

SPIS TREŚCI NUMERU 5 (324)

W pogoni za zdrowym rozsądkiem	str. 1
Co każdy elektron wiedzieć powinien? <i>Przemysław Panek</i>	str. 1
A może jednak ukryty determinizm? <i>Andrzej Dragan</i>	str. 5
Zadania	str. 8
O parametrach ukrytych coś jeszcze <i>Piotr Żmijewski</i>	str. 9
Komputery kwantowe i obliczenia kwantowe <i>Arkadiusz Orłowski</i>	str.10
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Maj	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:
Po co obserwować meteory?

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*
Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delty*
można znaleźć w portalu Eduseek
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski
Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:		Redaguje kolegium w składzie:
Andrzej Białynicki-Birula		Wiktor Bartol
Bogdan Cichocki		Krzysztof Biesaga
– wiceprzewodniczący		Ewa Czuchry
Krzysztof Ciesielski		Krystyna Kordos – sekr. red.
Jan A. Gaj		Marek Kordos – red. nac.
Piotr Goldstein		Tomasz Kwast
Andrzej Hryniewicz		Anna Ludwicka
Wiesław A. Kamiński		Anna Rudnik
Marta Kicińska-Habior		Witold Sadowski
Krzysztof Maślanka		Joanna Udalska
Janusz Matkowski		Anna Wojtyra
Andrzej Mąkowski		Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
Zdzisław Pogoda		
Michał Różycka		Adres Redakcji:
Konrad Rudnicki		ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
Grzegorz Sitarski		tel. 853-59-61
Andrzej Woszczyk		BARTOL@MIMUW.EDU.PL
Eligiusz Złotkiewicz		Skład systemem TeX wykonała Redakcja.
Wiesław Żelazko – przewodniczący		Wydrukowano
		w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
		w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.**
Cena jednego numeru w 2001 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2001 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 2001 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.

5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

W pogoni za zdrowym rozsądkiem

Mechanika kwantowa jest teorią, która doskonale zgadza się z wynikami doświadczeń, ale zrozumienie jej samej w sobie stawia pewne trudności natury koncepcyjnej. Podstawowe jej założenia wydają się przeczyć zdrowemu rozsądkowi. Wygląda jednak na to, że należy raczej zrewidować nasze pojęcie zdrowego rozsądku, a teorię zostawić na razie w spokoju. Ten numer *Delty* jest właśnie zaproszeniem do wspólnej zabawy w zrozumienie niezrozumiałego.

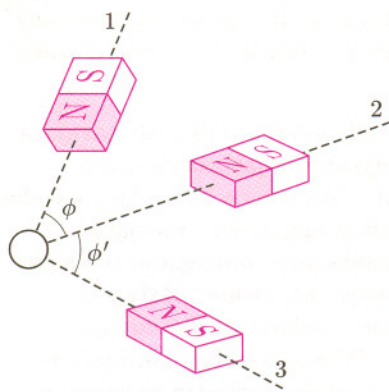
Pozornym paradoksom teorii – wynikającym z pewnych schematów myślowych opartych na codziennym doświadczeniu – poświęcone są pierwsze trzy artykuły. Konkretnym przykładem, gdzie nie stosuje się nasza zdroworozsądkowa zerojedynkowa logika (zakładająca, że prawdziwe jest albo TAK, albo NIE), może być komputer kwantowy. Z założenia jest on oparty na logice kwantowej (choć wyniki daje klasyczne), gdzie istnieje coś pośredniego między TAK a NIE. Omówione wcześniej paradoksy przekładają się na język schematów logicznych, co może w inny sposób przybliżyć logikę wielowartościową.

Co każdy elektron wiedzieć powinien?

Przemysław PANEK

Mechanika kwantowa nigdy nie podobała się Albertowi Einsteinowi. W okresie gdy powstawała, wielokrotnie starał się wykazać wewnętrzną sprzeczność tej teorii. Ważną próbą był eksperyment myślowy, nazwany potem od nazwisk jego twórców paradoksem Einsteina–Podolskiego–Rosena. Na podstawie jego prostszej wersji D. Greenberger, M. Horn i A. Zeilinger przedstawili w 1989 r. paradoks, zwany w skrócie paradoksem GHZ. Zanim go jednak poznamy, przyjrzyjmy się najpierw niektórym kwantowym własnościom elektronów.

W szkole uczymy się, że elektron to mała lekka cząstka, na rysunkach przedstawiana jako kulka. Ma on masę $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg i ujemny ładunek elektryczny $q_e = e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Jednak masa i ładunek to nie wszystko, co „posiada” elektron. Ma on także własność zwaną kwantowym momentem magnetycznym lub spinem. Jeżeli elektron znajduje się w niejednorodnym polu magnetycznym, to działa na niego siła, jak na mały magnes (oprócz siły Lorentza związanej z ruchem elektronu jako ładunku elektrycznego). Magnesy mogą się przyciągać lub odpychać. Jeżeli przypadkowy elektron znajdzie się w pobliżu jednego z biegunów magnesu, to mamy 50% szansy, że będzie on przyciągany i tyle samo, że odpychany. Przeprowadźmy eksperyment (niestety, nie wykonamy tego w domu). Do spoczywającego elektronu zbliżamy z góry magnes (rys. 1).



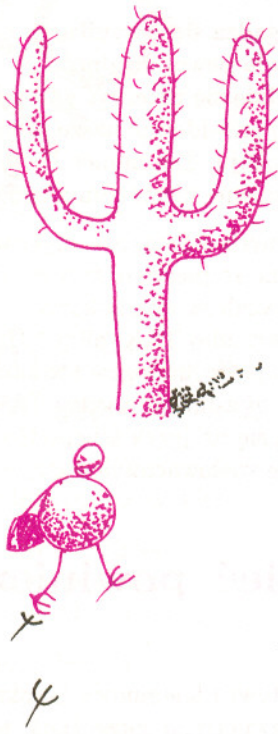
Rys. 1

Opis elektronu jako małej kulki (czy też punktu materialnego) nie jest całkiem poprawny. O elektronie można także myśleć jako o biegnącej fali, która np. ulega dyfrakcji i interferencji, przechodząc wokół przeszkód. Opis korpuskularny i falowy uzupełniają się, tzn. w niektórych sytuacjach ujawnia się falowa natura elektronów, a w innych – to, że są cząstkami.

W opisywanym eksperymencie dobrym przybliżeniem będzie opis korpuskularny. Rozmiary układu eksperymentalnego będą duże w stosunku do długości odpowiedniej fali elektronowej, a liczba elektronów – ustalona. Niekiedy może się nasuwać myślenie o obiektach kwantowych jako o jakiegoś rodzaju „falo-cząstkach”, które zachowują się w sposób będący połączeniem własności falowych i cząstkowych. Obraz taki może być jedynie przybliżeniem, prawdziwym w przypadku jednego samotnego elektronu lub elektronów niezależnych i wzajemnie nie oddziałujących. Ogólna sytuacja jest bardziej złożona, czego dostrzeżenie, miejmy nadzieję, ułatwia opisywany eksperyment. Zatem założmy na razie, że mamy do czynienia z małymi kulkami.

Elektrony mają ładunek elektryczny. Zatem, jeśli lecące elektrony umieścimy w polu elektrycznym lub magnetycznym, to będzie na nie działać siła Lorentza, odchylająca ich bieg. Elektrony w próżni mamy dostępne w kineskopie każdego telewizora lub monitora komputerowego. Odpowiednimi przyrządami można zobaczyć, że świecenie ekranu składa się z wielu małych rozbłysków pochodzących od pojedynczych elektronów. W jasnych obszarach jest ich więcej, w ciemnych – mniej. Siła każdego rozbłysku zależy jedynie od energii elektronów (np. od napięcia je przyspieszającego). Zbliży do ekranu magnes. Zauważymy lekkie przekrzywienie się obrazu, spowodowane działaniem siły Lorentza. W kolorowym kineskopie bardziej będą się rzucać w oczy zmiany kolorów, które także powoduje siła Lorentza i które można zrozumieć, znając zasadę działania takiego kineskopu. Nie należy przesadzić ze zbyt dużym magnesem, gdyż ekran się magnetyzuje i barwne plamy jakiś czas pozostają. Eksperyment ten ma jedynie przekonać Czytelnika o realności opisywanych zjawisk, gdyż dalej nie będziemy omawiać wpływu siły Lorentza. Ponadto przyjmijmy, że elektrony poruszają się w próżni, w nieobecności pól grawitacyjnych i elektrycznych.

Powiedzmy, że zdarzyło się, iż elektron jest odpychany i zaczyna poruszać się do dołu. Odsuwamy teraz magnes i przysuwamy go z innego kierunku (nr 2), będącego pod kątem ϕ do poprzedniego. Prawdopodobieństwo, że elektron



będzie ponownie odpychany, wynosi $P_-(\phi) = \cos^2(\frac{\phi}{2})$. Prawdopodobieństwo, że będzie przyciągany, wynosi $P_+(\phi) = \sin^2(\frac{\phi}{2})$. Indeksy „+” i „-” oznaczają odpowiednio przyciąganie lub odpychanie. W szczególności, jeżeli ponownie zbliżamy magnes z tej samej strony, czyli z góry, to będzie na pewno odpychany, jeśli z dołu, to przyciągany. Jeżeli elektron był za pierwszym razem przyciągany (do góry), to wzory należy naturalnie zamienić: $P_+(\phi) = \cos^2(\frac{\phi}{2})$, $P_-(\phi) = \sin^2(\frac{\phi}{2})$. Nie jest istotne, jaki biegun magnesu zbliżamy do elektronu, gdyż przebieg zjawiska będzie taki sam dla północnego i południowego, a nazwa to rzecz umowna. Istotne, abyśmy raz wybrawszy, zawsze używali tego samego bieguna. Odsuwamy magnes i zbliżamy go po raz trzeci, z kierunku nr 3, pod kątem ϕ' do ostatniego (drugiego) kierunku. Teraz elektron zupełnie zapomniał, co robił za pierwszym razem. Jeżeli za drugim razem był przyciągany, to prawdopodobieństwa przyciągania i odpychania za trzecim razem zależą jedynie od ϕ' i wynoszą $P_+(\phi') = \cos^2(\frac{\phi'}{2})$, $P_-(\phi') = \sin^2(\frac{\phi'}{2})$. Jeżeli był odpychany, to wzory zamieniamy miejscami. Możemy taką zabawę prowadzić w nieskończoność, wybierając dowolnie kierunki we wszystkich trzech wymiarach. Za każdym razem liczy się kierunek i wynik *ostatniego* „badania”. W szczególności, jeżeli będziemy zbliżać magnes na przemian z dwóch prostopadłych kierunków, to dostaniemy doskonały generator zdarzeń losowych. Za każdym razem mamy po 50% szansy na przyciąganie i odpychanie.

Co ciekawe, jeśli spowodujemy, że poruszony elektron wróci na swoje miejsce i nie zostanie w żaden sposób „podglądnięty” – czy był przyciągany czy odpychany – to pamiętany przez niego kierunek spinu nie zostanie zmieniony. Zupełnie jak gdyby nie był wykonany żaden pomiar. Przysuwanie magnesu i badanie, czy elektron jest przyciągany czy odpychany, nazywa się pomiarem składowej spinu wzdłuż wybranej osi. Jako wynik pomiaru mamy zawsze dwie możliwości: zwrot spinu jest zgodny ze zwrotem osi, wzdłuż której przysuwamy magnes, lub do niego przeciwny, zależnie od tego, czy elektron jest przyciągany czy odpychany.

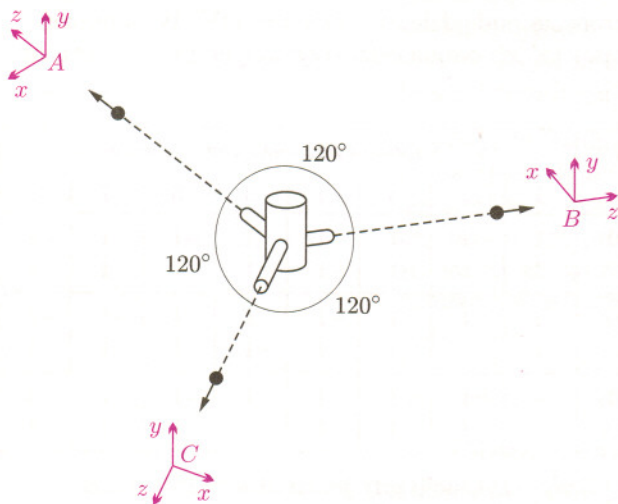
Moglibyśmy spróbować założyć, że w mikroświecie także obowiązuje zasada zachowania momentu pędu. I faktycznie. Okazuje się, że dużo elektronów zmieniających jednocześnie i w taki sam sposób kierunek spinu może spowodować makroskopowe efekty. Właśnie tak, jakby elektron był małym wirującym obiektem o osi obrotu skierowanej zawsze zgodnie z kierunkiem jego „wewnętrznego magnesu” i nagle zmienił oś lub kierunek obrotu. Nie przywiązujemy się jednak zbyt mocno do tego modelu. Jeśli chodzi o nazwę „spin”, to oznacza ona moment pędu elektronu. Powszechnie określenia „spin” używa się także w odniesieniu do momentu magnetycznego (czyli opisanego obok zachowania się elektronu w polu magnetycznym), tak jak to uczyniliśmy.

Czasem elektron jest przedstawiany jako mała, naładowana kulka, ale wirująca. Istotnie, taka kulka byłaby źródłem pola magnetycznego, jak magnes. Jak widzieliśmy, elektron najwyraźniej niesie ze sobą informację o kierunku i wyniku ostatniego pomiaru. Być może jest on takim małym magnesem, wirującą kulką lub czymś jeszcze innym, co w czasie zbliżania dużego magnesu podlega pewnym przypadkowym oscylacjom i zmienia swoje ustawienie? Mały, ale „zwykły” magnesik ustawiałby się zawsze zgodnie z liniami zewnętrznego pola magnetycznego i byłby zawsze przyciągany. Wirująca kulka podlegałaby precesji. Natomiast elektron ustawia się czasem zgodnie, a czasem przeciwnie, co należałoby bliżej zbadać i zaproponować jakieś wyjaśnienie. Rzeczywistość, niestety, nie jest taka prosta i właśnie to jest przedmiotem tego artykułu.

Kolejnym pojęciem, z którym musimy się zapoznać, jest korelacja wyników pomiarów. Wyobraźmy sobie człowieka, który siedzi w pokoju w Warszawie i ma do dyspozycji dwa stopy kartek czarnych i białych. Bierze jedną kartkę białą, jedną czarną i wkłada je losowo do dwóch różnych kopert. Następnie koperty wysyła pocztą do dwóch przyjaciół mieszkających w różnych miastach, np. w Gdańsku i w Krakowie. Jeżeli jeden z nich znajdzie w kopercie białą kartkę, to drugi na pewno ma czarną. Każdy z nich wie, o co chodzi, więc zaglądając do swojej koperty, dowiaduje się zarazem, co jest w kopercie drugiej osoby. Oczywiście, nie ma między nimi żadnej wymiany informacji. Informacja w postaci kartek w kopertach jest wymieniana jedynie między każdym z nich a ich wspólnym znajomym z Warszawy. Ponadto wcześniej wszyscy musieli ustalić reguły zabawy. Jeżeli wynik jednego pomiaru, jakim jest tu obejrzenie zawartości koperty, mówi nam coś o wyniku innego pomiaru, to mówimy, że wyniki te są skorelowane. Tutaj powiemy, że skorelowane są wyniki badania kopert przez znajomych z Krakowa i Gdańska. To, co znajduje jeden z nich, nie jest przypadkowe w stosunku do tego, co znajduje drugi. Zamiast kartek czarnych i białych można wysyłać elektrony o określonych kierunkach spinu



(puryści powiedzą: kierunkach i zwrotach). Można przygotować dwa zestawy elektronów o spinach do góry i do dołu, np. przez wcześniejsze zbliżenie badającego magnesu z góry. Elektrony podzielimy na te przyciągane i te odpychane. Jeżeli będziemy je trzymać z dala od magnesów, to będą „pamiętać” kierunek swojego spinu. Potem można losowo rozsyłać do Gdańska i Krakowa pary elektronów o przeciwnych kierunkach spinu (jak na razie Poczta Polska nie oferuje takiej usługi, ale to drobiazg techniczny). Znajomi, którzy tam mieszkają, powinni wcześniej wiedzieć, że mają badać swoje elektrony w kierunku góra-dół, inaczej dostaną naprawdę przypadkowe wyniki.

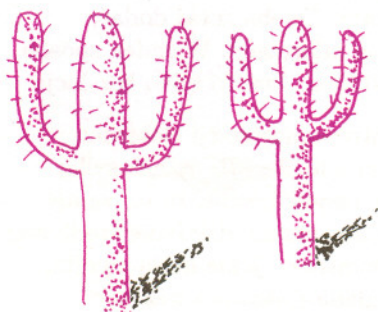


Rys. 2

Możemy teraz przejść do właściwego eksperymentu GHZ. Wyobraźmy sobie sytuację jak na rysunku 2. Trzy elektrony rozsyłane są do trzech obserwatorów. Obserwatorzy mogą być bardzo daleko, np. w różnych krańcach Galaktyki. Urządzenie (pośrodku) nie ma gotowych do wysłania elektronów o określonych spinach. Sytuację elektronów można porównać do trzech więźniów, którzy ustalają wspólne zeznania, a potem są rozłączeni i poddani osobnym przesłuchaniom. Urządzenie bierze trzy elektrony i robi im specjalne, kwantowe „pranie mózgu” tak, że ich zeznania po rozłączeniu są skorelowane w zdumiewający sposób. Urządzenie i obserwatorzy leżą w jednej płaszczyźnie. Niech każdy z obserwatorów ma układ współrzędnych, jak na rysunku. Każda z osi OZ leży w kierunku ruchu elektronu, osie OY są skierowane „do góry”, osie OX – stosownie dla zachowania

prawoskrętności układu. Obserwatorzy będą mierzyli spiny jedynie wzdłuż osi OY lub OX . Przyjmijmy, że badający magnes będzie przysuwany od strony dodatnich pólosi. Każdemu wynikowi pomiaru przypiszemy liczbę $+1$, jeśli elektron był przyciągany, i -1 , jeśli był odpychany. To głównie dla uproszczenia opisu. Zależności między „zeznaniem” elektronów (korelacje) są następujące. Niech jeden z obserwatorów (dowolny) zmierzy składową spinu swojego elektronu wzdłuż osi OX , a dwaj pozostali obserwatorzy wzdłuż osi OY . Wtedy, jeśli przemnożymy liczby odpowiadające wynikom tych trzech pomiarów, to zawsze dostaniemy $+1$, nigdy -1 . Inaczej mówiąc, albo wszystkie trzy elektrony były przyciągane, albo jeden przyciągany, a dwa odpychane. Wszystkie cztery sytuacje, w których iloczyn wyników jest $+1$, są równie prawdopodobne. Dzisiaj nie umiemy zrobić przyrządu, który by rozsyłał tak przygotowane elektrony, ale jest to jedynie problem techniczny. Żadne prawo natury tego nie zabrania.

Jakie są konsekwencje takiej korelacji? Jeżeli obserwatorzy B i C zmierzają spiny swoich elektronów wzdłuż osi OY , to będziemy wiedzieli, co *by było*, gdyby obserwator A zmierzył spin swojego elektronu wzdłuż osi OX . Jeśli chcielibyśmy wiedzieć, co dostałby A , robiąc pomiar wzdłuż OY , to B i C powinni zmierzyć spiny swoich elektronów – jeden wzdłuż OY , drugi w kierunku OX . Zatem A może w ogóle nie wyciągać swojego magnesu z szuflady, a mimo to możemy powiedzieć, co zrobiłby jego elektron. Nasuwa się myśl, że to podobnie, jak z kopertami. W jakiś sposób informacja o obu wynikach przyszłych pomiarów (wzdłuż osi OX lub OY) jest zapisana w elektronie na samym początku. Oczywiście, żaden elektron nie jest wyróżniony, tak samo musi być z dwoma pozostałymi. Urządzenie pośrodku zadbało, aby stany trzech rozbiegających się elektronów (informacje o wynikach przyszłych możliwych pomiarów) były uzgodnione. Hipoteza taka byłaby w pełnej zgodzie z wcześniejszymi podejrzeniami, że elektron jest swego rodzaju dziwnym magnesikiem. Może on „pamiętać” kierunek ostatniego pomiaru, ale repertuar jego zachowań, jak widać, może być czasem bogatszy. Przeanalizujemy dokładniej to przypuszczenie.



Twierdzimy zatem, że każdy elektron w tym eksperymencie niesie ze sobą informację, jak ma się zachować, gdy będziemy do niego przysuwać magnes z kierunku OX lub OY . Gdybyśmy znali wyniki przyszłych możliwych

pomiarów w kierunkach osi OY , to automatycznie znalazłbyśmy też możliwe wyniki w kierunkach OX . Musi być bowiem zachowana opisana na początku korelacja, którą nasi obserwatorzy mogą w każdej chwili i w dowolnej kombinacji zapragnąć sprawdzić. Są trzy elektrony, mierząc spin każdego z nich w kierunku OY mamy dwie możliwości, razem $2^3 = 8$ możliwości spełniających naszą korelację. Wszystkich możliwości, razem z tymi, które nie gwarantowałyby poprawnych korelacji, byłoby $2^6 = 64$. Nie będziemy badać każdego elektronu w kierunkach OX i OY . Widzieliśmy, że jeden pomiar zmienia coś w elektronie i wpływa na wyniki następnego pomiaru. Ale każda z cząstek ma gotową odpowiedź, jak ma się zachować w takiej lub innej sytuacji, zależnie od tego, z której strony ją podejrzamy – OX czy OY . W poniższej tabelce mamy możliwe zestawy takich odpowiedzi trzymanych przez elektrony w tajemnicy przed nami.



Obserwator	Spin mierzony wzdłuż osi	8 możliwych zestawów odpowiedzi							
		1	2	3	4	5	6	7	8
A	OY	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	OX	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
B	OY	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
	OX	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
C	OY	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
	OX	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1

No dobrze, dotychczas mówiliśmy o sytuacji, gdy jeden obserwator mierzy w kierunku OX , a dwóch – OY . Wtedy sprawdzamy poprawność korelacji. A co będzie, jeśli obserwatorzy wybiorą kierunki do pomiarów w inny sposób?

Dostaną wyniki takie, jak w którejś z ośmiu kolumn tabeli (choć nie wiemy, z której). Pojedynczy elektron nie wie przecież, o co pytamy jego kamratów i czy sprawdzamy korelację (na co musi być zawsze przygotowany), czy robimy coś innego. Nie dajemy mu szansy na blef.

Spiny 3 elektronów mierzone jednocześnie wzdłuż osi OX	4 warianty możliwych wyników w prawdziwym pomiarze			
	1	2	3	4
A	-1	1	1	-1
B	1	-1	1	-1
C	1	1	-1	-1

Ciekawą własnością jest, że gdyby wszyscy obserwatorzy zmierzili składowe spinów swoich elektronów wzdłuż osi OX , to iloczyn przypisanych tym pomiarom liczb wyniósłby $+1$. Niezależnie, który z ośmiu wariantów akurat wybrała środkowa maszyna. A jeśli zmierzą? Tak się składa, że w rzeczywistym eksperymencie dostaną -1 . Dla większej jasności możliwe wyniki jednoczesnych pomiarów wzdłuż osi OX są zebrane w tabelce obok. Będą one zachodzić

z równymi prawdopodobieństwami. Skąd to wiemy? Jest to jeszcze jedna własność opisanej kwantowej korelacji elektronów. Nie wspominaliśmy o niej, aby nie wprowadzać zamieszania. Gdyby elektrony niosły „ze sobą” informację o wynikach pomiarów, to (jak wykazaliśmy) iloczyn musiałby być $+1$. Są one jednak cząstkami kwantowymi i korzystając z mechaniki kwantowej, można wykazać, że przy opisanej na wstępie korelacji iloczyn musi być -1 . Są to oczywiście rozważania teoretyczne, ale taki też będzie wynik eksperymentu, o czym wszyscy są przekonani. Trzeba tutaj dodać, że w opisanym doświadczeniu nie zachodzi przekaz informacji. W żaden sposób nie możemy z daleka wpłynąć na zachowanie elektronu. Jest to tylko korelacja.

Na zakończenie pewne uściślenie. Dokonujemy antropomorfizacji elektronu mówiąc, że „wie” on lub „dowiaduje” się, co ma zrobić. Jest to jednak tylko pewien skrót ułatwiający opis i myślenie. Jedyne, co jest pewne, to to, że my coś wiemy lub nie wiemy. My, którzy o tym mówimy, znamy działanie środkowej maszyny, wiemy, jakich pomiarów dokonują obserwatorzy, jakie mają wyniki, itp. Niemniej jednak rzeczywistość kwantowa wygląda ciekawie i wszyscy Czytelnicy są zaproszeni do jej dalszego poznawania.

Jaka jest alternatywa dla obalonej hipotezy? Jak dotychczas, nie ma dobrej. Najpowszechniej przyjęta jest taka, że w abstrakcyjnej, wielowymiarowej przestrzeni można określić pewną funkcję, wspólną dla wszystkich elektronów, opisującą, co mają one robić i z jakim prawdopodobieństwem. W trakcie pomiaru spinu jednego z elektronów funkcja nagle i skokowo przechodzi w inną. Odległy elektron „widzi” już inną funkcję i stosownie do tego wybiera kierunek spinu w polu magnetycznym. Jest to pomyślane tak sprytnie, że nie zachodzi przy tym przekaz informacji. Mechanika kwantowa mówi nam, jak zachowuje się ta abstrakcyjna funkcja i ostateczne przewidywania są całkowicie zgodne z doświadczeniem.

A może jednak ukryty determinizm?

Andrzej DRAGAN

Istnieje w mechanice kwantowej przedziwna zasada mówiąca, że w ogólności wynik pojedynczego pomiaru nie jest przez nic określony. Na przykład, zgodnie z tą zasadą chwila, w której wyemitowany zostanie foton ze wzbudzonego atomu, nie może zostać przewidziana przez żadne prawo. Wprowadza to do mechaniki kwantowej element *indeterminizmu* (czyli nieprzewidywalności zjawisk). Nic dziwnego, że tak niecodzienna zasada budzi wiele sprzeciwów. Słyszysz się na przykład: „Ja w to nigdy nie uwierzę! Na pewno istnieje *coś*, co wywołuje emisję tego fotonu. Przecież indeterminizm to absurd!”. Powstało nawet wiele konkurencyjnych teorii używających zamiast słowa „*coś*” terminu *parametr ukryty*. Teorie te mówią: istnieją pewne, na razie nieznanne (ukryte), parametry, które *determinują* wyniki pojedynczych pomiarów.

Sytuacja radykalnie się zmieniła, gdy w 1964 roku ukazała się praca Bella zawierająca słynne nierówności (nazwane jego imieniem). Dzięki nim pojawiła się możliwość eksperymentalnego sprawdzenia, czy ukryte parametry istnieją, czy też nie. Co prawda, uzyskane rozstrzygnięcia nie są jeszcze ostateczne, jednak mogą być traktowane jako bardzo poważny argument. Zanim jednak poznamy sens nierówności Bella, dowiedzmy się, jak w ogóle doszło do tego, że twórcy mechaniki kwantowej tak głęboko w nią uwierzyli i bronili jej przed atakami zwolenników sprawdzonych od wieków teorii w pełni deterministycznych?

1. Dirac mówi: tylko prawdopodobieństwa!

Przedstawmy na początek rozumowanie pochodzące od jednego z twórców mechaniki kwantowej, Paula A.M. Diraca. Wyobraźmy sobie strumień światła przechodzący przez dwa liniowe polaryzatory ustawione w różny sposób. Po przejściu przez pierwszy światło zostaje liniowo spolaryzowane. Następnie, podczas przechodzenia przez drugi, natężenie światła zmniejsza się, a płaszczyzna polaryzacji zostaje obrócona. Okazuje się, że stosunek natężenia fali przechodzącej przez drugi polaryzator do natężenia fali na niego padającej równa się zawsze $\cos^2 \phi$, gdzie ϕ oznacza kąt między kierunkami ustawienia polaryzatorów. Prawo to jest wysmieniecie wyjaśnione przez klasyczną teorię elektromagnetyzmu. Nie ma więc na razie powodu do niepokoju.

Jednakże ubiegły wiek obfitował w doświadczenia dowodzące kwantowej natury światła. Po ludzku mówiąc: strumień światła składa się z „kawałków” zwanych fotonami. Doświadczenia te zmuszają nas do zrewidowania sposobu rozumienia eksperymentu z dwoma polaryzatorami. Teraz bowiem zmuszeni jesteśmy przyjąć, że polaryzator pochłania pewną część *fotonów* spośród wszystkich nań padających. Trudności pojawią się, gdy zadamy pytanie, *które* z fotonów przechodzących przez pierwszy polaryzator przejdą również przez drugi, a które zostaną pochłonięte? Skoro wiadomo, że strumień światła może mieć własność *polaryzacji*, a składa się on z fotonów, to musimy przyznać, że każdy foton niesie informację o polaryzacji (mówiąc w skrócie: poszczególne fotony „mają” jakąś polaryzację). Jeżeli więc użyliśmy światła monochromatycznego, to *wszystkie fotony po przejściu przez pierwszy polaryzator muszą stać się jednakowe*. Nic nie ma prawa *wyróżniać* niektórych fotonów spośród innych. Zatem wydawać by się mogło, że jedynym sensownym wynikiem eksperymentu może być tylko przejście przez drugi polaryzator *wszystkich* fotonów albo ich pochłonięcie. Taka piękna teoria i taki paskudny fakt. Bowiemy $\cos^2 \phi$ jak był, tak jest. Jednak prawo to oznacza teraz coś innego: spośród N fotonów padających na drugi polaryzator przejdzie przez niego zaledwie $N \cos^2 \phi$. Wygląda więc na to, że niektóre fotony przejdą, a niektóre nie. Naturalnie, natychmiast padnie odpowiedź: „No dobrze, najwyraźniej fotony są scharakteryzowane jeszcze jakimiś *ukrytymi parametrami*, które odróżniają jedne od drugich”. Jeżeli jednak istniałyby jakieś parametry, to dlaczego nie potrafimy ich kontrolować? Czemu polaryzatory „nie potrafią” odsiać fotonów określonych tymi samymi parametrami? Przecież jeżeli wstawimy w strumień światła kolejne polaryzatory, to prawo „ $\cos^2 \phi$ ” będzie działało nadal

Można to łatwo sprawdzić. Wystarczy kupić dwa tanie zegarki elektroniczne i wymontować z nich ekraniki. Są to ni mniej ni więcej, tylko dwa polaryzatorki. To nie przypadek. Polaryzator jest niezbędnym elementem wyświetlacza ciekłokrystalicznego znajdującego się w zegarku.





Rozwiązanie zadania F 547.

Moc żarówki jest równa sumie energii wszystkich n fotonów wysyłanych w jednostce czasu

$$P = n\lambda\nu = n \frac{hc}{\lambda},$$

skąd otrzymujemy

$$n = \frac{P\lambda}{hc} \approx 1,2 \cdot 10^{21} \text{ fotonów.}$$

Rozważmy proces kreacji pary elektron-pozyton. W przypadku gdy w rozważanym procesie całkowity moment pędu układu znika, składowe spiny powstałych w procesie cząstek przeciwnie skierowane. Oznacza to, że gdy zmierzmy kierunek spinu jednej z cząstek, wiemy natychmiast, jaki będzie wynik analogicznego pomiaru dokonanego na drugiej. Spin musi być skierowany w przeciwną stronę. Prawo niby proste. Ale jeżeli prawdziwe są kwantowomechaniczne reguły, to przed wpadnięciem do detektorów cząstki „nie wiedziały” jeszcze, jaki będzie wynik. Decyzję musiały „podjąć” (nie bierzmy jednak tej antropomorfizacji dosłownie ;-)) dopiero w *chwili pomiaru*. Jednak wówczas cząstki nie zdążyłyby „uzgodnić” pomiędzy sobą wyników, szczególnie gdy wpadły do detektorów jednocześnie (oczywiście, jeżeli nie dopuszczamy ponadświetlnych sygnałów). Z drugiej strony nie może dojść do „wpadki” polegającej na tym, że zmierzone spiny nie są przeciwnie skierowane. Co z tym począć? Einstein wyciągnął wniosek, że kwantowomechaniczne reguły nie mogą być prawdziwe.



(a gdybyśmy mieli „odsiane” fotony o identycznych parametrach, to znowu powinny wszystkie przejść albo wszystkie nie przejść).

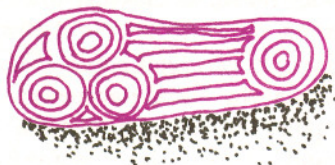
Jakie rozwiązanie problemu proponuje mechanika kwantowa? Cóż, jest ono bardzo dziwaczne. Teoria ta mówi bowiem: „Proszę państwa! Nic nie wyróżnia żadnego fotonu. Dlatego to, czy określony foton będzie łaskaw przejść, czy nie, nie jest *niczym* zdeterminowane. Nie istnieje żaden *parametr* decydujący o losie pojedynczych fotonów! Nie ma żadnego parametru! Po prostu na elementarnym poziomie *nie istnieje żadne prawo fizyczne, które przewidywałoby wynik pojedynczego eksperymentu*. Znamy wyłącznie prawdopodobieństwo tego, że foton przejdzie przez polaryzator oraz prawdopodobieństwo jego pochłonięcia. Nic więcej.”

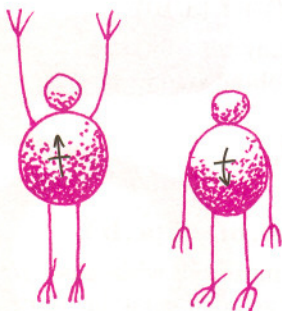
2. Einstein protestuje: proszę państwa, tak być nie może!

Na temat hipotezy ukrytych parametrów powstało wiele prac, ale wciąż brakowało ostatecznego rozstrzygnięcia, aż do momentu pojawienia się pewnego pomysłu dającego nareszcie szansę sprawdzenia, kto ma rację w sporze. Ale po kolei. Najpierw bowiem pojawił się inny eksperyment myślowy, który trochę naszą (i tak niewesołą) sytuację pogmatwał. A został on podany w legendarnej pracy Einsteina, Podolskiego i Rosena, zyskawszy przydomek „paradoksu EPR” (patrz margines). Einstein był kontent, gdyż udało mu się „podstawić nogę” mechanice kwantowej (od początku za nią nie przepadał). Zgodnie z jego rozumowaniem, „eksperyment EPR” powinien być w gruncie rzeczy podobny do sytuacji, gdy ściągamy z nóg buty i rzucamy je w przeciwnych kierunkach. Nie zdążyliśmy jednak spojrzeć, który but poleciał w którą stronę. Musimy więc to sprawdzić. Podchodzimy do jednego z nich, bierzemy go do ręki i zauważamy: „O! *Tu* jest lewy! W takim razie prawy musi być *tam!*”. Oczywiście sam fakt *obserwacji* buta nie może *spowodować*, że nagle „zdecydował się” on być lewy lub prawy! „Skretność” butów rzuconych w obu kierunkach jest określona już w momencie rzutu. Einstein uważał, że emitowane w przeciwnych kierunkach cząstki (na przykład elektrony) przypominają właśnie parę takich butów. Co więcej, wysnuł on wniosek, że aby uchronić zasadę przyczynowości, zmuszeni jesteśmy porzucić absurdalne reguły mechaniki kwantowej i pozostać przy poczciwych i sprawdzonych prawach deterministycznych, przyjmując hipotezę ukrytych parametrów.

3. Bell robi porządek: sprawdźmy, jak jest naprawdę.

Argumentacja Einsteina wydawała się bardzo przekonująca, aż tu nagle na scenie pojawił się John Bell i raz jeszcze wyrzucił wszystko do góry nogami! W jaki sposób? Spróbujmy prześledzić jego rozumowanie na przykładzie elektronów biorących udział w paradoksie EPR. Załóżmy sobie, że istnieją jakieś nieznanne nam parametry, które określają wyniki wszystkich eksperymentów. Na przykład: elektron „miał” spin „w górę”, bo miał wcześniej ustalony parametr określający taki spin. Podobnie pozyton. Przyjmijmy więc, że cząstki w chwili emisji ustalają między sobą parametry: „ty bierzesz parametr na spin „w górę”, ja na „spin w dół” i lecimy!”. Bez utraty ogólności możemy założyć, że obie cząstki mają ten sam parametr (nazwijmy go tradycyjnie λ) określający jednocześnie stan obu z nich. A jaka jest natura tych parametrów? „Nie mam pojęcia i nic mnie to nie obchodzi!” – mówi Bell. „Jeżeli te parametry rzeczywiście istnieją, to prędzej czy później zostaną odkryte, a na razie po prostu zakładam, że jakieś dziwne parametry nieznannej natury istnieją i decydują o wynikach wszystkich pomiarów”. W eksperymencie myślowym EPR użyliśmy dwóch urządzeń mierzących spin wzdłuż tych samych kierunków. Nic jednak nie zabrania nam zmienić względnej orientacji tych kierunków! Możemy przecież ustawić je w różny sposób i zobaczyć, jak wpłynie to na wyniki. Jeśli chcemy ukrytych parametrów, to musimy założyć, że determinują one wynik *każdego* eksperymentu, jaki przyjdzie nam do głowy wykonać (czyli jakkolwiek byśmy ustawili detektory, wynik musi być zdeterminowany parametrem λ). Wynik każdego eksperymentu może być tylko: „w górę” albo „w dół”. Trzeciego





Wzór obok kamufluje pewne ważne założenie. Mianowicie takie, że wyniki obu pomiarów są niezależne. Innymi słowy, pomiary dokonane na odległych cząstkach nie mają na siebie wpływu (założenie to nazywa się też *postulatem lokalności*). Formalne zastosowanie tego założenia polega na stwierdzeniu, że wynik pomiaru spinów może być zapisany w postaci iloczynu wyników dla elektronu i pozytonu osobno (to wcale nie jest takie oczywiste i po prostu zakładamy, że tak musi być!).

wyjścia być nie może. Możemy sobie powiedzieć: jeśli wyszło „w górę”, to za wynik eksperymentu przyjmujemy $+1$, a jeśli nie, to -1 . Potem możemy wykonać sto lub więcej eksperymentów i obliczyć, jaki jest średni wynik. Jeśli wyjdzie zero, to znaczy, że tak samo często spin trafia się „w górę” jak i „w dół”. Średnia może być też dodatnia lub ujemna. Każdy domyśla się, co to będzie oznaczać. Raz spin będzie częściej ustawiony w tę, a raz w drugą stronę. Weźmy więc dwa detektory i jeden ustawmy w położeniu \mathbf{a} , a drugi w położeniu \mathbf{b} . Następnie sprawdzimy, jakie są wyniki dla obu cząstek. Oznaczmy przez $A_{\mathbf{a}}(\lambda)$ wynik eksperymentu na elektronie, a przez $B_{\mathbf{b}}(\lambda)$ na pozytonie. Jak widać, wyniki (mogące jedynie przyjąć wartości ± 1) zależą tylko od ustawienia detektorów i ukrytego parametru. No dobrze, i co dalej? Powiedzmy sobie: te ukryte parametry, których nie znamy, nie mogą być również przez nas nijak kontrolowane. Więc tak naprawdę przypisywane są one cząstkom losowo (w zasadzie, w naszej teorii musi istnieć jakiś czynnik, który decyduje o tym, jaki parametr zostaje przypisany, ale my go nie potrafimy na razie kontrolować, więc wychodzi na jedno). Oznaczmy zbiór wszystkich możliwych parametrów przez Λ . Możemy jeszcze przyjąć dla ogólności możliwość, że niektóre parametry trafiają się częściej, a inne rzadziej, więc określamy jakiś nieznaną rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze wszystkich parametrów $p(\lambda)$. Zatem im większa wartość $p(\lambda)$, tym częściej będzie „trafiał się” parametr λ . Suma wszystkich prawdopodobieństw musi być równa jeden, tzn. $\sum_{\lambda \in \Lambda} p(\lambda) = 1$. Skoro już to

wszystko wiemy, to możemy przystąpić do rachunków. Obliczmy najpierw średnią wartość iloczynu wyników otrzymanych dla obu cząstek. Musimy w tym celu znaleźć sumę, do której różne parametry λ wchodzą z różnymi wagami $p(\lambda)$

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} A_{\mathbf{a}}(\lambda) B_{\mathbf{b}}(\lambda) p(\lambda).$$

Na przykład, jeżeli przyjmujemy rozkład prawdopodobieństwa stały (niezależny od λ), to każdy parametr będzie „równoprawdopodobny” i szukana wartość średnia będzie po prostu zwykłą średnią arytmetyczną możliwych wyników. Skorzystamy teraz z twierdzenia dotyczącego sumy szeregu:

$\left| \sum_x f(x) \right| \leq \sum_x |f(x)|$. Możemy dokonać serii pomiarów przy pewnych ustawieniach detektorów i obliczyć wartość średnią, następnie powtórzyć procedurę, zmieniając jeden z kierunków, odjąć otrzymane wyniki i wziąć wartość bezwzględną. Otrzymamy wówczas

$$\left| E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \right| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} |A_{\mathbf{a}'}(\lambda) B_{\mathbf{b}}(\lambda) - A_{\mathbf{a}'}(\lambda) B_{\mathbf{b}'}(\lambda)| p(\lambda),$$

a gdy się uważnie przyjrzeć, to się okaże, że prawa strona może być również zapisana w sprytny sposób:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |A_{\mathbf{a}'}| |B_{\mathbf{b}}(1 \pm A_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{b}'}) - B_{\mathbf{b}'}(1 \pm A_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{b}})| p(\lambda).$$

Znak $+$ lub $-$ możemy sobie wybrać na końcu, jaki nam się spodoba. Dla prostoty pominęliśmy w zapisie zależność wyników od parametru λ . Wiemy, że dla każdego λ mamy $|A_{\mathbf{a}'}(\lambda)| = 1$. Zatem to ostatnie równa się po prostu

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \Lambda} |B_{\mathbf{b}}(1 \pm A_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{b}'}) - B_{\mathbf{b}'}(1 \pm A_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{b}})| p(\lambda) \leq \\ & \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \left| |B_{\mathbf{b}}|(1 \pm A_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{b}'}) + |B_{\mathbf{b}'}|(1 \pm A_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{b}}) \right| p(\lambda) = \\ & = \sum_{\lambda \in \Lambda} |2 \pm (A_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{b}'} + A_{\mathbf{a}} B_{\mathbf{b}})| p(\lambda) = \\ & = 2 \pm (E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}, \mathbf{b})), \end{aligned}$$

Wszystkim zapaleńcom polecam sprawdzenie nierówności pojawiającej się powyżej (nie należy całej roboty zwać na autora artykułu ;-). Wystarczy zauważyć, że suma dwóch liczb dodatnich jest większa niż ich różnica. W wyniku tych wszystkich zawitych (choć, trzeba przyznać, niezbyt wyrafinowanych) rachunków, dostajemy nierówność



Rozwiązanie zadania F 548.

Założmy, że foton o częstotliwości ν został pochłonięty. Wtedy całą energię fotonu oraz jego pęd przejmie elektron, nabywając prędkość v w układzie, w którym spoczywał przed pochłonięciem fotonu. Musi być więc zachowana energia

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2$$

i pęd

$$\frac{h\nu}{c} = mv.$$

Rozwiązaniem powyższych równań jest $v = 2c$. Jest to sprzeczne z tym, że prędkość dowolnej cząstki materialnej nie może przekraczać prędkości światła.



$$|E(a', b) - E(a, b')| \leq 2 \pm (E(a, b') + E(a, b)),$$

a z tego już łatwo (ćwiczenie numer dwa) otrzymujemy to, co nazywa się szumnie „nierównością Bella” (wystarczy sprytnie dobrać znaki: raz plus, a raz minus w powyższym wyrażeniu)

$$-2 \leq S(a, b, a', b') \leq 2,$$

gdzie

$$S(a, b, a', b') = E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b').$$

Chyba nikt nie spodziewa się, że ten prosty wzorek może tak wiele znaczyć! A tutaj czeka spora niespodzianka. Okazuje się (te rachunki sobie już darujemy), że jeśli „zapytać” mechanikę kwantową, jaka jest wartość funkcji S dla pewnych szczególnych ustawień detektorów, to okaże się, że możemy dostać wynik nawet $S = 2\sqrt{2}$. Każdy widzi, że łamie to powyższą nierówność (taki wynik jest przecież większy niż dwa!). Mamy nareszcie to, na co czekaliśmy: znaleźliśmy możliwość eksperymentalnej weryfikacji przyjętych założeń (determinizmu i lokalności) w naszym prostym modelu. Wystarczy w odpowiedni sposób ustawić polaryzatory, przepuścić przez nie wiele par elektron-pozyton, obliczyć wartości średnie i utworzyć z nich kombinację S . Jeżeli otrzymany wynik przekroczy wartość 2 (zgodnie z przewidywaniami mechaniki kwantowej), to otrzymamy bezpośredni dowód nieadekwatności przyjętych założeń do badanej sytuacji fizycznej!

4. Jaki jest werdykt?

Eksperymenty badające nierówności Bella (w nieco zmienionej formie, przystosowanej do możliwości praktycznych) zostały już wykonane. Jak dotąd, ogłaszano jednogłośnie werdykty na korzyść mechaniki kwantowej: nierówności Bella są łamane! Cóż to może oznaczać? Na pewno tyle, że przyjęty przez nas dość ogólny model lokalnych teorii parametrów ukrytych nie jest poprawnym opisem praw przyrody. Wydaje się, że nic sobie ona nie robi z naszych zdroworozsądkowych oczekiwań.

I jeszcze jedna uwaga. Przedziwnego, nielokalnego „efektu EPR” nie da się użyć do przesyłania ponadświatlnych sygnałów. Dlaczego? A niby w jaki sposób? Co prawda, każdy obserwator, dokonując swojego pomiaru, wie z całą pewnością, jaki wynik otrzyma jego kolega. Cóż jednak z tego, skoro żaden z nich nie jest w stanie sterować otrzymywanymi wynikami, a jedynie je odczytywać? Próba przesyłania informacji za pomocą zjawiska EPR trochę przypominałaby pisanie listu urządzeniem losującym kolejno różne litery alfabetu. Znamy treść wysłanego listu, jednak nie potrafimy jej stworzyć.



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 952. Dana jest funkcja $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, gdzie \mathbb{N}_0 jest zbiorem wszystkich nieujemnych liczb całkowitych. Udowodnić, że równość $f(f(n)) = n + 2001$ nie może być spełniona dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$.

Rozwiązanie na str. 15

M 953. Udowodnić, że istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniająca dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ warunek $f(f(n)) = n^2$.

Rozwiązanie na str. 16

M 954. Funkcja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$f(n) = \begin{cases} n - 100 & \text{dla } n > 2000, \\ f(f(n + 101)) & \text{dla } n \leq 2000. \end{cases}$$

Udowodnić, że funkcja przyjmuje dla wszystkich $n \leq 2000$ tę samą wartość i znaleźć ją.

Rozwiązanie na str. 9

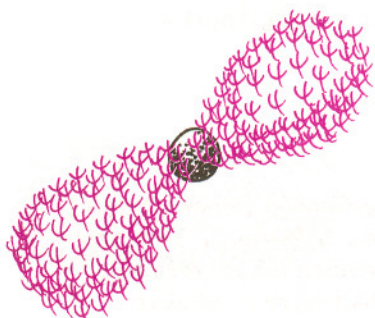
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 547. Średnia długość fali promieniowania żarówki o spiralnym włóknie, wykonanym z metalu, wynosi $12 \cdot 10^{-5}$ cm. Znaleźć liczbę fotonów, wysyłanych w jednostce czasu przez żarówkę o mocy 200 W.

Rozwiązanie na str. 6

F 548. Korzystając z prawa zachowania energii i pędu, wykazać, że swobodny elektron nie może pochłoniąć fotonu.

Rozwiązanie na str. 7





Więcej Małej Delty

W tym numerze *Małej Delty* jest więcej niż zwykle! Stało się to możliwe dzięki współpracy z Internet Data Systems SA, właścicielem portalu edukacyjnego *Eduseek*. Od początku tego roku pod adresem eduseek.ids.pl/delta ukazuje się internetowe wydanie *Małej Delty*. Co miesiąc w sieci pojawiają się cztery artykuły. W części są to materiały archiwalne. Niektóre wzbogacane są przez *Eduseek* interaktywnymi animacjami. Oprócz tego odpowiadamy na zadawane przez internautów pytania z matematyki (Konrad Pióro) oraz z fizyki i astronomii (Piotr Zalewski).

Tak naprawdę to właśnie od pomysłu odpowiadania na pytania wszystko się zaczęło. Podsunął go nam nieodżałowany Tomasz Hofmokl, któremu zarówno *Delta*, jak i polski Internet zawdzięczają naprawdę niemało...

Przy okazji warto przypomnieć, do kogo adresowana jest *Mała Delta*. Chcielibyśmy, aby zaciekała zdolnych uczniów starszych klas szkoły podstawowej, była zrozumiała dla każdego, interesującego się przedmiotami ścisłymi gimnazjalisty, a pozostałym Czytelnikom *Delty* dawała wytchnienie po wymagających więcej skupienia artykułach. Wydawanie *Małej Delty* w Internecie powinno ułatwić do niej dostęp najmłodszym. Niech nabiorą apetytu.

Jednocześnie otwieramy się na wszystkich cybernautów. Gwarantuje to zupełnie nowe doznania, związane choćby z pytaniami typu: „Jak rozwiązać zadanie 4 ze strony 5?” (oczywiście bez podania, o jaką książkę chodzi), ogólniejszymi wersjami ogólnej teorii względności (bez zbędnych matematycznych komplikacji) albo z pytaniem następującym: „Jak to możliwe, że na promie kosmicznym, który lata w odległości zaledwie około 200 km nad Ziemią, jest stan nieważkości? Przecież ziemską grawitacja powinna na tej wysokości być jeszcze bardzo silna...”

Przypomina mi to historyjkę, którą kiedyś znalazłem właśnie w Internecie. Dwóch „ścisłych”

studentów pewnego amerykańskiego uniwersytetu uczęszczało na dodatkowe zajęcia, bodaj z socjologii. W trakcie wykładu, dotyczącego zachowania ludzi w warunkach ekstremalnych, z błęgiego zadumania wyrwał ich przykład o przebywaniu kosmonautów na Księżycu w stanie, a jakże, nieważkości. Na pytanie, dlaczego na Księżycu miałby być stan nieważkości, otrzymali odpowiedź:

- Przecież to jest w Kosmosie!
- Dlaczego więc kosmonauci nie unoszą się nad powierzchnią Księżyca?!
- No bo mają ciężkie buty!

Okazało się, że nie tylko zdecydowana większość obecnych na sali była tego właśnie zdania, ale również 2/3 spośród losowo wybranych mieszkańców kampusu (dwaj bohaterowie przeprowadzili amatorskie badanie statystyczne, bo mieli nadzieję, że grupa, z którą chodzili na zajęcia, nie była reprezentatywna). W dodatku tylko połowa z „wyznawców” ciężkiego obuwia dawała się nawrócić.

No ale co to ma wspólnego z Czytelnikami *Delty*? Pozornie nic. Ile jednak razy jesteście tak zaskoczeni absurdalnością czyjś poglądu, że... nie potrafimy na poczekaniu przedstawić trafiających do adwersarza argumentów? Jak mawiał Feynman, „jeżeli nie potrafimy czegoś wytłumaczyć własnej babci, to widocznie sami tego tak do końca nie rozumiemy.” A jeżeli czegoś się nie rozumie, to najlepiej pójść za radą mądrych wykładowców i „dobrać sobie jeszcze takich dwóch albo trzech, co nie rozumieją, i im wytłumaczyć”.

Rozszerzoną *Małą Deltę* postaramy się wkładać do *Delty* kilka razy do roku. Następnym takim numerem będzie już numer sierpniowy. Oprócz zamieszczania „normalnych” artykułów, będziemy też dzielić się tym, co się nam dzięki pytaniom internautów uda na nowo zrozumieć. Jak to jest z tą nieważkością – już w tym numerze.



- Ta metoda poszukiwania największego wspólnego dzielnika jest zupełnie do kitu - ocenił poprzednią lekcję matematyki Opak, nazwany tak z tej racji, że zawsze chciał wszystko robić inaczej niż inni.

- Czepiasz się - zniecierpliwiał się Gładki (każdy bez trudu zgadnie, jak zasłużył sobie na tę ksywę). - Chcę na przykład znaleźć NWD dla 360 i 378; rozkładam

$$360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \quad \text{i} \quad 378 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7,$$

każdej liczby pierwszej biorę mniejszą ilość i mam $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Czy może być coś prostszego?

- Ciekawe, czemuś nie obliczał NWD dla 4 i 6?

Jeszcze łatwiej by ci poszło - odpowiedział Opak. - Jak jesteś taki mądry, to znajdź NWD dla 247 i 299.

Chwilę to potrwało, w końcu Gładki się poddał.

- A może one nie mają NWD, to znaczy, może ich NWD jest 1? - zasugerował.

- No widzisz: nie masz pojęcia, jak się do tego zabrać - pokiwał głową Opak. - Wszystko dlatego, że zabierasz się do roboty, stosując dzielenie. A tu trzeba, kolego, odejmować!

- Jakieś kpiny - oburzył się Gładki.

- I jeszcze nie wierzysz, gdy ci się mówi, jak to jest

- szydził Opak. - Może jednak spróbowałbyś?

- Ale jak? - Gładki poddał się już całkowicie.

- Oczywiście pod moim świątym kierownictwem. - Opak był bezlitosny. - Po prostu od większej liczby odejmij mniejszą

$$299 - 247 = 52.$$

- No i co?

- Jeszcze raz odejmij!

- Przecież się nie da - jęknął Gładki.

- O, to jednak coś chwytasz - zakpił Opak. -

Wobec tego teraz od 247 odejmij to, co ci wyszło.

$$247 - 52 = 195,$$

$$195 - 52 = 143,$$

$$143 - 52 = 91,$$

$$91 - 52 = 39.$$

Gładki dla świętego spokoju odejmował 52 tyle razy, ile się dało, a na koniec zapytał (bo nie był to w końcu głupi chłopak): - Pewnie teraz mam od 52 odejmować 39?

- Tak trzymać - tym razem Opak powstrzymał się od dokuczania koledze. Tamten wobec tego obliczał:

$$52 - 39 = 13$$

i dalej się nie da, więc

$$39 - 13 = 26,$$

$$26 - 13 = 13,$$

$$13 - 13 = 0.$$

- I co mam teraz zrobić? - zapytał Opaka. - Przecież odejmowanie zera nie ma sensu!

- Nic nie masz robić! - triumfalnie wykrzyknął Opak. - Ostatnia liczba, jaką odejmowałeś, to właśnie NWD. Zresztą sam sprawdź.

Gładki wykonał dzielenia

$$247 : 13 = 19 \quad \text{i} \quad 299 : 13 = 23$$

i już wiedział, że rzeczywiście wynik jest dobry.

Dla wszystkiego wyraził jeszcze nieśmiałą wątpliwość: - I to jest zawsze dobrze?

- Jasne - odparł Opak. - A ponadto możesz przecież sprawdzić to na innym przykładzie, choćby na twoim 360 i 378.

Ale Gładki i tak uwierzył koledze. - A dlaczego to jest dobrze? - zapytał.

Opak jednak, tak jak się spodziewał, był nieużyty.

- Ho, ho, wiele chciałbyś wiedzieć. Gdybym ja miał, tak jak ty, szóstkę z matematyki, potrafiłbym to uzasadnić. Ale muszę cię zmartwić, ta metoda to jeszcze małe piwo. Co byś powiedział na takie obliczenie:

$$5 \cdot 299 - 6 \cdot 247 = 1495 - 1482 = 13.$$

- To dopiero - Gładki aż otworzył usta ze zdumienia. - Ale skąd wiedziałeś, że trzeba wziąć piątkę i szóstkę?

- Tajemnica warsztatu artysty - rzucił artysta i wybiegł.

★ ★ ★

Część warsztatu artysty jesteście w stanie ujawnić. Otóż dziadek Opaka kupił ojcu Opaka, gdy ten ojciec był w takim wieku, jak Opak dzisiaj, książkę z obrazkami pod tytułem *Czy umiecie się dziwić?* W tej książce (którą, być może, znajdziecie w jakiejś bibliotece) zawarte zostały *Małe Delt* z dawnych czasów. Z rozdziału *Sposób na olbrzym* w tej książce można się nauczyć tego sposobu z odejmowaniem. Są tam zaproponowane także przykłady dla nabycia wprawy w poszukiwaniu NWD: 1073 i 1517, 1139 i 6499, 7387 i 7921, 2501 i 2911, 403 i 713. Byłoby chyba niegłupie nauczyć się tego, czego mogli się nauczyć nasi rodzice.

Natomiast ostatni sposób Opaka to już chyba jakaś inna sprawa. Nie ma rady - trzeba będzie poczekać do następnego z nim spotkania.

M.K.

8

Kiedy ciało jest w stanie nieważkości?

Wbrew dość powszechnemu błędnemu mniemaniu stan nieważkości nie ma nic wspólnego z brakiem grawitacji. Doświadczamy go, ilekroć w żaden sposób nie przeciwdziałamy sile grawitacji (ani siłom bezwładności).

Sytuacja taka ma miejsce np. w spadku swobodnym, o ile można zaniedbać inne siły, jak np. opór powietrza, lub zrównoważyć ich działanie.

Zazwyczaj siła grawitacji jest równoważona reakcją podłoża. Wystarczy jednak tylko podskoczyć (!), żeby na moment znaleźć się w stanie nieważkości (przy prędkościach uzyskiwanych przy podskakiwaniu opór powietrza jest zaniedbywalny). Warto tu uzmysłować sobie rzecz oczywistą, że w stanie nieważkości jesteśmy już, kiedy lecimy w górę.

Znanym (prawda?) przykładem spadku swobodnego jest ruch po orbicie,

np. okołoziemskiej. Co to jednak za spadek, w którym spada się, spada i spaść nie można?

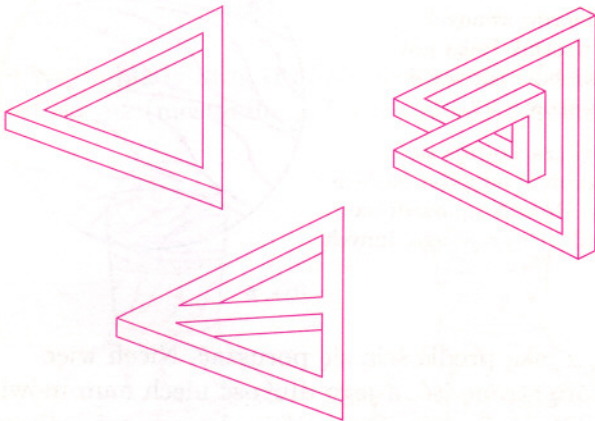
Dobry, jak każdy inny (a nawet lepszy). W zasadzie niczym nie różni się od rzutu kamieniem. Jedyne różnice to brak oporu powietrza (jeżeli orbita jest powyżej atmosfery) i to że „orbita” kamienia przecina powierzchnię Ziemi (gdzie ruch się kończy), a orbita satelity tej powierzchni nie przecina (bo prędkość satelity jest wystarczająco duża).

Inny przykład uzyskania stanu nieważkości na dłuższy czas (kilka minut) to tzw. loty balistyczne samolotem. Samolot najpierw rozpędza się, a następnie pozwala się mu „swobodnie spadać”, używając silników do jak najdokładniejszego równoważenia oporu powietrza (używa się do tego odpowiednio zaprogramowanego autopilota). Dzięki temu samolot wykonuje rzut ukośny, jakby powietrza nie było. Oczywiście, należy tę zabawę przerwać, zanim tor lotu przetnie powierzchnię Ziemi i to na tyle wcześniej, żeby wyprowadzenie z lotu nurkowego nie wymagało użycia przyspieszeń zagrażających życiu załogi.

P.Z.

Warto to sobie wyobrazić

Przyzwoity wielościan to taki, który (gdyby był z gumy) dałby się nadmuchać w taki sposób, że stałby się kulą.



Nieprzyzwoite wielościany (a jeden to zupełnie niemożliwy).

Czy wiecie, że każdy przyzwoity wielościan ma taką własność, iż liczby W jego wierzchołków i S jego ścian spełniają bliźniacze, symetryczne warunki:

$$W \leq 2S - 4 \quad \text{i} \quad S \leq 2W - 4 ?$$

Jeśli nie wiedzieliście, to już wiecie. Na przykład dla sześcianu jest tak: wierzchołków ma 8, a ścian 6 – i rzeczywiście jest $8 \leq 2 \cdot 6 - 4$, bo to przecież też 8; jest również $6 \leq 2 \cdot 8 - 4$, bo to przecież 12.

A czy może być tak, że oba razy jest równość? Znajdźcie przykład. Jest taki jeden bardzo łatwy do znalezienia. A czy są inne?

Najbardziej ciekawe jest jednak to, że dla każdego dwóch liczb W i S , większych od 3 i spełniających te warunki, można znaleźć przyzwoity wielościan, który ma W wierzchołków i S ścian. Czy potraficie wyobrazić sobie wielościan mający np. 6 wierzchołków i 8 ścian? Albo 9 wierzchołków i 9 ścian? A może 4 wierzchołki i 5 ścian? Nie, to ostatnie to był żart: przecież $5 > 2 \cdot 4 - 4 = 4$.

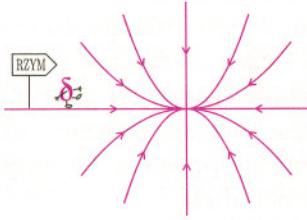
Z tego widać, że suma W i S nie może być równa 9. Ciekawe, że każdej innej sumie (nie mniejszej niż 8) już jakiś wielościan odpowiada.

M.K.



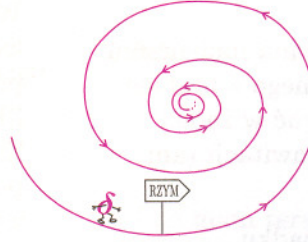
Wszystkie drogi prowadzą do Rzymu

Wszystkie drogi prowadzą do Rzymu. Ale jak? Jak mogą wyglądać drogi prowadzące do jednego punktu? Czy z każdego punktu do każdego punktu prowadzi jakaś droga?



Rys. 1

Tak?



Rys. 2

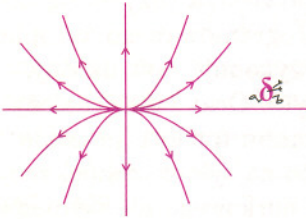
A może tak?

Punkty, z których donikąd się nie idzie (w których pozostaje się na zawsze), nazywamy stacjonarnymi.

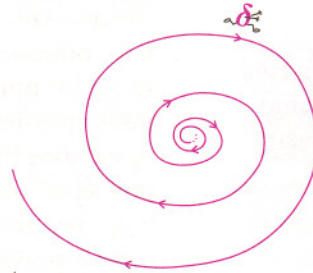
Jeśli do punktu stacjonarnego idzie się tak jak na rysunku 1, to punkt taki nazywa się węzłem stabilnym.

Punkt, który obiega droga na rysunku 2, nazywa się ogniskiem stabilnym.

I skąd te drogi wychodzą? Może z punktu, gdzie nikt nie chce być?



Rys. 3



Rys. 4

Punkt z rysunku 3 to węzeł niestabilny.

Ten z rysunku 4 to ognisko niestabilne.

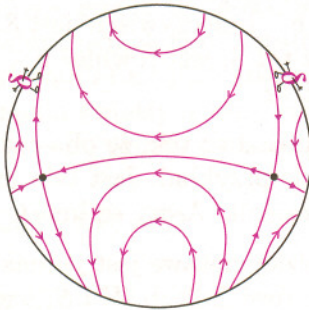
Wędrowcy znajdujący się w tych punktach pozostają w nich (są to więc punkty stacjonarne), natomiast wszyscy okoliczni wędrowcy uciekają od tych punktów.

A może jest zupełnie inaczej?

Wyróżnione punkty stacjonarne na równiku to tzw. siodła.

Do jednego z nich zbiegają wędrowcy z równika, a uciekają wędrowcy z południka.

Dla drugiego siodła jest na odwrót. Wszystkie inne drogi biegnące w pobliżu siodła najpierw się do nich zbliżają, a potem oddalają.



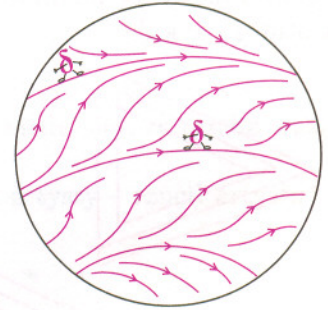
Rys. 5

Zwrotniki i równik to cykle graniczne: drogi, po których chodzi się bez końca.

Wędrujący po Zwrotniku Raka nigdy go nie opuszczają, a sąsiedni wędrowcy nieograniczenie się do niego przybliżają.

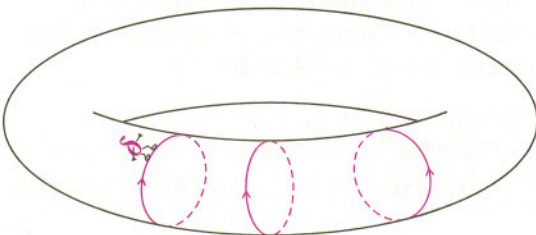
To własności zbiorów zwanych atraktorami: Zwrotnik Raka jest atraktorem, podobnie jak węzeł i ognisko z rysunków 1 i 2.

Zupełnie inaczej „zachowuje się” Zwrotnik Koziorożca: odpycha bliskich mu wędrowców. Równik „poszedł na kompromis”: jednych przyciąga, innych odpycha.



Rys. 6

No, dobrze, ale sama droga to za mało: nie wiemy jeszcze, z jaką prędkością się poruszać. Niech więc w każdym punkcie będzie włoszek, który pokaże nam, w którą stronę iść, a jego długość niech nam mówi, z jaką mamy iść prędkością. Oczywiście chcemy, żeby długość i kierunek włoska zmieniały się regularnie wraz ze zmianą punktu (gładka fryzurka). Wówczas zawsze na tak owłosionej Ziemi pojawi się łysinka. Ale gdyby Ziemia była torusem...



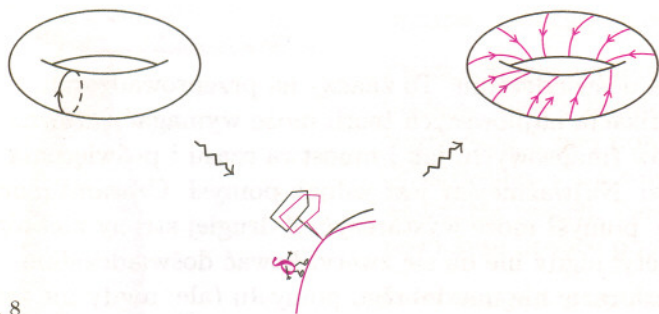
Rys. 7

Torus można uczesać bez łysinek.

Na torusie może więc nie być żadnych punktów stacjonarnych.

Na rysunku wszystkie drogi mają kształt obrączki.

A co się stanie, gdy zawieje leciutki wiatr i włosy się trochę poskręcą? Wędrowcy skręca odrobinę w lewo lub w prawo i może ich drogi staną się zupełnie inne niż dotąd?

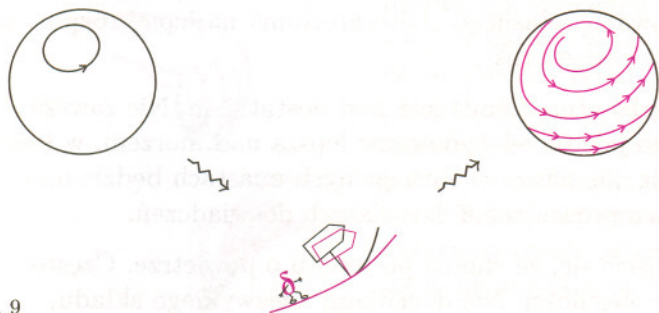


Rys. 8

Włosy-drogowskazy zmieniły kierunek – obrócili się nieco w prawo. Droga, która wcześniej była „obręczką”, teraz obiega torus. Może się zdarzyć, że nigdy się nie zamknie – i tę właśnie sytuację przedstawia rysunek.

Wędrowiec idący taką drogą w każdym, choćby najmniejszym, kółeczku na torusie gościć będzie nieskończenie wiele razy.

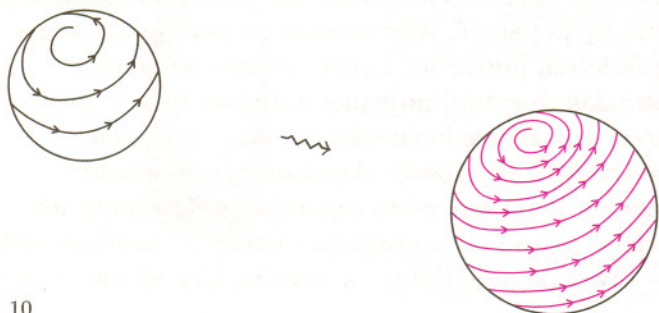
Na sferze nawet najdrobniejszy powiew wiatru też może wszystko odmienić:



Rys. 9

Droga początkowo okrążała biegun północny, po tym jak wiatr zawiał na południe i poskręcał drogowskazy, droga ucieka od bieguna północnego i ma kształt spirali. To zupełnie inna droga niż wcześniej.

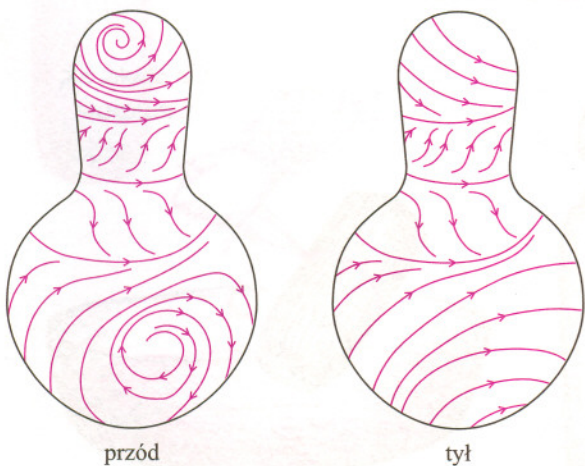
Ale nie zawsze mamy takie katastrofy. Mogą być takie układy drogowskazów (fryzury), że drogi pozostaną w zasadzie te same, o ile tylko wiatr nie będzie zbyt silny.



Rys. 10

Droga spiralnie uciekała od bieguna północnego, a wiatr zawiał na północ (ale lekko). Teraz droga znów spiralnie ucieka od bieguna północnego, tylko trochę wolniej.

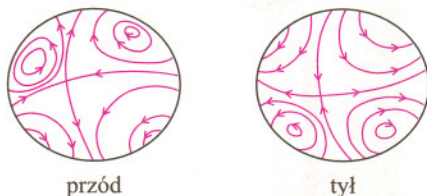
Są więc układy dróg (i odpowiadające im fryzury) odporne na drobne zaburzenia (stabilne) i układy nieodporne (niestabilne). Jak myślisz, Czytelniku, które z poniższych są stabilne?



Rys. 11

Rozpoznać pewne układy stabilne pozwala np. twierdzenie Peixoto. Podamy je w nieco uproszczonej wersji. Jeśli na sferze, torusie czy ogólniej – sferze z n uchami – sieć dróg ma punkty stacjonarne tylko takie jak ogniska i węzły z rysunków 1–4 lub siodła z rysunku 5, jeśli nie ma ani bezpośrednich połączeń między siodłami, ani dróg tego typu, jak ta z prawej strony rysunku 8, jeśli cykle są tylko takie, jak zwrotniki z rysunku 6, i wreszcie cykle oraz punktów stacjonarnych jest skończenie wiele, to układ dróg jest stabilny.

W.S.



Rys. 12

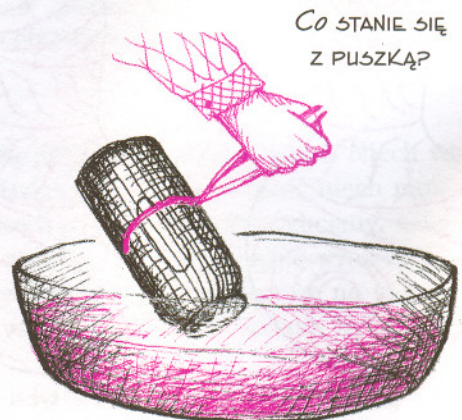
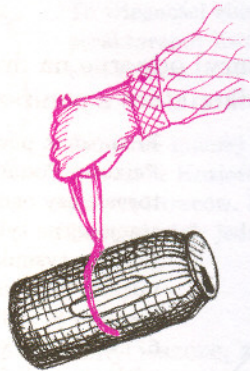
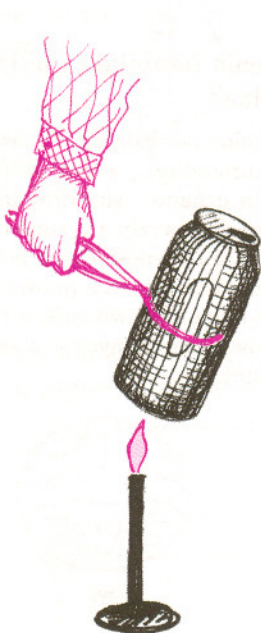
Fizyka opiera się na doświadczeniu. To znaczy na przeprowadzaniu doświadczeń. Weryfikacja najnowszych teorii może wymagać zarówno olbrzymich nakładów finansowych, jak i mnóstwa czasu i poświęcenia ze strony wielu ludzi. Najważniejszy jest jednak pomysł. Czasami (coraz rzadziej) sam dobry pomysł może wystarczyć. Z drugiej strony niektórych przewidywań, niestety, nigdy nie da się zweryfikować doświadczalnie. Przynajmniej nikt na razie nie ma dobrego pomysłu (ale: nigdy nie mów nigdy!).

Na szczęście jest mnóstwo rzeczy, które można, a nawet należałoby własnoręcznie sprawdzić. To może być nie tylko kształcące, ale i całkiem zabawne. Kompletowanie własnego „laboratorium” najlepiej rozpocząć od... tego, co jest w zasięgu ręki.

Jest coś, czego wszędzie (na Ziemi) jest pod dostatkiem. Nie zawsze odpowiada nam tego jakość, zdecydowanie lepsza nad morzem, w lesie czy na szczytach gór, ale nawet w zatłoczonych miastach będzie ona wystarczająca do przeprowadzenia dzisiejszych doświadczeń.

Chyba już domyśliliście się, że chodzi po prostu o powietrze. Często zapominamy o jego obecności. Nie doceniamy niezwykłego składu, który pozwala nam oddychać. Dzisiaj jednak nie będziemy się zajmować składem powietrza, tylko... no właśnie – przystąpmy wreszcie do dzieła!

Najpierw przeprowadzimy całkiem efektowny, ale trochę niebezpieczny eksperyment – można się poparzyć, więc zróbcie go pod opieką kogoś dorosłego. Oprócz powietrza potrzebna będzie puszką po „innym napoju”, obcęgami (lub jakiś chwytak) najlepiej o długiej ręczce, miska z wodą i palnik gazowy (może być kuchenka gazowa). Do puszką nalewamy trochę wody (1/10 objętości), chwytamy ją obcęgami i zaczynamy podgrzewać. Po chwili woda zagotuje się. Czekamy, aż z otworka będzie leciała „para” jak z czajnika i wtedy... szybkim ruchem zanurzamy puszką – otworkiem do dołu – w wodzie. Czy wiecie, co się



stanie? Jeżeli nie wiecie, to zróbcie to doświadczenie. Jeżeli wiecie, to tym bardziej zróbcie, (żeby sprawdzić, czy macie rację).

Puszka uległa zgnieceniu! Dlaczego tak się stało? W trakcie podgrzewania woda w puszcze zagotowała się i para wodna wypełniła puszkę całkowicie, wypierając z niej powietrze. Po zanurzeniu w wodzie nastąpiło gwałtowne ochłodzenie. Para wodna skropliła się, drastycznie zmniejszając ciśnienie wewnątrz puszeki. Zanim woda zdołała się wdrzeć, puszkę zgniotło powietrze będące pod ciśnieniem atmosferycznym.

Inną wersją tego pokazu, może nawet lepiej nadającą się do zaprezentowania znajomym, jest wsadzanie jajka do butelki o trochę za małym otworze. Kiedyś najlepiej było użyć butelki po mleku. Teraz łatwiej o butelki po sokach. Najpierw należy ugotować sobie kilka jajek na twardo. Bierzemy ładnie obrane jajko i pytamy audytorium, czy uda się je w całości wcisnąć do butelki. Szybko okaże się, że jajko nie chce do niej wejść. Wtedy bierzemy kawałek gazety o długości około 10 cm i szerokości 5 cm, składamy go na pół i podpalamy. (Wcześniej trzeba się upewnić, że w miejscu pokazu nie ma żadnych łatwopalnych przedmiotów jak serweta, firanka, reszta gazety, dywan, długie, rozpuszczone włosy itp.). Palący się zwitek gazety wrzucamy do butelki. Gdy zacznie gasnąć, zatykamy otwór jajkiem, które prawie natychmiast zostanie do butelki wciągnięte z odgłosem podobnym do wystrzału szampana.

Wyjaśnienie jest, oczywiście, bardzo podobne do poprzedniego. Ogień w butelce podgrzewa powietrze do wysokiej temperatury, w wyniku czego część powietrza z butelki ucieka. Po zgaśnięciu gazety powietrze szybko stygnie, bo ścianki butelki nie zdążyły się rozgrzać. Ciśnienie wewnątrz butelki spada, a „za nim” wpada jajko.

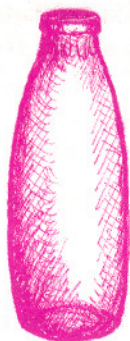
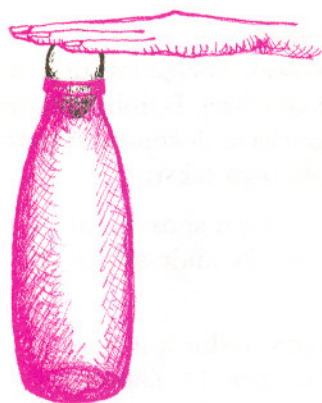
Spróbujmy podsumować nasze doświadczenia. Po pierwsze, żyjemy w powietrzu pod dość znacznym ciśnieniem. Po drugie, żeby coś włożyć, to najpierw trzeba coś wyjąć. W opisanych doświadczeniach do wyjmowania używaliśmy rozszerzalności cieplnej.

Czy jest również na odwrót? Żeby wyjąć, trzeba coś włożyć?

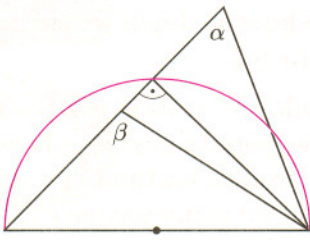
W rozstrzygnięciu powinno Wam pomóc znalezienie (doświadczalnej) odpowiedzi na jedno z poniższych pytań (które?).

1. W jaki sposób jak najszybciej wylać wodę z butelki?
2. W jaki sposób „wdmuchnąć” korek do butelki (patrz rysunek), czyli używając tylko powietrza, którym oddychamy, spowodować, żeby korek znalazł się w środku?

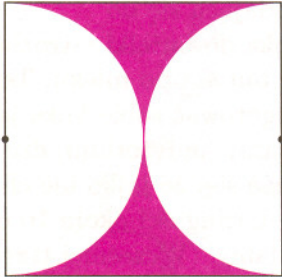
P.Z.



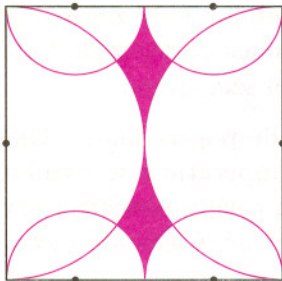
Same ostre



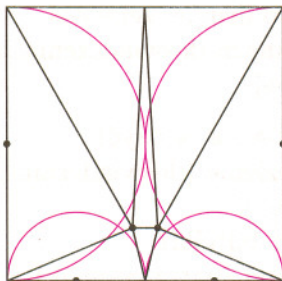
Rys. 1. Kąt α jest ostry, a kąt β rozwarty.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Każdy, kto spróbował pociąć kwadrat na trójkąty, wie, że jest to niesłychanie łatwe. Wielu z tych, którzy próbowali pociąć kwadrat na trójkąty OSTROKĄTNE, sądzi, że jest to niemożliwe. Byłoby ciekawe, gdybyście sprawdzili, czy potraficie takiego pocięcia dokonać. Wtedy zupełnie inaczej będzie się czytało dalszą część tego tekstu.

Kluczem do sprawy jest znalezienie jakiegoś dobrego sposobu na sprawdzanie, czy jakiś kąt jest ostry, czy też nie. Wydaje się to absurdalne, a jednak...

Kąt w trójkącie jest ostry, gdy koło, dla którego średnicą jest przeciwległy bok, nie sięga do jego wierzchołka (rys. 1). Zanim uzasadnimy ten pogląd, zobaczmy, że z jego znajomości może wynikać sposób pocięcia kwadratu na trójkąty ostrokątne.

Jest to tak. Z każdego wierzchołka kwadratu musi wychodzić przynajmniej jeden bok trójkąta, nie licząc leżących na bokach kwadratu. Gdyby więc dwa przeciwległe boki kwadratu miały być bokami trójkątów, to wówczas trzecie ich wierzchołki musiałyby znajdować się w zaznaczonym polu (rys. 2).

Kombinujemy z tymi czterema liniami wychodzącymi z wierzchołków kwadratu i nie wychodzi nam nic z tego. Pewnie musi być więcej linii.

Jeśli na bokach kwadratu są dodatkowe wierzchołki trójkątów, to z każdego z nich muszą wychodzić co najmniej dwa boki trójkątów (znowu nie licząc tych, które leżą na bokach kwadratu). Gdyby np. były to środki niezajętych dotąd boków, to pole, w którym mogłyby być nowe wierzchołki, ograniczyłyby się do pokazanego na rysunku 3.

Tylko, że teraz każdy potrafi już wskazać żądany podział kwadratu na 8 trójkątów ostrokątnych (rys. 4).

Nie każdy natomiast potrafi udowodnić, że podziału kwadratu na mniejszą liczbę trójkątów ostrokątnych nie ma. Gdyby się to komuś udało zrobić w zręczny sposób, chętnie wydrukujemy ten dowód.

A uzasadnienie podanego na początku sposobu badania ostrości kąta? Właściwie nie ma w tym nic trudnego. Trzeba wiedzieć, że kąt wpisany, oparty ma średnicy, jest prosty, oraz że kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od każdego z kątów wewnętrznych, do niego nieprzyległych.

M.K.

Czy satelita będący na orbicie, po której porusza się złom, może się z nim zderzyć? Jak jest to możliwe, skoro wszystko leci w tym samym kierunku, a prędkości obiektów, choć bardzo duże, nie różnią się?

Gdyby złom został umieszczony dokładnie na tej samej orbicie, tylko w innym miejscu, to rzeczywiście satelita ze złomem nie mógłby się zderzyć. Problem polega jednak na tym, że złom znajduje się na przypadkowych orbitach. To przeważnie różnego rodzaju pozostałości po dawnych misjach. Nawet jeżeli kiedyś było wiadomo, jakie są parametry orbity

danego obiektu, to jeżeli nie obserwuje się go od dłuższego czasu, to nie wiadomo, gdzie on się znajduje. Żeby satelita znajdował się na określonej orbicie, trzeba co pewien czas korygować jego położenie. Chociażby z powodu oddziaływania z Księżycem i Słońcem.

Najważniejsze jest to, że te przypadkowe orbity nie są kołowe. Orbity satelitów też nie muszą być kołowe – jedynym wyjątkiem są satelity geostacjonarne – ta orbita (jest tylko jedna) jest kołowa. Orbity o różnych parametrach mogą się przecinać i w miejscu przecięcia może dojść do kolizji.

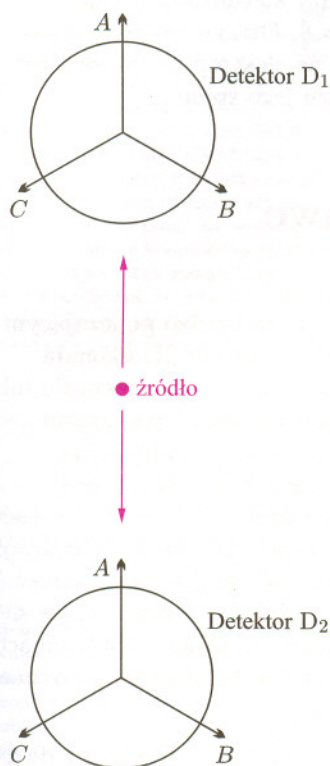
P.Z.

Czekamy na Wasze pytania. Możecie je przysyłać do redakcji *Delty* listownie lub elektronicznie: fizycki@eduseek.pl – fizyka i astronomia, oraz mateks@eduseek.pl – matematyka.

O parametrach ukrytych coś jeszcze

Piotr ŻMIJEWSKI

Oto przykład prostego eksperymentu myślowego, który pokazuje, że niemożliwe jest, aby elektron miał parametry ukryte, determinujące wynik pomiaru jego spinu.



Rozważmy następujący układ doświadczalny przedstawiony na rysunku. W środku znajduje się źródło, które może wyemitować dwie cząstki: elektron i pozyton, poruszające się w przeciwnych kierunkach, mające całkowity spin równy zero. Po obu stronach układu znajdują się dwa detektory (oznaczone przez D_1 i D_2). Każdy z nich umożliwia pomiar spinu w jednym z trzech (dowolnie wybranym dla każdego pomiaru) kierunków, ustawionych względem siebie pod kątem 120° . Kierunki te oznaczone są przez A , B i C . Pomiar spinu cząstki w dowolnym kierunku daje zawsze jedną z dwóch możliwych wartości. Dla pomiaru spinu w kierunku A przez detektor D_1 wartości te mogą wynosić A_{1+} (spin w górę) lub A_{1-} (spin w dół), dla pozostałych kierunków analogicznie.

Istnienie parametrów ukrytych dla pomiaru spinu oznacza, że cząstka lecąca w kierunku detektora D_1 ma z góry przygotowany zestaw odpowiedzi na pytanie o wynik pomiaru spinu dla każdego z trzech kierunków: A , B i C . Zauważmy, że zestaw tych odpowiedzi określa jednoznacznie wyniki pomiarów dla drugiej z cząstek, lecącej w kierunku detektora D_2 , co wynika stąd, że całkowity spin układu cząstek jest równy zero. Przykładowo, gdy cząstka lecąca w kierunku detektora D_1 ma przygotowane odpowiedzi: (A_{1+}, B_{1+}, C_{1-}) , to cząstka lecąca w kierunku D_2 ma odpowiedzi (A_{2-}, B_{2-}, C_{2+}) . Mamy więc 8 różnych zestawów parametrów ukrytych, mianowicie: (A_{1+}, B_{1+}, C_{1+}) , (A_{1+}, B_{1+}, C_{1-}) , (A_{1+}, B_{1-}, C_{1+}) , (A_{1+}, B_{1-}, C_{1-}) , (A_{1-}, B_{1+}, C_{1+}) , (A_{1-}, B_{1+}, C_{1-}) , (A_{1-}, B_{1-}, C_{1+}) , (A_{1-}, B_{1-}, C_{1-}) .

Eksperyment polega na tym, że po każdej emisji cząstek ze źródła ustawiamy detektor D_1 na pomiar spinu w kierunku wybranym losowo, a detektor D_2 na pomiar spinu w innym kierunku niż kierunek wybrany w D_1 (również wybieranym losowo spośród dwóch pozostałych). Przykładowo, gdy w D_1 wylosowaliśmy kierunek A , to w D_2 możemy wylosować kierunek B lub C . W eksperymencie interesuje nas, jakie jest prawdopodobieństwo P , że pomiary wykonane przez D_1 i D_2 dadzą takie same wartości spinów. Rozważmy dwa możliwe przypadki (ze względu na parametry ukryte):

1. **Cząstka docierająca do D_1 da taki sam wynik pomiaru spinu dla wszystkich trzech kierunków pomiaru**, zatem są to dwie z ośmiu wymienionych wcześniej możliwych wartości parametrów ukrytych, mianowicie: (A_{1+}, B_{1+}, C_{1+}) lub (A_{1-}, B_{1-}, C_{1-}) . Jak łatwo zauważyć, w tym przypadku szukane prawdopodobieństwo P wynosi 0, bo nigdy pierwsza i druga cząstka nie da takiej samej wartości spinu.
2. Pozostałe sześć z ośmiu możliwości to: **cząstka docierająca do D_1 da taki sam wynik pomiaru spinu dla dwóch kierunków pomiaru i przeciwny wynik dla trzeciego kierunku pomiaru spinu**. Rozważmy to dla stanu (A_{1+}, B_{1+}, C_{1-}) ; w pozostałych pięciu możliwych sytuacjach rozumowanie przebiega analogicznie. Prawdopodobieństwo, że po rozpadzie detektor D_1 wybierze kierunek A , wynosi $\frac{1}{3}$. Detektor D_2 może wtedy wybrać tylko kierunki B lub C (każdy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$) i tylko wybór kierunku C daje zgodne wyniki dla kierunków spinów (tzn. A_{1+} i C_{2+}). Podobna sytuacja zachodzi, gdy dla detektora D_1 został wybrany kierunek B . W przypadku gdy detektor D_1 wylosował kierunek C (też z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$), detektor D_2 bez względu na wybór kierunku pomiaru zmierzy spin w kierunku zgodnym z wynikiem dla D_1 , tzn. możliwe są wyniki: $\{C_{1-}, A_{2-}\}$ lub $\{C_{1-}, B_{2-}\}$.

Ogólnie, szukane prawdopodobieństwo, że oba detektory zmierzą spin w tym samym kierunku, wynosi: $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$.



Rozwiązanie zadania M 954.
Rozważmy najpierw dowolną liczbę naturalną spełniającą $n \leq 2000$ i $n + 101 > 2000$. Wtedy

$$f(n) = f(f(n + 101)) = f(n + 101 - 100) = f(n + 1),$$

czyli $f(1900) = f(1901) = \dots = f(2000) = f(2001) = 1901$. Niech teraz $n < 1900$. Niech $m \in \mathbb{N}$ będzie taka, że $1900 \leq n + 101m \leq 2000$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} f(n) &= f^2(n + 101) = \dots = \\ &= f^{m+1}(n + 101m) = \\ &= f^m(f(n + 101m)) = \\ &= f^m(1901) = 1901. \end{aligned}$$

Stąd dla wszystkich $n \leq 2000$ zachodzi $f(n) = 1901$ (też ładna data).

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V\right) \psi = E \psi$$

Powyższe rozważania prowadzą do wniosku, że jakkolwiek wybralibyśmy rozkład na prawdopodobieństwa wystąpienia każdego z ośmiu zestawów parametrów ukrytych, to nigdy P nie przekroczy wartości $\frac{2}{3}$, tzn. $P \leq \frac{2}{3}$. Tymczasem z praw mechaniki kwantowej (potwierdzonych doświadczalnie) wynika, że $P = \sin^2(\phi/2)$, gdzie ϕ jest kątem między kierunkami pomiarów spinów. W naszym przypadku $P = \sin^2(120^\circ/2) = \frac{3}{4}$. Otrzymany wynik jest więc sprzeczny z nierównością $P \leq \frac{2}{3}$, co dowodzi, że elektron nie może mieć parametrów ukrytych, określających wynik pomiaru jego spinu.

Komputery kwantowe i obliczenia kwantowe

Arkadiusz ORŁOWSKI

Recenzowanie nieistniejących książek może być zajęciem bardzo pouczającym i twórczym. Dobrym przykładem są utwory Stanisława Lema: „Doskonała próżnia”, „Wielkość urojona” i „Biblioteka XX wieku”. Wnikliwa recenzja lub posłowie do książki, której (jeszcze) nikt nie napisał, pozwala lepiej zrozumieć, dlaczego książka taka powinna (lub nie powinna) powstać. W niniejszym artykule idziemy w ślady Lema, omawiając urządzenia, które nie istnieją – komputery kwantowe. Chodzi o komputery, których działanie w istotny sposób wykorzystuje niezwykle własności obiektów kwantowych. Nie mamy wątpliwości, że komputery kwantowe powinny zostać zbudowane. Wiemy, że mogą istnieć (nie przeczy to żadnym znanym prawom przyrody) i że jeżeli powstaną – mogą się bardzo przydać. Wiemy również, jak powinny działać i w jakich zagadnieniach biją na głowę wszelkie istniejące lub dające się pomyśleć komputery klasyczne (nie kwantowe).

Jednostką klasycznej informacji jest bit, który może przyjmować jedną z dwu wartości: 0 lub 1. Bit można zrealizować fizycznie za pomocą dowolnego układu, który może znajdować się w dowolnym z dwu wyraźnie rozróżnialnych stanów (kondensator jest naładowany lub nie, prąd płynie lub nie płynie, namagnesowanie domeny jest skierowane w dół lub w górę względem przyłożonego pola magnetycznego). W mechanice kwantowej istnieje wiele układów fizycznych o dwóch stanach bazowych, takich jak spin elektronu lub protonu, polaryzacja fotonu itp. W odróżnieniu od układów klasycznych w tym przypadku układ może być również w dowolnej superpozycji stanów bazowych. Bit kwantowy (qubit) może więc być jednocześnie w dwóch stanach bazowych. Przypomina to trochę logikę wielowartościową z nieprzeliczalną liczbą możliwości (wartości logicznych).

Qubit jest pewną superpozycją $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ stanów $|0\rangle$ i $|1\rangle$ – opisujących jakiś obiekt fizyczny. Są to ustalone wektory ortogonalne o jednostkowej długości, na przykład $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Ewolucja tych stanów w czasie jest zakodowana w pewnej macierzy, nazywanej macierzą ewolucji, działającej na wektory stanu. Na pierwszy rzut oka qubit zawiera więc więcej informacji niż bit. Nieskończenie wiele informacji można przecież zakodować w rozwinięciu dwójkowym współczynników α i β stojących przy wektorach bazowych. Współczynniki te, zwane amplitudami prawdopodobieństwa, są liczbami zespolonymi – po uwzględnieniu normalizacji $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ pozostają trzy wolne parametry rzeczywiste. Ale w rzeczywistości pojedynczy, izolowany qubit niesie dokładnie tyle samo informacji co pojedynczy bit. Chcąc odczytać wartość qubit, musimy bowiem dokonać pomiaru, co powoduje, że qubit może się znaleźć tylko w jednym ze stanów własnych operatora opisującego układ pomiarowy. Co więcej, teoria kwantowa twierdzi, że wynik takiego pomiaru jest zupełnie przypadkowy. Dla powyższej superpozycji prawdopodobieństwa znalezienia qubit w stanach $|0\rangle$ i $|1\rangle$ wynoszą $|\alpha|^2$ i $|\beta|^2$, odpowiednio. W mechanikę kwantową wbudowany jest doskonały generator liczb losowych.

Komputer klasyczny jaki jest – każdy widział. Na jednym z nich napisałem ten tekst. Namiętnie grający w multimedialne gry komputerowe lub zajmujący

W pewnym (trywialnym) sensie każdy komputer jest komputerem kwantowym, ponieważ jest obiektem materialnym, a materia podlega prawom mechaniki kwantowej. Chodzi jednak o to, że komputery współczesne nie wykorzystują (jak dotąd) tych własności obiektów fizycznych, które przeczą naszej klasycznej intuicji. Do zrozumienia, jak działa komputer klasyczny, nie musimy znać mechaniki kwantowej. Wiedza ta nie jest również niezbędna projektantom komputerów i programistom (choć projektanci układów scalonych i chipów muszą się liczyć z prawami fizyki, także kwantowej). Zachowanie się współczesnych komputerów, podobnie jak funkcjonowanie samochodów, można zrozumieć w ramach fizyki klasycznej. Komputer, zwany też elektroniczną maszyną cyfrową i (do lat siedemdziesiątych) mózgiem elektronowym, jest urządzeniem realizującym pewną koncepcję matematyczną. Ale działający komputer jest, oczywiście, obiektem fizycznym. Podobnie jak samochód. Jednak w odróżnieniu od samochodu, który jest urządzeniem przetwarzającym energię, komputer zajmuje się przetwarzaniem informacji. Komputer też pobiera energię i wydziela ciepło, ale jego istotną funkcją jest obróbka informacji. Teoria informacji jest obecnie dobrze ugruntowaną dyscypliną matematyczną. Informację można traktować także jako obiekt fizyczny, bowiem w świecie rzeczywistym musi być zawsze zakodowana w stanach obiektów fizycznych i jest przenoszona przez obiekty fizyczne poprzez fizyczne kanały transmisji (zwykle nieidealne – z szumem). Ponieważ nasz Wszechświat podlega prawom mechaniki kwantowej (nie tylko w skali mikroświata – współczesna kosmologia też jest kosmologią kwantową), również informacja musi mieć swoją „kwantową twarz”. Komputer kwantowy możemy więc zdefiniować jako urządzenie przetwarzające informację kwantową.

W klasie komputerów osobistych standardem jest już procesor Pentium III z zegarem co najmniej 800 MHz – na powierzchni niewiele większej niż 100 mm² mieści się ponad 28 milionów tranzystorów. Odpowiednio skonfigurowane klastry takich PC-tów potrafią wykonywać kilkaset miliardów operacji na sekundę! A jeszcze nie tak dawno wciąż trwa – tak zwane prawo Moore’a stwierdza, że gęstość upakowania tranzystorów w układach scalonych podwaja się co 18 miesięcy.

Ewolucja wektora stanu jest odwracalna. Obliczenia kwantowe można zawsze wykonać „wspak”, otrzymując stan wejściowy. Klasyczne mikroprocesory projektowane są w oparciu o logikę nieodwracalną. Okazuje się jednak, że można zaprojektować komputer klasyczny, który wykonuje obliczenia w sposób odwracalny. Może to mieć pewne konsekwencje praktyczne – wymazanie jednego bitu informacji powoduje wydzielanie się ciepła. W obliczeniach odwracalnych wydzielane ciepło byłoby więc mniejsze. Jeżeli do obliczeń używamy układów opartych na ruchu elektronów, to nie da się, oczywiście, całkowicie wyeliminować nagrzewania się procesora. Wydaje się, że wkroczyliśmy w erę opłacalności klasycznych obliczeń odwracalnych. Prawdopodobnie dalsza miniaturyzacja mikroprocesorów wymusi wkrótce stosowanie odwracalnej architektury. Jest pocieszające, że chociaż odwracalność powoduje konieczność użycia większej liczby elementów (bramek) logicznych, to liczba ta nie rośnie w zastraszającym tempie – procesor odwracalny jest tylko trochę „większy” niż zwykły.

się wirtualną rzeczywistością mogą protestować, ale tak naprawdę komputer wykonuje jedynie proste dodawanie zer i jedynek. Robi to jednak bardzo szybko. Współczesne komputery (klasyczne) mają bez wątpienia niezwykle możliwości. Lecz skoro jest tak dobrze, to czemu jest tak źle? Mimo iż komputery klasyczne są bardzo szybkie, są za wolne. Choćbyśmy byli w stanie zaprząć do pracy obliczeniowej cały Wszechświat (swoją drogą to ciekawe pytanie, jaką część Wszechświata da się wykorzystać do prowadzenia obliczeń?), to i tak pewne problemy na zawsze pozostałyby poza zasięgiem naszych klasycznych możliwości.

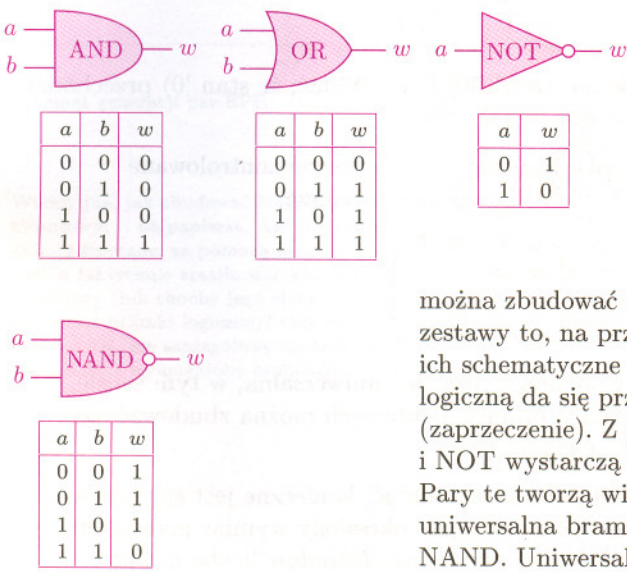
Jeśli więc uda nam się zbudować komputery kwantowe, to czy będą one mogły zrobić coś, czego zupełnie nie potrafią komputery klasyczne? Tak nie jest. Chociaż te drugie działają na zupełnie innych zasadach, to przecież komputer klasyczny może symulować działanie komputera kwantowego. Stan N qubitów w komputerze kwantowym opisany jest przez wektor w 2^N -wymiarowej przestrzeni Hilberta (na potrzeby tego artykułu możemy ją sobie wyobrażać jako przestrzeń wektorów N -wymiarowych z określonym dodawaniem, mnożeniem przez liczby zespolone i iloczynem skalarnym). Z fizycznego punktu widzenia obliczenia kwantowe to odpowiednio zaprojektowana ewolucja określonego stanu początkowego. Ewolucja wektora stanu polega na jego obracaniu w określony sposób (nie zmieniając jego długości), pomiar zaś na zrzutowaniu tego wektora na pewien układ wzajemnie prostopadłych osi. Wektory, ich obroty i rzuty nie są rzeczą obcą dla klasycznych komputerów. W czym więc problem? W czasie potrzebnym na wykonanie takiej symulacji. Aby w pełni opisać stan kwantowy 100 qubitów, musimy przechować około 10^{30} liczb zespolonych! A to już naprawdę sporo... Klasyczne komputery nie są dobrym narzędziem do symulacji układów kwantowych. Natomiast komputer kwantowy wykonuje wszystkie operacje na wszystkich qubitach naraz, co pozwala na rozwiązywanie w czasie wielomianowym problemów, które wymagają czasu wykładniczego na komputerach klasycznych.

Okazuje się, że istnieją ciekawe i ważne problemy, których nie umiemy rozwiązywać w czasie wielomianowym, a dla których istnieją algorytmy kwantowe upraszczające problem. Jednym z takich problemów jest rozkład dużych liczb na czynniki pierwsze. Dla wszystkich znanych algorytmów klasycznych czas potrzebny na wykonanie tej operacji rośnie wykładniczo z liczbą cyfr rozkładanej liczby. Na fankie tym (jest to fakt empiryczny, nie istnieje żaden dowód matematyczny, że problemu tego nie da się rozwiązać w czasie wielomianowym, jest to jednak mało prawdopodobne) opiera się bezpieczeństwo naszych (i cudzych) transakcji elektronicznych i poufność korespondencji. W 1994 roku Peter Shor opublikował pracę, w której podał algorytm kwantowy faktoryzacji w czasie wielomianowym. Algorytm wymaga jednak istnienia komputera kwantowego. Nie będzie przesadą stwierdzenie, że od

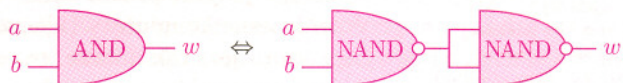
momentu publikacji tej pracy rozpoczął się prawdziwy boom w tej dziedzinie. Znowu potwierdziła się stara prawda, że o ile podstawowe problemy fizyki interesują nielicznych, o tyle łatwo o pieniądze, gdy chodzi o pieniądze...

Aby zbudować komputer kwantowy, niezbędne są różne elementy. Pierwszy to qubity – nośniki informacji kwantowej. Drugi to odpowiedni zestaw kwantowych bramek logicznych. Pożądany jest, oczywiście, niewielki zbiór bramek uniwersalnych – a więc takich, z których

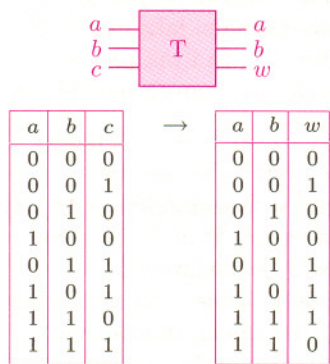
można zbudować wszystkie operacje. W obliczeniach klasycznych takie zestawy to, na przykład, AND i NOT oraz OR i NOT. Obok są pokazane ich schematyczne oznaczenia i tak zwane „tabelki prawdy”. Każdą operację logiczną da się przedstawić za pomocą bramek AND (koniunkcja) i NOT (zaprzeczenie). Z praw de Morgana wynika, że również bramki OR (alternatywa) i NOT wystarczą do zbudowania dowolnie skomplikowanej sieci logicznej. Pary te tworzą więc uniwersalny zestaw bramek. Czy istnieje pojedyncza uniwersalna bramka logiczna? Tak. Popatrzmy na tabelkę prawdy operacji NAND. Uniwersalność tej bramki najłatwiej udowodnić, pokazując, że można



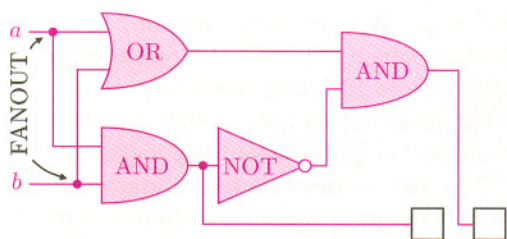
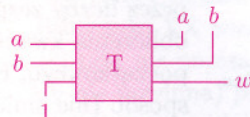
z niej zbudować AND, OR i NOT, na przykład:



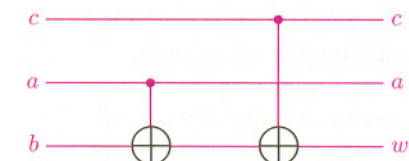
Nie możemy jednak wykorzystać klasycznych sieci logicznych przez prostą zamianę klasycznych bramek przez ich kwantowe odpowiedniki. Jeden z powodów to fakt, że bramki AND i OR są nieodwracalne. W mechanice kwantowej dopuszczalne są operacje unitarne, a więc odwracalne w czasie. Istnieją bramki klasyczne, które są jednocześnie odwracalne i uniwersalne. Ale muszą mieć one co najmniej 3 wejścia i 3 wyjścia (jest prawie oczywiste, że bramki odwracalne muszą mieć tę samą liczbę wejść i wyjść). Na marginesie mamy pokazany przykład takiej bramki, zwanej bramką Toffoliego. Jest to bramka uniwersalna, bowiem możemy z niej zrobić NAND, a więc zbudować z niej wszystkie możliwe operacje logiczne:



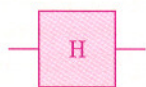
Bramka Toffoliego



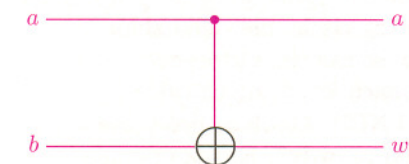
Półsumator klasyczny



Półsumator kwantowy; znaczenie symbolu \oplus jest opisane niżej.



Bramka Hadamarda



C-NOT

Drugim powodem jest powszechne występowanie w klasycznych sieciach logicznych operacji FANOUT, czyli tworzenia kopii pewnych wartości logicznych, kierowanych następnie na wejścia innych bramek, na przykład w klasycznym półsumatorze (rysunek obok) albo w przykładzie u góry strony. Okazuje się, że operacji FANOUT nie da się wykonać w komputerze kwantowym. Podstawowe prawa mechaniki kwantowej zabraniają bowiem klonowania nieznanych stanów kwantowych. Należy to dobrze rozumieć – można skonstruować

kwantowe ksero, które potrafi kopiować pewne wybrane stany kwantowe. Natomiast nie istnieje uniwersalny kserograf, który potrafiłby dokładnie skopiować dowolny (nieznany) stan kwantowy. Jeśli stan jest znany, to można wyprodukować dowolną liczbę kopii. Słowo *dokładnie* też jest ważne, gdyż możliwe jest kopiowanie przybliżone. Dowód twierdzenia o niemożliwości klonowania jest bardzo prosty i wynika z liniowości mechaniki kwantowej (z faktu, że superpozycja dwóch stanów kwantowych też jest stanem kwantowym). Odwracalną wersję półsumatora, którą można zbudować bez FANOUT! z kwantowych bramek logicznych, przedstawiono na marginesie.

Klasyczne bramki logiczne opisujemy tabelkami prawdy, a kwantowe – macierzami. Ważnym przykładem kwantowej bramki 1-bitowej jest bramka Hadamarda. Jej działanie, opisane prostą macierzą o wymiarach 2×2 ,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

generuje superpozycje stanów bazowych $|0\rangle$ i $|1\rangle$. Widać, że stan $|0\rangle$ przechodzi w $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, a stan $|1\rangle$ w $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$.

Najważniejszą kwantową bramką logiczną jest tak zwane kontrolowane zaprzeczenie (controlled NOT; C-NOT) opisane macierzą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jest to bramka 2-bitowa, odwracalna i „prawie” uniwersalna, w tym sensie, że z niej i skończonego repertuaru bramek 1-bitowych można zbudować sieci realizujące dowolne obliczenia kwantowe.

Aby komputer kwantowy mógł poprawnie działać, konieczne jest spełnienie także innych warunków. Musi być precyzyjnie określony wymiar przestrzeni Hilberta układu kwantowego. Musimy więc znać *dokładnie* liczbę atomów,

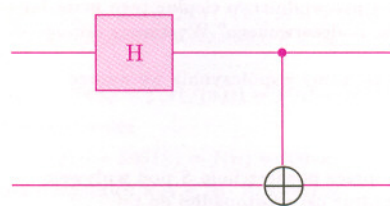


elektronów, kropek kwantowych czy innych obiektów, których stany będą qubitami. Są to bowiem nasze stopnie swobody, które wykorzystujemy do przechowywania danych i wykonywania obliczeń. Ważne jest, że rozmiar przestrzeni Hilberta rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem liczby cząstek (rozmiarem układu). Tu bowiem kryje się niezwykła moc komputerów kwantowych. Ważna jest też możliwość przygotowania właściwego stanu początkowego do obliczeń (RESET komputera kwantowego), na przykład przez osiągnięcie stanu podstawowego. Może to wymagać zaawansowanych metod chłodzenia, jak w przypadku komputerów zbudowanych w oparciu o jony w pułapkach magnetycznych. Kolejnym warunkiem jest również możliwość wykonywania pomiarów kwantowych. Układ fizyczny, który ma odgrywać rolę komputera kwantowego, musi być także dobrze odizolowany od otoczenia. Oddziaływanie powoduje splątanie, czyli nietrywialne korelacje kwantowe między oddziałującymi obiektami. Z jednej strony splątanie między qubitami jest niezbędnym elementem obliczeń kwantowych. Z drugiej strony splątanie qubitów z otoczeniem nieuchronnie prowadzi do tzw. dekoherencji. Dekoherencja oznacza, że qubit nie da się dłużej opisać za pomocą wektora w przestrzeni Hilberta. W przypadku choćby „śladowego” oddziaływania komputera kwantowego z otoczeniem jedynym wyjściem jest korekcja błędów. Wykazanie możliwości kwantowej korekcji błędów było istotnym etapem w rozwoju tej dziedziny. Dlaczego stara (i nowa) płyta gramofonowa szumi, a płyta kompaktowa nie? Bo jedna jest analogowa, a druga cyfrowa. Korekcja błędów jest możliwa jedynie w przypadku cyfrowym i to właśnie jej stosowanie decyduje o jakości dźwięku muzyki odtwarzanej z płyt kompaktowych. Mimo że na pierwszy rzut oka komputer kwantowy wygląda na maszynę analogową, da się przedstawić w postaci cyfrowej. Ciekawe, że kwantowe kody poprawiające błędy same wykorzystują splątanie stanów wielu qubitów. Dość paradoksalnie splątanie qubitów wewnątrz komputera kwantowego jest pozytywne, pozwala bowiem „wyplątać się” z nieuniknionego splątania qubitów z otoczeniem i ratuje przed dekoherencją.

Mając do dyspozycji bramkę C-NOT i bramkę Hadamarda, możemy ze stanów bazowych otrzymać dowolny z czterech stanów Bella – maksymalnie splątanych stanów dwu qubitów. Stany Bella odgrywają wielką rolę w informatyce kwantowej oraz w zrozumieniu podstaw mechaniki kwantowej. To właśnie na ich przykładzie ilustruje się (i weryfikuje doświadczalnie!) słynny „paradoks” Einsteina–Podolskiego–Rosena (p. poprzednie artykuły). Układ generujący stany Bella pokazany jest obok. Widzimy, że z podstawowych stanów wejściowych produkowane są na wyjściu następujące:

$$\begin{aligned}
 |00\rangle &\rightarrow |00\rangle + |11\rangle \\
 |01\rangle &\rightarrow |01\rangle - |10\rangle \\
 |10\rangle &\rightarrow |10\rangle - |11\rangle \\
 |11\rangle &\rightarrow |01\rangle + |10\rangle
 \end{aligned}$$

Mimo iż prawie na pewno uda się zbudować urządzenia kwantowe, przeznaczone do rozwiązywania wybranych problemów (np. faktoryzacji), to nikt tak naprawdę nie wie, czy i kiedy powstanie uniwersalny komputer kwantowy. Jednak informatyka kwantowa to nie tylko komputery kwantowe i wykonywane na nich obliczenia. Burzliwie rozwija się kryptografia kwantowa: całkowicie bezpieczna metoda dystrybucji tajnego klucza kryptograficznego. Przesyłając słabe impulsy światła za pomocą komercyjnie dostępnych włókien światłowodowych umiemy już uzgodnić klucz pomiędzy partnerami oddalonymi od siebie o dziesiątki kilometrów. Trwają prace nad kwantowym uzgadnianiem kluczy poprzez swobodną przestrzeń – trudno przecież doprowadzić światłowodów do sztucznych satelitów. Wiele prac w kryptografii kwantowej znajduje się już na etapie wdrożeń, a nie badań podstawowych. Zademonstrowano również niezwykle efekt teleportacji stanów kwantowych. Mimo tych (i innych) spektakularnych sukcesów jesteśmy dopiero na początku drogi. Nowe tysiąclecie zapowiada się więc bardzo ciekawie. A w minimach programowych studiów informatycznych może już niedługo pojawi się nowy przedmiot – informatyka kwantowa...



Schemat generacji par EPR

Wiemy już, jak zbudować komputer kwantowy... na papierze. Ale czy istnieją układy fizyczne, za pomocą których można faktycznie zrealizować komputer kwantowy (lub choćby jego elementy – kwantowe bramki logiczne)? Odpowiedź brzmi TAK, ale szczegółowe omówienie kandydatów wymagałoby osobnego artykułu.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2001

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

Zadania z fizyki nr 318, 319

Redaguje Jerzy B. BROJAN

318. Dwa jednakowe walce położono jeden na drugim przy pionowej ścianie (rys. 1) i bardzo lekko pchnięto dolny walec w prawo, tak że zaczął się wysuwać spod górnego, który pozostawał w kontakcie ze ścianą. Jaką prędkość osiągnie ostatecznie dolny walec? Zakładamy, że na żadnej ze stykających się powierzchni nie występuje tarcie.

319. Ciepło parowania rtęci wynosi $r = 2,9 \cdot 10^5$ J/kg, napięcie powierzchniowe rtęci – $\sigma = 0,49$ J/m², gęstość – $\rho = 1,36 \cdot 10^4$ kg/m³, a masa atomowa – $M = 201$. Na podstawie tych danych wyprowadzić przybliżoną wartość liczby Avogadra.

Wskazówka: napięciem powierzchniowym cieczy nazywamy energię, którą trzeba dostarczyć, aby zwiększyć powierzchnię cieczy o jednostkę. Dla ścisłości należałoby ustalić ośrodek, z jakim styka się rtęć – przyjmijmy, że jego cząsteczki słabo oddziałują z cząsteczkami rtęci (np. jest to powietrze).

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/2001

Przypominamy treść zadań:

310. Z równi pochyłej o kącie nachylenia α wyrzucono małe ciało z ustaloną wartością prędkości początkowej. Jaki powinien być kąt nachylenia tej prędkości do poziomu, aby: a) rzut trwał maksymalnie długo, b) zasięg rzutu był maksymalny?

311. Promieniowanie jest pochłaniane w materii zgodnie ze wzorem

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

gdzie I_0 jest natężeniem wiązki padającej, a I – natężeniem wiązki przechodzącej przez warstwę o grubości x . Jeśli parametr μ opisujący pochłanianie promieni podczerwonych ma dla pewnego materiału wartość 2 mm⁻¹, a jego współczynnik przewodnictwa cieplnego wynosi 0,2 W/(m·K), to czy słuszne jest przypuszczenie, że w temperaturze pokojowej przewodnictwo cieplne tego materiału wynika głównie z przepływu energii w formie promieniowania podczerwonego? Wystarczy odpowiedź oparta na ocenie orientacyjnej.

Wskazówka: Współczynnikiem przewodnictwa cieplnego λ nazywamy współczynnik we wzorze Fouriera

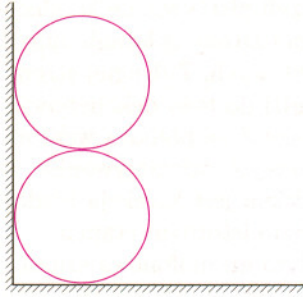
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda S \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

gdzie ΔQ jest ilości ciepła przepływającą w ciągu czasu Δt przez powierzchnię S pod wpływem różnicy temperatur ΔT między punktami odległymi o Δx wzdłuż osi prostopadłej do tej powierzchni.

311. Oprzemy się na analizie wymiarowej. Jeśli przewodnictwo cieplne wynika z emisji i absorpcji promieni podczerwonych, to współczynnik λ zależy od stałej absorpcji μ , temperatury T i stałej Stefana-Boltzmannna σ (założmy dla uproszczenia, że dany materiał ma właściwości ciała doskonale czarnego). Wymiarem współczynnika przewodnictwa cieplnego λ jest W/(m·K), stałej μ – m⁻¹, a stałej σ – W/(m²·K⁴), a stąd

$$\lambda = \text{const} \cdot \frac{\sigma}{\mu} T^3,$$

gdzie const jest stałą liczbową „rzędu 1”. Obliczamy $\sigma T^3/\mu = 0,0008$ W/(m·K), co jest wielkością o wiele mniejszą od λ . Wysunięte przypuszczenie należy więc odrzucić.



Rys. 1

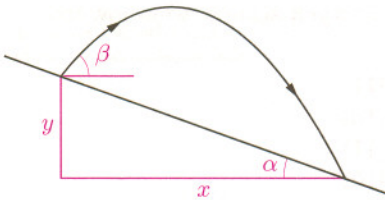
Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 308 ($WT=2,15$) i 309 ($WT=2,94$)
z numeru 12/2000

Marek Wójcicki	– Szczecin	45,10
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	43,14
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	36,35
Aleksander Surma	– Myszków	36,02
Tomasz Rudny	– Warszawa	26,91
Tomasz Wietecha	– Tarnów	20,37
Jacek Piotrowski	– Rzeszów	19,56

Drugą 44-punktową rundę kończy
p. Wójcicki.



Rys. 2

310. Oznaczmy przesunięcie poziome ciała przez x , pionowe przez y (ze zwrotem w dół, zob. rys. 2), czas lotu przez t , a szukany kąt nachylenia przez β . Obowiązują równania:

$$x = v_0 t \cos \beta,$$

$$y = -v_0 t \sin \beta + \frac{1}{2} g t^2,$$

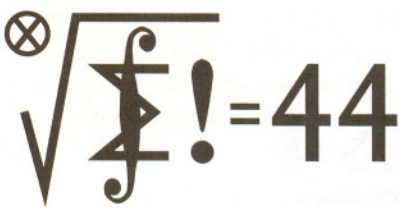
$$y = x \tan \alpha.$$

Przekształcając je, znajdujemy

$$t = \frac{2v_0 \sin(\alpha + \beta)}{g \cos \alpha},$$

$$x = \frac{2v_0^2 \sin(\alpha + \beta) \cos \beta}{g \cos \alpha} = \frac{v_0^2 \sin(\alpha + 2\beta) + \sin \alpha}{g \cos \alpha}.$$

Zatem warunek a) będzie spełniony, gdy $\alpha + \beta = 90^\circ$,
a warunek b) – gdy $\alpha + 2\beta = 90^\circ$.



Zadania z matematyki nr 421, 422

Redaguje Marcin E. KUCZMA

421. Niech A będzie zbiorem n -elementowym ($n > 3$). Ile jest funkcji $f: A \rightarrow A$ o tej własności, że $(n-2)$ -krotna iterata $f^{n-2} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n-2}$ jest odwzorowaniem stałym, podczas gdy f^{n-3} nie jest odwzorowaniem stałym?

422. Rozważamy ciąg liczb $a_n = \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin 2^{-n} k\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Wykazać istnienie i obliczyć wartość granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{2^{-n}}$.

Zadanie 422 zaproponował pan Krzysztof Oleszkiewicz z Warszawy.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2001

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 405 (WT=3,26) i 406 (WT=1,43)
z numeru 9/2000

Bartłomiej Dyda	- Wrocław	42,80
Bartłomiej Marczak	- Warszawa	41,75
Paweł Kubit	- Kraków	39,70
Piotr Kumor	- Olsztyn	36,98
Przemysław Gadziński	- Środa Śląska	34,87

Rozwiązania zadań z numeru 1/2001

Przypominamy treść zadań:

413. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunki $b > 2a, c > 2b$. Dowieść, że dla pewnej liczby dodatniej λ część ułamkowa każdego z iloczynów $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ jest liczbą z przedziału $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. (Część ułamkowa liczby x to różnica $x - [x]$, gdzie $[x]$ jest jej częścią całkowitą.)

414. Wewnątrz wielokąta wypukłego W znajduje się taki punkt O , że każda prosta przechodząca przez O dzieli wielokąt W na dwie części o równych polach. Czy stąd wynika, że punkt O jest środkiem symetrii wielokąta W ?

413. Określamy trzy ciągi przedziałów otwartych

$$I_k = \left(\frac{k + \frac{1}{3}}{a}; \frac{k + \frac{2}{3}}{a} \right), \quad J_m = \left(\frac{m + \frac{1}{3}}{b}; \frac{m + \frac{2}{3}}{b} \right), \quad K_n = \left(\frac{n + \frac{1}{3}}{c}; \frac{n + \frac{2}{3}}{c} \right)$$

($k, m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Należy dowieść, że dla pewnej trójki wskaźników k, m, n część wspólna $I_k \cap J_m \cap K_n$ jest zbiorem niepustym (każda liczba λ należąca do takiego zbioru spełnia wymagany warunek).

Odległość między dowolnymi dwoma sąsiednimi przedziałami K_n, K_{n+1} , równa $\frac{2}{3c}$, jest mniejsza niż długość każdego przedziału J_m , równa $\frac{1}{3b}$. Zatem każdy przedział J_m przecina pewien przedział K_n . Teza będzie wobec tego udowodniona, jeśli wykażemy, że pewien przedział I_k zawiera pewien przedział J_m .

Zadanie zostało sprowadzone do znalezienia pary liczb całkowitych $k, m \geq 0$ spełniającej warunki

$$(*) \quad \frac{k + \frac{1}{3}}{a} \leq \frac{m + \frac{1}{3}}{b} \quad \text{oraz} \quad \frac{m + \frac{2}{3}}{b} \leq \frac{k + \frac{2}{3}}{a}.$$

Próbujemy przyjąć $k = 0$. Warunki (*) przybierają postać $\frac{3}{2}m + 1 \leq t \leq 3m + 1$, gdzie $t = b/a > 2$; równoważnie: $u \leq m \leq 2u$, gdzie $u = \frac{1}{3}(t - 1)$. Gdy $t \geq \frac{5}{2}$, wówczas $u \geq \frac{1}{2}$, przedział $(u; 2u)$ zawiera co najmniej jedną liczbę całkowitą m , i mamy to, o co chodzi.

Pozostaje przypadek, gdy $t < \frac{5}{2}$. Wtedy przyjmujemy $m = 2k + 1$. Takie podstawienie sprowadza warunki (*) po prostym przekształceniu do nierówności podwójnej

$$v \leq k \leq w, \quad \text{gdzie} \quad v = \frac{5 - 2t}{3t - 6}, \quad w = \frac{4 - t}{3t - 6}.$$

Gdy $2 < t < \frac{5}{2}$, wówczas $w - v \geq 1$, więc znajdujemy w przedziale $(v; w)$ liczbę całkowitą k ; dla tej liczby (i dla $m = 2k + 1$) warunki (*) są spełnione. To kończy dowód.

414. Odpowiedź: tak. Przypuśćmy bowiem, że punkt O nie jest środkiem symetrii wielokąta W . Istnieje wówczas prosta przechodząca przez O i przecinająca brzeg wielokąta w punktach A i A' tak, że $|OA| < |OA'|$. Obracamy ją o niewielki kąt α wokół punktu O ; otrzymana prosta przecina brzeg wielokąta w punktach B i B' ($|\angle AOB| = |\angle A'OB'| = \alpha$).

Przy obracaniu prostej punkty jej przecięcia z brzegiem zmieniają swe położenie w sposób ciągły. Jeśli więc kąt α jest dostatecznie mały, to z nierówności $|OA| < |OA'|$ wynika nierówność $|OB| < |OB'|$, a w obszarach kątów wypukłych AOB i $A'OB'$ nie znajduje się żaden wierzchołek wielokąta W ; zatem odcinki AB i $A'B'$ są fragmentami brzegu wielokąta.

Skoro każda z prostych AA' i BB' dzieli wielokąt na dwie części o równych polach, to trójkąty AOB i $A'OB'$ muszą mieć równe pola. Ale $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot |OB| \cdot \sin \alpha$, $S_{A'OB'} = \frac{1}{2} \cdot |OA'| \cdot |OB'| \cdot \sin \alpha$, więc $S_{AOB} < S_{A'OB'}$. Uzyskana sprzeczność uzasadnia odpowiedź.



Rozwiązanie zadania M 952.

Załóżmy, że równość $f(f(n)) = n + 2001$ jest spełniona dla wszystkich $n \in \mathbb{N}_0$. Wtedy

$$f(n + 2001) = f(f(f(n))) = f(n) + 2001, \quad \text{a więc również}$$

$$f(n + 2001k) = f(n) + 2001k,$$

dla wszystkich $n, k \in \mathbb{N}_0$. Rozważmy dowolne $0 \leq r \leq 2000$ i podzielimy z resztą liczbę $f(r)$ przez 2001: $f(r) = 2001p + q$, $0 \leq q \leq 2000$. Z założenia

$$f(f(r)) = r + 2001$$

oraz

$$f(f(r)) = f(q + 2001p) = f(q) + 2001p.$$

Ponieważ $r \leq 2000$, więc możliwe są dwa przypadki:

- $p = 0$,
czyli $f(r) = q$ oraz $f(q) = r + 2001$;
- $p = 1$,
czyli $f(r) = q + 2001$ oraz
 $f(q) = f(f(r)) - 2001 = r$.

W obu przypadkach mamy, oczywiście, $f(r) \neq f(q)$, czyli $r \neq q$. Tak więc zbiór $\{0, 1, \dots, 2000\}$ można podzielić na pary (a, b) tak, że $f(a) = b$ i $f(b) = a + 2001$. Przeczy to jednak temu, że w zbiorze tym jest nieparzysta liczba elementów.

Pisaliśmy już kilkakrotnie w *Delcie*, że coraz bardziej ugruntowuje się pogląd, iż za wyginięcie dinozaurów na przelomie kredy i trzeciorzędu odpowiedzialny jest wielki meteor. Spadł on na skraj Jukatenu, a spowodowane tym zapylenie atmosfery spowolniło fotosyntezę, w wyniku czego nastąpiło zubożenie szaty roślinnej i w rezultacie wymarciu wielkich gadów. Nastąpiło to 65 mln lat temu.

Okazuje się jednak, że można mieć na ten temat szerszy pogląd. Dwaj astronomowie z Pasadeny w Kalifornii niedawno zajęli się dyskutowaną od pewnego czasu hipotezą: oszacowane przez geologów tempo osiadania na Ziemi materii kosmicznej nasilało się, gdy Układ Słoneczny przechodził przez ramiona spiralne naszej Galaktyki. Wielkoskalową strukturę Galaktyki odtwarza się na podstawie rozmieszczenia w przestrzeni np. obłoków zjonizowanego wodoru. Obłoki te są stowarzyszone z młodymi, gorącymi gwiazdami i – zgodnie z teorią ramion spiralnych – z podwyższoną gęstością wszelkich innych, trudniej obserwowalnych form materii obecnej w Galaktyce. Te spiralne fale gęstościowe obracają się wokół centrum Galaktyki, gwiazdy również centrum obiegają, ale w innym tempie. Po uwzględnieniu tego wszystkiego można ocenić, kiedy Słońce przechodziło ostatnie kilka razy przez ramiona Galaktyki. Amerykańskim astronomom wyszło, że było to w kambrze (początek ery paleozoicznej), na przelomie permu i triasu (czyli ery paleozoicznej i mezozoicznej) i wreszcie w kredzie (czyli pod koniec ery mezozoicznej). Rozumowanie przedstawione przez Amerykanów ma w dodatku bardzo ważną cechę każdej przyzwoitej hipotezy naukowej, mianowicie weryfikowalność – co prawda na możliwość przeprowadzenia tej weryfikacji trzeba będzie sporo poczekać. Bowiem na podstawie ruchu Słońca i rozmieszczenia ramion Galaktyki oszacowali oni, że następny raz Słońce przejdzie przez ramię za 140 mln lat.

Pominąwszy jednak tę humorystyczną raczej zaletę hipotezy, trudno nie zgodzić się z tym, że Słońce, przechodząc przez ramię spiralne Galaktyki, ma większą szansę bliskiego spotkania z supernową lub z wielkim obłokiem molekularnym. A to niewątpliwie może spowodować wzrost albo tempa mutacji u ziemskich organizmów, albo tempa spadku na Ziemię kosmicznych brył, krążących dotąd bezpiecznie w dużej odległości od Słońca. Może więc rzeczywiście przelomy er geologicznych były efektem katastrof uwarunkowanych aż przez wielkoskalową budowę Galaktyki, a spadek meteoru to tylko nieuchronny w tej sytuacji epizod.

Tomasz KWAST



Maj

W majowe wieczory prawie przez zenit przechodzi gwiazdozbiór Psów Gończych. Jest to nieduży i mało wyraźny gwiazdozbiór leżący na południe od Wielkiej Niedźwiedzicy, a „umieścił” go na niebie Heweliusz w 1690 roku. Znajduje się w nim wiele obiektów pozagalaktycznych, które – niestety – z reguły są dość słabe. Mając jednak co najmniej dobrą lornetkę, można niektóre odszukać. Na przykład gromada kulista M 3 ma jasność 6,2 mag, a więc w lornetce powinna być widoczna bez problemów. Znajduje się w odległości 8800 pc, a jej średnica kątowa jest niemal taka jak Księżyc. Lepszego przyrządu potrzeba, by zobaczyć znajdujące się w Psach Gończych galaktyki. Najjaśniejsza z nich, M 94, ma jasność 7,9 mag. Tutaj też znajduje się bardzo często reprodukowana piękna galaktyka spiralna Wir, czyli M 51, z galaktyką towarzyszącą – jej jasność wynosi jednak 10 mag, przez co do jej odszukania potrzeba naprawdę dobrych warunków obserwacyjnych, czyli czarnego nieba, o co jest coraz trudniej.

4 V Wenus osiąga swoją największą aktualnie jasność i widać ją doskonale w Rybach przed wschodem Słońca. Mars jest w Strzelcu i wschodzi wprawdzie przed północą, ale jest stale nisko nad południowym horyzontem. Jowisz i Saturn są w Byku, czyli bardzo blisko Słońca, zatem ich nie widać (Saturn ma nawet 25 V złączenie ze Słońcem). Można jeszcze po zachodzie Słońca próbować ujrzeć Merkurego, gdyż 22 V znajdzie się w największej od niego kątowej odległości – 22° na wschód. Pełnia Księżycy wypada 7 V, a nów 23 V. W maju Księżyc nie zakrywa żadnych jasných gwiazd.

T.K.



Rozwiązanie zadania M 953.

Niech (n_i) będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb naturalnych, które nie są kwadratami liczb naturalnych. Przyjmijmy $n_{k,m} = (n_k)^{2^m}$, gdzie $k, m \in \mathbb{N}$. Wtedy mamy $n_{k,m+1} = (n_{k,m})^2$. Poza tym dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ istnieje para liczb k, m , dla których $n = n_{k,m}$. Szukaną funkcję można zdefiniować za pomocą następującego wzoru:

$$f(1) = 1$$

$$f(n_{k,m}) = \begin{cases} n_{k+1,m+1} & \text{dla } k \text{ nieparz.,} \\ n_{k-1,m} & \text{dla } k \text{ parzyst.} \end{cases}$$

układ równań:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{C_1}{2} + \frac{2C_5}{3} \\ C_5 = \frac{C_1}{2} + \frac{C_5}{3} \\ C_1 + C_5 = 1 \end{cases}$$

kotórego rozwiązaniem są liczby $C_1 = 4/7$ i $C_5 = 3/7$. To zaś oznacza, że przy każdej iteracji funkcja h mnoży liczbę przez 5, a następnie dzieli ją przez 2 średnio 2 razy i przez 3 (**UWAGA !!!**) nie $\frac{3}{4}$, ale $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{6}{7}$ raza.

Podobne zjawisko występuje dla funkcji f . Oczekiwane częstości występowania reszt z dzielenia przez 210 w ciągu jej iteracji podane są w tabeli.

Oczywiście, nie są to wartości dokładne, a jedynie przybliżone. Nawet najbardziej wnikliwy Czytelnik patrzący na tę tabelę nie ma szansy zauważenia, że dokładne wartości są liczbami wymiernymi o mianowniku

$$1324621797939996777697147975759531841253 = 3^2 \cdot 37 \cdot 523 \cdot 4951 \cdot 947747 \cdot 1620916452482347478939311,$$

(niektóre ułamki się trochę upraszczają, ale niewiele).

Widzimy, że reszta 19 powinna pojawiać się prawie dwukrotnie częściej niż 191.

Uwzględnienie powyższych wyników prowadzi do korekty rozważań przedstawionych w poprzednim (kwietniowym, a więc Prima Aprilisowym) Γ-limatiasie.

- I tak, należy oczekiwać w każdej iteracji funkcji f
- 0,8128688 dzieleni przez 3 (zamiast $\frac{3}{4} = 0,75$),
 - 0,2857835 dzieleni przez 5 (zamiast $\frac{5}{16} = 0,3125$),
 - 0,2039183 dzieleni przez 7 (zamiast $\frac{7}{36} \approx 0,1944444$).

Ostatecznie oczekujemy, że funkcja f średnio mnoży liczbę przez 0,99941477, czyli zmniejsza liczbę cyfr o 1 co 3933,36726 iteracji.

Należy oczekiwać, że efekt tendencji zmniejszającej funkcji f będzie zauważalny po liczbie iteracji rzędu kwadratu tej ostatniej liczby. Jest on równy około 15471378, jednak ekscytowanie się jego zgodnością z liczbą iteracji, po której ciąg zszedł do jedynki, byłoby czystym mistycyzmem.

DLACZEGO? (4)

W naszych rozważaniach przyjęliśmy milczące (i, niestety, nieprawdziwe) założenie, że wszystkie dopuszczalne (czyli względnie pierwsze z 210) reszty z dzielenia przez 210 występują w rozważanym przez nas ciągu z jednakową częstością. Przeanalizujmy na początek prostszy przykład związany z iteracjami funkcji h , która argument mnoży przez 5, dodaje 1, a następnie usuwa z wyniku wszystkie czynniki 2 i 3.

Ponieważ wartości tak określonej funkcji h są liczbami względnie pierwszymi z 6, zatem mogą przy dzieleniu przez 6 dawać resztę 1 lub 5.

Jeżeli $n \equiv 1 \pmod{6}$, to $5n + 1$ jest liczbą podzielną przez 6 i po kompletnym wydzieleniu przez 2 i 3 da z równym prawdopodobieństwem liczbę podzielną przez 6 z resztą 1 lub 5.

Jeśli jednak $n \equiv 5 \pmod{6}$, to $5n + 1$ jest liczbą parzystą niepodzielną przez 3 (daje resztę 2 przy dzieleniu przez 6). Po kompletnym wydzieleniu tej liczby przez 2 otrzymamy:

- z prawdopodobieństwem 1/2, po dokładnie jednym dzieleniu przez 2, liczbę postaci $6k + 1$,
- z prawdopodobieństwem 1/4, po dokładnie dwóch dzieleniach przez 2, liczbę postaci $6k + 5$,
- z prawdopodobieństwem 1/8 po dokładnie trzech dzieleniach przez 2, liczbę postaci $6k + 1$,
- z prawdopodobieństwem 1/16 po dokładnie czterech dzieleniach przez 2, liczbę postaci $6k + 5$ itd.

Zatem szansa na uzyskanie w tym przypadku liczby postaci $6k + 1$ wynosi 2/3, a postaci $6k + 5$ tylko 1/3.

Jeśli więc przez C_1 i C_5 oznaczymy oczekiwane częstości występowania w ciągu iteracji funkcji h liczb dających przy dzieleniu przez 6 reszty odpowiednio 1 i 5, to otrzymujemy

1	0,02614371	53	0,02195964	107	0,01939195	163	0,0180086	1	(mod 3)	0,5419126
11	0,01840448	59	0,01810492	109	0,01946275	167	0,01910048	2	(mod 3)	0,4580874
13	0,01426965	61	0,02739508	113	0,02300551	169	0,02572076	1	(mod 5)	0,2506306
17	0,02112253	67	0,01831024	121	0,02509051	173	0,01953688	2	(mod 5)	0,2661472
19	0,02805647	71	0,02025111	127	0,02595694	179	0,01772802	3	(mod 5)	0,2286268
23	0,01709291	73	0,01979727	131	0,01738549	181	0,02507326	4	(mod 5)	0,2545954
29	0,01974483	79	0,02649677	137	0,02167048	187	0,02678566	1	(mod 7)	0,179554
31	0,02466955	83	0,01952313	139	0,02346179	191	0,01426742	2	(mod 7)	0,1654464
37	0,02662055	89	0,01645591	143	0,02284915	193	0,01901402	3	(mod 7)	0,1747871
41	0,01965202	97	0,01981226	149	0,01847773	197	0,02210952	4	(mod 7)	0,1526751
43	0,01662163	101	0,01617247	151	0,01612545	199	0,02625015	5	(mod 7)	0,1720095
47	0,01944558	103	0,01694844	157	0,02582107	209	0,01463529	6	(mod 7)	0,1555279

Natomiast całkiem na miejscu jest przekonanie, że po kilkudziesięciu milionach iteracji efekt zmniejszania musi wziąć górę nad kapryśnymi wahaniami ciągu.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl