość sumy  $\sum_{i=1}^{2n} |\pi(i) - i|$  dla permutacji  $\pi$  zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ . Ile jest permutacji wyznaczających tę maksymalną wartość?

**418.** Dany jest okrąg  $\Omega$  o środku  $O$  i promieniu  $r$  oraz dwa ustalone różne punkty  $A$  i  $B$  na tym okręgu, w odległości kątowej  $|\angle AOB| = \varphi$ . Rozważamy pary okręgów stycznych wewnętrznie do okręgu  $\Omega$  w punktach  $A$  i  $B$  oraz wzajemnie stycznych zewnętrznie. Punkty ich styczności zewnętrznej tworzą łuk krzywej. Obliczyć długość tego łuku.



Rys. 1



Rys. 2

a gdyby prosta  $PQ$  przecinała okrąg  $\omega$  w dwóch punktach, zachodziłyby nierówności przeciwne. Otrzymana w obu przypadkach sprzeczność z uzyskaną wcześniej równością  $|PQ| = |AP| + |BQ|$  dowodzi, że prosta  $PQ$  jest styczna do okręgu  $\omega$ ; tak więc  $X = X'$  jest punktem tego okręgu.

Okrąg  $\omega$  jest stały (nie zależy od wyboru pary małych okręgów). Możliwe położenia punktu  $X$  znajdują się na mniejszym łuku  $AB$  tego okręgu i wypełniają cały ten łuk;

**417.** Niech  $A = \{1, \dots, n\}$ ,  $B = \{n+1, \dots, 2n\}$ . Weźmy dowolną permutację  $\pi$  zbioru  $A \cup B$ , dla której wartość sumy  $F(\pi) = \sum_{i=1}^{2n} |\pi(i) - i|$  jest możliwie największa (permutację *optymalną*).

Wykażemy, że  $\pi$  odwzorowuje zbiór  $A$  na zbiór  $B$ , a zbiór  $B$  na zbiór  $A$ . Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieją elementy  $a \in A$ ,  $b \in B$  takie, że  $\pi(a) \in A$ ,  $\pi(b) \in B$ . Określamy permutację  $\pi'$  zbioru  $A \cup B$  wzorami

$$\pi'(a) = \pi(b), \quad \pi'(b) = \pi(a), \quad \pi'(i) = \pi(i) \quad \text{dla } i \neq a, b.$$

Obliczamy różnicę

$$F(\pi') - F(\pi) = |\pi'(a) - a| + |\pi'(b) - b| - |\pi(a) - a| - |\pi(b) - b| = \\ = \pi(b) - a + b - \pi(a) - |\pi(a) - a| - |\pi(b) - b| = \beta - \alpha,$$

gdzie

$$\beta = \pi(b) + b - |\pi(b) - b| = 2 \min\{b, \pi(b)\} \geq 2(n+1),$$

$$\alpha = \pi(a) + a + |\pi(a) - a| = 2 \max\{a, \pi(a)\} \leq 2n.$$

Dostajemy nierówność  $F(\pi') - F(\pi) = \beta - \alpha > 0$ , wbrew optymalności  $\pi$ . Zatem istotnie każda permutacja optymalna odwzorowuje  $A$  na  $B$ , a  $B$  na  $A$ .

Niech teraz  $\pi$  będzie dowolną permutacją spełniającą ten ostatni warunek. Dla każdej takiej permutacji otrzymujemy jednakową wartość  $F(\pi)$ :

$$F(\pi) = \sum_{i=1}^n (\pi(i) - i) + \sum_{i=n+1}^{2n} (i - \pi(i)) = \sum_{j=n+1}^{2n} j - \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=n+1}^{2n} i - \sum_{j=1}^n j = \\ = 2((n+1) + (n+2) + \dots + 2n) - 2(1 + 2 + \dots + n) = \\ = n(3n+1) - n(n+1) = 2n^2.$$

Jest to więc wartość maksymalna. Stąd wynika, że permutacjami optymalnymi zbioru  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  są dokładnie te, które odwzorowują zbiór  $A$  na  $B$ , a  $B$  na  $A$ . Każdą z bijekcji  $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow A$  można wybrać niezależnie od pozostałej na  $n!$  sposobów. Zatem liczba permutacji optymalnych jest równa  $(n!)^2$ .

**418.** Weźmy pod uwagę dowolną parę okręgów, o jakich mowa w zadaniu. Oznaczmy ich środki przez  $P$  i  $Q$ , a punkt ich styczności zewnętrznej przez  $X$ . Zauważmy, że  $|PQ| = |PX| + |QX| = |AP| + |BQ|$  (rys. 1).

Niech  $\omega$  będzie okręgiem wpisanym w kąt  $AOB$  (rys. 2), stycznym do jego ramion w punktach  $A$  i  $B$ . Prowadzimy prostą  $\ell \parallel PQ$ , styczną do tego okręgu w punkcie  $X'$  oraz przecinającą odcinki  $OA$  i  $OB$  odpowiednio w punktach  $P'$  i  $Q'$ . Gdyby prosta  $PQ$  była rozłączna z okręgiem  $\omega$ , mielibyśmy zależności

$$|PQ| < |P'Q'| = |P'X'| + |Q'X'| = |AP'| + |BQ'| < |AP| + |BQ|;$$

wystarczy bowiem w dowolnie wybranym jego punkcie  $X$  poprowadzić styczną do  $\omega$ , aby w punktach jej przecięcia z odcinkami  $OA$  i  $OB$  otrzymać środki małych okręgów, stycznych zewnętrznie w punkcie  $X$ .

Oznaczając środek okręgu  $\omega$  przez  $S$ , obliczamy długość  $d$  jego łuku  $AB$ :

$$d = |SA| \cdot |\angle ASB| = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cdot (\pi - \varphi).$$





Pierwsze udane zdjęcie widma gwiazdy wykonał Henry Draper w 1876 r. Gdy obserwacje takie stały się masowe, pojawiła się naturalna potrzeba ich uporządkowania, czyli klasyfikacji. Dokonali tego astronomowie amerykańscy pod kierunkiem Edwarda Pickeringa w Uniwersytecie Harvarda (Cambridge, USA). Gigantyczną robotę wykonała przy tym pani Annie Cannon, która przejrzała około ćwierci miliona widm i to jej zawdzięczamy do dziś z powodzeniem stosowany system oznaczania typów widmowych gwiazd literą i cyfrą. System ten nie powstał od razu. Po ułożeniu widm w jakiś pozornie logiczny ciąg pewnym charakterystycznym jego fragmentom nadano literowe symbole „jak leci” alfabetycznie. Z czasem jednak okazało się, że nie był to dobry pomysł, gdyż o wyglądzie widma (czyli o względnym natężeniu linii absorpcyjnych) decyduje temperatura powierzchni gwiazdy. Ułożenie więc widm według temperatur zburzyło kolejność alfabetyczną. Najgorętsze są gwiazdy oznaczone pierwotnie literą O (średnia temperatura około 30 000 K), potem następuje chłodniejsza klasa B (20 000 K), dalej A (10 000 K), F (7000 K), G (5500 K), K (4000 K) i najchłodniejsza M (3000 K). Każda klasa dzieli się na 10 podtypów i np. Słońce jest typu G2 z temperaturą około 5800 K.

I tak było praktycznie przez wiek. Ruch w tak nieciekawej dziedzinie, jak klasyfikowanie, wymusiła niedawno nowa technika. Bowiem obserwacje w podczerwieni ujawniły, że istnieje całkiem liczna grupa gwiazd jeszcze chłodniejszych niż gwiazdy typu M, czyli ciąg główny diagramu Hertzsprunga–Russella można w zasadzie przedłużyć jeszcze bardziej w dół. Grupa kalifornijskich badaczy zaproponowała dla gwiazd tego typu oznaczenie L. Już gwiazdy typu M są na tyle chłodne, że w ich widmach występują pasma związków chemicznych, przy czym dominuje tlenek tytanu TiO. W widmach gwiazd typu L, którym odpowiadałaby temperatura rzędu 2000 K, pasma tlenku tytanu giną, za to pojawiają się pasma wodorków CrH, FeH i wody oraz silne linie neutralnego cezu, rubidu i potasu. Możliwe, że gwiazdy typu L, a przynajmniej najchłodniejsze z nich, to już obiekty, którym nazwa gwiazdy właściwie nie przysługuje, gdyż źródłem ich energii nigdy nie była przemiana wodoru w hel.

*Tomasz KWAST*

## Lipiec

W letnie wieczory w całej okazałości widać wysoko na niebie gwiazdozbiór Smoka. Jego ogon wije się między Wielką i Małą Niedźwiedzicą, a głowa wysunięta jest bardziej na południe i sąsiaduje z Lutnią i Herkulesem. Właśnie w tej głowie znajduje się najjaśniejsza gwiazda gwiazdozbioru, oznaczona jednak jako  $\gamma$  (Etamin). Jest to gwiazda słynna z jeszcze innego powodu. Swego czasu jej paralaksę (a więc i odległość) próbował wyznaczyć angielski astronom James Bradley. Jego wybór padł na tę gwiazdę prawdopodobnie dlatego, że leży ona dość blisko bieguna ekliptyki (dzięki czemu jej paralaktyczne przesunięcie można obserwować w dowolnej porze roku) i w szerokości geograficznej Anglii (Polski zresztą też) góruje w pobliżu zenitu (dzięki czemu atmosfera prawie nie zakłóca pomiaru położenia gwiazdy). Pomiar paralaksy Etamina nie udał się, gdyż – jak się później okazało – gwiazda leży w odległości aż 60 pc, za to w 1728 r. Bradley odkrył u tej gwiazdy aberrację światła. Jest to pozorne przesunięcie gwiazdy na niebie wynikające z dodania się (wektorowego) prędkości Ziemi i prędkości światła. Dla gwiazd położonych w pobliżu bieguna ekliptyki

przesunięcie to przejawia się najsilniej i wynosi  $20''$ ,5, a więc znacznie więcej niż paralaksa.

Wenus jest w Byku i widać ją nad ranem. W Byku jest też Saturn i Jowisz – dokładniej na granicy Byka i Bliźniąt. Mars jest w Wężowniku, ale blisko Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona. Oba te wyraźnie czerwone obiekty bardzo ładnie będzie widać w pierwszej połowie nocy, co prawda nisko nad horyzontem. Pełnia Księżyca wypada 5 VII i nastąpi wtedy częściowe jego zaćmienie, ale u nas niewidoczne. Now Księżyca będzie 20 VII. W lipcu nastąpi kilka zakryć, ale tylko jedno widoczne z Europy. Mianowicie Księżyc zakryje Saturna i Wenus 17 VII, a 19 VII Jowisza i Merkurego. Tylko zakrycie Merkurego będzie widoczne z północnej Europy, ale Merkurego w ogóle trudno jest dostrzec. Co prawda szansa jakaś jest, gdyż 9 VII planeta ta będzie w maksymalnej kątowej odległości od Słońca ( $21^\circ$  na zachód). Z Polski zamiast zakryć zobaczymy tylko zbliżenia Księżyca do wymienionych obiektów. Wreszcie 15 VII Wenus i Saturn znajdują się nad ranem we wzajemnej odległości poniżej stopnia.

*T.K.*



## DLACZEGO? (II/2)

Dziś tylko krótkie pytanie:

**DLACZEGO** cyfrą jedności liczby  $a_{2040}$  jest 9? Przecież cyfry jedności wszystkich liczb  $a_n$  dla  $3 \leq n \leq 2039$  są siódmkami. A końcówki dwu-, trzy- i czterocyfrowe też wykazują daleko idącą regularność.

**DLACZEGO** ta regularność nagle się psuje, **DLACZEGO**?

## MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (25)

**TWIERDZENIE:** Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dowolnych liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, \dots, x_n$  zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left| \sum_{i=1}^n x_i \right|.$$

*Dowód:* Dana w treści twierdzenia nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n (x_i^2 - |x_i|),$$

czyli

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - |x_i|),$$

co daje się zapisać w postaci

$$(4\spadesuit) \quad f(x_0) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

gdzie  $x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  oraz  $f(x) = x^2 - |x|$ . Tak określona

funkcja  $f$  jest ciągła. Ponadto dla  $x \geq 0$  mamy  $f(x) = x^2 - x$ , skąd  $f''(x) = 2$ , przy czym w zerze funkcja  $f$  ma prawostronną pochodną rzędu drugiego równą 2. Podobnie dla  $x \leq 0$  mamy  $f(x) = x^2 + x$ , skąd  $f''(x) = 2$ , a przy tym w zerze funkcja  $f$  ma lewostronną pochodną rzędu drugiego równą 2. Ponieważ pochodne drugiego rzędu lewo- i prawostronna w punkcie zero są obie równe 2, zatem  $f''(0) = 2$ , skąd ostatecznie  $f''(x) = 2 > 0$  dla każdego  $x$ . Zatem  $f$  jest wypukła i na mocy nierówności Jensena zachodzi (4♠), czego należało dowieść.

## MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (26)

**TWIERDZENIE:** W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych boków czworokąta są równe.

*Dowód:* Załóżmy, że w czworokąt można wpisać okrąg. Wtedy z równości czterech par odcinków zaznaczonych na rysunku 1 wynika równość  $AB + CD = AD + BC$ , co kończy dowód wynikania w jedną stronę.

W celu przeprowadzenia dowodu drugiego wynikania załóżmy, że dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $AB + CD = AD + BC$ . Wykażemy, że można wpisać w niego okrąg. Wpiszmy w kąt  $BAD$  okrąg zawarty w czworokącie i styczny do jednego z boków  $BC$  lub  $CD$  (bez szkody dla ogólności możemy założyć, że jest to bok  $CD$ ). Okrąg taki uzyskujemy przecinając dwusieczną kąta  $A$  dwusiecznymi kątów  $B$  i  $D$ , a następnie biorąc za środek okręgu punkt przecięcia bliższy wierzchołkowi  $A$  (rys. 2). Jeżeli okrąg jest styczny do boku  $BC$ , dowód jest zakończony. W przeciwnym przypadku prowadzimy z punktu  $B$  styczną do okręgu, aż do przecięcia  $C'$  z bokiem  $CD$  (rys. 3). Wówczas w czworokąt  $ABC'D$  jest wpisany okrąg, zatem na mocy już udowodnionej części twierdzenia

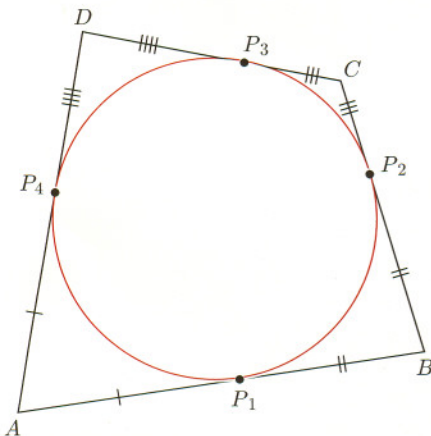
$$AB + C'D = AD + BC'.$$

Ponieważ  $DC' < DC$  oraz  $BC' > BC$ , otrzymujemy

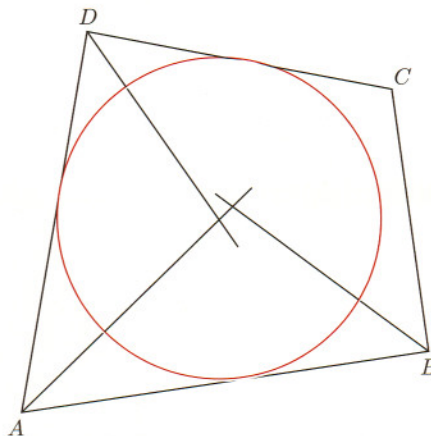
$$AB + CD > AB + C'D = AD + BC' > AD + BC$$

wbrew założeniu. Dowód twierdzenia jest zakończony.

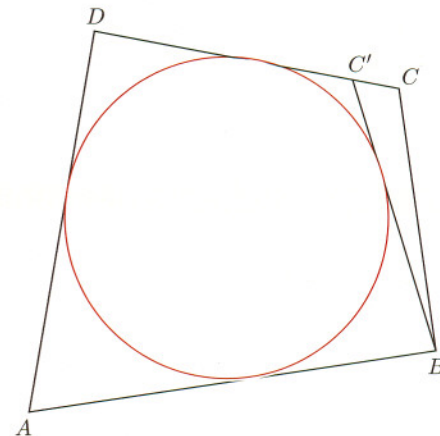
JWR



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl





# Dodatek Olimpijski

## Zadania II stopnia oraz finału Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej

### LII OLIMPIADA MATEMATYCZNA 2000/2001

#### ZAWODY II STOPNIA (23–24 lutego 2001)

1. Dane są liczby naturalne  $k, n$  większe od 1, przy czym liczba  $p = 2k - 1$  jest pierwsza. Dowieść, że jeżeli liczba

$$\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$$

jest podzielna przez  $p$ , to jest podzielna przez  $p^2$ .

2. Punkty  $A, B, C$  leżą w tej właśnie kolejności na prostej, przy czym  $AB < BC$ . Punkty  $D, E$  są wierzchołkami kwadratu  $ABDE$ . Okrąg o średnicy  $AC$  przecina prostą  $DE$  w punktach  $P$  i  $Q$ , przy czym punkt  $P$  należy do odcinka  $DE$ . Proste  $AQ$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $R$ . Udowodnić, że  $DP = DR$ .

3. Niech  $n \geq 3$  będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny wielomian postaci

$$x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-5}x^{n-5} + \dots + a_1x + a_0,$$

gdzie co najmniej jeden ze współczynników  $a_i$  jest różny od zera, ma mniej niż  $n$  pierwiastków rzeczywistych (każdy pierwiastek liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).

4. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $n \geq 3$ , dla których prawdziwe jest następujące zdanie:

W dowolnym  $n$ -wyrazowym ciągu arytmetycznym  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , dla którego liczba

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \dots + n \cdot a_n$$

jest wymierna, istnieje wyraz będący liczbą wymierną.

5. Punkt  $I$  jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$ . Prosta  $AI$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $D$ . Dowieść, że  $AI + CD = AC$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\angle B = 60^\circ + \frac{1}{3}\angle C$ .

6. Dla danej liczby całkowitej dodatniej  $n$  rozstrzygnąć, czy podzbiorów  $n$ -elementowych zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 2n - 1, 2n\}$  mających sumę elementów parzystą jest tyle samo, co podzbiorów  $n$ -elementowych mających nieparzystą sumę elementów. Jeśli nie, to rozstrzygnąć, których jest więcej i o ile.

#### ZAWODY III STOPNIA (2–3 kwietnia 2001)

1. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 2$  i dowolnych liczb rzeczywistych nieujemnych  $x_1, x_2, \dots, x_n$  zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n ix_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^i.$$

2. Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworoboku foremnego o krawędzi 1 od jego wierzchołków jest nie większa niż 3.

3. Rozważamy ciąg  $(x_n)$  określony rekurencyjnie wzorami

$$x_1 = a, \quad x_2 = b,$$

$$\text{oraz } x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami rzeczywistymi. Liczbę  $c$  będziemy nazywać *wartością wielokrotną* ciągu  $(x_n)$ , jeżeli istnieją co najmniej dwie różne liczby całkowite dodatnie  $k$  i  $l$  takie, że  $x_k = x_l = c$ . Wykazać, że można tak dobrać liczby  $a$  i  $b$ , aby ciąg  $(x_n)$  miał



więcej niż 2000 wartości wielokrotnych, ale nie można tak dobrać  $a$  i  $b$ , aby miał on nieskończenie wiele wartości wielokrotnych.

4. Dane są takie liczby całkowite  $a$  i  $b$ , że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej  $n$  liczba  $2^n a + b$  jest kwadratem liczby całkowitej. Dowieść, że  $a = 0$ .

5. Punkty  $K$  i  $L$  leżą odpowiednio na bokach  $BC$  i  $CD$  równoległoboku  $ABCD$ , przy czym  $BK \cdot AD = DL \cdot AB$ . Odcinki  $DK$  i  $BL$  przecinają się w punkcie  $P$ . Wykazać, że  $\angle DAP = \angle BAC$ .

6. Dane są liczby całkowite dodatnie  $n_1 < n_2 < \dots < n_{2000} < 10^{100}$ . Dowieść, że ze zbioru  $\{n_1, n_2, \dots, n_{2000}\}$  można wybrać niepuste rozłączne podzbiory  $A$  i  $B$  mające tyle samo elementów, taką samą sumę elementów i taką samą sumę kwadratów elementów.

## Końcowa klasyfikacja

### Nagroda stopnia pierwszego

Jakub BYSZEWSKI (36 pkt.), kl. IV, I LO im. Juliusza Słowackiego w Chorzowie (nauczyciel: Dariusz Kuzior).

Roman ŁOMOWSKI (35), kl. III VI LO im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy (nauczyciele: Henryk Pawłowski, Lew Kurlandczyk i Anna Karaszewska).

### Nagrody stopnia drugiego

Karol CWALINA (32), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Jerzy Konarski, Edward Stachowski i Wojciech Boratyński).

Paweł WALTER (32), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Urszula Szwedzicka, Witold Jarnicki, Grzegorz Kapustka, Michał Kapustka, Lesław Skrzypek i Paweł Gniadek).

Aleksander ZABŁOCKI (31), kl. II, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (n.: Zbigniew Bobiński i Maria Kobus).

Michał ADAMASZEK (30), kl. IV, V LO w Bielsku-Białej (n.: Tomasz Szymczyk).

Jarosław WRONA (30), kl. III, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (n.: Andrzej Bysiewicz).

Wojciech CZERWIŃSKI (29), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Wojciech Boratyński, Jerzy Konarski, Edward Stachowski i Jakub Onufry Wojtaszczyk).

Artur JEŻ (29), kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (n.: Stefan Mizia i Zbigniew Romanowicz).

Mateusz KWAŚNICKI (29), kl. IV LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu (n.: Przemysław Szczepaniak, Augustyn Kaluża i Krystyna Czyzca).

Paweł PARYS (29), kl. III, LO im. Stanisława Staszica w Tarnowskich Górach (n.: Dariusz Nowak i Józef Kalinowski).

Marcin PILIPCZUK (29), kl. II, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Agnieszka Kałamajska, Leszek Sidz i Jakub Onufry Wojtaszczyk).

Bartosz SUŁKOWSKI (29), kl. IV, V LO w Bielsku-Białej (n.: Tomasz Szymczyk).

Sławomir DINEW (28), kl. III, Szkolny Punkt Konsultacyjny przy Konsulacie RP w Warnie (n.: Georgi Dimitrow).

### Nagrody stopnia trzeciego

Krzysztof BRUNIECKI (24), kl. IV, II LO im. Marii Konopnickiej w Inowrocławiu (n.: Małgorzata Zygora i Henryk Pawłowski).

Lech DURAJ (24), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Urszula Szwedzicka, Paweł Gniadek, Lesław Skrzypek, Witold Sarnicki, Michał Kapustka i Grzegorz Kapustka).

Jacek JUREWICZ (24), kl. IV, II LO im. Konstantego Ildefonsa Gałczyńskiego w Olsztynie (n.: Teresa Pik).

Marek MISZTAŁ (24), kl. III, II LO w Końskich (n.: Adam Kowalczyk).

Dominik WOJTCZAK (24), kl. IV, III LO im. Marynarki Wojennej RP w Gdyni (n.: Wojciech Tomalczyk).

Jakub ZWIERZ (24), kl. IV, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (n.: Stanisław Buś).

Katarzyna JACHIM (23), kl. IV LO im. Komisji Edukacji Narodowej w Stalowej Woli (n.: Waldemar Rożek).

Michał JÓŹWIKOWSKI (23), kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (n.: Wojciech Boratyński, Jerzy Konarski, Edward Stachowski).

### Wyróżnienia

Grzegorz HERMAN (20), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Urszula Szwedzicka i Paweł Gniadek).

Aleksandra KWIATKOWSKA (20), kl. II, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (n.: Władysław Suchocki i Tomasz Elsner).

Żywoimir DINEW (19), kl. III, Szk. Punkt Kons. przy Konsulacie RP w Warnie (n.: Georgi Dimitrow).

Bartosz DZIEWA (18), kl. II, I LO im. Tadeusza Kościuszki w Łomży (n.: Piotr Łowicki).

Mateusz GORYCA (18), kl. III, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu (n.: Jerzy Nowicki).

Agnieszka OBARSKA (18), kl. IV, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu (n.: Przemysław Murawski).

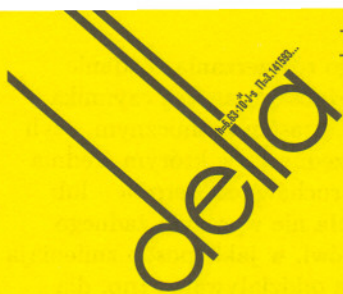
Krzysztof DZIOŁAK (17), kl. III, I LO im. Stanisława Dubois w Koszalinie (n.: Paweł Rudecki).

Grzegorz GUTOWSKI (17), kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (n.: Paweł Gniadek i Urszula Szwedzicka).

Jan ŁUSZKIEWICZ (16), kl. IV, VI LO im. Jana Kochanowskiego w Radomiu (n.: Przemysław Murawski).

Tomasz WAWRZYŃIAK (16), kl. III, XIV LO im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu (n.: Stanisław Buś i Zbigniew Romanowicz).



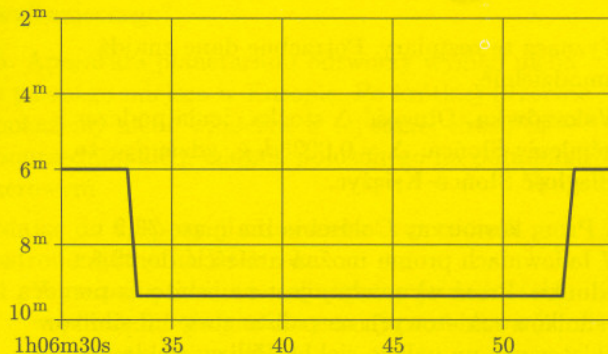


1. Dwóch obserwatorów znajdujących się na równiku w odległości 400 km mierzonej na powierzchni Ziemi obserwowało sztucznego satelitę. Satelita poruszał się z zachodu na wschód. Czas, jaki upłynął od momentu przejścia przez zenit nad jednym obserwatorem, a następnie nad drugim, wyniósł 60 s. Zakładając kołową orbitę oblicz, na jakiej wysokości nad Ziemią przelatywał satelita i jaka była jego prędkość względem obserwatorów.

2. Przedyskutuj, jak długo trwa dzień na terenie Polski w dniu przesilenia letniego. Taką samą analizę przeprowadź dla dnia przesilenia zimowego i dni równonocy.

3. Podczas obserwacji zakrycia gwiazdy przez pewną planetoidę, znajdującą się w opozycji do Słońca,

otrzymano wykres zmian jasności pokazany na rysunku.



Jakie wnioski można wyciągnąć z przedstawionego wykresu? Wymień przyjmowane założenia.

4. Wyjaśnij termin *ruch wsteczny* ciał w Układzie Planetarnym i podaj jego przykłady.

### ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

1. Kometa Hale-Bopp jest kometą długookresową i ostatnio obserwowane jej zbliżenie do Słońca było prawdopodobnie pierwszym w jej historii. Stąd należy sądzić, że skład materii tej komety nie zmienił się istotnie od momentu jej powstania. Uważa się jednak, że powstała ona względnie blisko Słońca w wyniku zlepiania się mniejszych bryłek materii kometarnej, a dopiero później wywędrowała do obłoku Oorta. Początkowy skład komety szczególnie dobrze powinna odzwierciedlać materia emitowana z jej jądra w pobliżu peryhelium, a właśnie wówczas stwierdzono dużą emisję argonu i bardzo niewielką neonu. Wiedząc, że neon ulatuje w przestrzeń już przy temperaturze 25 K, a argon dopiero około 40 K, określ miejsce prawdopodobnego powstania komety. Dla uproszczenia załóż, że promień Słońca ( $R_S = 7 \cdot 10^5$  km) i jego temperatura ( $T_S = 5760$  K) były wówczas takie same jak obecnie.

2. Sonda NEAR-Shoemaker na pierwszej orbicie eliptycznej wokół Erosa miała prędkość 1,1 m/s w punkcie odległym o 366 km od środka masy planetoidy. Następnie sonda weszła na ciaśniejszą orbitę o wielkiej półosi równej 50 km i o okresie obiegu

18 razy mniejszym niż na pierwszej orbicie. Wyznacz masę Erosa i okres obiegu na pierwszej orbicie.

3. Wyobraź sobie, że oglądasz zachód Słońca w nietypowy sposób, poruszając się pionowo w górę w jednej z przeszklonych zewnętrznych wind wieżowca o wysokości 600 m, stojącego na równiku ziemskim. Dla uproszczenia dodatkowo załóż, że ma to miejsce w dniu równonocy. Jak powinna zmieniać się prędkość windy, aby oglądany przez Ciebie obraz Słońca został niejako zamrożony, tzn. aby obserwowane położenie Słońca względem horyzontu nie zmieniało się? Czy są to prędkości technicznie realne?

4. Podczas jednego z zaćmień Księżyca wyznaczono następujące współrzędne środka tarczy Księżyca w dwóch różnych momentach:

	moment $t$	rektascensja $\alpha$	deklinacja $\delta$	dług. eklipt. $\lambda$	szer. eklipt. $\beta$
1.	19,42	$7^h 20,5^m$	$+22^\circ 26'$	$108^\circ 33'$	$+0^\circ 17'$
2.	21,59	$7^h 26,8^m$	$+22^\circ 21'$	$110^\circ 00'$	$+0^\circ 25'$

Określ współrzędne równikowe równonocne i współrzędne ekliptyczne węzła orbity Księżyca oraz moment przejścia Księżyca przez ten węzeł.

### ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. W której z wymienionych sytuacji cień Księżyca podczas całkowitego zaćmienia Słońca, obserwowanego w południe z centrum Polski, mógłby osiągnąć największe rozmiary liniowe:

a) Ziemia w peryhelium,

b) równonoc wiosenna,

c) przesilenie letnie,

d) Ziemia w aphelium,

e) równonoc jesienna,

f) przesilenie zimowe?



Wyznacz te rozmiary. Potrzebne dane znajdź samodzielnie.

**Wskazówka.** Długość  $\Delta$  stożka cienia podczas zaćmienia Słońca:  $\Delta = 0,0025d_{SK}$ , gdzie  $d_{SK}$  to odległość Słońce–Księżyc.

**2.** Prom kosmiczny Columbia ma masę 73,2 t. W ładowniach promu można umieścić do 29,5 t ładunku. Prom wynoszony jest na orbitę za pomocą 2 silników raketowych na paliwo stałe i 3 silników raketowych na paliwo ciekłe. Paliwo ciekłe (wodór i tlen o łącznej masie 721 t) znajduje się w dużym zbiorniku, odłączanym po wykorzystaniu. Masa pustego zbiornika wynosi 35 t. Każda z raket na paliwo stałe ma masę 90 t i zawiera po 500 t paliwa. Siła ciągu każdego z silników na paliwo stałe wynosi 12,9 MN. Silniki na paliwo ciekłe dysponują łącznym ciągiem o wartości 5 MN. Przy starcie promu pracują wszystkie silniki. Po 123 s kończą pracę silniki stałopaliwowe, po czym są odrzucane. Silniki na paliwo ciekłe działają jeszcze przez następne 6 minut. Po zużyciu całego zapasu paliwa pusty już potężny zbiornik po ciekłym wodorze i tlenie jest również odrzucany. Zakładając, że szybkość spalania paliwa stałego, jak i ciekłego, jest stała w całym czasie pracy silników raketowych, oblicz wartości przeciążeń odczuwanych przez załogę promu:

- w chwili startu całego zespołu,
- tuż przed końcem pracy silników na paliwo stałe,
- w chwilę po odrzuceniu pustych silników stałopaliwowych,
- pod koniec fazy startu, tj. gdy kończą pracę silniki główne na paliwo ciekłe.

Wyliczone wartości podaj w jednostkach przyspieszenia ziemskiego ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ).

Czy rzeczywiście mogą podróżować promem kosmicznym „zwykli” ludzie (a nie tylko wyselekcjonowani piloci myśliwców wojskowych – przeciętny, zdrowy człowiek jest w stanie wytrzymać przeciążenia nie większe niż około 4 g)?

**Wskazówka.** Kierunek lotu promu kosmicznego ulega zmianie:

- w punkcie a) siła ciągu działa pionowo w górę,
- w punkcie d) pod koniec pracy silników siła działa poziomo (wymaga tego idea wprowadzenia statku kosmicznego na orbitę prawie kołową).
- w momentach b) i c) zakładamy, że cały zespół startowy pochylony jest pod kątem  $45^\circ$  do pionu.

**3.** Powszechnie kosmolodzy uważają, że Wszechświat się rozszerza, a głównym zadaniem kosmologii

jest określenie sposobu tego rozszerzania. Zadanie to rozwiązuje podanie zależności czasowej czynnika skali  $R(t)$ , gdzie  $t$  jest tzw. czasem kosmicznym, czyli czasem w układzie współrzędnych, w którym średnia prędkość wielkoskalowych ruchów jest zerowa – lub inaczej – promieniowanie tła nie wyróżnia żadnego kierunku. Czynniki skali mówi, w jaki sposób zmieniają się odległości, jeżeli nie ma oddziaływania (np. dla obiektów zbyt odległych, by działały między nimi jakieś siły) – gdy w chwili  $t_1$  odległości między ciałami wynosiły  $R(t_1) \cdot l$ , to w chwili  $t_2$  będą wynosić  $R(t_2) \cdot l$ , gdzie  $l$  jest odległością w chwili, gdy  $R(t)$  jest równe jeden. Tempo rozszerzania Wszechświata można więc zmierzyć, biorąc dwa takie ciała i mierząc wzrost odległości między nimi. Ponieważ pomiary wykonuje się we względnie niewielkich odległościach, można przyjąć, że dla wszystkich ciał ekspansja będzie taka sama, będąc, po prostu, obecnym tempem ekspansji. Z matematycznego punktu widzenia taka niezależna od odległości wartość może być opisana pochodną czasową czynnika skali podzieloną przez czynnik skali, czyli

$$H = \frac{dR(t)}{dt} \cdot \frac{1}{R(t)}.$$

Wielkość  $H$  nazywa się stałą Hubble’a i ma obecnie wartość około  $70 \text{ km/(s}\cdot\text{Mpc)}$ , a udaje się ją zmierzyć, korzystając ze zjawiska przesunięcia ku czerwieni – długości fal świetlnych w wyniku biegu w ekspandującym Wszechświecie ulegają przesunięciu opisanemu wzorem

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{R(t_w)}{R(t_e)} - 1,$$

gdzie indeksy  $w$  i  $e$  oznaczają odpowiednio chwilę obecną i moment emisji promieniowania. W trakcie ewolucji Wszechświata ulega zmianie wiele jego parametrów. Między innymi zmienia się również temperatura promieniowania tła, która obecnie jest niewielka i wynosi około 3 K. Związek temperatury promieniowania tła z czynnikiem skali jest bardzo prosty i ma postać

$$R(t) \cdot T = \text{const.}$$

Powyższe wzory są dokładne i niezależne od modelu kosmologicznego. Najprostszym, a jednocześnie uważanym za dość realistyczny, jest model Einsteina–de Sittera, w którym zmianę rozmiarów Wszechświata opisuje czynnik skali określony równaniem

$$(*) \quad R(t) = A \cdot t^{2/3},$$

gdzie  $A$  jest stałą.

Zakładając poprawność modelu opisanego wzorem (\*) oblicz

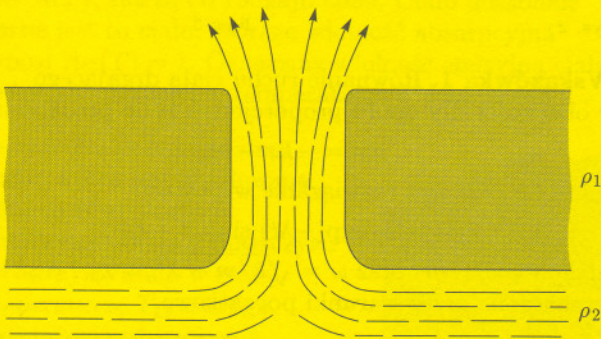
- Jaką najmniejszą temperaturę mógł mieć gaz, z którego powstał Układ Słoneczny? Wiek Układu Słonecznego wynosi około czterech i pół miliarda lat.
- Jaką najmniejszą temperaturę może mieć gaz w galaktykach o maksymalnym obecnie znanym przesunięciu ku czerwieni wynoszącym około



sześciu? Ile procent obecnego wieku miał wówczas Wszechświat?

Ile lat temu powstało promieniowanie tła oraz ile razy rozszerzył się Wszechświat od tego czasu, jeżeli powstało ono w temperaturze 3000 K?

4. Na księżycu Jowisza Io wulkany wyrzucają materię na dużą wysokość, sięgającą 300 km nad powierzchnię księżyca. Zakładając modelowo, że w trakcie erupcji materia ta w kominie wulkanu spełnia równanie Bernoulliego  $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const}$ , gdzie  $p$  jest ciśnieniem,  $\rho$  – gęstością wyrzucanej materii,  $v$  – jej prędkością w kominie wulkanu,  $g$  – przyspieszeniem grawitacyjnym,  $h$  – wysokością nad ustalony poziom, oszacuj, na jakiej głębokości pod powierzchnią księżyca znajdują się źródła wulkanizmu Io. Wysokość stożka wulkanu można pominąć.



Przyjmij, że gęstość zewnętrznej warstwy księżyca wynosi  $\rho_1 = 2500 \text{ kg/m}^3$ , a gęstość wyrzucanej materii jest dziesięciokrotnie mniejsza.

Spróbuj określić, jakie założenia upraszczające umożliwiają przyjęcie słuszności równania Bernoulliego. Czy przyjęte założenia powodują przecenienie czy niedocenywanie głębokości kanału wulkanicznego?

5. Aparatura planetarium odtworzy wygląd nieba z pewnego miejsca w Europie. Po krótkiej przerwie pokażemy niebo widoczne w tej samej chwili co poprzednio, ale z miejsca położonego na południku zerowym.

Mając do dyspozycji atlas nieba oraz rocznik astronomiczny na 2001 rok:

1. Wyznacz z możliwie największą dokładnością współrzędne geograficzne miejsca obserwacji w obydwu przypadkach.
2. Wiedząc, że aparatura planetarium symuluje sytuację odpowiadającą pewnej dacie 2001 roku, określ ją z możliwie największą dokładnością.
3. Określ porę odtwarzanej nocy.
4. Oceń współrzędne horyzontalne widocznych na niebie planet w pierwszej z demonstrowanych sytuacji.
5. Określ współrzędne równikowe równonocne widocznego na niebie mgławicowego obiektu nie będącego obiektem z katalogu Messiera. W rozwiązaniu podaj wszystkie wyniki swoich obserwacji nieba i pełne uzasadnienie odpowiedzi.

6. Oblicz z dokładnością do jednej minuty moment zachodu środka tarczy Księżyca w dniu 3 marca 2001 roku w Rzymie:  $\phi_R = 41^\circ 54'(\text{N})$ ,  $\lambda_R = 12^\circ 29'(\text{E})$ . Oceń wpływ paralaksy oraz refrakcji na moment zachodu.

## Końcowa klasyfikacja

### Laureaci

I miejsce Krzysztof NALEWAJKO, kl. III, LO im. Jana Bożyńskiego w Ostródzie (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Ryszard Dakowski).

II miejsce Tomasz TYRANOWSKI, kl. III, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: mgr Ryszard Zapala, opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Teresa Mach).

III miejsce ex aequo

Lech ŁOBODZIŃSKI, kl. IV, I LO im. Antoniego Osuchowskiego w Cieszynie (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Urszula Klemczak).

Aleksander SĄDOWSKI, kl. III, I LO im. Ziemi Kujawskiej we Włocławku (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Mariusz Sobczak).

IV miejsce Marek MISZTAŁ, kl. III, II LO w Końskiem (nauczyciel i opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Robert Miształ).

### Finaliści

V miejsce Andrzej JASTRZEBSKI, kl. IV, II LO im. Króla Jana III Sobieskiego w Grudziądzu (nauczyciel: mgr Jacek Chodziutko, opiekun przygotowujący do olimpiady: mgr Małgorzata Śróbka-Kubiak).

### Pozostali uczestnicy finału

Krzysztof BARCZYŃSKI, kl. II, LO im. Bolesława Chrobrego w Pszczynie;  
 Damian BOGDANOWICZ, kl. IV, ZSO Nr 1 im. Stefana Żeromskiego w Łęborku;  
 Bartosz BOSOWIEC, kl. IV, I LO im. Leona Kruczkowskiego w Tychach;  
 Bartosz FORMAL, kl. II, I LO im. Bartłomieja Nowodworskiego w Krakowie;  
 Piotr GRUSZCZYŃSKI, kl. III, I LO w Tarnowie;  
 Piotr GUZIK, kl. I, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie;  
 Michał MICHAŁOWSKI, kl. IV, VIII LO im. Adama Mickiewicza w Poznaniu;  
 Paweł PUTERLA, kl. III, II LO im. Mikołaja Kopernika w Mielcu;  
 Adam REJ, kl. II, IV LO im. Stanisława Staszica w Sosnowcu.



## ZADANIA ZAWODÓW II STOPNIA

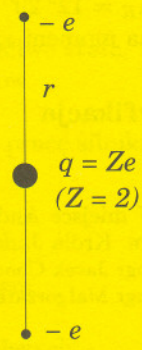
1. Zdrowe oko człowieka akomoduje, zmieniając zdolność skupiającą soczewki. Dzięki temu człowiek widzi ostro z odległości od 25 cm do nieskończoności. Soczewki oczu pana Hilarego potrafią zmieniać swoją zdolność skupiającą w takim samym zakresie jak oko zdrowego człowieka. Niestety, miejsce, w którym dają ostry obraz, nie odpowiada głębokości gałki ocznej pana Hilarego i to do tego stopnia, że nie widzi on ostro z żadnej odległości. Określ, jaką wadę wzroku (krótkowzroczność czy dalekowzroczność) ma pan Hilary i podaj warunek, jaki powinna spełniać zdolność skupiająca soczewek jego okularów.

2. Niels Bohr uzyskał poprawne wartości energii stanów atomu wodoru, rozważając ruch elektronu po orbicie kołowej przy dodatkowym warunku kwantowania momentu pędu. Założył on, że moment pędu może przyjmować tylko wartości opisane wzorem:

$$m_e r^2 \omega = n \frac{h}{2\pi},$$

gdzie  $n$  jest liczbą naturalną,  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg – masą elektronu,  $r$  – promieniem orbity,  $\omega$  – częstotliwością kołową ruchu orbitalnego,  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J·s – stałą Plancka.

Używając metody Bohra znajdź energię stanu podstawowego atomu helu zakładając, że dwa elektrony krążą wokół jądra helu po orbitach kołowych o tym samym promieniu, pozostając cały czas w opozycji (rys. 1). Porównaj Twój wynik z doświadczalnie mierzoną wartością energii stanu podstawowego atomu helu wynoszącą  $E_{\text{exp}} = -78,9$  eV. Energia stanu podstawowego atomu wodoru wynosi  $E_0 = -13,6$  eV,  $1/(4\pi \epsilon_0) = k = 9,0 \cdot 10^9$  N·m<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>, ładunek elementarny jest równy  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

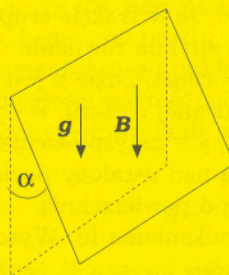


Rys. 1

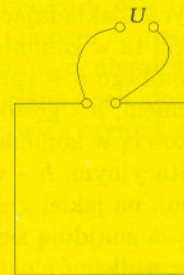
3. Kwadratowa ramka o boku  $L$  jest zbudowana z cienkich jednorodnych prętów, z których każdy ma masę  $m$  i opór elektryczny  $R$ . Ramkę umieszczono w pionowym, jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B$  w ten sposób, że może się ona obracać bez tarcia wokół poziomej osi pokrywającej się z jednym z jej boków (patrz rysunek 2). Rozpatrz następujące sytuacje:

a) W obwód ramki włączono źródło stałego napięcia zewnętrznego  $U$  (rys. 3). Wyznacz położenie równowagi, czyli kąt odchylenia ramki od pionu.

b) Zewnętrzne źródło napięcia usunięto i zwarto końce tak, że ramka stanowi obwód zamknięty. Następnie ramkę odchyłono od pionu i puszczono swobodnie. Oblicz, po jakim czasie amplituda drgań zmaleje do połowy. Przyjmij, że opór  $R$  jest duży (słabe tłumienie i zanedbywalny wpływ samoindukcji), a amplituda drgań jest mała (przypadek małych drgań).



Rys. 2



Rys. 3

**Wskazówka 1.** Równanie ruchu ciała drgającego w obecności siły oporu proporcjonalnej do prędkości:

$$ma = -kx - bv,$$

ma dla  $b < 2\sqrt{km}$  rozwiązanie w postaci:

$$x(t) = x_0 \exp(-\lambda t) \sin(\omega t + \phi),$$

gdzie  $\lambda = b/(2m)$  oraz  $\omega = \sqrt{k/m - \lambda^2}$ , a  $x_0$  i  $\phi$  są wyznaczone przez warunki początkowe.

**Wskazówka 2.** Moment bezwładności jednorodnego pręta o masie  $m$  i długości  $L$  względem osi obrotu prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego koniec wynosi  $I_0 = (1/3)mL^2$ .

**Zadanie doświadczalne.** Masz do dyspozycji:

- 4 kawałki drutu miedzianego o podanych średnicach, z których 2 zostały wytrawione w kwasie siarkowym,
- plastikową „słomkę” do picia napojów z nacięciem na jednym końcu oraz śrubę o tak dobranej średnicy, aby można ją było „wkręcić” w słomkę,
- menzurkę ze skalą,
- wodę destylowaną, papier milimetrowy,
- statyw z uchwytem oraz pudełeczka lub klocki służące jako podpórki,
- igłę,
- środek odtłuszczający, wodę do płukania, bibułki do osuszania.

Wyznacz wartość napięcia powierzchniowego na granicy faz między wodą destylowaną a miedzią. Porównaj wyniki dla drutów o różnych średnicach. Porównaj wyniki dla drutu wytrawionego w kwasie

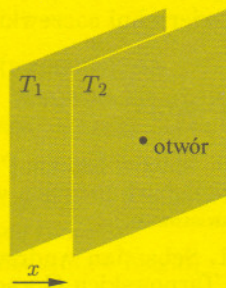


siarkowym i opłukanego w wodzie destylowanej oraz dla drutu nietrawionego, a tylko odtłuszczonego i opłukanego w wodzie destylowanej. Wyznacz błąd pomiarowy i wskaż jego główne źródła.

## ZADANIA ZAWODÓW III STOPNIA

1. Opisując procesy promieniowania cieplnego posługujemy się pojęciami zdolności emisyjnej  $W(T)$  i absorpcyjnej  $A(T)$ .  $W(T)$  oznacza ilość energii wypromieniowanej w jednostce czasu przez jednostkę powierzchni danego ciała w stanie równowagi w temperaturze  $T$ , zaś  $A(T)$  jest wielkością bezwymiarową równą stosunkowi ilości energii absorbowanej do ilości energii padającej na powierzchnię tego ciała. Obie te wielkości,  $W(T)$  oraz  $A(T)$ , zależą od rodzaju ciała. Ciało doskonale czarne jest to ciało, którego zdolność absorpcyjna wynosi  $A_C(T) = 1$ . Oznaczmy zdolność emisyjną ciała doskonale czarnego w temperaturze  $T$  jako  $W_C(T)$ .

Na rysunku przedstawiono wnękę, która jest zbudowana z dwóch równoległych płaszczyzn. Jedna z płaszczyzn jest utrzymywana w stałej temperaturze  $T_1$ , a druga, przeciwległa płaszczyzna jest utrzymywana w stałej temperaturze  $T_2$ . Płaszczyzny stanowiące ścianki wnęki



wykonano z materiałów o zdolnościach emisyjnych i absorpcyjnych odpowiednio  $A_1(T_1)$  i  $W_1(T_1)$  oraz  $A_2(T_2)$  i  $W_2(T_2)$ . Jak pokazano na rysunku, w drugiej ścianie znajduje się mały otwór.

1. Oblicz zdolność emisyjną  $W$  powierzchni otworu wnęki pokazanej na rysunku.
2. Wykaż, że jeśli  $T_1 = T_2$ , to powierzchnia otworu zachowuje się jak powierzchnia ciała doskonale czarnego.

### Wskazówki:

1. Załóż, że promieniowanie cieplne jest jedyną formą wymiany energii pomiędzy ciałami.
2. Można przyjąć, że stosunek  $W(T)/A(T)$  nie zależy od rodzaju ciała i jest równy  $W_C(T)$ .
3. Dla uproszczenia rozważ model jednowymiarowy, tzn. przyjmij, że promieniowanie rozchodzi się tylko w kierunku  $x$ , tj. prostopadle do ścianek wnęki, a otwór jest na tyle mały, że nie zaburza stanu równowagi we wnęcie.

### Wskazówka.

Każdą granicę rozdziału dwóch faz (np. woda–miedź) charakteryzuje pewna energia powierzchniowa, która jest proporcjonalna do wielkości powierzchni rozdziału faz. Energię związaną z jednostkową powierzchnią nazywamy napięciem powierzchniowym. Dla podanego przykładu wielkość energii powierzchniowej granicy powietrze–miedź można pominąć.

2. Profesor Bohr wiercił otwór ręczną wiertarką elektryczną. Nagle wiertło wraz z głowicą uległo zablokowaniu w wierconym materiale i Profesor zauważył, że w tym momencie korpus wiertarki szarpnął i zaczął mu się obracać w rękach. Niniejsze zadanie polega na ilościowej analizie tego zjawiska. Niech moment bezwładności wirnika wynosi  $I_1$ , a moment bezwładności korpusu wiertarki względem osi wirnika wynosi  $I_2$ , przy czym środek masy korpusu leży na osi wirnika. Przed zablokowaniem wirnik obracał się z prędkością kątową  $\omega_1$ . Przekładnia wiertarki wynosi  $k$  (to znaczy wiertło obracało się z prędkością kątową  $\omega_1/k$ ).

Załącz, że

- 1) zablokowanie trwało tak krótko, że można zaniedbać działanie silnika oraz siły wywierane przez ręce w tym czasie,
- 2) oś wiertła pokrywa się z osią wirnika,
- 3) masę elementów przekładni (kół zębatach) można zaniedbać.

Oblicz prędkość kątową, jaką uzyskał korpus wiertarki, gdy wiertło wraz z głowicą uległo gwałtownemu zablokowaniu w wierconym materiale.

3. Wiązka dodatnio naładowanych cząstek pada centralnie na przewodzącą kulę o promieniu  $R$ . Natężenie prądu wiązki wynosi  $I$ , a średnica wiązki jest dużo mniejsza od średnicy kuli. Będziemy zakładali, że w rozpatrywanym ograniczonym przedziale czasu ładunek znajdujący się na kuli nie zaburza ruchu cząstek wiązki. Zakładamy też, że wszystkie cząstki padające na kulę na niej pozostają i nie wybijają żadnych cząstek naładowanych. Ładunek elektryczny na kuli rośnie więc w czasie jednostajnie. Wyznacz indukcję  $B$  pola magnetycznego tuż nad powierzchnią kuli na obwodzie koła wielkiego prostopadłego do osi wiązki. Jeśli wyobrazimy sobie, że środek wiązki pada na *biegun południowy*, to koło wielkie, o którym mowa w zadaniu, jest *równikiem*. Wynik porównaj z indukcją, jaka byłaby w tym samym miejscu (na *równiku*), gdyby usunąć kulę, pozwalając strumieniowi cząstek kontynuować ruch po prostej.



Wyznacz indukcyjność pola magnetycznego  $B$  na obwodzie dowolnego *równoleżnika*. Znajdź granicę  $B$  w przypadku, gdy *równoleżnik* zbliża się do *bieguna południowego*, czyli środka padania wiązki, przy zachowaniu warunku, że obejmuje on całą wiązkę.

### Zadanie doświadczalne

W starej świątyni Majów znaleziono dziwny przedmiot. Po bliższych oględzinach okazało się, że jest to bardzo stary teleskop, z którego zachowały się jedynie resztki tubusu z soczewką. Badacze bardzo chcieli dowiedzieć się, w jaki sposób i z czego została wykonana soczewka. W tym celu postanowili najpierw określić jej parametry, tzn. znaleźć jej promień krzywizn oraz, co najważniejsze, współczynnik załamania materiału, z którego ją wykonano. Ze względu na ogromną wagę znaleziska oraz własną ciekawość badacze chcieli wykonać pomiary na miejscu znaleziska, bez oczekiwania na wyniki badań w laboratorium optycznym. Przedmiotem niniejszego zadania jest opracowanie prostej metody pomiarowej, która może pomóc badaczom.

Masz do dyspozycji:

- 1) soczewkę dwuwypukłą,
  - 2) lustro,
  - 3) zagięty kawałek drutu,
  - 4) statyw,
  - 5) linijkę,
  - 6) kawałek plasteliny,
  - 7) wodę w płaskim naczyniu,
  - 8) bibułka do osuszania,
- Zaproponuj metodę umożliwiającą wyznaczenie współczynnika załamania światła  $n_s$  dla materiału soczewki oraz znalezienie wielkości jej promieni krzywizn  $R_1$  oraz  $R_2$ .
  - Sprawdź doświadczalnie, czy twoja soczewka ma takie same oba promienie krzywizn.
  - Wyznacz eksperymentalnie ich wielkość oraz wartość współczynnika załamania  $n_s$ .
  - Oszacuj niepewności otrzymanych wyników oraz wskaż najważniejsze ich źródła

Przyjmij założenie, że współczynnik załamania powietrza względem próżni  $n_p = 1$  oraz że współczynnik załamania wody względem próżni  $n_w = 4/3$ . W rozwiązaniu zastosuj przybliżenie cienkiej soczewki.

**Wskazówka.** Proponowana metoda może dopuszczać częściowe zanurzenie soczewki w wodzie.

**Uwaga.** Metody polegające na geometrycznym pomiarze rozmiarów soczewki, jak np. długość łuku powierzchni soczewki, nie będą brane pod uwagę.

## Końcowa klasyfikacja

1. Mateusz Stefan KWAŚNICKI, kl. IV, III LO im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu, (nauczyciel: mgr Agnieszka Lewańska).
2. Maciej FIJAŁKOWSKI, kl. IV, XIII LO im. Marii Piotrowiczowej w Łodzi (nauczyciel: mgr Alicja Stelmach).
3. Michał Krzysztof JÓŻWIKOWSKI, kl. III, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: dr Elżbieta Zawistowska).
4. Adam Sławomir DZIOŁAK, kl. III, IV LO im. Hanki Sawickiej w Kielcach (nauczyciel: mgr Krystyna Dworecka).
5. Andrzej Tomasz GÖRLICH, kl. IV, V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie (nauczyciel: dr Jerzy Mucha).
6. Tomasz DORAU, kl. IV, IV LO im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu (nauczyciel: mgr Hanna Osicka).
7. Tomasz Wiktor KAZIMIERCZUK, kl. II, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (nauczyciel: mgr Barbara Lenert).
8. Marek Krzysztof MISZTAŁ, kl. III, II LO w Końskich (nauczyciel: mgr Robert Miształ).
9. Piotr POWAŁOWSKI, kl. III, V LO w Zielonej Górze (nauczyciel: mgr Józef Sozański).

10. Marcin Łukasz PILIPCZUK, kl. II, XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie (nauczyciel: dr Elżbieta Zawistowska).
11. Sebastian Andrzej PIECHOWIAK, kl. IV, ZS w Tarnowskich Górach (nauczyciel: mgr Aniela Napora).
12. Tomasz GUBIEC, kl. III, I LO im. Jędrzeja Śniadeckiego w Pabianicach (nauczyciel: mgr Anna Hartleb).
13. Dariusz Konrad KUŚMIEREK, kl. IV, XXX LO im. Jana Śniadeckiego w Warszawie (nauczyciel: dr Iwona Ziółkowska).
14. Bartłomiej KOCHANOWSKI, kl. IV, I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi (nauczyciel: mgr Hanna Szyburska).
15. Miron Jacek SADZIAK, kl. III, II LO w Opolu (nauczyciel: mgr Teresa Libura).
16. Jarosław Piotr WRONA, kl. III, I LO im. Mikołaja Kopernika w Krośnie (nauczyciel: mgr Grzegorz Depczyński).

### Wyróżnienia

- Mateusz Kwaśnicki (laureat) – za rozwiązanie zadania doświadczalnego.  
 Jakub Jasiński (finalista), I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi – za rozwiązanie zadania doświadczalnego.