



SPIS TREŚCI NUMERU 6 (325)

O kolorowaniu płaszczyzny
Renata Olma, Jacek Dymel

Zadania

Chemia w 17 sekund
Stanisław Mrówczyński

Po co obserwować meteory?
Arkadiusz Olech

List do Redakcji

Aktualności
(nie tylko) fizyczne

Mała Delta

Twierdzenie Kroneckera
Konrad Pióro

Klub 44

Patrz w niebo

Czerwiec

Gammalimatias

W następnym numerze:

W uścisku Erosa

Okladki i ilustracje: *Anna Ludwicka*

Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delty*
można znaleźć w portalu Eduseek
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

	Komitet Redakcyjny:	Redaguje kolegium w składzie:
str. 1	Andrzej Białynicki-Birula	Wiktor Bartol
	Bogdan Cichocki	Krzysztof Biesaga
str. 4	– wiceprzewodniczącą	Ewa Czuchry
	Krzysztof Ciesielski	Krystyna Kordos – sekr. red.
	Jan A. Gaj	Marek Kordos – red. nac.
str. 5	Piotr Goldstein	Tomasz Kwast
	Andrzej Hrynkiewicz	Anna Ludwicka
	Wiesław A. Kamiński	Anna Rudnik
str. 6	Marta Kicińska-Habior	Witold Sadowski
	Krzysztof Maślanka	Joanna Udalska
	Janusz Matkowski	Anna Wojtyra
str. 8	Andrzej Mąkowski	Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
	Zdzisław Pogoda	Adres Redakcji:
	Michał Różyczka	ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
str. 9	Konrad Rudnicki	tel. 853-59-61
	Grzegorz Sitarski	BARTOL@MIMUW.EDU.PL
str. 10	Andrzej Woszczyk	Skład systemem TeX wykonała Redakcja.
	Eligiusz Złotkiewicz	Wydrukowano
	Wiesław Żelazko – przewodniczącą	w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2001 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2001 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 2001 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

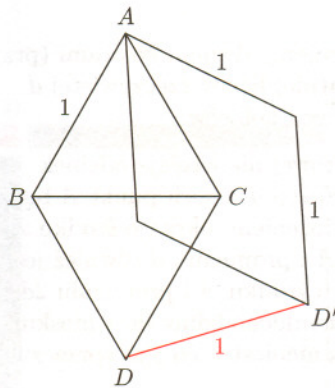
do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

W 1950 roku 18-letni student Uniwersytetu w Chicago, Edward Nelson, postawił problem: jaka jest minimalna liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania płaszczyzny w ten sposób, by żadne dwa punkty płaszczyzny oddalone o 1 nie były tego samego koloru? Liczbę tę nazywamy liczbą chromatyczną płaszczyzny. Mimo że od postawienia problemu minęło pięćdziesiąt lat, wiadomo jedynie, że liczba chromatyczna płaszczyzny jest większa od 3 i mniejsza od 8. Teraz właśnie to wykażemy.

1. Twierdzenie. Liczba chromatyczna płaszczyzny jest nie mniejsza niż 4.

Dowód. Przypuśćmy, że liczba chromatyczna płaszczyzny może być równa 3. Ponieważ żadne dwa punkty oddalone o 1 nie są tego samego koloru, każdy trójkąt równoboczny o boku 1 ma wierzchołki różnych kolorów. Każdy punkt płaszczyzny pokolorujemy jednym z trzech kolorów: czerwonym, niebieskim lub żółtym. Zaznaczmy na płaszczyźnie cztery punkty A, B, C, D położone tak, jak na rysunku 1.



Rys. 1

Trójkąty ABC i BCD są trójkątami równobocznymi o boku 1. Załóżmy, że punkt A jest pomalowany na czerwono. By każde dwa punkty odległe o 1 były różnych kolorów, punkty B i C muszą być innych kolorów niż punkt A . Możemy przyjąć, że punkt B jest niebieski, a punkt C żółty. Punkt D zatem został na pewno pomalowany na czerwono. Obróćmy teraz romb $ABCD$ dookoła punktu A o taki kąt, aby obrazem punktu D był punkt D' , który jest oddalony od punktu D o 1. Punkt D' musi być pomalowany na czerwono (co wynika z rozumowania analogicznego jak dla punktu D), więc znaleźliśmy dwa punkty odległe o 1, które są tego samego koloru. Nie można zatem pomalować płaszczyzny trzema kolorami tak, aby żadne dwa punkty oddalone o 1 nie były tego samego koloru. ■

2. Twierdzenie. Liczba chromatyczna płaszczyzny jest równa co najwyżej 7.

Dowód. Całą płaszczyznę podzielmy na kwadraty według schematu przedstawionego na rysunku 2. Każdy kwadrat ma przekątną długości 1.



Rys. 2

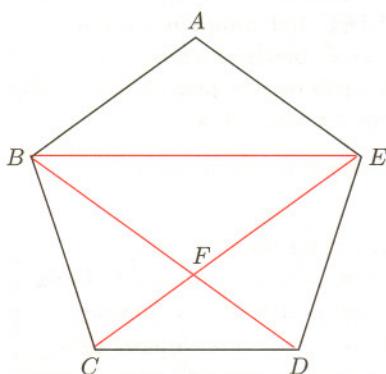
Każdy kwadrat został pomalowany jednym z siedmiu kolorów oznaczonych cyframi od 1 do 7. Górna i prawa krawędź kwadratu jest pomalowana w kolorze kwadratu z wyjątkiem górnego lewego i dolnego prawego rogu. Bez większego trudu można zauważyć, że nie ma na tej płaszczyźnie dwóch punktów oddalonych o 1 i pomalowanych tym samym kolorem. ■

Te dwa rezultaty przedstawione powyżej wyznaczają całą dotychczasową wiedzę na temat liczby chromatycznej płaszczyzny. Mimo badań prowadzonych od pięćdziesięciu lat wiadomo jedynie, że liczba chromatyczna płaszczyzny nie jest większa niż 7 i nie jest mniejsza niż 4. Problemem otwartym nadal pozostaje wyznaczenie liczby chromatycznej płaszczyzny. A może właśnie Ty, Czytelniku, po zastanowieniu znajdziesz rozwiązanie tego problemu?

Mimo iż nie udało się uzyskać rozwiązania w przypadku ogólnym, istnieją liczne wyniki przy dodatkowych założeniach. Teraz przedstawimy przykład jednego z nich.

3. Twierdzenie. Płaszczyzna pokolorowana czterema kolorami zawiera dwa punkty o tym samym kolorze w odległości 1 lub $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (stosunek złotego podziału).

Dowód. Narysujmy na czterokolorowej płaszczyźnie pięciokąt foremny o boku długości 1 (rys. 3).



Rys. 3

Oznaczmy przez x długość przekątnej. Wykażemy, że $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Odcinek BF ma długość 1 (bo czworokąt $ABFE$ jest rombem), a trójkąty BEF i DFC są

organizuje

Czwarte Ogólnopolskie

Warsztaty

dla Młodych Matematyków

w dniach 20–27 września 2001 roku.

Tym razem są one

poświęcone

ANALIZIE ZESPOŁONEJ

Warsztaty odbywają się pod opieką Katedry Analizy Matematycznej Uniwersytetu Jagiellońskiego, reprezentowanej przez prof. dr. hab. Józefa Siciaka, prof. dr. hab. Marka Jarnickiego i dr. hab. Włodzimierza Zwonka.

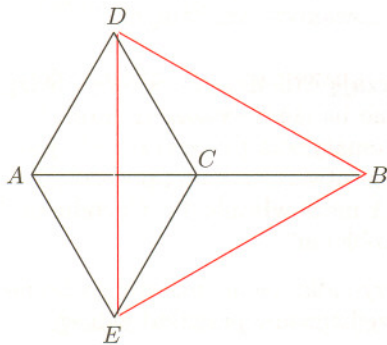
Tematyka warsztatów będzie obejmować m.in.:

- przedłużanie funkcji analitycznych,
- zagadnienia ekstremalne w analizie wielu zmiennych,
- teorię pluripotencjału,
- metryki holomorficzne niezmiennicze.

Wszelkie dodatkowe informacje można uzyskać na stronie Koła pod adresem

<http://omega.im.uj.edu.pl>

Zgłoszenia uczestnictwa prosimy nadsyłać do końca czerwca 2001 roku.



Rys. 4

jednokładne, więc

$$\frac{BF}{FD} = \frac{BE}{CD}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{x-1} = \frac{x}{1}.$$

Jedynym dodatnim rozwiązaniem równania $x(x-1) = 1$ jest $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Pozostaje zauważyć, że dwa spośród pięciu wierzchołków pięciokąta są tego samego koloru. Te dwa wierzchołki albo leżą na jednym boku i ich odległość jest równa 1, albo na jednej przekątnej i ich odległość jest równa $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. ■

Trójkąty monochromatyczne

Pod pojęciem trójkąta monochromatycznego rozumiemy trójkąt, którego wszystkie wierzchołki są tego samego koloru. Przedstawimy kilka problemów związanych z trójkątami monochromatycznymi.

4. Lemat. Wykazać, że jeżeli płaszczyznę pokolorujemy dwoma kolorami (przy wykorzystaniu obu kolorów), to dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej d można znaleźć odcinek o długości d i końcach różnych kolorów.

Dowód. Przypuśćmy, że na płaszczyźnie dwukolorowej nie istnieje odcinek o różnokolorowych końcach, którego długość jest równa d . Niech punkt A będzie pomalowany na niebiesko. Zgodnie z przyjętym założeniem, okrąg o środku A i promieniu d jest niebieski. Zatem koło o środku A i promieniu d również jest całe niebieskie. Stąd łatwo wywnioskować, iż koło o środku A i promieniu $2d$ jest pokolorowane na niebiesko. Postępując analogicznie, dochodzimy do wniosku, że cała płaszczyzna została pokolorowana tylko na niebiesko, co jest sprzeczne z założeniami. ■

W 1998 roku na egzaminie wstępnym na informatykę na UJ pojawiło się następujące

5. Zadanie. Płaszczyznę kolorujemy dwoma kolorami. Czy każda liczba rzeczywista dodatnia jest odległością między dwoma punktami o tym samym kolorze?

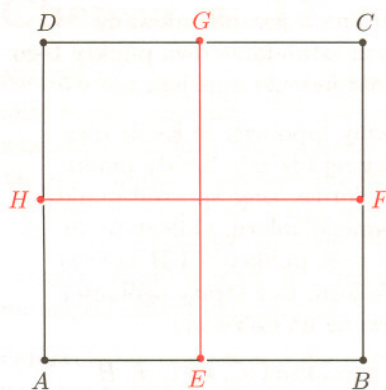
Rozwiązanie. Rozważmy trójkąt równoboczny o boku długości d . Pewne dwa wierzchołki muszą być tego samego koloru. Tak więc dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej d znajdziemy dwa punkty tego samego koloru odległe o d . ■

6. Zadanie (z Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych w roku 1989). Punkty płaszczyzny pokolorowane są dwoma kolorami. Udowodnić, że istnieje trójkąt równoboczny, którego wszystkie wierzchołki są tego samego koloru.

Rozwiązanie. Jeżeli wszystkie punkty płaszczyzny pomalujemy na jeden kolor, to poszukiwany trójkąt istnieje. Przyjmijmy, że punkty płaszczyzny pokolorowane zostały na niebiesko i czerwono. Na płaszczyźnie wybieramy czerwony punkt A i niebieski punkt B w ten sposób, aby odcinek AB miał długość 2 (na podstawie lematu wiemy, że odcinek taki istnieje). Możemy założyć, że punkt C , który jest środkiem odcinka AB , ma kolor np. czerwony. Wybieramy punkty D i E tak, aby czworokąt $DAEC$ był rombem o boku długości 1. Jeżeli przynajmniej jeden z punktów D, E będzie czerwony, to otrzymamy czerwony trójkąt ACD lub ACE . W przeciwnym przypadku trójkąt DEB będzie niebieskim trójkątem równobocznym o boku $\sqrt{3}$. ■

7. Wniosek. Każda dwukolorowa płaszczyzna zawiera monochromatyczny trójkąt równoboczny o boku 1 lub $\sqrt{3}$. ■

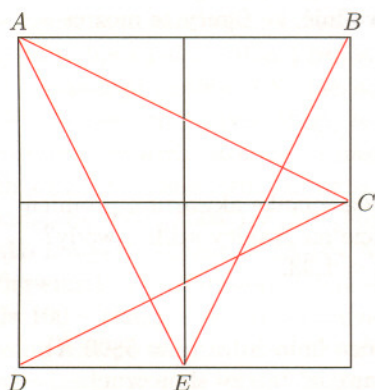
W związku z wnioskiem rodzi się pytanie: czy na każdej dwukolorowej płaszczyźnie istnieje monochromatyczny trójkąt równoboczny o boku 1? Otóż odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Wystarczy podzielić płaszczyznę na równoległe, pionowe pasy (każdy o szerokości $\frac{\sqrt{3}}{2}$). Potem malujemy te pasy dwoma kolorami na zmianę, przy czym lewy brzeg należy do pasa, a prawy – nie. Łatwo zauważyć, że tak pokolorowana płaszczyzna nie zawiera równobocznego trójkąta monochromatycznego o boku 1.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

8. Zadanie (z Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych w roku 1992). Rozważamy wszystkie trójkąty prostokątne, których trzy wierzchołki leżą na brzegu kwadratu. Wyznaczyć najmniejszą liczbę kolorów, dla której istnieje takie pokolorowanie kwadratu, że żaden z rozważanych trójkątów nie ma wszystkich wierzchołków w jednym kolorze.

Rozwiązanie. Najpierw wykażemy, że dwa kolory: niebieski i czerwony nie wystarczą do pokolorowania kwadratu. Oznaczmy wierzchołki kwadratu $ABCD$. Punkty E, F, G, H są, odpowiednio, środkami boków AB, BC, CD, DA . Spośród punktów A, B, E przynajmniej dwa są tego samego koloru, powiedzmy – niebieskiego.

Przypuśćmy, że A i B są niebieskie. Wówczas punkty: H, D, C, F nie mogą być niebieskie. Ale wtedy powstaje trójkąt prostokątny HDC , którego wierzchołki są czerwone. Tak więc pojawił się niedozwolony trójkąt. Przypuśćmy teraz, że na niebiesko są pomalowane punkty A i E . Punkty D, G, H są więc czerwone, czyli tworzą monochromatyczny trójkąt prostokątny GDH . Zatem dwa kolory nie wystarczą, ale trzy – tak. Pomalujmy odcinek AB bez końców kolorem czerwonym. Bok AD bez końca D oraz bok DC bez końców malujemy na czarno; bok BC bez końca C malujemy na białą. Wierzchołki D i C kolorujemy na czerwono (rys. 6).

Trójkąt prostokątny o czerwonych wierzchołkach nie istnieje, gdyż punkty A i B nie są czerwone. Trójkąt prostokątny o czarnych wierzchołkach także nie istnieje, ponieważ wszystkie czarne punkty leżą na bokach AD i DC , ale punkt D nie jest czarny. Trójkąta prostokątnego o białych wierzchołkach również nie ma, gdyż wszystkie białe punkty leżą na boku BC . ■

W 1999 roku, w zawodach stopnia pierwszego Olimpiady Matematycznej, pojawiło się następujące

9. Zadanie. Każdy punkt okręgu jest pomalowany jednym z trzech kolorów. Dowieść, że pewne trzy punkty jednego koloru są wierzchołkami trójkąta równoramiennego.

Rozwiązanie. Na okręgu wybieramy trzynaście punktów, które tworzą trzynastokąt foremny. Wówczas nasze zadanie jest równoważne zadaniu: udowodnić, że jeżeli każdy wierzchołek trzynastokąta foremnego pomalujemy jednym z trzech kolorów, to pewne trzy punkty utworzą równoramienny trójkąt monochromatyczny. Jeżeli każdy z trzynastu punktów pomalujemy jednym z trzech kolorów, to na pewno znajdziemy co najmniej pięć punktów, które zostały pomalowane tym samym kolorem. Do rozwiązania naszego zadania wystarczy zatem sprawdzić, że wśród dowolnych pięciu wierzchołków trzynastokąta foremnego znajdziemy takie trzy, które będą wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Ten krok pozostawiamy Czytelnikowi. ■

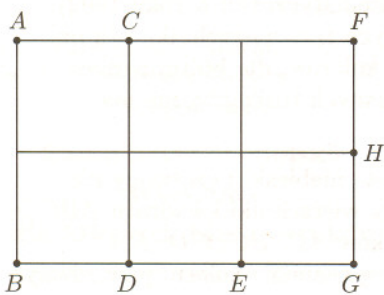
Polityka na kolorowo

Na Olimpiadzie Matematycznej w Colorado w 1998 roku pojawiło się zadanie nawiązujące do systemu politycznego Stanów Zjednoczonych Ameryki.

10. Zadanie. Demokraci i Republikanie wypełnili Plac Lafayette'a o wymiarach 2 na 2. Wykazać, że pewnych dwóch członków tej samej partii znajduje się na Placu w odległości co najmniej $\sqrt{5}$.

Rozwiązanie. Pokolorujmy każdy punkt kwadratu o wymiarach 2 na 2 jednym z kolorów: czerwonym lub niebieskim. Postawmy hipotezę: dowolne dwa punkty tego samego koloru są w odległości mniejszej niż $\sqrt{5}$. Każdy z odcinków DC, CA, AE, EB ma długość $\sqrt{5}$. Przyjmijmy, że punkt D jest pomalowany na czerwono. Odległość DC jest równa $\sqrt{5}$, więc punkt C musi być pomalowany na niebiesko. Rozumując analogicznie, wykazujemy, że punkt A jest czerwony, punkt E – niebieski, a punkt B – czerwony. Znaleźliśmy zatem dwa punkty czerwone: D i B , których odległość jest większa od $\sqrt{5}$ i otrzymaliśmy sprzeczność. ■

A teraz rozszerzmy ten problem.



Rys. 8

11. Zadanie. Prostokątny sztandar o wymiarach 2 na 3 jest pomalowany trzema kolorami. Udowodnić, że znajdziemy na tym sztandarze dwa punkty tego samego koloru na tym sztandarze, których odległość jest nie mniejsza niż $\sqrt{5}$.

Rozwiązanie. Podobnie jak w zadaniu 9, postawmy hipotezę, że każde dwa punkty tego samego koloru leżą w odległości mniejszej niż $\sqrt{5}$. Każdy punkt płaszczyzny został pomalowany jednym z trzech kolorów, więc spośród punktów: A, B, F i G (rys. 8) pewne dwa muszą być tego samego koloru. Odległość dwóch punktów tego samego koloru jest mniejsza od $\sqrt{5}$, więc punkty A i B są tego samego koloru lub punkty F i G są tego samego koloru. Bez straty ogólności możemy przyjąć, iż punkty A i B zostały pomalowane na czerwono.

Jeżeli zatem punkty A i B są czerwone, to każdy z punktów C, D, E, F, H musi być pomalowany na niebiesko lub zielono (bo odległość każdego z tych punktów od punktu A lub punktu B jest nie mniejsza niż $\sqrt{5}$). Wykorzystując rozwiązanie zadania 10, możemy stwierdzić, że punkty D i F są tego samego koloru. Tak więc otrzymaliśmy sprzeczność z hipotezą. ■

A teraz Czytelnik może sprawdzić swoje siły i samodzielnie rozwiązać następujące

12. Zadanie. Każdy punkt prostokąta o wymiarach 2 na 4 został pomalowany jednym z czterech kolorów. Wykazać, że istnieją dwa punkty tego samego koloru, których odległość jest nie mniejsza niż $\sqrt{5}$.

Szampan jest dwukrotnie poddawany procesowi fermentacji. Drugi raz już w butelce, skutkiem czego pojawia się niepożądany osad z drożdży. Zanim jednak szlachetny trunek pójdzie na sprzedaż, osad należy usunąć. Jak to zrobić? Jest to tym trudniejsze, że szampan znajduje się pod ciśnieniem kilku atmosfer. Robi się to tak: butelki ustawia się prawie pionowo (do góry dnem), a następnie co pewien czas lekko potrząsa i obraca. Osad powoli gromadzi się w szyjce butelki. Teraz końcówkę szyjki zamraża się do temperatury -20°C . Powstaje korek lodowy, w którym zbiera się cały osad. Następnie butelkę otwiera się i korek zostaje wypchnięty pod ciśnieniem. Oczywiście, należy to robić bardzo ostrożnie, aby nie utracić zbyt wiele cennego wina.



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 955. Udowodnić, że maksymalna liczba wież, które można rozstawić na szachownicy $n \times n$ tak, aby każda z nich była bita przez co najwyżej jedną z pozostałych, wynosi $\lfloor \frac{4n}{3} \rfloor$.

Rozwiązanie na str. 11

M 956. Znaleźć maksymalną liczbę hetmanów, które można rozstawić na szachownicy 8×8 tak, aby każdy z nich był bity przez co najwyżej jednego z pozostałych.

Rozwiązanie na str. 7

M 957. Na szachownicy 100×100 stoi 20 figur (mogą być różne, nawet niekoniecznie „szachowe”). Wiadomo, że każda z figur, stojąc na dowolnym polu szachownicy, bije nie więcej niż 20 pól. Udowodnić, że figury te można przestawić tak, aby wzajemnie się nie biły.

Rozwiązanie na str. 7

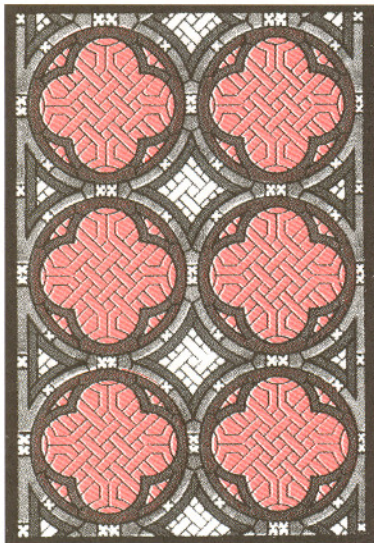
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 549. Pod jakim kątem powinien padać na boczną ściankę akwarium promień światła, aby nastąpiło całkowite wewnętrzne odbicie na granicy szkła i wody? Współczynnik załamania szkła $n_1 = 1,5$, wody $n_2 = 1,33$.

Rozwiązanie na str. 6

F 550. Zauważono, że na fotografiach widma Słońca linia żółta ($\lambda = 5890 \text{ \AA}$) jest przesunięta o $0,08 \text{ \AA}$ dla lewej oraz prawej krawędzi tarczy słonecznej. Znaleźć prędkość liniową obrotu powierzchni Słońca na równiku.

Rozwiązanie na str. 13



Niels Bohr – jeden z największych fizyków – miał opinię nudziarza. Chemicy jądrowi wykonali właśnie arcytrudny eksperyment, aby przekonać się, że sztucznie otrzymany 107. pierwiastek, nazwany imieniem wielkiego uczonego, jest podobnie nieciekawym przedstawicielem manganowców. Przy okazji wykazali jednak, że i najcięższe pierwiastki podlegają prawu okresowości.

Odkrycie tego prawa w 1869 roku stanowiło punkt zwrotny w historii chemii. Dymitr Mendelejew zbudował stosunkowo prosty układ, szeregując pierwiastki wedle ich wzrastającej liczby masowej. Później okazało się, że to liczba atomowa, równa liczbie elektronów w atomie, nie zaś masowa, decyduje o własnościach pierwiastka. Elektrony zapełniają kolejne powłoki. Na pierwszej mogą znajdować się dwa elektrony, na drugiej osiem, na trzeciej osiemnaście, itd. Nie wchodząc w szczegóły, można powiedzieć, że pierwiastki, których atomy mają podobnie zapełnione zewnętrzne powłoki, tworzą grupy o zbliżonych własnościach. Tak np. do pierwszej grupy należą: wodór, lit, sód, potas, rubid, cez i frans – wszystkie one mają tylko jeden elektron na ostatniej powłoce. Siódmą grupę tworzą: mangan, technet, ren i nilsbohr – wspomniany na wstępie 107. pierwiastek, poświęcony wielkiemu Duńczykowi. Pierwiastek obecny w związku chemicznym można zwykle zastąpić innym należącym do tej samej grupy. Zamieniając np. w siarczku potasu siarkę na tlen, otrzymamy tlenek potasu.

Tablica Mendelejewa nie tylko porządkowała znane pierwiastki, lecz przewidywała istnienie tych jeszcze niewyodrębnionych i określała ich właściwości. Kolejno odkrywane nowe pierwiastki w pełni potwierdzały prawo okresowości; te najcięższe, które w przyrodzie nie występują, lecz są wytwarzane sztucznie, nie stanowiły wyjątku. Pierwszych jedenaście otrzymanych laboratoryjnie pierwiastków od neptunu, będącego 93. elementem tablicy Mendelejewa, po lorens, stanowiący jej 103. element, wydłużyło listę aktywnowców. Owe sztucznie wytworzone pierwiastki, choć nietrwałe, żyją stosunkowo długo. Okres połowicznego zaniku, czyli czas, w którym rozpadowi ulega połowa jąder z danej próbki, wynosi np. dla najtrwalszego izotopu 100. pierwiastka, tj. fermu, ok. 100 dni. Jest on na tyle długi, że można zgromadzić dostatecznie wiele atomów, a następnie przebadać ich własności chemiczne. Zresztą, to one stanowiły podstawę identyfikacji wyodrębnionych substancji jako nowych elementów tablicy Mendelejewa. Pierwiastki transfermowe – o numerach wyższych niż 100 – okazały się dużo bardziej nietrwałe. Okres połowicznego zaniku najdłużej żyjącego izotopu 103. pierwiastka wynosi tylko 3 minuty, a 104. zaledwie dziesiąte części sekundy. Jeszcze krócej – 9 tysięcznych

sekundy – żyły pierwsze zaobserwowane w 1984 roku w Darmstadt w Niemczech jądra nilsbohru właśnie.

Warto tutaj wspomnieć, że lista znanych pierwiastków istotnie się wydłużyła w ostatnich latach.

W listopadzie 1994 roku doniesiono z Darmstadt o obserwacji 110., zaraz potem 111., a w lutym 1996 roku 112. elementu układu okresowego. W styczniu 1999 roku fizykom z Dubnej pod Moskwą udało się zaobserwować pierwiastek o numerze 114, w czerwcu zaś tego samego roku w Berkeley w Kalifornii ogłoszono, że w eksperymencie przeprowadzonym zgodnie z sugestiami polskiego fizyka, Roberta Smolańczuka, powstały jądra atomowe pierwiastków 116. i 118. W przypadku wszystkich tych odkryć rejestrowano podczas wielotygodniowych pomiarów zaledwie kilka czy kilkanaście atomów nowych pierwiastków.

Liczba elektronów w atomie, decydująca o jego pozycji w układzie okresowym, jest ściśle równa liczbie protonów w jądrze. Natomiast liczba neutronów – drugiego obok protonów składnika jąder atomowych – nie jest ściśle określona. Dany pierwiastek może więc występować w postaci kilku czy nawet kilkudziesięciu izotopów różniących się właśnie zawartością neutronów, a więc i masą. Z tego powodu liczba masowa, wbrew temu, co początkowo sądził Mendelejew, nie decyduje o własnościach chemicznych. Jedne izotopy danego pierwiastka bywają trwałe, inne zaś nietrwałe, tzn. po upływie pewnego czasu samorzutnie zamieniają się w inne jądra. Chociaż wspomniany pierwszy odkryty izotop nilsbohru był bardzo nietrwały, okazało się, że można wytworzyć izotop zawierający 160 neutronów, który żyje 17 sekund. Czas ten był dostatecznie długi, aby prawo okresowości poddać jeszcze jednej próbie.

W Instytucie Paula Scherrera w Villigen w Szwajcarii zbudowano układ, w którym rozpędzone jądra neonu zderzały się z atomami berkelu. W jednym zderzeniu na wiele milionów powstawało jądro nilsbohru, które trafiało do przepływowej komory z gorącym tlenem i oparami kwasu solnego. Gazową mieszaninę następnie gwałtownie ochładzano. Jeśli nilsbohr nie związałyby się z innymi atomami, szybko opadłby na dno komory. Jeśli natomiast utworzyłby, tak jak mangan, technet czy ren, molekułę z tlenem i chlorem, byłby w gazie unoszony. Właśnie tę drugą sytuację zaobserwowano. Prowadząc eksperyment nieprzerwanie przez miesiąc, udało się wytworzyć zaledwie sześć atomów nilsbohru. Wszystkie one jednak przepłynęły przez chemiczny separator, utworzywszy cząsteczkę z tlenem i chlorem. Później rozpadły się, zostawiwszy widomy znak swego istnienia. Potwierdzając przynależność nilsbohru do siódmej grupy, pokazano, że i najcięższe pierwiastki pasują jak ulał do konstrukcji Mendelejewa.

Odpowiedź na pytanie postawione w tytule mogłaby być bardzo krótka. Obserwacje meteorów są proste, relaksują, zbliżają do natury, pozwalają bezpośrednio obcować z pięknym nocnym niebem i nie wymagają żadnego specjalistycznego sprzętu. To już wystarczająco obfity zestaw zalet, aby pomyśleć o nich poważnie. Okazuje się jednak, że obserwacje meteorów mają jeszcze jedną, najważniejszą chyba, zaletę – wykonane nawet amatorskimi metodami są naukowo użyteczne.

Co więc wynika ze zwykłej obserwacji meteorów? Zanim odpowiemy na to pytanie, musimy powiedzieć kilka słów o tym, co rozumiemy pod pojęciem zwykłej obserwacji. Cały poniższy tekst będzie dotyczył więc wizualnych obserwacji, czyli takich, których dokonujemy przy użyciu „gołego” oka. Podczas obserwacji, oprócz opisu warunków atmosferycznych (dobrze scharakteryzowanych przez tzw. widoczność graniczną LM , czyli jasność najślabszych gwiazd dostrzegalnych gołym okiem), musimy dla każdego obserwowanego zjawiska określić jasność i prędkość, a także naszkicować trasę na specjalnej mapie nieba o odwzorowaniu gnomonicznym. Prędkość meteoru i jego trasa pozwolą na określenie przynależności do aktywnych danej nocy radiantów. Liczba odnotowanych meteorów i ich jasność okażą się niezbędne do powiedzenia czegoś o rozkładzie masy w strumieniu meteoroidów i gęstości przestrzennej cząstek w przestrzeni kosmicznej.

Bardzo łatwą do oceny wielkością jest także kolor obserwowanego zjawiska. Określając go, jesteśmy w stanie powiedzieć coś o składzie chemicznym meteoroidów wchodzących w ziemską atmosferę. Najczęściej będziemy obserwowali meteory białe lub żółte, ale zdarzają się też zielone, czerwone, niebieskie, pomarańczowe, jak i mieszane, np. biało-niebieskie czy biało-czerwone. Kolor zielony sugeruje dużą zawartość magnezu, pomarańczowy i żółty sodu, a mniej intensywne kolory, na przykład żelazo i wapń.

Zacznijmy jednak od rozkładu jasności obserwowanych zjawisk. Sam w sobie jest on jeszcze mało przydatny. Wiadomo bowiem, że w kiepskich warunkach trudno będzie zobaczyć meteory o małych jasnościach. Z drugiej strony bolidy o jasności Wenus zaobserwujemy bez względu na to, czy prowadzimy obserwacje w centrum obfitości oświetlonego miasta, czy też na wsi z dala od latarni miejskich. Musimy więc w obserwowanym rozkładzie jasności wziąć pod uwagę warunki panujące podczas obserwacji. Robimy to, używając wyznaczonych empirycznie prawdopodobieństw odnotowania meteoru w danych warunkach atmosferycznych. Jako wynik uzyskamy prawdziwy rozkład jasności $N(m)$. Kolejną potrzebną nam wielkość $\Phi(m)$ definiujemy jako liczbę meteorów o jasności m magnitudo i jaśniejszych. Za pomocą wzoru możemy to zapisać następująco

$$\Phi(m) = \sum_{k=-\infty}^m N(k).$$

Teraz już zdefiniujemy współczynnik masowy r :

$$r = \frac{\Phi(m+1)}{\Phi(m)}.$$

Wielkość ta jest stała w przedziale jasności meteorów obserwowanych wizualnie, tzn. dla m z przedziału od -5 do 5 mag. Mówiąc inaczej, liczba meteorów o jasności $m+1$ jest zwykle r razy większa od liczby meteorów o jasności m . Dla rojów meteorów r zawiera się zwykle pomiędzy 2 a 3 , a dla meteorów sporadycznych wynosi około 3 . Ciekawą własnością współczynnika r jest to, że przeważnie w maksimum aktywności roju osiąga on swoje minimum, co świadczy o tym, że możemy wtedy obserwować dużo jasnych meteorów (spowodowanych przez masywne cząstki).

Znając już r , a także określając podczas obserwacji liczbę n meteorów obserwowanych w ciągu godziny, widoczność graniczną LM , a także znając wysokość h radiantu roju nad horyzontem, możemy zdefiniować Zenitalną

Równoleżniki na tej mapie są hiperbolami kreślonymi np. przez koniec cienia pionowego słupek (gnomonu), rzucanego na poziomą płaszczyznę. Tylko na takiej mapie tory meteorów (na niebie: luki kół wielkich) są odcinkami prostych.



Rozwiązanie zadania F 549.
Z prawa załamania mamy, że

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_1,$$

gdzie α jest kątem padania, a β załamania. Aby nastąpiło całkowite wewnętrzne odbicie na granicy szkła i wody, musi być spełniony warunek

$$\sin \beta = \frac{n_2}{n_1}.$$

Stąd mamy, że kąt padania powinien spełniać warunek

$$\sin \alpha = n_1 \sin \beta = n_1 \frac{n_2}{n_1} = 1,33,$$

czyli $\sin \alpha > 1$, a więc taki kąt nie istnieje.

Nazwa współczynnika bierze się stąd, że w przypadku meteorów z jednego strumienia, poruszających się z taką samą prędkością, parametr r określa też rozkład masy cząstek.

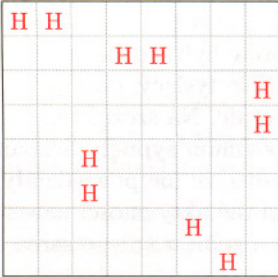




$$ZHR = \frac{n \cdot r^{6,5-LM}}{\sin h}$$

Rozwiązanie zadania M 956.

Oczywiście, szukana maksymalna liczba dla hetmanów jest nie większa niż owa liczba dla wień. Z zadania M 955 wynika więc, że liczba ta jest nie większa niż $\left\lfloor \frac{4 \cdot 8}{3} \right\rfloor = 10$. Na rysunku pokazano, jak można rozmieścić 10 hetmanów w żądany sposób.

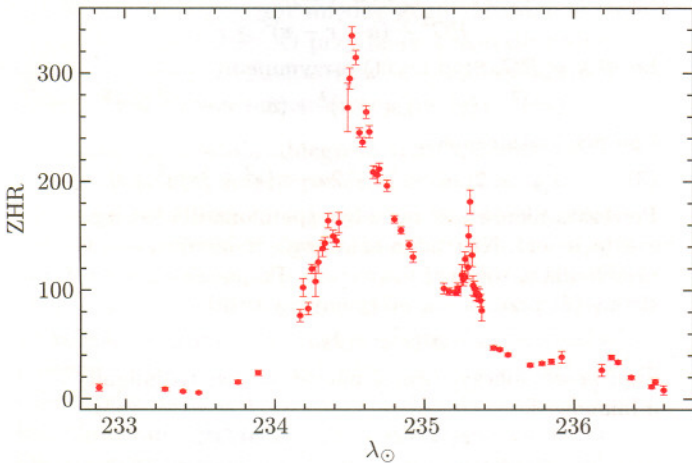


Mówiąc obrazowo, ZHR określa nam liczbę meteorów, jaką odnotowałyby jeden obserwator w ciągu godzinnej obserwacji, podczas której widoczność graniczna wynosiła 6,50 mag, a radiant roju był w zenicie.

Jaki użytek możemy zrobić z wartości r i ZHR? Oto przykład z życia wzięty. Leonidy znane są z deszczów meteorów, które pojawiają się z 33-letnią okresowością w latach, kiedy przez perihelium przechodzi kometa macierzysta tego roju – 55P/Tempel-Tuttle. 4 marca 1997 roku zaobserwowano kolejny powrót tej komety, która przeszła przez perihelium w końcu lutego 1998 roku.

W tym momencie wszyscy zastanawiali się, co będzie działo się w nocy z 17 na 18 listopada 1998 roku, kiedy Ziemia wpadnie w bardzo świeży pył wyrzucony z komety kilka miesięcy wcześniej. Maksymalnej aktywności oczekiwano, jak zwykle, w momencie maksymalnego zbliżenia Ziemi i orbity komety, co miało nastąpić 17 listopada między godziną 19 a 21 UT. Moment ten był bardzo korzystny dla obserwatorów we wschodniej Azji, nic więc dziwnego, że wielu europejskich miłośników astronomii wybrało się na wycieczki do Chin czy Mongolii.

Leonidy, jak każdy rój meteorów, uwielbiają jednak płatać niespodzianki. Nie inaczej było w roku 1998. Popatrzmy na rysunek, na którym mamy przedstawioną aktywność roju w listopadzie 1998 roku. Widać z niego bardzo



wyraźnie, że maksimum odnotowano w momencie o długości ekliptycznej Słońca $\lambda_{\odot} = 234^{\circ}517$ (co odpowiada godzinie 1:30 UT w nocy z 16 na 17 listopada) z $ZHR = 337 \pm 8$. Maksimum to wystąpiło więc około 18 godzin wcześniej niż oczekiwano! Cierpliwi obserwatorzy, którzy spoglądali w niebo w okolicach 19–21 UT także nie mogli narzekać. Dokładnie o godzinie 20:30 UT ($\lambda_{\odot} = 235^{\circ}31$) ZHR wyniosła 184 ± 11 .

Jak interpretować te obserwacje? Pomocna okazała się w tym względzie analiza współczynnika masowego r . Okazało się, że w pierwszym, bardzo wysokim i niespodziewanym maksimum, obserwowano w zasadzie tylko zjawiska jasne i bolidy, a prawie wcale nie odnotowano meteorów bardzo słabych.

Współczynnik r wyniósł wtedy bowiem tylko $1,19 \pm 0,02$. W drugim maksimum r podskoczył do poziomu 2,0. Tak rekordowo niska wartość r w pierwszym maksimum świadczy o tym, że związane jest ono z materiałem bardzo starym. Dokładne rachunki teoretyczne wykazały, że najprawdopodobniej materiał, który był odpowiedzialny za tę miłą niespodziankę, został wyrzucony z komety w XIV wieku. Od tego czasu wiatr słoneczny i ciśnienie promieniowania wymiotły z niego najlżejsze cząstki i w 1998 roku, w trakcie spotkania z Ziemią, w naszą atmosferę wpadły tylko meteoroidy najcięższe, dające w efekcie zjawiska bardzo jasne i bolidy. Wszystkie rachunki teoretyczne modelujące aktywność Leonid uwzględniały, jak dotychczas, cząstki wyrzucone z komety w ciągu ostatnich 200 lat. Nikt więc nie przewidział maksimum związanego z tak starym materiałem i dlatego było ono tak dużą niespodzianką.

W drugim maksimum, które wystąpiło mniej więcej w momencie największego zbliżenia orbity komety i Ziemi, słabych meteorów było już bardzo dużo, co świadczy o młodym wieku materiału, w który Ziemia wtedy wpadła.

**Rozwiązanie zadania M 957.**

Rozważmy wszystkie możliwe rozstawienia figur na naszej szachownicy. Oszacujemy część p tych rozstawień, dla których pewna figura bije drugą (tak więc $0 \leq p \leq 1$). Nietrudno oszacować część rozstawień, dla których dana figura A bije daną figurę B : dla dowolnego położenia figury A , dla figury B istnieje $100^2 - 1 = 9999$ wolnych pól, z których co najwyżej 20 znajduje się pod biciem ze strony A ; tak więc część ta jest nie większa niż $\frac{20}{9999}$. Ponieważ zaś liczba par (uporzędkowanych) figur (A, B) wynosi $20 \cdot 19 = 380$, więc $p \leq 380 \cdot \frac{20}{9999} < 1$, czyli rozstawienia, dla których żadna figura nie bije innej, istnieją.

Korzystając z ZHR i r , jesteśmy w stanie powiedzieć coś o gęstości przestrzennej meteoroidów z roju Leonid w 1998 roku. Zajmijmy się najpierw cząstkami cięższymi od $2,2 \cdot 10^{-5}$ g (czyli tymi, które mogą spowodować zjawiska jaśniejsze od 6,5 mag). W pierwszym i wysokim maksimum było ich około 60 na sześcian o krawędzi 1000 km. O dziwo, w drugim, niższym, jeśli chodzi o ZHR,



maksimum, gęstość przestrzenna wyniosła aż 116 cząstek na taki sam sześciąt! Wynika więc, że z fizycznego punktu widzenia wyższe (obfitsze w cząstki) było drugie maksimum, czyli spowodowane przez młody materiał i które wystąpiło tuż po największym zbliżeniu orbit Ziemi i komety.

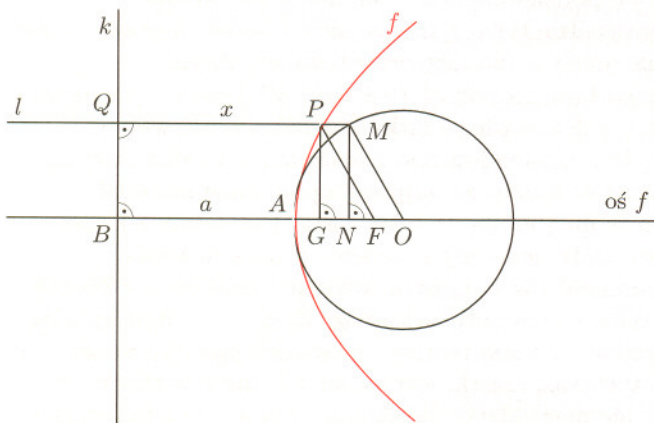
Gdy spojrzymy jednak na cząstki cięższe od 1 mg (powodujące zjawiska jaśniejsze od 2,7 mag), okaże się, że pierwsze maksimum charakteryzuje się gęstością przestrzenną 13 cząstek na sześciąt o boku 1000 km, a drugie jest ponad dwukrotnie niższe. Potwierdza to całkowicie fakty, które znamy już dzięki analizie współczynnika r , tzn. że w pierwszym maksimum obserwowaliśmy głównie cząstki masywne, a w drugim głównie lekkie.

Pomimo tak ciekawych wyników obserwatorzy meteorów byli trochę zawiedzeni. Trzysta meteorów na godzinę to nie kilka czy kilkanaście tysięcy, do których Leonidy w XIX i XX wieku zdążyły już nas przyzwyczaić. Na szczęście, w roku 1999 Leonidy pokazały, na co je stać, i w maksimum sypnęły liczbami godzinnymi przekraczającymi 3000. Wydaje się ponadto, że nie powiedziały one ostatniego słowa i w latach 2001–2002 możemy oczekiwać aktywności nawet rzędu 10 tysięcy meteorów na godzinę! Czego i Wam, i sobie z całego serca życzę!

Szanowna Redakcjo,

przedstawiam rozwiązanie problemu, dotyczącego środka krzywizny krzywej drugiego stopnia, postawionego w artykule „Tylko Pitagoras” w *Delcie* 1/2001.

Niech f będzie parabolą, elipsą albo hiperbolą. Wprowadzamy oznaczenia: k – kierownica krzywej f , F – jej ognisko, A – jej wierzchołek, B – punkt przecięcia osi krzywej f z kierownicą, O – środek okręgu stycznego do f w punkcie A , r – promień tego okręgu, M – dowolny punkt leżący na lewym półokręgu, l – prosta prostopadła do prostej k przechodząca przez punkt M , P – punkt przecięcia prostej l z krzywą f , Q – punkt przecięcia prostych l i k , G – rzut prostokątny punktu P na oś krzywej f , N – rzut prostokątny punktu M na oś krzywej f , $AB = a$, $PF/PQ = s$, $AF/AB = s$, $QP = x$ (a , s i x to dane liczby dodatnie).



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PGF mamy $PG^2 + GF^2 = PF^2$, czyli $PG^2 + (BF - QP)^2 = PF^2$, $PG^2 + (BA + AF - QP)^2 = PF^2$,

$$(1) \quad PG^2 + (a + sa - x)^2 = (sx)^2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta MNO mamy $MN^2 + NO^2 = MO^2$, czyli

$$(2) \quad MN^2 + (BO - QM)^2 = MO^2.$$

Warunkiem na to, aby okrąg $o(O, r)$ nie przecinał krzywej f , jest nierówność $QM \geq QP$ (punkt P leży

między punktami Q i M). Stąd i z (2) otrzymujemy $MN^2 + (BO - QP)^2 \geq MO^2$, czyli

$$PG^2 + (a + r - x)^2 \geq r^2,$$

bo $MN = PG$. Stąd i z (1) otrzymujemy

$$(sx)^2 - ((1 + s)a - x)^2 + (a + r - x)^2 \geq r^2$$

i po przekształceniach

$$(3) \quad s^2x^2 + 2(sa - r)x + 2ar - (s^2 + 2s)a^2 \geq 0.$$

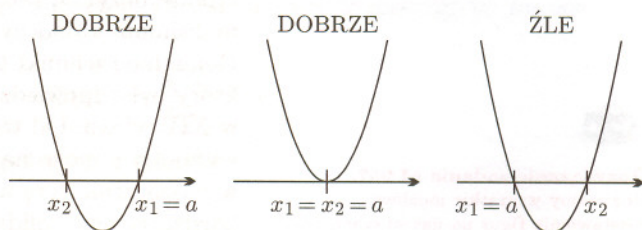
Powyższa nierówność musi być spełniona dla każdego $x \in (a, a + r)$. Nietrudno zauważyć, że nierówność (3) przechodzi w równość dla $x_1 = a$. Po podzieleniu lewej strony (3) przez $x - a$ otrzymujemy rozkład

$$(x - a)(s^2x + 2sa - 2r + s^2a).$$

Stąd łatwo obliczyć drugie miejsce zerowe trójmianu, a mianowicie

$$x_2 = (2r - 2sa - s^2a)/s^2.$$

Wobec tego, że lewa strona (3) ma być nieujemna, musi być $x_2 \leq a$, co wynika z wykresów



Tym samym $(2r - 2sa - s^2a)/s^2 \leq a$, skąd $r \leq (s^2 + s)a$. Z określenia promienia krzywizny (maksymalizujemy r) wynika, że $AO = r = (s^2 + s)a = (s + 1)sa$. Ponieważ $AF = sa$, więc $AO = (s + 1)AF$.

Uwagi

1. Dla paraboli ($s = 1$) otrzymujemy wyprowadzoną w artykule równość $AO = 2AF$.
2. Ponieważ $s > 0$, więc $AO > AF$ dla dowolnej krzywej drugiego stopnia, czyli środek krzywizny wierzchołka A leży poza odcinkiem łączącym wierzchołek A z ogniskiem F .

Witold BEDNAREK

Stygnięcie Wszechświata

Astronomia, a może raczej pra-astronomia, była prawdopodobnie pierwszą dziedziną ścisłego poznawania świata przez człowieka. W różnych stanowiskach archeologicznych do najstarszych znalezisk należą przedmioty z siedmioma nacięciami. Jedną z interpretacji ich pochodzenia jest powiązanie liczby nacięć z obserwacją faz Księżyca, które trwają (w zaokrągleniu) właśnie siedem dni.

Trudno powiedzieć, czy interpretacja ta jest prawdziwa. Nie ulega natomiast wątpliwości późniejsza fascynacja badaniem ruchów „gwiazd” (planet) uwieńczona w końcu powstaniem mechaniki newtonowskiej.

Najstarsza z nauk ścisłych nie utraciła nic ze swojej atrakcyjności, choć uprawianie jej wymaga obecnie używania wyrafinowanej aparatury, na zbudowanie której zazwyczaj pozwolić sobie mogą tylko wielonarodowe społeczności astronomów. Wydawać by się mogło, że nie ma tu już miejsca na jedno- czy kilkusobowe zespoły skupione po prostu wokół dobrego pomysłu. A jednak czas obserwacyjny najpotężniejszych teleskopów dzielony jest między grupy złożone czasem z zaledwie kilku osób. O przydziale czasu decyduje przede wszystkim (choć, oczywiście, nie wyłącznie) dobry i dobrze udokumentowany projekt.

Na początku grudnia ubiegłego roku ukazała się właśnie praca [1] trzech panów z Indii, Francji i Niemiec, w której zrelacjonowano pierwszy pomiar temperatury kosmicznego promieniowania tła wczesnego Wszechświata dokonany za pomocą spektrografu UVES (*UV-Visual Echelle Spectrograph*) zamontowanego na teleskopie Kueyen (Księżyc w języku Mapuców). Kueyen to jeden z czterech głównych, osmiometrowych teleskopów układu VLT (Very Large Telescope), który kompletowany jest przez ESO (European Southern Observatory) na (górze) Cerro Paranal na pustyni Atacama w Chile, o czym pisaliśmy w numerze 9/2000. Natomiast w *Delcie* 11/2000 przeczytać można o najdokładniejszych pomiarach fluktuacji kosmicznego promieniowania tła i ich kosmologicznej interpretacji.

Skoro promieniowanie to jest pozostałością po Wielkim Wybuchu, to jego temperatura we wcześniejszych epokach powinna być wyższa niż obecnie. Jak się jednak o tym przekonać? Jak wiadomo, astronomia nie tylko jest najstarszą z nauk, ale również zajmuje się badaniem coraz starszych obiektów. Im dalej astronomowie sięgają w przestrzeń, tym bardziej zagłębiają się wstecz w czasie. Żeby zmierzyć temperaturę promieniowania tła w odległej przeszłości, „wystarczy” zaobserwować efekty jego oddziaływania z odpowiednio odległym obiektem. Problemem jest jednak upewnienie się, że obserwacja dotyczy podgrzewania kosmiczną mikrofalówką, a nie jakimś innym źródłem ciepła. Niezbędne jest w tym celu uzyskanie bardzo dokładnego i bogatego widma odległego obiektu pozwalającego na ilościową ocenę wkładu różnych źródeł.

Do tej pory, ze względu na trudności z oszacowaniem znaczenia innych możliwości podgrzewania, udawało się jedynie określać górną granicę mierzonej temperatury.

Teraz natomiast odpowiednio precyzyjnie zmierzone widmo kwazara PKS 1232+0815 udało się uzyskać za pomocą instrumentu UVES. Światło od tego odległego obiektu (przesunięcie ku czerwieni $z = 2,57$) po drodze przeszło przez gazowy obłok znajdujący się w galaktyce o $z = 2,34$ obserwowanej w czasie, gdy Wszechświat był pięć razy młodszy niż obecnie. Właśnie linie absorpcyjne związane z przejściami nadsubtelnymi dla atomów neutralnego węgla znajdujących się w tym obłoku posłużyły jako termometr. Dodatkowo linie widmowe odpowiadające (między innymi) przejściom między stanami cząsteczkowego wodoru pozwoliły na stwierdzenie dominującego wpływu promieniowania tła na kształt i intensywność linii węglowych. Było to możliwe dzięki dokładnemu określeniu warunków fizycznych panujących w prześwietlanym kwazarem obłoku.

W ten sposób nie tylko po raz pierwszy bezapelacyjnie stwierdzono obecność kosmicznego promieniowania tła w odległej przeszłości, lecz również określono, że temperatura odpowiadającego mu ciała doskonale czarnego była nie mniejsza niż 6 K oraz nie większa niż 14 K. Zgadza się to bardzo dobrze z przewidywaniem teoretycznym 9,1 K, dostarczając kolejnego argumentu przemawiającego za Wielkim Wybuchem.

Jak widać, księżycowe (kueyenowe) linie nadal stanowią o naszej znajomości Wszechświata.

Najdalsza supernowa

Dokładna analiza [2] obiektu oznaczanego SN 1997ff pokazała, że jest on najdalszą zaobserwowaną supernową typu Ia. Jego przesunięcie ku czerwieni z wynosi aż 1,7. Supernowe tego typu używane są jako standardowe świece, gdyż ich jasność absolutna jest już dość dobrze znana. Pozwoliło to na stwierdzenie (zobacz *Delta* 5/1998), że tempo rozszerzania Wszechświata rośnie, gdyż ich jasność obserwowana odpowiada większym odległościom niż wynikałoby to z rozszerzania bez dodatkowej akceleracji. Głównym zarzutem przeciwko takiej, brzemiennej w kosmologiczne skutki interpretacji pozostawała możliwość rozpraszania światła dalekich supernowych przez kosmiczny pył. Analiza danych dotyczących SN 1997ff oraz kilku innych bardzo (choć nie aż tak) odległych supernowych przeczy jednak tym zarzutom. Obiekty te znajdują się tak daleko, że pozwalają na zauważenie początkowego zwalniania tempa ekspansji Wszechświata. Jest to równoważne rejestrowaniu większej obserwowanej jasności, czyli efektu niemożliwego do wytłumaczenia rozpraszaniem.

Piotr ZALEWSKI

[1] R. Srianand, P. Petitjean, C. Ledoux; *astro-ph/0012222* oraz *Nature* z 21 grudnia 2000 roku.

[2] <http://www.nersc.gov/news/supernova04-02-01.html>



Budujemy teorię

Jak rodzi się teoria? Z obserwacji, z pytań, niekiedy z olśnienia; zauważamy pewne fakty, pytamy o przyczyny, konsekwencje, uogólnienia, szukamy związków, wyciągamy wnioski. Nie jest jasne, czy miała tę świadomość trójka młodych ludzi (nazwijmy ich A, B i C), bawiąca się, przynajmniej, dość nietypowo...

A: – Rozwiązując dzisiaj zadanie, narysowałem trójkąt z wysokością spuszczoną na jeden z jego boków i wiecie, co zauważyłem?

B i C spojrzeli zachęcająco.

A: – Wysokość podzieliła trójkąt (rys. 1) na dwa trójkąty prostokątne! To znaczy, że każdy trójkąt można tak podzielić: na dwa trójkąty prostokątne!

B: – Ale to dlatego, że narysowałeś trójkąt ostrokątny, a gdybyś narysował rozwartokątny, to wysokość wcale nie przecinałaby boku trójkąta, tylko jego przedłużenie – i co wtedy?

Zasępiли się nieco i zaczęli myśleć. Pierwsza ocknęła się C.

C: – Słuchajcie, przecież w trójkącie rozwartokątnym zawsze jest wysokość, która trafia w bok trójkąta, a nie w jego przedłużenie. Chyba nawet mogłabym spróbować to wykazać.

Cała trójka zasiadła nad kartką papieru; rysowali, kreślili, aż wymyślili (*domyślasz się, Czytelniku, do czego doszli?*).

B: – Wygląda na to, że mamy coś w rodzaju twierdzenia: *Każdy trójkąt można podzielić na dwa trójkąty prostokątne.*

C uśmiechnęła się filuternie.

C: – A przecież trójkąt prostokątny można podzielić nawet na ... jeden trójkąt prostokątny!

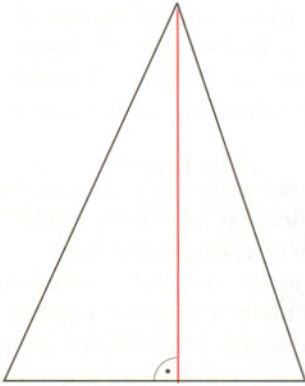
A i B nie stracili rezonu. Uzgodnili, że to tylko szczególny przypadek, a żeby było dobrze dla dowolnego trójkąta, to trzeba wziąć dwa trójkąty prostokątne. Już mieli się zabrać za coś innego, gdy A postanowił wykazać się dociekliwością.

A: – To znaczy, że n -kąt można podzielić na $n - 1$ trójkątów prostokątnych? No bo dla trójkąta tak jest: ma trzy boki, a da się go podzielić na dwa trójkąty prostokątne.

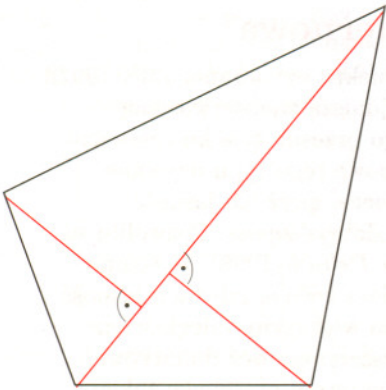
Znowu wyciągnęli kartki i zaczęli sprawdzać. Tym razem pierwszy odezwał się B.

B: – Popatrzcie, mam czworokąt, w którym żaden kąt nie jest prosty, i nie umiem go podzielić na trzy trójkąty prostokątne. Ale na cztery (rys. 2) już umiem!

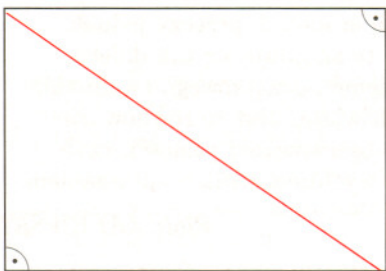
Co prawda, kwadrat albo nawet prostokąt potrafię podzielić na zaledwie dwa takie trójkąty, ale to pewnie też szczególne przypadki (rys. 3)?



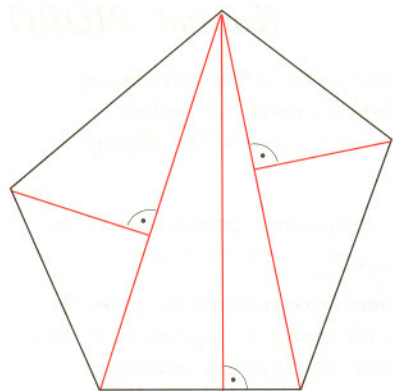
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Okazało się, że A i C też doszli do podobnych wniosków. C zaczęła mieć pewne podejrzenia, ale wołała ich jeszcze nie zdradzać.

C: – A jak będzie dla pięciokątów? Bo na razie jest dziwnie: dowolny trójkąt można podzielić na dwa trójkąty prostokątne (o jeden mniej niż liczba boków), a, jak się wydaje, czworokąty potrzebują co najmniej czterech takich trójkątów (tyle samo, ile liczba boków).

Po chwili wszyscy mieli już rysunek z pięciokątem podzielonym na... sześć trójkątów prostokątnych (rys. 4); oczywiście domyślili się, że nie warto rysować figury, która miałaby kąt prosty przy wierzchołku, bo to byłby z pewnością „szczególny przypadek”.

A: – I co teraz? Ani mniej, ani tyle samo, tylko więcej trójkątów niż boków!

C uznała, że czas wyjawić swoje przypuszczenia.

C: – Popatrzcie na mój rysunek pięciokąta. Narysowałam przekątną, wychodzącą z jednego wierzchołka, a każdy z otrzymanych trójkątów podzieliłam na dwa prostokątne. I wyszło mi sześć.

B: – Już wiem! W takim razie można tak samo zrobić w dowolnym n -kącie! Narysować wszystkie przekątne, wychodzące z jednego, dowolnego wierzchołka, policzyć trójkąty, a potem każdy z nich podzielić na dwa trójkąty prostokątne. Zaraz, to ile będzie tych trójkątów wyznaczonych przez przekątną, które potem będziemy dzielić na dwa prostokątne? Na pewno o jeden więcej niż przekątnych...

Pochylili się nad kartkami i po krótkim czasie wiedzieli już, ile przekątnych wychodzi z jednego wierzchołka n -kąta (*ile, drogi Czytelniku?*). Teraz poszło już łatwo. C podsumowała:

C: – Mamy następane twierdzenie: *Każdy n -kąt można podzielić na $2(n - 2)$ trójkątów prostokątnych.* Może to gdzieś opublikujemy?

B ucieszył się z pomysłu, ale A znowu nie dał się ponieść ogólnej radości.

A: – Najpierw musimy zapisać dowód naszego twierdzenia, to po pierwsze. Po drugie, wszystkie nasze wielokąty były wypukłe, a przecież istnieją też inne. A po trzecie, mam jeszcze tyle pytań, że wcale mi się nie wydaje, byśmy stworzyli już jakąś teorię. Na przykład: co będzie z wielokątami niewypukłymi? Czy liczba $2(n - 2)$ jest naprawdę najmniejsza? Może można w inny sposób podzielić każdy wielokąt na mniej trójkątów prostokątnych? A jak opisać te „szczególne przypadki”? Czy można stworzyć podobne twierdzenia dla brył trójwymiarowych? A gdyby rozważać trójkąty o innej własności niż posiadanie kąta prostego? I co będzie, gdy...

Niestety, B i C zniknęli z pola widzenia. Może poszli szukać odpowiedzi na te pytania?

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL



Kwadrat można podzielić na skończoną liczbę mniejszych kwadratów tak, by każdy z nich był innej wielkości. Pierwszy taki podział – na 55 kwadratów – uzyskano w 1938 roku (Sprague). Obecnie znany jest podział na 21 różnych kwadratów i wiadomo, że na mniej się nie da (Duijvestijn, 1978). Natomiast podział sześciianu na skończoną liczbę mniejszych sześciianów, z których każdy byłby inny, jest niemożliwy.

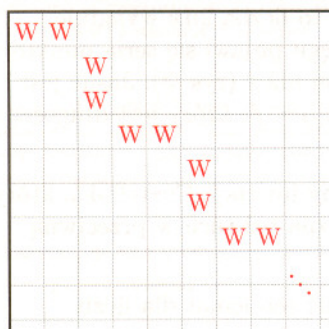


Rozwiązanie zadania M 955.

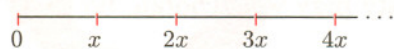
Zalóżmy, że na szachownicy $n \times n$ rozstawiono k wież tak, że każda z nich jest bita co najwyżej jeden raz. Na każdym polu, na którym stoi wieża, piszemy liczbę 0. W każdym wierszu wykonamy następującą operację: jeśli w danym wierszu stoją dwie liczby, to do każdej z nich dodamy 1, jeśli zaś jedna liczba, to dodamy 2 (z wierszem bez wpisanych liczb nie robimy nic). Analogiczną operację wykonujemy następnie na wszystkich kolumnach. Jasne jest, że w rezultacie na każdym polu, gdzie stoi wieża, napisana jest albo liczba 3, albo 4. Dlatego suma S wszystkich napisanych liczb jest nie mniejsza niż $3k$. Z drugiej strony do każdej kolumny i każdego wiersza dodaliśmy w sumie liczbę 2, a więc suma S jest nie większa niż $4n$. Stąd $3k \leq S \leq 4n$, czyli $k \leq \frac{4n}{3}$. Ponieważ k

jest liczbą naturalną, więc $k \leq \left\lfloor \frac{4n}{3} \right\rfloor$.

Optymalny sposób rozmieszczenia wież ilustruje rysunek.



Więcej informacji o liczbach rzeczywistych można znaleźć w artykule R. Sikorskiego „Czy liczby rzeczywiste są rzeczywiste?”, *Delta* 1/1974, przedruk w *Delcie* 6/1998.



Rys. 1



Rys. 2

Zbiór liczb wymiernych jest gęsty w zbiorze liczb rzeczywistych.

Liczbę rzeczywistą x możemy przedstawić w postaci sumy liczby całkowitej i liczby rzeczywistej leżącej pomiędzy 0 i 1. Dokładniej, niech $[x]$ będzie największą liczbą całkowitą nie większą od x i niech $u(x) = x - [x]$. Wtedy $0 \leq u(x) < 1$ i $x = [x] + u(x)$.

Zauważmy, że x wyznacza następujący zbiór liczb leżących w przedziale $(0, 1)$

$$(*) \quad u(x), \quad u(2x), \quad u(3x), \quad u(4x), \dots$$

O zbiorze tym możemy myśleć następująco. Najpierw zaznaczamy na prostej punkty $x, 2x, 3x, \dots$, a potem nawijamy wszystko na okrąg o długości 1. W ten sposób punkty nx i mx , dla których $u(nx) = u(mx)$, pokryją się. Następnie możemy okrąg rozerwać w zerze, czyli w miejscu w którym nałożyły się liczby naturalne, i wyprostować w odcinek jednostkowy. Teraz zbiór $(*)$ już widać (rys. 1).

Jeśli $x = a/b$ jest liczbą wymierną, to $u(na/b) = na/b - [na/b]$ musi być jedną z liczb $0, 1/b, 2/b, \dots, (b-1)/b$ i zbiór $(*)$ zawiera tylko skończoną liczbę różnych elementów (rys. 2, dla $x = 1/8$).

Niech teraz x będzie liczbą niewymierną. Wtedy w ciągu $(*)$ nie występują dwie takie same liczby. Gdyby bowiem $u(kx) = u(lx)$ dla pewnych różnych liczb naturalnych k i l , to $kx - [kx] = lx - [lx]$, więc $(k-l)x = [lx] - [kx]$, i w konsekwencji $x = ([lx] - [kx]) / (k-l)$ jest liczbą wymierną. Oczywiście również $u(nx) \neq 0$ dla dowolnej liczby naturalnej n .

Twierdzenie Kroneckera pokazuje, jak zbiór $(*)$ jest „położony” w otwartym odcinku $(0, 1)$.

Twierdzenie. *Dla dowolnej liczby niewymiernej x zbiór $(*)$ jest gęsty w $(0, 1)$, tzn. dla każdych liczb $\alpha < \beta$ z przedziału $(0, 1)$ istnieje taka liczba naturalna k , że $\alpha < u(kx) < \beta$.*

Dla liczb wymiernych to nie jest prawda, ponieważ wtedy zbiór $(*)$ jest skończony. Stąd wynika, że gęstość zbioru $(*)$ w odcinku $(0, 1)$ charakteryzuje liczby niewymierne. Dokładniej, następujący odwrotny rezultat jest także prawdziwy: *jeśli zbiór $(*)$ jest gęsty w $(0, 1)$, to x jest liczbą niewymierną.*

W dowodzie będziemy potrzebowali następującego faktu:

Lemat. *Niech x będzie liczbą rzeczywistą, a ε dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Wtedy istnieje taka liczba wymierna a/b , że $|x - a/b| < \varepsilon/b$, lub równoważnie, istnieją takie liczby całkowite a oraz $b \geq 1$, że $|bx - a| < \varepsilon$.*

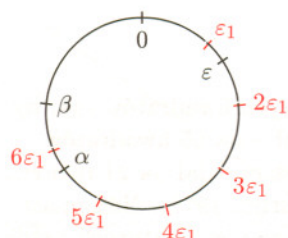
Lemat mówi zatem, że dla dowolnego ε istnieje takie całkowite b , że po nawinięciu na okrąg punkt bx wylądował w odległości od zera nie większej niż ε .

Udowodnimy najpierw Twierdzenie Kroneckera. Niech x będzie liczbą niewymierną. Weźmy dowolne liczby $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Niech $\varepsilon = \beta - \alpha$. Wtedy na mocy lematu istnieją takie liczby całkowite $n \geq 1$ i k , że $|nx - k| < \varepsilon$. Rozpatrzmy następujące dwa przypadki:

(P.1): $nx - k = \varepsilon_1 > 0$. Wtedy $u(nx) = \varepsilon_1$. Innymi słowy, po nawinięciu na okrąg pierwszych n punktów ciągu $x, 2x, 3x, \dots$ liczba nx wylądowała w odległości $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ za zerem. Gdy nawiniemy dalsze n punktów, to liczba $2nx$ wylądował w odległości $2\varepsilon_1$ za zerem itd. W ten sposób na okręgu pojawi się seria punktów, z których każdy odległy jest od poprzedniego o mniej niż ε (rys. 3). Jasne jest więc, że któryś z tych punktów wpadnie w przedział $\alpha < \beta$, który jest długości ε . A tego, że wpadnie, właśnie mieliśmy dowieść.

(P.2): $-\varepsilon < nx - k < 0$. Ten przypadek pozostawimy inwencji Czytelnika, który oprócz ruchu zgodnego z ruchem wskazówek zegara zna też ruch w przeciwną stronę.

Dowód lematu. Zauważmy, że wystarczy udowodnić ten lemat dla liczb rzeczywistych x z przedziału $(0, 1)$.



Rys. 3

Oczywiście $Q = [1/\varepsilon] + 1$.

Niech Q będzie najmniejszą liczbą naturalną większą od $1/\varepsilon$. Wtedy $\varepsilon \geq 1/Q$. Podzielmy odcinek $\langle 0, 1 \rangle$ na Q (parami rozłącznych) przedziałów:

$$\langle 0, 1/Q \rangle, \langle 1/Q, 2/Q \rangle, \dots, \langle (Q-2)/Q, (Q-1)/Q \rangle, \langle (Q-1)/Q, 1 \rangle.$$

Następnie weźmy $Q + 1$ liczb

$$0, u(x), u(2x), \dots, u((Q-1)x), u(Qx),$$

leżących w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Wtedy z zasady szufladkowej Dirichleta co najmniej dwie liczby $u(b_1x)$ i $u(b_2x)$, gdzie $0 \leq b_1 < b_2 \leq Q$, należą do jednego z przedziałów (może się zdarzyć – jeśli x jest liczbą wymierną – że te liczby są równe, tzn. $u(b_1x) = u(b_2x)$ – ale to oczywiście w niczym nie przeszkadza). Ponieważ długość każdego z tych przedziałów wynosi $1/Q$, więc

$$|u(b_2x) - u(b_1x)| < 1/Q.$$

Niech $b = b_2 - b_1$, oczywiście $0 < b \leq Q$. Jeśli $u(b_2x) - u(b_1x) \geq 0$, to $u(bx) = u(b_2x) - u(b_1x)$; oraz jeśli ta różnica jest mniejsza od zera, to $u(bx) = 1 - (u(b_2x) - u(b_1x))$. Zatem z powyższej równości wynika, że

$$0 \leq u(bx) < 1/Q \quad \text{lub} \quad 1 - 1/Q < u(bx) \leq 1 \quad (\text{tzn. } 1/Q > 1 - u(bx) \geq 0).$$

W pierwszym przypadku bierzemy $a = [bx]$, ponieważ wtedy $|bx - a| = bx - [bx] = u(bx) < 1/Q < \varepsilon$. W drugim, $|bx - ([bx] + 1)| = |bx - [bx] - 1| = 1 - (bx - [bx]) < 1/Q < \varepsilon$. Zatem wystarczy wziąć $a = [bx] + 1$. ■

Można się zastanawiać nad wielowymiarową wersją twierdzenia 1. Na przykład, dla jakich liczb x_1, x_2 , punkty $(u(x_1), u(x_2))$, $(u(2x_1), u(2x_2))$, $(u(3x_1), u(3x_2))$, ... są gęste w kwadracie jednostkowym. Oczywiście, x_1, x_2 muszą być niewymierne, ale to nie wystarczy, np. dla $x_1 = x_2$, punkty $(u(nx_1), u(nx_2))$ leżą tylko na przekątnej (i są tam gęste). Potrzebny jest dodatkowy warunek: tzw. liniowa niezależność x_1, x_2 nad zbiorem liczb wymiernych, tzn. nieistnienie takich niezerowych liczb wymiernych q_1 i q_2 , że $q_1x_1 + q_2x_2 = 0$. Dowód wielowymiarowej wersji jest bardziej skomplikowany. Możemy natomiast łatwo uogólnić lemat i jego dowód na przypadek wielu liczb.

Niech x_1, \dots, x_n będą liczbami rzeczywistymi, ε dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Wtedy istnieje liczba naturalna b i liczby całkowite a_1, \dots, a_n , takie, że

$$|bx_i - a_i| < \varepsilon \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Dowód przeprowadzimy dla $n = 2$, ponieważ ten przypadek można łatwo narysować na płaszczyźnie. Po pierwsze, podobnie jak w dowodzie lematu, możemy założyć, że $0 \leq x_1, x_2 < 1$. Po drugie, niech liczba naturalna Q będzie zdefiniowana jak poprzednio. Ponieważ $n = 2$, więc weźmy kwadrat jednostkowy $K = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ i podzielmy go na Q^2 małych kwadracików o boku $1/Q$, tzn. na kwadraty postaci $\langle i/Q, (i+1)/Q \rangle \times \langle j/Q, (j+1)/Q \rangle$, gdzie $i, j = 0, 1, \dots, Q-1$. Następnie weźmy punkty $(0, 0)$, $(u(x_1), u(x_2))$, ..., $(u(Q^2x_1), u(Q^2x_2))$ należące do K . Ponieważ tych punktów jest $Q^2 + 1$, więc dwa z nich muszą należeć do tego samego „małego kwadracika”. Długość boku każdego takiego kwadracika jest równa $1/Q$, zatem istnieją takie liczby całkowite $0 \leq b_1 < b_2 \leq Q^2$, że $|u(b_1x_1) - u(b_2x_1)| < 1/Q$ i $|u(b_1x_2) - u(b_2x_2)| < 1/Q$. Teraz, tak samo jak w dowodzie lematu, wykazujemy, że dla $b = b_2 - b_1$, $0 \leq u(bx_i) < 1/Q$ lub $1/Q > 1 - u(bx_i) \geq 0$, gdzie $i = 1$ lub 2 . A następnie dobieramy a_1 dla x_1 i a_2 dla x_2 .

Dla $n = 3$ bierzemy sześcian jednostkowy $\langle 0, 1 \rangle^3$ i dzielimy na Q^3 „małych sześcianów” o boku $1/Q$ rozpiętych na siatce punktów postaci $(i_1/Q, i_2/Q, i_3/Q)$, gdzie $i_1, i_2, i_3 = 0, \dots, Q-1$. Dla $n \geq 4$ postępujemy analogicznie. Chociaż n -wymiarowej kostki nie można sobie „wyobrazić” (w każdym razie trudno), to można ją interpretować jako zbiór takich n -elementowych ciągów (x_1, \dots, x_n) , że $0 \leq x_k < 1$ dla $k = 1, 2, \dots, n$. Analogicznie „małe kostki” to zbiory takich ciągów (x_1, \dots, x_n) , że $i_k/Q \leq x_k < (i_k + 1)/Q$; dla różnych ciągów liczb i_1, \dots, i_n mamy różne „małe kostki”.

Zasada szufladkowa Dirichleta: Jeśli z n zbiorów wybieramy $n + 1$ elementów, to co najmniej dwa należą do tego samego zbioru.

Łatwo wykazać, że dla dowolnych liczb α i β , $u(\alpha - \beta) = u(\alpha) - u(\beta)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u(\alpha) - u(\beta) \geq 0$, oraz $u(\alpha - \beta) = 1 - (u(\alpha) - u(\beta))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u(\alpha) - u(\beta) < 0$.

To jest dokładnie to, co zrobił Kronecker w swojej pracy z 1884 roku.

Ten rezultat jest znacznie silniejszy od lematu – znajdujemy jedną liczbę b wspólną dla wszystkich x_1, \dots, x_n . Korzystając z lematu, możemy tylko dla x_i dobrać b_i , oczywiście b_1, \dots, b_n są na ogół różnymi liczbami.



Rozwiązanie zadania F 550.

Gdy fotografowany jest skrawek tarczy Słońca zbliżający się do Ziemi, obserwowana częstotliwość ν' różni się od emitowanej ν zgodnie ze wzorem

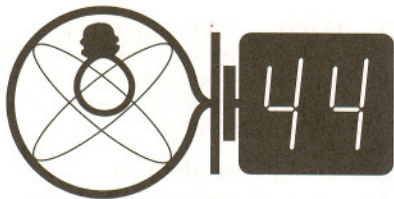
$$\nu' = \frac{\nu c}{c - v},$$

gdzie v jest prędkością liniową źródła względem obserwatora. Natomiast gdy źródło oddala się, obserwujemy światło o częstotliwości ν'' :

$$\nu'' = \frac{\nu c}{c + v}.$$

Z powyższych dwóch równań oraz z tego, że $v = \frac{c}{\lambda}$, otrzymujemy, że

$$\Delta\lambda = \frac{2v\lambda}{c} \quad \text{i stąd} \quad v = \frac{c\Delta\lambda}{2\lambda} = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2001

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej karcie), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Zadania z fizyki nr 320, 321

Redaguje Jerzy B. BROJAN

320. Na rysunku 1 dane są cztery punkty A, B, A' i B' . Opisać konstrukcję geometryczną pozwalającą wyznaczyć ogniska cienkiej soczewki, dla której obrazem rzeczywistym punktu A jest A' , a obrazem rzeczywistym B jest B' .

321. „Czarna skrzynka” z czterema wyjściami zawiera wyłącznie oporniki. Włączono ją do obwodu przedstawionego na rysunku 2 i okazało się, że przy otwartym kluczu natężenie prądu czerpanego z baterii wynosiło 3 A, a prądu płynącego przez opornik R_3 wynosiło 1,8 A. Jeśli przy zamkniętym kluczu obwód czerpie z baterii prąd o natężeniu 4 A, to ile wynosi wtedy natężenie prądu płynącego przez opornik R_3 ? Opór jednego z oporników i SEM baterii są podane na rysunku 2.

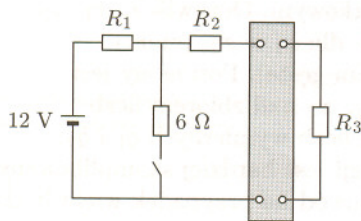
• A

• B'

• B

• A'

Rys. 1



Rys. 2

312. Aby równia ruszyła z miejsca, przede wszystkim musi ruszyć z miejsca klocek, zatem siła nacisku klocka na równię N (skierowana prostopadłe do równi) i siła tarcia T (skierowana równoległe do niej) są związane równaniem

$$T = f_1 N.$$

Pionowa składowa wypadkowej sił N i T jest równa $N \cos \alpha + T \sin \alpha = N(\cos \alpha + f_1 \sin \alpha)$, a pozioma składowa jest równa $N \sin \alpha - T \cos \alpha = N(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha)$; widzimy, że równia ruszy, jeśli

$$(1) \quad N(\sin \alpha - f_1 \cos \alpha) > f_2 N(\cos \alpha + f_1 \sin \alpha),$$

czyli

$$(2) \quad \sin \alpha - f_1 \cos \alpha > f_2(\cos \alpha + f_1 \sin \alpha).$$

Ponieważ masę równi można pominąć, więc po jej ruszeniu z miejsca wypadkowa siła działająca na nią musi być równa zero. Nierówność (1) musi wtedy przejść w równość, co na pierwszy rzut oka wydaje się sprzeczne z warunkiem (2). Jedynym możliwym rozwiązaniem tej pozornej sprzeczności jest $N = T = 0$, co oznacza, że klocek spada swobodnie. Przyspieszenie równi wynosi wtedy $a = g \operatorname{ctg} \alpha$.

313. Podczas rozchodzenia się fali dźwiękowej gaz ulega sprężaniu i rozprężaniu, zatem rośnie i maleje jego temperatura. Zwykle pomija się przepływ ciepła od miejsc ogrzanych do miejsc ochłodzonych (zakłada się, że przemiana jest adiabatyczna) – jeśli jednak następuje szybki przepływ ciepła, to wynikające stąd rozproszenie energii będzie prowadzić do tłumienia fali i ogrzewania gazu. Tak się dzieje w gazie rozrzedzonym, gdyż duża jest wtedy średnia długość swobodnej drogi cząsteczek między zderzeniami i przelatują one od miejsca cieplejszego do chłodniejszego bez zwłoki wynikającej ze zderzeń. Omawiany mechanizm tłumienia będzie szczególnie silny wtedy, gdy średnia droga swobodna zbliży się do długości fali (dla fali o częstotliwości 1 kHz w powietrzu o normalnej temperaturze nastąpi to przy ciśnieniu rzędu 0,1 Pa).

Inne zjawisko wynika stąd, że jeśli energia fali miałaby być zachowana, to w miarę spadku ciśnienia (i gęstości) musiałaby rosnąć amplituda drgań, co powodowałoby coraz bardziej stromy przebieg narastania ciśnienia, a w końcu – falę uderzeniową. Powstające przy tym turbulencje (wiry) także prowadziłyby do rozproszenia energii.

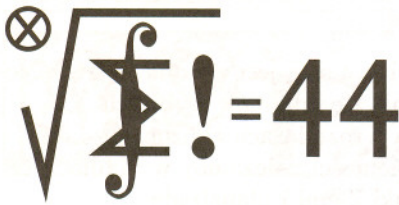
Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 310 ($WT=1,53$) i 311 ($WT=3,73$)
z numeru 1/2001

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	44,67
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	38,32
Aleksander Surma	– Myszków	37,39
Tomasz Rudny	– Warszawa	28,28
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	20,48
Tomasz Wietecha	– Tarnów	20,37
Marian Łupieżowicz	– Zebrzydowice	15,76

Po raz pierwszy w historii **Klubu 44 F** zaliczona została czwarta tura naszego konkursu. Gratulacje dla Nadklubowicza IV Rangi – Andrzeja Idzika, wraz z serdecznymi życzeniami jeszcze wielu rozwiązanych zadań!



Zadania z matematyki nr 423, 424

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2001

423. Na płaszczyźnie dane są dwa okręgi przecinające się w punktach A i B . Dowieść, że istnieją cztery punkty Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 o następującej własności: jeżeli ω jest dowolnym okręgiem stycznym do obu danych okręgów (punkty styczności: P i Q) oraz przecinającym prostą AB (punkty przecięcia: X i Y), to każda z prostych PX, PY, QX, QY przechodzi przez jeden z punktów Z_i .

424. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki: $f(2) = 2$ oraz

$$f(xy) = x^3 f(y) + y^2 f(x) + x^3 y + xy^2 - xy \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 424 zaproponował pan Józef Banaś z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/2001

Przypominamy treść zadań:

415. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c , dla których układ równań

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{a}{x}, \quad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = \frac{b}{y}, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{c}{z}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych x, y, z .

416. W kartezjańskim układzie współrzędnych przestrzeni trójwymiarowej rozważamy zbiór X wszystkich punktów o współrzędnych całkowitych nieujemnych. Dwa punkty zbioru X

415. Niech a, b, c będzie trójką liczb dodatnich, dla której podany układ równań ma rozwiązanie x, y, z . Liczby x, y, z są różne od zera. Mnożymy kolejne równania układu odpowiednio przez x, y oraz z , otrzymując zależność

$$(1) \quad a = v + w, \quad b = w + u, \quad c = u + v,$$

gdzie

$$(2) \quad u = yz/x, \quad v = zx/y, \quad w = xy/z.$$

Zauważmy, że liczby u, v, w mają jednakowy znak. Ze związków (1) wynika, że są to liczby dodatnie.

będziemy nazywać *stowarzyszonymi*, gdy sumy ich współrzędnych są równe, a ich odległość wynosi $\sqrt{2}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunki:

- jeśli punkt $P \in X$ ma co najmniej jedną współrzędną równą zeru, to $f(P) = 0$;
- jeśli punkt $P \in X$ ma wszystkie współrzędne dodatnie, to

$$f(P) = 1 + \frac{1}{6} (f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4) + f(P_5) + f(P_6)),$$

gdzie P_1, \dots, P_6 są sześcioma punktami stowarzyszonymi z P .

Zatem $b + c - a = 2u > 0$, czyli

$$(3) \quad b + c > a; \quad \text{podobnie } c + a > b, \quad a + b > c.$$

Na odwrót, jeśli liczby dodatnie a, b, c spełniają nierówności (3), to układ równań (1) ma rozwiązanie w liczbach dodatnich u, v, w . Liczby $x = \sqrt{vw}$, $y = \sqrt{wu}$, $z = \sqrt{uv}$ spełniają wówczas związki (2), a więc także i rozważany w zadaniu układ równań.

Tak więc warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia rozwiązania owego układu równań jest, by liczby a, b, c były długościami boków pewnego trójkąta.

416. Wykażemy, że istnieje co najwyżej jedna funkcja spełniająca podane warunki. Przypuśćmy, że f_1, f_2 są dwiema takimi funkcjami. Ich różnica $h = f_1 - f_2$ spełnia równanie jednorodne

$$(4) \quad h(P) = \frac{1}{6} (h(P_1) + \dots + h(P_6)) \quad \text{dla } P = (x, y, z), \quad xyz > 0,$$

z warunkiem brzegowym $h(x, y, z) = 0$ gdy $xyz = 0$. Ustalmy liczbę naturalną $n > 1$ i weźmy pod uwagę zbiór X_n złożony z tych punktów $(x, y, z) \in X$, których suma współrzędnych jest równa n . Jest to zbiór skończony, więc wśród wartości przyjmowanych na nim przez funkcję h istnieje liczba największa i liczba najmniejsza. Jeśli którakolwiek z tych wartości ekstremalnych jest przyjmowana w punkcie P o współrzędnych dodatnich, to wobec warunku (4) ta sama wartość jest też przyjmowana we wszystkich sześciu punktach stowarzyszonych z P . Powtarzając rozumowanie, jesteśmy w stanie dotrzeć do punktów „brzegowych” zbioru X_n , tzn. punktów z co najmniej jedną współrzędną zerową. Wartość funkcji h w takim punkcie jest równa zeru. Stąd wniosek, że h jest funkcją tożsamościowo równą zeru, czyli $f_1 = f_2$; mamy jednoznaczność.

Z drugiej strony, nietrudno się przekonać, że funkcja

$$(5) \quad f(x, y, z) = \frac{3xyz}{x + y + z} \quad \text{dla } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \quad f(0, 0, 0) = 0,$$

spełnia zadane równanie; jeśli bowiem $P = (x, y, z) \in X$, $xyz > 0$, to sześcioma punktami P_i stowarzyszonymi z P są: $(x+1, y-1, z)$, $(x-1, y+1, z)$, itd.; sprawdzenie, że wartość $f(P)$ wyraża się przez $f(P_1), \dots, f(P_6)$ tak, jak wymaga warunek zadania, to kwestia prostego rachunku. Zatem funkcja f dana wzorem (5) jest jedyną funkcją spełniającą postulowane warunki.

(To już całe rozwiązanie; ale jak wpaść na wzór (5)? Na przykład obliczając wartości f w punktach zbiorów X_n , kolejno dla $n = 3, 4, 5, 6, 7$ – dla ustalonego n problem sprowadza się do układu równań liniowych; sporządzenie tabelki wartości w punktach o sumie współrzędnych nie większej niż 7 pozwala odgadnąć wzór (5).)

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 407 (WT=1,33) i 408 (WT=2,30)
z numeru 10/2000

Bartłomiej Dydą	– Wrocław	44,13
Bartłomiej Marczak	– Warszawa	43,08
Paweł Kubit	– Kraków	41,03
Piotr Kumor	– Olsztyn	38,31
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	34,87

Pan Bartłomiej Dydą kończy drugą czterdziestoczworopunktową rundę.



Większość badaczy zajmujących się geologią planetarną jest zgodna, że Księżyc najprawdopodobniej powstał w wyniku zlepiania się odłamów wybitych z Ziemi w potężnym zderzeniu jej z planetoidą o rozmiarach zbliżonych do rozmiarów Marsa. Jeśli tak, to w następnej kolejności należałoby wytłumaczyć, jak Księżyc osiągnął obecną orbitę – bo odłamki Ziemi i planetoidy zapewne połączyły się w jeden glob raczej znacznie bliżej Ziemi. Wydaje się, że niedawno w tych zagadnieniach uczyniono istotny postęp dzięki rozważeniu pewnych skomplikowanych zjawisk mechanicznych towarzyszących takiemu katastroficznemu narodzeniu się naszego naturalnego satelity.

Zgodnie z nimi Księżyc, jako zlepek wielkich brył, znalazł się na dość przypadkowej orbicie usytuowanej w domniemaniu mniej więcej w płaszczyźnie ziemskiego równika. Księżycowe siły pływowe deformowały Ziemię, a ziemskie deformowały Księżyc. Wskutek tej deformacji Ziemia nieustannie przekazywała Księżycowi swój własny moment pędu (co zresztą trwa do dziś), powodując jego nieustanne oddalanie się. W pewnej chwili Księżyc znalazł się na orbicie, której okres obrotu perigeum osiągnął wartość jednego roku. Ten rezonans (ze Słońcem) spowodował gwałtowny wzrost mimośrodowości orbity Księżycy. Silnie zmienne w tej sytuacji siły pływowe ze strony Ziemi powodowały bardzo intensywne grzanie się młodego Księżycy, co doprowadziło do stopienia się i rozwarstwienia jego globu. Po wyjściu z tego rezonansu Księżyc szybko wpadł w następny, mianowicie ruchu perigeum z ruchem węzła orbity. To z kolei spowodowało wzrost nachylenia orbity Księżycy względem płaszczyzny ziemskiego równika. Dalej ewolucja orbity Księżycy przebiegała już dość spokojnie: odległość Księżycy cały czas rosła (i tak jest też obecnie – w każdym razie średnio), jego ruch obrotowy – obojętne, jaki był początkowo – stał się synchroniczny z ruchem obiegowym (dlatego widzimy Księżyc stale z jednej strony), a jego glob zastygł. Współczesne badania geologiczne w zasadzie potwierdzają przewidywania opisanego modelu.

Dwaj amerykańscy badacze, Jihad Touma i Jack Wisdom, przeprowadzili trzy lata temu symulacje numeryczne, z których wynika przedstawiony tu scenariusz zdarzeń. Nie zmienia to faktu, że jest to nadal jeden z możliwych scenariuszy, aczkolwiek mający na swoje poparcie już bardzo poważne argumenty.

Tomasz KWAST

Czerwiec

Nazwa roju meteorowego zawsze pochodzi od łacińskiej nazwy gwiazdozbioru, w którym znajduje się radiant roju, czyli punkt, z którego meteory pozornie wybiegają. Jeżeli np. radiant leży w Łabędziu, to rój nazywa się Cygnidy itd. W czerwcowe wieczory (późne, bo noc późno zapada) prawie w zenicie znajduje się Wolarz (Bootes), a mimo to wybiegający z niego rój nazywa się Kwadrantydy. Takiego gwiazdozbioru nie ma, ale kiedyś był i nazwa roju pozostała nawet po oficjalnym zlikwidowaniu gwiazdozbioru obejmującego kiedyś północną część Wolarza i fragment Wielkiej Niedźwiedzicy. Kwadrantydy stanowią jedyny wyjątek z reguły przedstawionej w pierwszym zdaniu. Żeby wszystko było jeszcze bardziej skomplikowane, Kwadrantydy mają maksimum na początku stycznia, a w styczniowe wieczory Kwadrant (i cały Wolarz) jest pod horyzontem, jeżeli więc nawet meteory wtedy widać, to niepodobna zorientować się, że wybiegają z Wolarza.

Wenus jest w Baranie i doskonale widać ją na wschodzie przed wschodem Słońca – 8 VI osiąga największą kątową odległość od Słońca. Mars jest na granicy Wężownika i Strzelca – 13 VI ma opozycję, czyli znajduje się dokładnie w przeciwnym kierunku niż Słońce, a więc widać go przez całą noc i góruje o północy. Jowisz i Saturn są w Byku, ale jest tam też Słońce, przez co planet tych nie widać – Jowisz ma nawet 14 VI złączenie ze Słońcem. Półnia Księżycy wypada 6 VI, a nów 21 VI i nastąpi wtedy całkowite zaćmienie Słońca. Niestety, będzie widoczne z południowego Atlantyku, centralnej Afryki i z Oceanu Indyjskiego. Księżyc zakryje też Saturna 19 VI. Ale też nic sobie nie obiecujemy – gdyby nawet zapomnieć o bliskości Słońca, to zakrycie i tak byłoby widoczne tylko z Nowej Zelandii i południowego Pacyfiku. Za to na pewno nie minie nas początek lata: przesilenie letnie nastąpi 21 VI (na kilka godzin przed zaćmieniem Słońca), a potem wakacje!

T.K.

DLACZEGO? (II/1)

Przyjrzyjmy się ciągowi (a_n) określone następująco:

$$a_0 = a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_0^{97} + a_1^{97} + a_2^{97} + \dots + a_n^{97}}{n} \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Wtedy $a_2 = 2$, $a_3 = 2^{96} + 1$. Wybrane wyrazy ciągu przedstawione są w tabeli, przy czym $C(k)$ oznacza liczbę cyfr liczby k . Co ciekawego możemy zaobserwować?

Po pierwsze, ciąg (a_n) bardzo szybko rośnie. Wyraz a_8 prawie ćwierć biliona cyfr, jeśli więc, Drogi Czytelniku, Twój komputer nie ma dysku o pojemności co najmniej

250 GB, to na pewno nie masz na nim zapisanego rozwinięcia dziesiętnej liczby a_8 . Z kolei liczba cyfr wyrazu a_{50} jest większa od 10^{94} i może być porównywana tylko z liczbą cząstek we Wszechświecie. A ile cyfr ma a_{2000} ? Mógłbym na to pytanie precyzyjnie odpowiedzieć, ale odpowiedź wypełniłaby całą stronę Γ-limatiassu.

Po drugie, zauważamy, że począwszy od a_3 wszystkie wyrazy w tabeli (a także pośrednie, pominięte) mają cyfrę jedności 7. Począwszy od a_5 końcówki dwucyfrowe powtarzają się cyklicznie: 57, 97, 37, 77, 17. Natomiast od a_{20} końcówki trzycyfrowe powtarzają się z okresem 25: 857, 297, 337, 977, 217, 57, 97, 737, 977, 817, 257, 897, 137, 977, 417, 457, 697, 537, 977, 17, 657, 497, 937, 977, 617, a czterocyfrowe z okresem 125.

DLACZEGO zajmują się tym ciągiem, **DLACZEGO?**

DLACZEGO tabela urywa się akurat na a_{2039} ?

DLACZEGO tak bardzo zwracam uwagę na regularność końcówek wyrazów ciągu (a_n) ?

JWR

n	a_n	$C(a_n)$	$C(C(a_n))$
3	79228...50337	29	2
4	51784...37697	2803	4
5	47334...12257	271863	6
6	62181...32097	26370679	8
7	16094...81537	2557955843	10
8	15907...60577	248121716694	12
9	44852...93217	24067...19240	14
10	18571...19457	23345...66246	16
11	11945...34497	22645...25791	18
12	28024...11137	21966...01637	20
13	21490...61377	21307...58735	22
14	13021...93217	20667...97230	24
15	94397...38657	20047...31223	26
16	24824...24897	19446...28628	28
17	12549...44737	18862...76857	30
18	21684...22177	18297...55041	32
19	22467...09217	17748...38912	34
20	66322...89857	17215...74400	36
21	25130...07297	16699...16782	38
22	31387...10337	16198...27795	40
23	69710...74977	15712...96065	42
24	27410...37217	15240...18289	44
25	12504...33057	14783...73978	46
26	10415...80097	14340...75778	48
27	19860...88737	13910...50370	50
28	29836...90977	13492...85821	52
29	40063...54817	13087...24585	54
30	10102...52257	12695...84706	56
31	89526...36897	12314...16384	58
32	70432...19137	11945...89242	60
33	53561...06977	11586...56458	62
34	15147...20417	11239...76399	64
35	91265...67457	10901...10622	66
36	40337...57697	10574...30329	68
37	15747...41537	10257...41874	70
38	36345...22977	99498...61699	71
39	60782...94017	96513...84759	73

n	a_n	$C(a_n)$	$C(C(a_n))$
40	27271...98657	93618...21601	75
50	58494...89057	69036...83076	95
60	13454...83457	50909...76736	115
70	40304...41857	37541...07191	135
80	20000...24257	27684...03469	155
90	10426...90657	20414...63151	175
100	25775...01057	15054...23330	195
200	16751...25057	71587...89940	393
300	51463...49057	34041...68489	592
400	29489...73057	16187...37645	791
500	17477...97057	76976...67765	989
600	50314...21057	36604...94424	1188
700	98344...45057	17406...93896	1387
800	16442...69057	82771...43862	1585
900	22220...93057	39359...68016	1784
1000	22536...17057	18716...74695	1983
1100	51033...41057	89001...10685	2181
1200	18647...65057	42322...28594	2380
1300	33818...89057	20125...37697	2579
1400	40688...13057	95701...45638	2777
1500	33759...37057	45508...87761	2976
1600	15820...61057	21640...78573	3175
1700	47212...85057	10290...52241	3374
1800	11146...09057	48934...19435	3572
1900	69833...33057	23269...40076	3771
2000	76780...57057	11065...53175	3970
2030	18110...32257	44372...85045	4029
2031	51540...56897	43041...49290	4031
2032	58989...79137	41749...81099	4033
2033	28635...06977	40497...66578	4035
2034	10257...60417	39282...58011	4037
2035	58141...47457	38103...26968	4039
2036	70211...77697	36960...15870	4041
2037	62064...01537	35852...39372	4043
2038	39518...22977	34776...19061	4045
2039	38019...34017	33733...48875	4047

Korespondencję do Γ-limatiassu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl