

## SPIS TREŚCI NUMERU 4 (323)

Igraszki z ciągiem liczbowym  
*Jarosław Górnicki* str. 1

Kwantowy efekt Halla  
*Michał Korch* str. 3

Trzy równe różnice dwóch sześciątów  
*Aleksander Górski* str. 6

Zadania str. 7

Mała Delta str. 8

Aktualności (nie tylko) fizyczne str.11

Macierze  $n$ -wymiarowe  
*Mirosław Żwiryn* str.12

Zbiory i „zbiory” str.13

Klub 44 str.14

Patrz w niebo str.16

Kwiecień str.16

Gammalimatias str.17

**W następnym numerze:**  
**Mechanika kwantowa**

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*  
Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim  
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delt* można znaleźć w portalu Eduseek  
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski  
**Cena 1 egzemplarza 3 zł**

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitety Redakcyjne:		Redaguje kolegium w składzie:
str. 1	Andrzej Białynicki-Birula Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący	Wiktor Bartol Krzysztof Biesaga Ewa Czuchry Krystyna Kordos – sekr. red. Marek Kordos – red. nac. Tomasz Kwast Anna Ludwicka Anna Rudnik Witold Sadowski Joanna Udalska Anna Wojtyra Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
str. 3	Krzysztof Ciesielski Jan A. Gaj Piotr Goldstein Andrzej Hryniewicz Wiesław A. Kamiński Marta Kicińska-Habior	
str. 6	Krzysztof Maślanka Janusz Matkowski	
str. 7	Andrzej Mąkowski	
str. 8	Zdzisław Pogoda Michał Różyczka Konrad Rudnicki Grzegorz Sitarski	Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa tel. 853-59-61 BARTOL@MIMUW.EDU.PL Skład systemem T <sub>E</sub> X wykonała Redakcja.
str.11	Andrzej Woszczyk Eligiusz Złotkiewicz	Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.
str.12	Wiesław Żelazko – przewodniczący	

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2001 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.  
W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2001 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.  
**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.  
Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 2001 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.  
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl), e-mail: [prenumerata@okdp.ruch.com.pl](mailto:prenumerata@okdp.ruch.com.pl)
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

## Część I

Możemy stwierdzić, że ciąg liczb rzeczywistych  $\{a_n\}$  jest zbieżny, nie obliczając jego granicy. Wystarczy, że zbadamy dwie jego własności:

- monotoniczność, czyli czy stale  $a_{n+1} \geq a_n$ , czy też stale  $a_{n+1} \leq a_n$  (warunki te można osłabić żądając, by wskazane nierówności były spełnione dla wszystkich numerów  $n$ , poczynając od pewnego  $k$ ),
- ograniczoność, czyli czy wszystkie wyrazy ciągu mieszczą się w pewnym skończonym przedziale.

Wówczas możemy skorzystać z bardzo prostego i użytecznego twierdzenia [1].

**TWIERDZENIE 1.** Ciąg liczb rzeczywistych, który jest monotoniczny i ograniczony, jest zbieżny.

Wyposażeni w takie kryterium spróbujmy zbadać zbieżność następujących ciągów:

$$(a) \quad \sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}, \dots,$$

$$(b) \quad \sqrt{3}, \sqrt{3}^{\sqrt{3}}, \sqrt{3}^{\sqrt{3}^{\sqrt{3}}}, \dots$$

W obu przypadkach bez trudu stwierdzamy, że są to ciągi rosnące (każdy wyraz następny jest większy od poprzedniego). Zbadajmy teraz ich ograniczoność.

Ciąg (a) jest ograniczony. Łatwo wykazujemy to za pomocą indukcji matematycznej:

$$a_1 = \sqrt{2} < 2 \quad \text{i} \quad a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n} < (\sqrt{2})^2 = 2 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots$$

Zatem ciąg (a) jest zbieżny! Jak obliczyć (wyznaczyć) jego granicę? Załóżmy, że liczba  $g$  (musi ona należeć do przedziału  $[\sqrt{2}, 2]$ ) jest granicą tego ciągu. Ponieważ między następnym a poprzednim wyrazem ciągu zachodzi zależność

$$a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n},$$

mamy więc równanie

$$g = (\sqrt{2})^g,$$

które wystarczy rozwiązać. W tym przypadku łatwo odgadujemy, że  $g = 2$ , a ponieważ na przedziale  $[\sqrt{2}, 2]$  funkcja  $x \rightarrow \frac{\log_2 x}{x}$  jest ciągła i rosnąca, zatem jest to rozwiązanie jedyne. Konkluzja jest więc następująca: ciąg z przykładu (a) jest zbieżny do liczby 2.

W przypadku ciągu z przykładu (b) sytuacja jest odmienna. Ten ciąg nie jest ograniczony! Korzystając z indukcji matematycznej (i nierówności  $2 \cdot (1,3)^{n+1} > n + 2$ ) możemy wykazać nierówność

$$b_n > (1,3)^{n+1} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots,$$

która oznacza to, że ciąg opisany w warunku (b) jest rozbieżny do  $+\infty$ . Te dwa zadania sugerują naturalne pytanie:

**PYTANIE 1.** Dla jakich wartości rzeczywistych  $a > 0$  ciąg określony wzorem

$$a_1 = a \quad \text{i} \quad a_{n+1} = a^{a^n} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots$$

jest zbieżny?

Odpowiedź na to pytanie wymaga znajomości liczby  $e$  ( $\approx 2,718281$ ) (zob. [1]) i jest ona następująca: wyżej określony ciąg jest zbieżny dla  $0,065988 \approx e^{-e} \leq a \leq e^{1/e} \approx 1,444667$ . Szczegóły rozwiązania można znaleźć w [2, str. 82–83] oraz [3, Prob. 30]. Jeszcze dalej idącą analizę tego typu ciągów zawiera praca [4, zad. 2.5.40]. Inne podejście do badania zbieżności ciągu, gdy nie potrafimy łatwo obliczyć jego granicy, łączy się z nazwiskiem francuskiego matematyka L.A. Cauchy'ego (1789–1857), który podał następujące twierdzenie [1]:

**TWIERDZENIE 2.** Ciąg  $\{a_n\}$  liczb rzeczywistych jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k \forall m, n \geq k \quad |a_m - a_n| < \varepsilon$$

(inaczej mówiąc: gdy końcówka ciągu może mieć dowolnie małą średnicę).

Kryterium to, niezależnie od Cauchy'ego, podał też czeski matematyk B. Bolzano (1781–1848). Tak na marginesie, nietrywialny warunek z Twierdzenia 2 za sprawą polskiego matematyka S. Banacha (1892–1945) zrobił w matematyce oszałamiającą karierę, ale to temat na całkiem inne opowiadanie.

## Część II

Przenieśmy teraz nasze rozważania ze zbioru liczb rzeczywistych (z prostej liczbowej) do zbioru liczb zespolonych, czyli na płaszczyznę. Chcąc zobaczyć, jakie „niespodzianki” tu na nas czekają, zbadamy zbieżność „najbardziej” zespolonego ciągu:

$$(c) \quad i, i^i, i^{i^i}, \dots,$$

gdzie  $i$  oznacza jednostkę urojoną, czyli liczbę zespoloną spełniającą równanie  $i^2 = -1$ . Nie wdając się w techniczne zawiłości, skorzystajmy ze znanego wzoru  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , gdzie  $x$  jest liczbą rzeczywistą. Otrzymujemy wtedy  $e^{i\pi/2} = i$ , skąd  $i(2) = i^i = e^{-\pi/2} = 0,207879$ . Bierzymy kalkulator i obliczamy dalej

$$i(3) = i^{i^i} \approx i^{0,207879} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{0,207879} = e^{i \cdot 0,326535} = \\ = \cos 0,326535 + i \sin 0,326535 = 0,947159 + i \cdot 0,320764.$$

Wykonując analogiczne obliczenia, otrzymujemy następujące przybliżone wartości:

$$\left\{ \begin{array}{l} i(4) \approx 0,050092 + i \cdot 0,602116, \\ i(5) \approx 0,387166 + i \cdot 0,305270, \\ i(6) \approx 0,142561 + i \cdot 0,400466, \\ \dots\dots\dots \\ i(1000) \approx 0,438282 + i \cdot 0,360592. \end{array} \right.$$

Ponieważ o liczbach zespolonych nie możemy powiedzieć, która jest mniejsza, a która większa, więc nie możemy bezpośrednio stosować Twierdzenia 1. Przypatrywanie się częściom rzeczywistym i częściom urojonym tych liczb też, niestety, nie wskazuje na jakąś monotoniczną regularność. Zatem tym sposobem (tymi środkami) nie zdecydujemy, czy badany ciąg jest zbieżny. Aby wyjść z tej nieprzyjemnej sytuacji, wykonajmy symulację komputerową, zaznaczając na płaszczyźnie zespolonej położenia początkowych wyrazów ciągu (c) (rysunek, [5]).

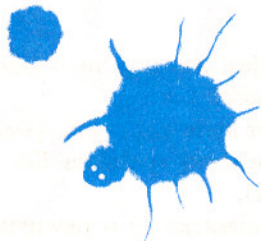
Widzimy, że wyrazy tego ciągu, układające się wzdłuż trzech spiralnych ramion, koncentrują się wokół punktu, który jest dobrze przybliżony przez  $i(1000)$ . Mamy więc komputerową sugestię: ciąg z przykładu (c) jest zbieżny. Korzystając z takiego założenia, spróbujemy wyznaczyć jego granicę  $z$ . Postąpimy jak w części I. Ponieważ między następnym a poprzednim wyrazem rozpatrywanego ciągu zachodzi zależność

$$c_{n+1} = i^{c_n},$$

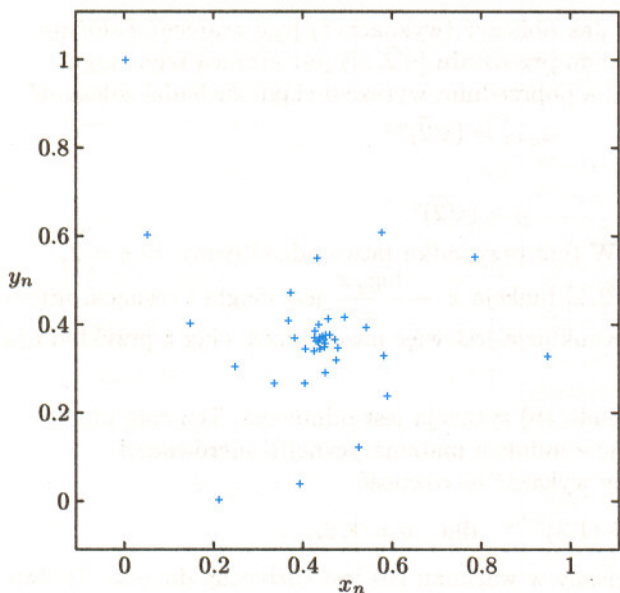
więc musi zachodzić też równość

$$z = i^z,$$

gdzie  $z = x + iy$ . Jednak rutynowe obliczenia (porównanie części rzeczywistych oraz części urojonych) prowadzą do układu równań



Aby zadanie miało sens, ograniczymy się do tzw. wartości głównej (potęgowanie w dziedzinie zespolonej jest bardziej skomplikowane niż w dziedzinie rzeczywistej i często prowadzi do funkcji wielowartościowych).



## LITERATURA

- [1] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1973.
- [2] W. Żakowski, *Matematyka, ćwiczenia problemowe dla politechnik*, WNT, Warszawa 1987.
- [3] *The Otto Dunkel Memorial Problem Book*, Amer. Math. Monthly 64 (1957), no 7, part 2 (tłumaczenie rosyjskie: Izd. „Mir”, Moskwa 1977).
- [4] W. Kaczor, M. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej, cz. I: liczby rzeczywiste, ciągi, szeregi liczbowe*, Wyd. UMCS, Lublin 1996.
- [5] G.J. Parker, S. Abbott, *Complex power iterations*, Math. Gaz. 81 (1997), 431-434.

$$\begin{cases} x = e^{-y\pi/2} \cos\left(x\frac{\pi}{2}\right), \\ y = e^{-y\pi/2} \sin\left(x\frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

którego bezpośrednie rozwiązanie bez użycia komputera jest trudne. Komputerowa analiza tego układu lub otrzymanego z niego równania przestępnego

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\left(x\frac{\pi}{2}\right)$$

przekonuje nas, że granicę ciągu (c) rzeczywiście zadowalająco przybliża wartość  $i(1000)$ .

Interesująca może być odpowiedź na ogólniejsze pytanie:

PYTANIE 2. Dla jakich liczb zespolonych ciąg określony wzorem

$$(1) \quad a_1 = z, a_{n+1} = z^{a_n}, n = 1, 2, \dots,$$

$$(2) \quad a_1 = z, a_2 = z^i, a_3 = z^{i^i}, \dots$$

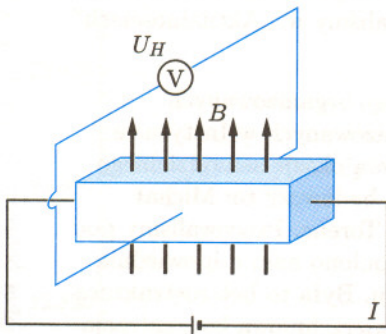
jest zbieżny? Warto naszkicować ten zbiór na płaszczyźnie zespolonej.

Wydaje się, że w rozwiązaniu tego typu zagadnień bardzo pomocne mogą być symulacje komputerowe. Może prowadzą one do fraktali... Wszystkim, którzy podejmą się pracy nad tymi problemami, życzę sukcesu!

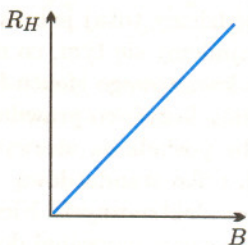
## Kwantowy efekt Halla

Michał KORCH

Jest to sprawozdanie z Warsztatów Fizyki Ciała Stałego organizowanych przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci, spisane przez jednego z uczestników.



Rys. 1. Efekt Halla.



Rys. 2. Zależność oporu Halla od indukcji pola magnetycznego w klasycznym efekcie Halla.

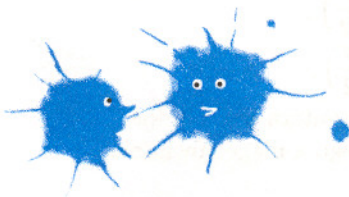
W 1879 roku Edwin Robert Hall odkrył, że jeśli przewodnik, przez który płynie prąd elektryczny o natężeniu  $I$ , umieścimy w polu magnetycznym o indukcji  $B$ , prostopadłej do kierunku prądu, to w przewodniku powstaje poprzeczne napięcie elektryczne  $U_H$ . Napięcie to można zmierzyć, podłączając woltomierz do bocznych kontaktów tak, jak to pokazano na rysunku 1.

Zjawisko to jest wynikiem działania siły Lorentza na swobodne nośniki prądu. Jeśli tymi nośnikami są elektrony, to siła Lorentza odchyli je w kierunku jednej ze ścianek, pozostawiając przy przeciwnej ściance nadmiar ładunku dodatniego. W rezultacie w przewodniku powstanie poprzeczne pole elektryczne, działające na elektrony siłą przeciwną do siły Lorentza i zapobiegające dalszemu rozsuwaniu ładunków. Napięcie poprzeczne  $U_H$  jest iloczynem tego pola i szerokości przewodnika. To klasyczne zjawisko zostało nazwane, na cześć odkrywcy, efektem Halla. Jest ono bardzo ważne w fizyce metali i półprzewodników, ponieważ pozwala na określenie znaku i koncentracji nośników prądu. Dzieląc napięcie poprzeczne  $U_H$  przez natężenie  $I$  prądu płynącego przez przewodnik, otrzymujemy tzw. opór Halla

$$(1) \quad R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{B}{e \cdot n \cdot d},$$

gdzie  $e$  jest ładunkiem nośnika prądu,  $n$  – liczbą nośników w jednostce objętości przewodnika, a  $d$  – grubością przewodnika. Ze wzoru (1) wynika, że opór  $R_H$  jest liniową funkcją indukcji pola magnetycznego. Zauważmy jeszcze, że opór Halla jest odwrotnie proporcjonalny do grubości przewodnika.

Czy to oznacza, że może on być dowolnie duży dla odpowiednio cienkiej warstwy przewodzącej? Oczywiście nie, naturalną granicę ścieniania stanowi chociażby rozmiar pojedynczej komórki elementarnej sieci krystalicznej materiału przewodnika. Co więcej, należy podkreślić, że elektrony mają również naturę falową i do pełnego ich opisu konieczne jest użycie mechaniki kwantowej. W jej ramach pokazano, że klasyczny opis załamuje się, gdy grubość warstwy  $d$  staje się porównywalna z długością fali elektronu. Wtedy energia kinetyczna ruchu



elektronów w kierunku prostopadłym do warstwy przyjmuje tylko dyskretne (skwantowane) wartości. Jednak dla dwóch pozostałych kierunków nadal będzie się ona zmieniać w sposób ciągły. W ten sposób gaz elektronowy uzyskuje charakter dwuwymiarowy i opór Halla przestaje zależeć od grubości. Wtedy jednak zamiast wzoru (1) możemy napisać

$$(2) \quad R_H = \frac{B}{e \cdot n_d},$$

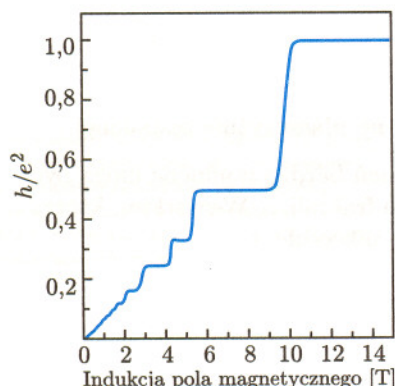
gdzie  $n_d$  jest liczbą nośników, przypadających na jednostkę powierzchni warstwy. Wzór (2), podobnie jak (1), przewiduje liniowy wzrost oporu Halla w polu magnetycznym. Jednakże badania doświadczalne pokazały, że przewidywanie to nie do końca jest słuszne. Stwierdzenie tego stało się możliwe dzięki osiągnięciom technologii półprzewodników ostatnich kilkudziesięciu lat, które pozwoliły na praktyczną realizację dwuwymiarowych układów elektronowych. Typowa grubość warstwy przewodzącej wynosi dla nich 10 nanometrów. Odpowiednio cienkie próbki otrzymuje się przez nakładanie kolejnych warstw atomowych przewodnika na izolujące podłoże za pomocą techniki znanej pod nazwą epitaksji z wiązek molekularnych (MBE).

W 1980 roku Klaus von Klitzing z Instytutu Maxa Plancka ze Stuttgartu badał efekt Halla w takim właśnie dwuwymiarowym gazie elektronowym. Niespodziewanie okazało się, że w odpowiednio silnym polu magnetycznym i w bardzo niskiej temperaturze zależność oporu Halla od indukcji nie odpowiada linii prostej, lecz ma charakter „schodkowy”. Opór ten przyjmuje kolejne stałe wartości

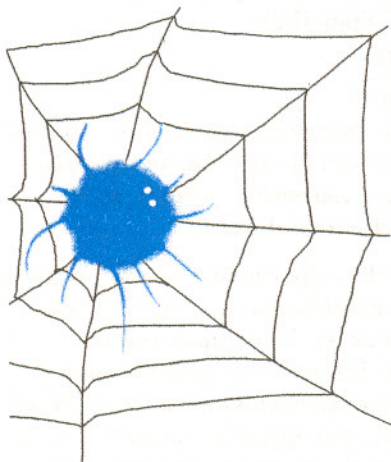
$$R_H = \frac{h}{i \cdot e^2},$$

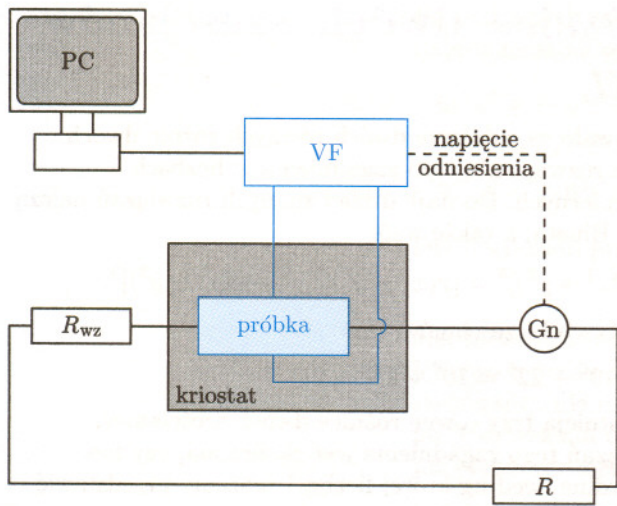
gdzie  $h$  jest stałą Plancka,  $e$  – ładunkiem elektronu, a  $i$  – liczbą naturalną (patrz rysunek 3). Największym zaskoczeniem w uzyskanych wynikach jest niezwykle „płaskość” schodków. Późniejsze badania wykazały, że wartość oporu w obszarze pojedynczego schodka jest stała z dokładnością lepszą niż  $10^{-10}$ . Ponadto stwierdzono, że dopóki próbka stanowi gaz dwuwymiarowy, to efekt jest zupełnie niezależny od innych, szczegółowych własności, takich jak: geometryczny kształt, koncentracja nośników czy rodzaj użytego materiału. Wszystko to sprawiło, że ten tzw. kwantowy efekt Halla, którego odkrycie zostało nagrodzone Nagrodą Nobla w 1985 roku, jest naturalnym kandydatem na wzorzec oporu elektrycznego. (O kwantowym efekcie Halla pisaliśmy w „Aktualnościach” w numerze 12/1998 – redakcja.)

Uczestnicząc w Warsztatach Fizyki Ciała Stałego organizowanych przez Krajowy Fundusz na rzecz Dzieci, zorganizowanych w Instytucie Fizyki PAN w Warszawie, uzyskaliśmy wyjątkową okazję samodzielnego pomiaru kwantowego efektu Halla. Nasz zespół badawczy to: Michał Korch, Paweł Parys, Piotr Powałowski i Jakub Torenc. Pracowaliśmy pod kierunkiem dr. Grzegorza Grabeckiego. Udostępniono nam odpowiednią próbkę z dwuwymiarowym gazem elektronowym. Była to heterostruktura półprzewodnikowa AlGaAs/GaAs, w której powierzchniowa koncentracja elektronów wynosiła  $3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ . Mieliśmy również dostęp do elektromagnesu nadprzewodzącego, umożliwiającego generowanie pola magnetycznego o indukcji do 9 T i układu niskotemperaturowego pozwalającego schłodzić naszą próbkę do temperatury rzędu jednego Kelvina. Nie będziemy tutaj jednak szczegółowo opisywać tych elementów układu, lecz zajmiemy się tym, co nas zainteresowało najbardziej, czyli wielką dokładnością kwantowego efektu Halla. Postanowiliśmy ją samodzielnie sprawdzić. Nie mogliśmy liczyć, co prawda, na osiągnięcie dokładności  $10^{-10}$ , gdyż to wymagałoby posiadania niezwykle wyrafinowanej aparatury. My mieliśmy do dyspozycji tylko standardową aparaturę służącą do niskotemperaturowych pomiarów elektrycznych. Niestety, do dokładnych pomiarów oporu Halla nie można zastosować, używanej do „zwykłych” oporników, metody mostka Wheatstone’a, ponieważ osobnymi sondami przepuszcza się prąd i osobnymi sondami mierzy się napięcie. Dlatego zastosowaliśmy układ pomiarowy, przedstawiony schematycznie na rysunku 4.



Rys. 3. Zależność oporu Halla od indukcji pola magnetycznego w kwantowym efekcie Halla.

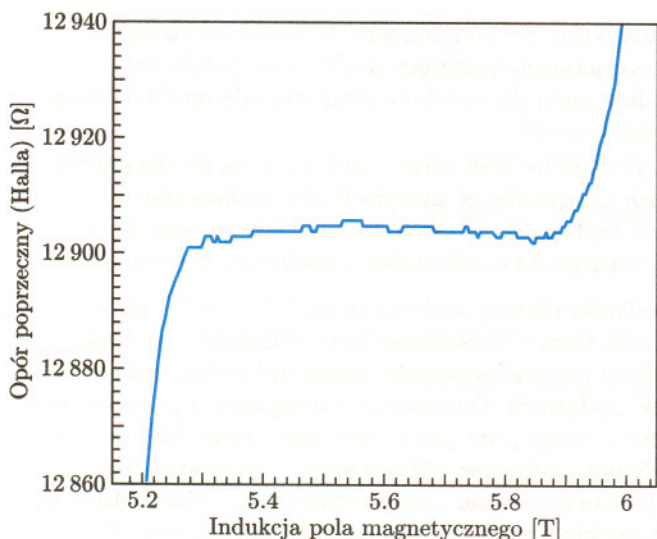




Rys. 4. Układ pomiarowy.

Nasza „dwuwymiarowa” warstwa, umieszczona w kriostacie niskotemperaturowym, została połączona szeregowo z opornikiem dekadowym  $R_{wz}$  o dokładności 0,05% (najdokładniejszym, jaki znaleźliśmy w pracowni). Pełnił on w naszym eksperymencie funkcję oporu wzorcowego. Zasada pomiaru oporu Halla polegała na porównaniu, za pomocą tego samego miernika, napięcia Halla z napięciem na oporze wzorcowym. Choć wydaje się ona bardzo prosta, to nie możemy zapominać, że nasza próbka była umieszczona w bardzo niskiej temperaturze, rzędu 1 K. W takim przypadku bardzo istotne jest ograniczenie ciepła Joule’a wywołanego przepływem prądu. Przepuszczany prąd musiał być mniejszy od  $1 \mu A$ , w związku z czym wartości mierzonego napięcia sięgały zaledwie kilku miliwoltów. W takiej sytuacji zwykły woltomierz dawałby zbyt małą dokładność ze względu na zbyt mały stosunek sygnału do szumu. Zastosowaliśmy więc technikę zmiennoprądową

z woltomierzem fazoczułym VF. Prąd przemienny w obwodzie był wzbudzany za pomocą generatora Gn (amplituda około 1 V, częstotliwość 18 Hz), a natężenie prądu ograniczyliśmy, włączając w szereg bardzo duży opornik  $R$ , rzędu  $10 M\Omega$  (rys. 4). Zasada fazoczułego pomiaru polega na jednoczesnym pomiarze słabego i obciążonego szumami sygnału z próbki i napięcia odniesienia, pochodzącego z tego samego generatora Gn. Woltomierz „porównuje” częstotliwość i fazę obu napięć przemiennych i „oczyszcza” mierzony sygnał z wszelkich przypadkowych szumów. Oczyszczony sygnał wyjściowy był przetwarzany na postać cyfrową za pomocą 16-bitowego przetwornika analogowo-cyfrowego i kierowany przez interfejs do komputera PC. Na wzorcowym oporniku dekadowym ustawiana była wartość oporu bliska przewidywanej dla danego schodka, według wzoru (3). Mierząc opór wzorcowy, należało pamiętać, aby wykonywać ten pomiar dokładnie w tych samych warunkach, co pomiar oporu Halla, tj. w silnym polu magnetycznym, odpowiadającym badanemu schodkowi. Wynika to z faktu, że opór szeregowy próbki wraz z kontaktami elektrycznymi zależy od pola magnetycznego, co może prowadzić do pewnych zmian prądu w obwodzie.



Rys. 5. Zależność oporu poprzecznego próbki od indukcji magnetycznej. Schodek dla  $i = 2$ .

Przykładowy wynik dla schodka  $i = 2$  jest przedstawiony na rysunku 5. Skala pionowa została wyznaczona przez porównanie z oporem wzorcowym. Wyznaczona wartość oporu schodka wynosi  $12903 \pm 6 \Omega$ . Zgadza się to bardzo dobrze z wartością teoretyczną  $12906 \Omega$ . Błąd względny naszego pomiaru wynosi 0,05% i wynika on, oczywiście, z ograniczonej dokładności oporu wzorcowego. Zauważmy jednak, że schodek na rysunku 5 jest praktycznie płaski, a niewielkie odchylenia mają charakter prostokątnych skoków o wartości około  $1 \Omega$ . Jest to wynik zmian zero-jedynkowych najmniej znaczącego bitu naszego przetwornika analogowo-cyfrowego. To jest, oczywiście, najmniejsza zmiana oporu, którą mogliśmy wykryć i stanowi ona granicę dokładności bezwzględnej pomiaru. A zatem schodek jest rzeczywiście niezwykle płaski, tak że przy użyciu naszej aparatury jego nachylenia nie byliśmy w stanie uchwycić. Możemy jedynie powiedzieć, że względna dokładność kwantyzacji oporu jest lepsza niż  $8 \cdot 10^{-5}$ , bowiem takiej wartości odpowiada właśnie najmniejszy skok oporu. Przekonaliśmy się zatem osobiście

o niezwyklej dokładności kwantowego efektu Halla. A może ktoś z Czytelników zaproponowałby jakąś metodę pozwalającą na dalsze zwiększenie dokładności naszych pomiarów przy użyciu tej samej aparatury?

Uczestnicy Warsztatów bardzo serdecznie dziękują dr. Grzegorzowi Grabeckiemu i Instytutowi Fizyki PAN za umożliwienie samodzielnych badań i stałą pomoc przy ich przeprowadzaniu.

# Trzy równe różnice dwóch sześciątów

Aleksander GÓRSKI

Wielu matematyków interesowało zagadnienie dwóch równych różnic dwóch sześciątów, a w szczególności rozwiązania tego zagadnienia w liczbach całkowitych, ewentualnie wymiernych. Do najbardziej znanych rozwiązań należą wzory Ramanujana, Eulera i Bineta, a także wzór

$$[x(x^3 + 2y^3)]^3 - [y(2x^3 + y^3)]^3 = [x(x^3 - y^3)]^3 - [-y(x^3 - y^3)]^3.$$

Są nawet dwie równe sumy trzech bisześcianów, np.

$$3^6 + 19^6 + 22^6 = 10^6 + 15^6 + 23^6.$$

Można jednak zapytać, czy istnieją trzy równe różnice dwóch sześciątów, a jeśli tak, to czy ilość rozwiązań tego zagadnienia jest skończona, czy nie.

Wydźmy z tożsamości Gerardina, według której liczbę 1 możemy przedstawić na nieskończenie wiele sposobów:

$$1 = (9k^4)^3 + (1 + 9k^3)^3 - (9k^4 + 3k)^3.$$

Gdy za  $k$  podstawimy  $-k$ , to otrzymamy

$$1 = (9k^4)^3 + (1 - 9k^3)^3 - (9k^4 - 3k)^3.$$

Z porównania obu tych równości mamy

$$(9k^4 - 3k)^3 - (1 - 9k^3)^3 = (9k^4)^3 - 1 = (9k^4 + 3k)^3 - (1 + 9k^3)^3.$$

Wykonując z kolei podstawienie  $k = n/m$ , otrzymamy szukany wzór dający nam nieskończenie wiele trójek równych różnic dwóch sześciątów

$$(1) \quad (9n^4 - 3m^3n)^3 - (m^4 - 9mn^3)^3 = (9n^4)^3 - (m^4)^3 = (9n^4 + 3m^3n)^3 - (m^4 + 9mn^3)^3.$$

Powyższy wzór charakteryzuje się łatwymi do zauważenia własnościami:

1. Zmiana znaku na przeciwny jednego z parametrów  $m$  lub  $n$  powoduje jedynie zamianę rolami lewej i prawej różnicy sześciątów przy zachowaniu środkowej różnicy bez zmian.
2. Wszystkie trzy wyrażenia, które po podniesieniu do sześciątku stanowią odjemne, tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy  $3m^3n$ , a wszystkie trzy wyrażenia, które po podniesieniu do sześciątku stanowią odjemniki, tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy  $9mn^3$ .
3. Po podstawieniu  $m_1 = 3n$  oraz  $n_1 = m$  otrzymamy wzór na nieskończenie wiele trójek różnic dwóch sześciątów, w którym liczby podnoszone do sześciątku są 9-krotnością liczb podnoszonych do sześciątku ze wzoru (1). Takie rozwiązania nic istotnego do całokształtu zagadnienia nie wnoszą.

Zauważamy również, że środkowa różnica sześciątów  $(9n^4)^3 - (m^4)^3$  jako różnica kwadratów jest zawsze różnicą sześciątów liczb dodatnich. Nasuwa się pytanie, czy pozostałe dwie różnice sześciątów mogą być jednocześnie różnicami dwóch sześciątów dodatnich. Odrzucając rozwiązania z parametrami  $m$  lub  $n$  ujemnymi, które nic nowego poza przestawieniem prawej i lewej różnicy sześciątów nie wnoszą, widzimy, że i prawa różnica sześciątów jest różnicą sześciątów dodatnich. Po przeanalizowaniu odpowiednich nierówności okaże się, że otrzymamy trzy różnice sześciątów dodatnich, gdy zachodzi zależność

$$\sqrt[3]{3} \leq \frac{m}{n} \leq \sqrt[3]{9},$$

z tym, że lewą różnicę sześciątów ujemnych można uznać za przestawioną różnicę sześciątów dodatnich.

Tożsamość Gerardina nie jest jedynym sposobem wyrażenia liczby 1 za pomocą trzech sześciątów na nieskończenie wiele sposobów. Do podobnych wniosków dojdziemy, analizując tożsamość

$$1 = [3^3s^4(12^2s^6 - 5)]^3 - [3s(6^4s^9 + 2 \cdot 6^3s^6 + 3^3s^3 - 1)]^3 + (3^312^2s^9 + 3 \cdot 6^3s^6 - 9s^3 + 1)^3.$$

Tożsamość Ramanujana to wzór

$$p^3 - q^3 = r^3 - t^3$$

dla

$$p = 6a^2 - 4ab + 4b^2,$$

$$q = 4a^2 - 4ab + 6b^2,$$

$$r = 5a^2 - 5ab - 3b^2,$$

$$t = -3a^2 - 5ab + 5b^2,$$

Wzór Eulera i Bineta to z kolei wzór

$$p^3 - q^3 = r^3 - t^3$$

dla

$$p = 1 + (2b)^3 - (a - b)^3,$$

$$q = a + 3b - (a^2 + 3b^2)^2,$$

$$r = -1 + (2b)^3 + (a + b)^3,$$

$$t = -a + 3b + (a^2 + 3b^2)^2.$$

Przykładowo mamy dla

$$m = 1, n = 1$$

$$6^3 - (-8)^3 = 9^3 - 1^3 = 12^3 - 10^3,$$

$$m = 2, n = 1$$

$$-15^3 - (-2)^3 = 9^3 - 16^3 = 33^3 - 34^3,$$

$$m = 1, n = 2$$

$$138^3 - (-71)^3 = 144^3 - 1^3 = 150^3 - 73^3.$$

Na przykład mamy dla

$$m = 2, n = 1, m/n = 2:$$

$$-15^3 - (-2)^3 = 2^3 - 15^3 =$$

$$= 9^3 - 16^3 = 33^3 - 34^3$$

$$m = 5, n = 3, m/n = 1,67:$$

$$-396^3 - (-590)^3 = 590^3 - 396^3 =$$

$$= 729^3 - 625^3 = 1854^3 - 1840^3$$

Po podobnych rachunkach, jak poprzednio ( $s = t/u$ ), uzyskujemy kolejny wzór dający nieskończenie wiele trójek równych różnic dwóch sześciątów

$$(2) \quad \begin{aligned} & [u(u^9 + 9t^3u^6 + 3 \cdot 6^3t^6u^3 - 12^2 \cdot 3^3t^9)]^3 - [3t(6^4t^9 - 2 \cdot 6^3t^6u^3 + 3^3t^3u^6 + u^9)]^3 = \\ & = (u^{10})^3 - (3^3 \cdot 12^2 t^{10} - 5 \cdot 3^3 t^4 u^6)^3 = \\ & = [u(u^9 - 9t^3u^6 + 3 \cdot 6^3t^6u^3 + 12^2 \cdot 3^3t^9)]^3 - [3t(6^4t^9 + 2 \cdot 6^3t^6u^3 + 3^3t^3u^6 - u^9)]^3. \end{aligned}$$

Dla przykładu przy  $t = 1$  i  $u = 1$  mamy

$$-3230^3 - 2676^3 = 1^3 - 3753^3 = 4528^3 - 5262^3.$$

Jak łatwo zauważyć, również w przypadku tej tożsamości zmiana znaku jednego z parametrów powoduje jedynie zamianę rolami lewej i prawej różnicy sześciątów, nie mając wpływu na różnicę środkową, ale kolejne wyrażenia, które po podniesieniu do sześciątu tworzą odjemne czy też odjemniki, nie tworzą tu już ciągu arytmetycznego.

Ustalenie, czy i przy jakich warunkach uzyskamy z drugiego ze wzorów różnice dwóch dodatnich sześciątów, wykracza poza temat niniejszego artykułu ze względu na konieczność rozwiązywania skomplikowanych układów nierówności wyższych stopni i analizy bardzo dużych liczb występujących we wzorze (2). Z obu wzorów (1) i (2) wynika, że mamy nieskończenie wiele trójek równych różnic sześciątów liczb całkowitych i wymiernych. Podane wyżej wzory nie wyczerpują wszystkich możliwości. Mamy np. rozwiązanie w liczbach całkowitych nie wynikające z wyżej wymienionych wzorów

$$172^3 - 135^3 = 144^3 - 71^3 = 138^3 - (-1)^3.$$

To pozwala przypuszczać, że mogą istnieć także czwórki równych różnic dwóch sześciątów liczb całkowitych.

#### LITERATURA

- [1] W. Sierpiński, *Teoria liczb*, 1950.
- [2] W. Sierpiński, *Teoria liczb cz. 2*, 1959.
- [3] W. Sierpiński, *O rozwiązywaniu równań w liczbach całkowitych*, 1956.
- [4] L.E. Dickson, *History of the theory of numbers*, 1952.

## Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

Zadania te należy rozwiązać metodami czysto geometrycznymi.

**M 949.** Udowodnić równość

$$\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie na str. 12

**M 950.** Udowodnić równość

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}.$$

Rozwiązanie na str. 15

**M 951.** Udowodnić równość

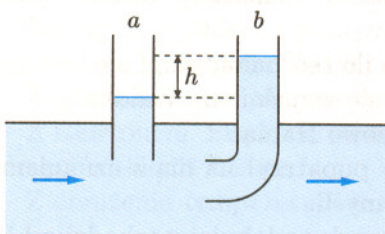
$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12} = 2.$$

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 545.** Przez poziomą rurę z dwoma pionowymi odpowietrzaczami przepływa płyn doskonały. Różnica między poziomami cieczy w rurkach  $a$  i  $b$  wynosi 10 cm. Średnice rurek są takie same. Wyznaczyć prędkość płynu w poziomej rurze.  
Rozwiązanie na str. 13

**F 546.** Na dnie pionowego cylindra o średnicy  $D = 0,5$  m znajduje się dziura o średnicy  $d = 1$  cm. Wyznaczyć zależność między szybkością obniżania się poziomu cieczy w naczyniu a wysokością tego poziomu.  
Rozwiązanie na str. 16

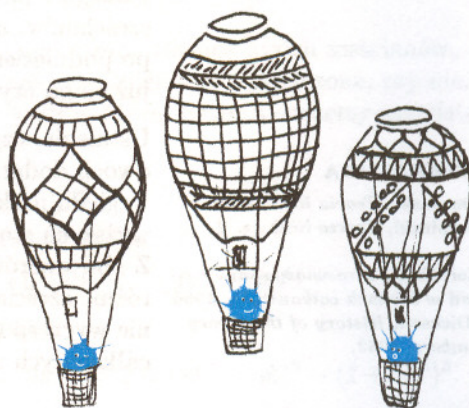






## Jak to możliwe?

- Z tym balonem to on robi nas po prostu w balona - stwierdził Jasiek.  
- Nie, to chyba prawda - pokręcił głową Jacek.  
- Przynajmniej w pewnym sensie - zgodziła się Hania Sieczkówna.  
- Zaraz, albo prawda, albo w pewnym sensie - przerwał Jasiek.  
- Niekoniecznie, u Waldka to może być koniunkcja - zauważył Jacek.  
- Ko... co? - zapytała Agatka.  
- Koniunkcja - Jacek popatrzył na siostrę z lekceważeniem - to znaczy...  
- To znaczy, że Waldek wierzy w to, co mówi...  
- Choć to nie musi być prawda? - wszedł Hani w słowo Jasiek.  
- Choć wyjaśnienie może być inne - dokończyła.  
- Nie może, tylko musi. Ja go znam. Albo łże jak pies (nie obrażając psa), albo wciska zatęchłe baniałuki. Zatęchłe, zasłyszane baniałuki - zaperzył się Jasiek.  
- Spokojnie, najpierw zbierzmy fakty - uspokoił przyjaciela Jacek.  
- Lecieli balonem, nisko, zapatrzyli się na krowy i już mieli...  
- ...wlecieć na drzewa, - wpadła Wojtkowi w słowo Agatka,  
- ...gdy pilot pociągnął za linkę - ciągnął Sieczko Junior,  
- ...taką od wypuszczania powietrza,  
- ...a balon grzecznie uniósł się...  
- ...akurat tyle, ile trzeba - zakończyła przekrzykiwaną relację Agatka.  
- A to jego wyjaśnienie? - upomniał się Jacek.  
- Otwarcie górnej kłapy powoduje ruch powietrza wewnątrz balonu w górę. Po zamknięciu kłapy powietrze uderza w nią i unosi balon. - rzetelnie powtórzył Jasiek - Zatęchłe baniałuki - skomentował.  
- A dlaczego to nie może być prawda? - zapytała Agatka.  
- Bo to jakby rozpędzanie łódki za pomocą dmuchania w żagiel - wyjaśnił Jasiek - zaraz... zaraz, zaraz!



- Co zaraz? Słownictwo ci się skończyło? - zirytował się Jacek, który nie mógł zebrać myśli w tym bałaganie.  
- Były tam drzewa - inteligentnie stwierdził Jasiek.  
- Były. Krowy też były - potwierdził Jacek.  
- Wiaterek wiał na drzewa.  
- Wiał w tę stronę, w którą leciał balon - przyznał po namyśle Jacek.  
- A co robi powietrze, gdy nie może lecieć prosto?  
- tryumfalnie zapytał Jasiek.  
- Unosi się w górę - powiedział zza drzwi Waldek. Wszedł do pokoju, nalał sobie bąbelków, wziął ostatniego pączka i dodał - Nic z tego. Tam było tylko jedno drzewko i to dość rachityczne.  
- Mówiłeś przecież, że cały szpaler?  
- Eee, może i szpaler, ale taki dość rzadki, jedno drzewko na hektar.  
- To może i resztę zmyśliłeś?  
- Ależ drogi kuzynie, koncesja prozaika co do środków wyrazu to jedno, a dbałość o istotne szczegóły drugie. Myślcie, myślcie - rzucił i wyszedł z pokoju.  
- No to już nic nie wiem - Jasiek opadł na oparcie fotela.  
- Zastanówmy się, o ile ten balon mógł się unieść i skąd wzięło się wyjaśnienie Waldka - zaproponowała rzeczowo Hania.  
Jacek po raz kolejny popatrzył na nią z uznaniem i postanowił zebrać myśli.  
- Wyjaśnienie najprawdopodobniej pochodzi od

pilota – powiedział – inaczej Waldek nie byłby taki pewny swego. Balon musiał się zachowywać w taki sposób, że takie wyjaśnienie się narzucało.

– To znaczy? – zapytał Jasek.

– Balon najprawdopodobniej rzeczywiście się trochę uniosł, a przynajmniej uniosł się kosz – głośno pomyślała Sieczkówna.

– A w momencie zamknięcia kłapy nastąpiło takie ... sssłuuP! – dodał Jacek.

– Jaki słup? – zainteresował się Wojtek.

– Taki dźwięk jak przy otwieraniu automatycznego parasola? – zapytała Agatka.

– Właśnie, coś takiego – zaferowany Jacek nie zauważył, że przyznaje rację siostrze, która uśmiechnęła się z chochlikowatą satysfakcją.

– A może to było tylko złudzenie – Jasek podniósł się z oparcia. – Taki błąd perspektywy. Wydawało im się, że zawadzą, a lecieli i tak powyżej.

– Ale wtedy pilot by się nie wyglupiał, chyba że chciał pasażerów trochę nastraszyć – Jacek pokręcił głową.

– Myślę, że Waldek może mieć trochę racji – zamyśliła się Hania.

– Jak to, ta bajeczka o wyciąganiu się za włosy z bagna ma być prawdziwa? – Jasek podskoczył na fotelu.

– No, niezupełnie. Ale otwarcie kłapy rzeczywiście powoduje ruch powietrza w balonie.

– No, ale balon nie może się tak po prostu unieść, bo przecież on ma bardzo dużą powierzchnię i to w każdą stronę.

– Interesujące rzeczy opowiadasz, „powierzchnię w każdą stronę”, ciekawe – Jacek skomentował słowa przyjaciela.

– No przecież wiecie, o co mi chodzi! Balon musi się poruszać razem z otaczającym go powietrzem.

– No właśnie – potwierdziła Hania – żeby balon w którąś stronę gwałtownie poleciał, to...

– ...trzeba usunąć powietrze z drogi – krzyknął Junior.

– Zaraz, zaraz. W jaki sposób? – wzruszył ramionami Jasek.

– Powietrze, które ulatuje z balonu, jest cieplejsze. Nad balonem tworzy się mały komin konwekcyjny, który zasysa powietrze z balonu.

– A jak zamknie się kłapę, to zasysany będzie cały balon – z uznaniem dodał Jacek.

– Jest tylko problem z jednym facetem – uprzedziła entuzjazm Hania.

– Z jakim facetem? – zdziwił się Jasek.

– Z Newtonem. Skąd bierze się energia potrzebna do podniesienia balonu?

– Z obniżenia temperatury powietrza? – zapytał Jacek.

– Nie wiem, chyba to nie wystarczy. Może tu energia potencjalna tak bardzo się nie zmienia, bo chociaż balon się unosi, to powietrze znad balonu opada? Nie jestem pewna.

– Przydałoby się zrobić doświadczenie – stwierdził Jacek.

– Właśnie – przytaknęła Sieczkówna – wydaje mi się, że wiem, dlaczego balon powinien się trochę unieść, ale z drugiej strony mam wrażenie, że ten ruch mógłby być minimalny. To trzeba sprawdzić.

– Tylko jak? – trzeźwo zauważył Jasek.

– A ja wiem, jak można zrobić sobie balon na ogrzane powietrze – dumnie stwierdził Wojtek.

– Potrzebne są dwa worki na śmieci, suszarka i żelazko.

– Phi, to każdy wie – obruszyła się Agatka.

– A skąd ten nagły przypływ wiedzy? – zdziwił się jej brat.

– Myślę, że z Festiwalu Nauki na Hożej – zaśmiała się Hania.

– A ty skąd wiesz, przecież nie byłaś z nami? – zdziwił się Junior.

– Znowu zapomniałeś, że ja wiem o tobie wszystko?

– Co mam zrobić z tymi workami? – Jasek zdążył już przynieść dwa worki, żelazko i suszarkę.

– Nie, te się nie nadają – stwierdziła Sieczkówna – za solidne.

– To muszą być takie cieniutkie – potwierdziła Agatka.

– A... takie, które do niczego się nie nadają? Mamy chyba gdzieś jedną taką paczkę – wyszedł, a po chwili wrócił z workami cienkimi jak bibułka.

– Te są świetne – stwierdził Wojtek. – Trzeba teraz jednemu uciąć dno, pozostały rękaw dokleić do drugiego worka za pomocą żelazka, rzecz jasna przez papier, i balon gotowy.

– Nie masz jeszcze jednej suszarki? – zapytała gospodarza Agatka.

– Jedna nie wystarczy? – zdziwił się Jasek.

– Gdyby była druga, to można by było zrobić zawody, czyj balon pierwszy doleci do sufitu. U ciebie w holu jest chyba z pięć metrów? Drugiej suszarki nie było, ale znalazł się stoper.

– A jednak doświadczenia z prawdziwym balonem nie da się uniknąć – stwierdziła Sieczkówna, gdy już skończyli zawody.

– Chyba nie powiesz, że masz do dyspozycji prawdziwy balon? – zapytał Jacek.

– Waldek nie dał nam dojść do słowa. Nasz były szczepowy jest baloniarzem. W tym roku ma przyjechać na obóz, a ja mam nadzieję uzyskać od rodziców pisemne pozwolenie na lot balonem...

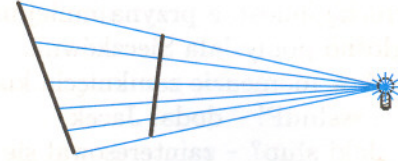
*Małą Deltę przygotował Piotr ZALEWSKI*

# 5

## To jest takie mądre, że można zgłupieć

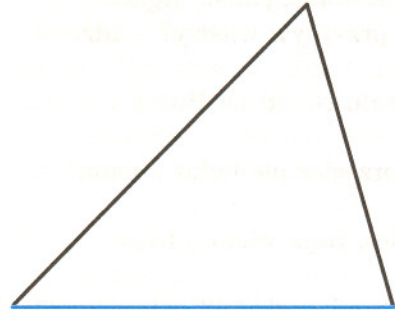
Matematyka jest skomplikowana. Jest zbyt skomplikowana. Jest tak skomplikowana, że wszystkiego za jej pomocą da się dowieść.

Można się jeszcze zgodzić, że każdy odcinek ma tyle samo punktów. Faktycznie, jeśli dwa odcinki ustawimy odpowiednio pod lampą (rys. 1), to promienie światła pokażą nam, dlaczego tak jest.



Rys. 1

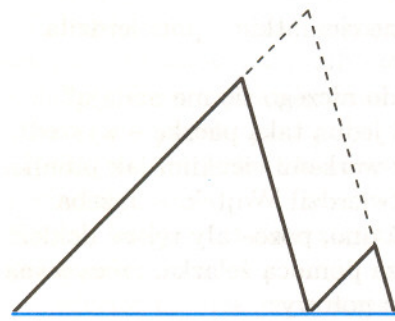
Ale już gdy weźmiemy pod uwagę szkolną definicję, która orzeka, iż *figura to zbiór punktów*, zobaczymy, że nie wszystko jest w porządku. Jeśli bowiem zbiory punktów w dwóch odcinkach są takie same, to dlaczego jeden z odcinków jest krótszy, a drugi dłuższy? Przecież niczego poza punktami w odcinkach podobno nie ma?



Rys. 2

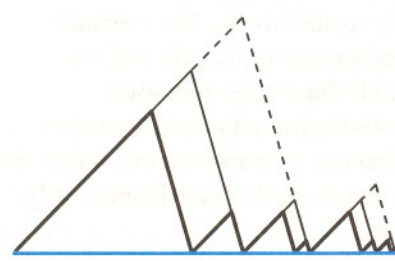
Można oczywiście powiedzieć, że tutaj było popełnione oszustwo: te zbiory są takie same, ale inaczej położone. To, że jeden odcinek jest dłuższy, a drugi krótszy, nie jest wcale bardziej dziwne, niż to, że rozciągnięta gumka ma inną długość od nierozciągniętej, mimo że obie składają się z tych samych cząsteczek gumy.

Gorzej, że można udowodnić, iż dowolne dwa odcinki nie tylko mają tyle samo punktów, ale i długość mają taką samą. Jeśli przyrównamy dwa odcinki o (na oko) różnej długości, czyli zetkniemy ich końce, to jeden będzie się musiał wygiąć, albo gdy jest sztywny – złamać (rys. 2). Wydaje się więc, że żadnych wątpliwości co do tego, że ich długości są różne, mieć nie można.



Rys. 3

Chociaż... Możemy przecież kawałki złamanego odcinka złamać tak samo jeszcze raz. Dalej różnica długości pozostaje bez zmian, ale odcinki są już bardziej sobie bliskie (rys. 3). To łammy dalej. I jeszcze dalej. I dalej. Dwa takie następne łamania pokazane są na rysunku 4. Bez trudu można zauważyć, że każdy punkt łamanego odcinka po pewnym czasie (właściwie to można obliczyć, po ilu złamaniach) będzie dwa razy bliżej odcinka, niż był poprzednio. Ale jeśli nasz zapal do łamania się nie wyczerpie, to po pewnym czasie będzie on znów co najmniej dwa razy bliżej. I znów dwa razy. I znów. Wobec tego w końcu wylądować musi na krótszym odcinku.



Rys. 4

W żadnym jednak kroku dłuższego odcinka nie skracaliśmy. Kolejne łamane miały dokładnie taką samą długość, jak początkowy dłuższy odcinek. Wobec tego, skoro cała łamana w końcu wylądowała na krótszym odcinku, to okazuje się, iż wrażenie, jakoby jeden odcinek był dłuższy, a drugi krótszy, jest tylko złudzeniem rozpowszechnianym przez tych nieuków, którzy nie opanowali dostatecznie dobrze matematyki.

No, ale z drugiej strony odcinki można odjąć (rys. 5). Skoro więc każdy odcinek ma (jak wykazaliśmy) taką samą długość, to każdy odcinek ma dwa razy większą długość od siebie. Wobec tego długość ta musi być równa 0. Choć podobno są jeszcze inne liczby spełniające równanie  $2x = x$ , mianowicie liczby nieskończone.



Rys. 5

No dobrze, ale co jest bardziej absurdalne: czy fakt, że wszystkie odcinki mają długość 0, czy też, że wszystkie mają długość nieskończoną?

Wątpliwościami podzielił się Marek KORDOS

## Ślepa precyzja

W naukach społecznych, medycynie, wszędzie tam, gdzie obiektem badań są ludzie, pojawia się problem rzetelności zbieranych informacji. Przy czym nie chodzi tu o nierzetelność samych badaczy, czy też niewłaściwe użycie instrumentów. Taka aberracja zdarza się wszędzie. Chodzi natomiast o trudność w wyeliminowaniu autosugestii, naturalnej skłonności do postrzegania świata nie takim, jakim on jest, tylko takim, jakim nam się wydaje, że jest.

Wydawać by się mogło, że nauki ścisłe wolne są od tego typu problemów. Okazuje się, że nie do końca. Dziedziną, w której „ludzkie chciejstwo” może całkowicie zniszczyć wysiłki eksperymentatora, są precyzyjne pomiary stałych fizycznych, zwłaszcza wtedy, gdy odpowiada im równie precyzyjne przewidywanie, kluczowe dla podstawowych teorii. Jeżeli prześledzi się historyczne zapisy takich pomiarów, to często daje się zaobserwować ich „płynięcie” w czasie, wykraczające poza publikowany margines błędu. Bierze się to stąd, że końcowy wynik można nieświadomie przesunąć w granicach błędu w „poprawniejszą” stronę. W związku z tym niektórzy stosują nawet (oczywiście nieoficjalnie) tzw. regułę  $\pi$ , według której publikowany błąd należy najpierw pomnożyć przez  $\pi$ , a dopiero potem (ewentualnie) zacząć się przejmować (lub cieszyć) niezgodnością pomiaru z przewidywaniami.

Sytuacja dojrzała wreszcie do zmiany. Stopniowo standardem w dziedzinie precyzyjnych pomiarów staje się takie prowadzenie analizy zbieranych danych, aby do końca nie było wiadomo, jaki jest wynik. Sposobów na osiągnięcie takiego masochistycznego samozadowolenia wymyślono już całkiem sporo.

Według jednego z takich schematów działa zespół badawczy *Muon ( $g - 2$ ) Collaboration* związany z eksperymentem oznaczonym mało mówiącym symbolem E821, a działającym w Brookhaven (USA) przy synchrotronie AGS (Alternating Gradient Synchrotron).

Głównym celem eksperymentu jest precyzyjny pomiar anomalnego momentu magnetycznego mionu. Choć brzmi to strasznie, to sama idea pomiaru jest dość prosta, a i sens fizyczny mierzonej wielkości nie taki trudny do zrozumienia.

Przypomnijmy sobie najpierw, że mion jest nietrwałą cząstką elementarną różniącą się od elektronu w zasadzie jedynie masą: jest około 200 razy masywniejszy. Dodajmy jeszcze dla porządku, że jak każda punktowa cząstka o połówkowym wewnętrznym momencie pędu (spinie) mion opisywany jest przez kwantowo-mechaniczne równanie Diraca. Z równania tego (dla cząstki naładowanej elektrycznie) wynika, że powinna ona mieć moment magnetyczny  $\mu_s = g \frac{e\hbar}{2mc} \frac{\hbar}{2}$ , gdzie  $m$  jest masą cząstki, a  $g = 2$  stosunkiem żyromagnetycznym. Wyjaśnienie empirycznego faktu, że stosunek żyromagnetyczny dla spinu ( $g = 2$ ) jest 2 razy większy niż dla orbitalnego momentu pędu ( $g_L = 1$ ), było jednym z pierwszych sukcesów relatywistycznej mechaniki kwantowej.

Dla nas jednak ważniejsze jest, że przewidywanie  $g = 2$  jest tylko pierwszym przybliżeniem. Wartość momentu magnetycznego należy poprawić, uwzględniając samooddziaływanie. Teorią, która pozwala na wyznaczenie takiej poprawki, jest kwantowa teoria pola.

W rachunkach samooddziaływanie przejawia się chmurą wirtualnych cząstek otaczających każdą cząstkę rzeczywistą. Porównanie wyliczonej wartości takiej poprawki z wartością zmierzoną pozwala na sprawdzenie, czy w wirtualnej chmurze nie brakuje przypadkiem jakiegoś wkładu. Wskazywałoby to na istnienie czegoś wykraczającego poza udokumentowany obraz mikroświata. Warto dodać, że wkład od wirtualnych ciężkich cząstek jest w pierwszym przybliżeniu proporcjonalny do kwadratu masy badanej cząstki. Dlatego warto „męczyć się” z nietrwałym i trudnym do wytworzenia mionem, bo jest on dużo masywniejszy od elektronu.

Sama (standardowa już) metoda pomiaru jest bardzo pomysłowa. Intensywna wiązka mionów jest wstrzykiwana do kołowego pierścienia akumulacyjnego o bardzo jednorodnym, prostopadłym do płaszczyzny pierścienia polu magnetycznym  $B$ . Ze względu na sposób produkcji miony są w naturalny sposób spolaryzowane: kierunek spinu jest zgodny z ich kierunkiem poruszania. Gdyby anomalny moment magnetyczny mionu  $a_\mu = (g - 2)/2$  był zerowy, to pole magnetyczne nie zmieniłoby początkowej polaryzacji. Ponieważ tak nie jest, więc spin wykonuje precesję wokół kierunku pędu z częstością  $\omega_a = \frac{e}{mc} a_\mu B$ . Jeżeli jeszcze mionom nada się tzw. magiczną wartość pędu  $p = \frac{mc}{\sqrt{a_\mu}}$ , to eliminuje się wkład do precesji od pola elektrycznego, które jest używane do ogniskowania wiązki. Prędkość ta przy okazji powoduje istotne relatywistyczne wydłużenie czasu życia mionu.

Teraz pozostaje „tylko” odpowiednio precyzyjnie zmierzyć częstość precesji  $\omega_a$  i natężenie pola magnetycznego  $B$ .

Częstość precesji wyznacza się, rejestrując elektrony pochodzące z rozpadu mionów. Ze względu na maksymalne łamanie parzystości w tym rozpadzie kierunek, w którym elektrony są wysyłane, jest maksymalnie skorelowany z kierunkiem spinu. Pole magnetyczne jest natomiast precyzyjnie monitorowane za pomocą czujników wykorzystujących jądrowy rezonans magnetyczny atomów wodoru.

Najważniejsze jest to, że te dwa pomiary są prowadzone przez dwa niezależne zespoły. Dopiero po zakończeniu całej wyrafinowanej analizy wyznacza się końcową wartość  $a_\mu$ . Nie ma sposobu, żeby niechący wynik „poprawić”.

Ostatnio opublikowana [1] wartość anomalnego momentu magnetycznego (anty)mionu wynosi

$$a_\mu = (11659202 \pm 16) \cdot 10^{-10}.$$

Różnica w stosunku do przewidywania teoretycznego

$$\Delta a_\mu = (43 \pm 16) \cdot 10^{-10}$$

pozwała na odrzucenie modelu standardowego oddziaływań fundamentalnych na poziomie ufności 99%!

Niezgodność ta może być powodem do radości. Wskazuje na rosnącą szansę bezpośredniego zaobserwowania czegoś nowego w przygotowywanych eksperymentach akceleratorowych. Sceptycy wołają jednak trochę poczekać. Eksperyment E821 ma niedługo zwiększyć dokładność jeszcze o czynnik  $\pi$ .

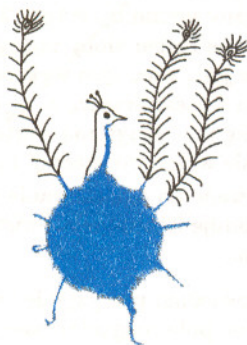
Piotr ZALEWSKI

[1] preprint hep-ex/0102017, z 8 lutego 2001 roku.

# Macierze $n$ -wymiarowe

Mirostław ŻWIRYN

Jest to skrót jednej z dwóch prac nagrodzonych srebrnym medalem na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2000 r.



Spróbujemy uogólnić pojęcie macierzy na dowolny wymiar będący liczbą naturalną. Cóż to właściwie znaczy? Otóż jedna z definicji podaje, że macierz o  $n$  wierszach i  $k$  kolumnach to funkcja dwóch zmiennych, której dziedziną jest iloczyn kartezjański zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  oraz zbioru  $\{1, 2, \dots, k\}$ , natomiast wartościami są liczby zespolone. Jeżeli teraz na tak zdefiniowaną macierz spojrzymy z geometrycznego punktu widzenia, to wyda nam się ona obiektem dwuwymiarowym. Powstaje myśl, by rozważać macierze trój-, cztero- i więcej wymiarowe. Przykładowo, macierz trójwymiarowa to zbiór elementów indeksowanych trzema liczbami. Do jednoznacznego określenia elementu takiej macierzy potrzeba trzech liczb: numeru wiersza, numeru kolumny i dodatkowo numeru trzeciej zmiennej, którą nazwałem głębią. Dla macierzy więcej wymiarowych z oczywistych względów wiersz został zastąpiony 1-ścianą, kolumna to 2-ściana itd. Macierz ma tyle wymiarów, ile ma różnych  $i$ -ścian. Zapiszmy teraz bardziej formalną definicję macierzy  $n$ -wymiarowej.

**Definicja.** Przyporządkujmy każdej  $n$ -tce uporządkowanej  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  liczb naturalnych, gdzie

$$1 < i_1 < k_1, \quad 1 < i_2 < k_2, \quad \dots, \quad 1 < i_n < k_n,$$

dowolną liczbę zespoloną. Otrzymujemy funkcję ( $n$  zmiennych) na zbiorze uporządkowanych  $n$ -tek zwaną macierzą  $n$ -wymiarową.

Dla tak zdefiniowanej macierzy  $n$ -wymiarowej można wprowadzić szereg pojęć, w prosty sposób uogólniając standardowe definicje dla zwykłych macierzy. W ten sposób można wprowadzić pojęcie równości macierzy, określić ich dodawanie, odejmowanie czy mnożenie przez skalar. Podajmy dla przykładu definicję transpozycji macierzy.

**Definicja.** Niech dana będzie macierz  $A = [a_{i_1, i_2, \dots, i_n}]$ , gdzie  $i_1 = 1, 2, \dots, k$ ,  $i_2 = 1, 2, \dots, k$ ,  $\dots$ ,  $i_n = 1, 2, \dots, k$ . Macierzą transponowaną macierzy  $A$  nazywamy macierz  $A^T = [b_{i_1, i_2, \dots, i_n}]$ , gdzie  $b_{i_1, i_2, \dots, i_n} = a_{i_n, i_{n-1}, \dots, i_1}$ .

Znacznie trudniejsze okazuje się zdefiniowanie analogii wyznacznika dla macierzy  $n$ -wymiarowych. W dalszym ciągu zajmować się będziemy tylko takimi macierzami  $A_k^n$ , dla których  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$ , czyli odpowiednikami macierzy kwadratowych. Pominiemy też przypadek  $n = k = 1$ . Zaczniemy od następującej definicji.

**Definicja.** Wyznacznikiem pierwotnym stopnia  $n$  macierzy  $A_k^n$ ,  $n \neq 0$ , nazywamy wyrażenie

$$\det A_k^n = \sum_{\alpha_i, i=1,2,\dots,n} (-1)^{J(\alpha_i)} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n_1}} a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n_2}} \dots a_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n_k}}$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie permutacje:

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} \alpha_{12} \dots \alpha_{1k} \\ &\alpha_{21} \alpha_{22} \dots \alpha_{2k} \\ &\dots \dots \dots \\ &\alpha_{n_1} \alpha_{n_2} \dots \alpha_{n_k} \end{aligned}$$

liczb  $1, 2, \dots, k$ , natomiast  $J(\alpha_i)$  jest ilością inwersji w  $i$ -tej permutacji, przy czym  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Zachodzi twierdzenie:

**Twierdzenie**

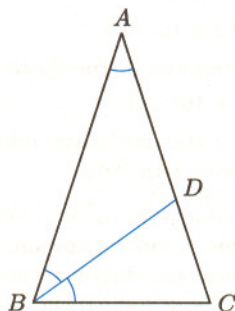
- (\*) Jeśli  $n$  jest nieparzyste, to  $\det A_k^n = 0$ ,
- (\*\*) Jeśli natomiast  $n$  jest parzyste, to istnieją takie macierze, że  $\det A_k^n \neq 0$ .

Powyższe twierdzenie stanowi podstawę do dobrego zdefiniowania wyznacznika dla macierzy wymiaru parzystego.

Pozostaje natomiast nierozwiązana kwestia określenia mnożenia macierzy  $n$ -wymiarowych. Gdyby to się udało, można byłoby uogólnić wiele ważnych twierdzeń z teorii zwykłych macierzy.

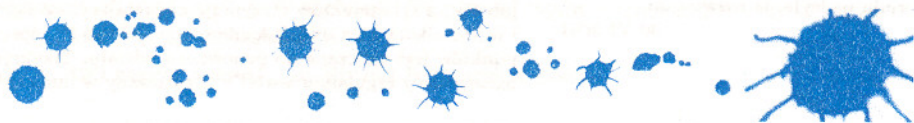


Rozwiązanie zadania M 949.  
Rozważmy trójkąt równoramienny  $ABC$  z kątami  $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$ .



Niech  $BD$  będzie dwusieczną kąta  $B$ . Wtedy  $BC = BD = AD$ . Załóżmy, że  $BC = 1$ . Z trójkątów  $ABD$  i  $BCD$  mamy  $AB = 2 \cos \frac{\pi}{5}$ ,  $CD = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$ . Równość  $AD = AB - CD$  daje tezę.

Na koniec pozwolę sobie na pewną spekulację. Badając macierze  $n$ -wymiarowe, zauważamy ich odmienne zachowanie dla wymiarów parzystych i nieparzystych (np. w zachowaniu wyznacznika pierwotnego). Jeśli pójdziemy dalej i macierze uważać będziemy za obiekty geometryczne, to nie jest wykluczone, że różnice w zachowaniu się wyznacznika będą mogły być wyjaśnione na podstawie własności samej przestrzeni. Pewne własności metryczne są przecież zależne od parzystości bądź nieparzystości wymiaru: tak jest np. ze wzorem na objętość kuli  $n$ -wymiarowej. Między innymi z tego względu uważam, że traktowanie macierzy jako obiektów geometrycznych może być istotne.



## Zbiory i „zbiory”

Jeśli zbiór to kolekcja, zgromadzenie pewnych obiektów (na przykład obdarzonych określoną własnością) w jedną całość, to rozpatrzmy kolekcję, gromadzącą wszystkie zbiory  $X$  o następującej, prostej do sformułowania własności:  $X \notin X$ . Jeśli ta kolekcja jest zbiorem  $Z$ , to sprawdzenie, czy  $Z$  ma rzeczoną własność, prowadzi do sprzeczności. Istotnie, gdy  $Z \notin Z$ , to  $Z$  spełnia warunek przynależności do  $Z$ , a więc  $Z \in Z$ . Jeśli zaś  $Z \in Z$ , to  $Z$  nie ma własności definiującej  $Z$ , zatem  $Z \notin Z$ . Tak więc  $Z$  jest kolekcją, która nie może być i nie jest zbiorem. Aby pozbyć się takich paradoksów, zaksjomatyzowano pojęcie zbioru.

Georg Cantor, matematyk, którego prace spowodowały narodziny teorii zbiorów (zwanej w Polsce teorią mnogości), udowodnił, że żaden zbiór nie ma dość elementów, by można było w sposób różnowartościowy każdemu podzbiorowi przypisać jeden element zbioru – na pewno nie wystarczy dla wszystkich podzbiorów. Owo twierdzenie Cantora ma ciekawe konsekwencje, wynika z niego w szczególności, że nie istnieje zbiór, którego elementami byłyby wszystkie zbiory. Inaczej mówiąc, nie istnieje żaden wielki nadzbiór, gromadzący w sobie *wszystkie* zbiory. Gdyby  $W$  był takim zbiorem, to należałby do niego każdy podzbiór zbioru  $W$ , bo każdy taki podzbiór jest przecież zbiorem, ale wtedy moglibyśmy każdemu podzbiorowi  $A$  zbioru  $W$  przypisać element  $W$ , mianowicie sam zbiór  $A$  – wbrew twierdzeniu Cantora. A więc kolekcja wszystkich zbiorów nie jest zbiorem. Co więcej, nie jest zbiorem nawet kolekcja wszystkich zbiorów jednoelementowych. Moglibyśmy przecież dla każdego zbioru  $A$  utworzyć jednoelementowy zbiór  $\{A\}$  (którego jedynym elementem jest zbiór  $A$ ) i potem – gdyby wszystkie zbiory jednoelementowe należały do jednego, wspólnego zbioru – wziąć sumę takich jednoelementowców (a na to teoria mnogości pozwala), a wtedy do takiej sumy należałby każdy zbiór – co jest przecież niemożliwe, jak przed chwilą widzieliśmy. Tak więc zbiorów jednoelementowych jest „za dużo”, by można je było zebrać w zbiór. Ale to już nie jest paradoks: to twierdzenie teorii mnogości.

Takie zbiory-niezbiory (powiedzmy, „zbiory”) spotyka się na tyle często, że pewnie warto coś z nimi zrobić, więc zrobiono. Wybrano rozwiązanie proste: zamiast pojęcia pierwotnego (czyli niedefiniowanego w teorii) „zbiór” wprowadzono pojęcie „klasa”, definiując zbiór jako taką klasę, która jest elementem innej klasy. W ten sposób „zbiór”  $W$  stał się obiektem legalnym, podobnie jak „zbiór”, do którego należą wszystkie zbiory. Po prostu owe „zbiory” są klasami, ale nie zbiorami (i nie mogą być elementami innej klasy).

Filatelisci badają znaczki pocztowe, klasyfikują je i opisują, przeciętny śmiertelnik używa ich do wysyłania listów. Przeciętny śmiertelnik-matematyk używa zbiorów i „zbiorów”, nie zastanawiając się nad ich klasyfikacją. I słusznie. Zamiast dzielić kolekcje na klasy i zbiory, można się umówić, że mówimy tylko o zbiorach, będących podzbiorem pewnego „wszechzbioru” (nazywanego niekiedy zbiorem uniwersalnym). Wtedy wystarczy zwykła, „bezklasowa” teoria mnogości. A filatelisci mogą rozwijać dalej swoje zainteresowania...

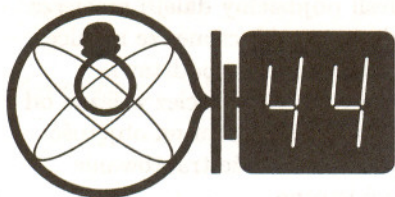
Jeśli  $A$  jest zbiorem, którego elementami są zbiory (taki zbiór nazywa się często *rodziną zbiorów*), to sumą rodziny  $A$  jest zbiór złożony z wszystkich tych i tylko tych elementów, które należą do choćby jednego zbioru z rodziny  $A$ .

**Rozwiązanie zadania F 545.**  
Różnica ciśnień w obu rurkach jest równa ciśnieniu hydrodynamicznemu przepływającej cieczy, czyli

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho gh.$$

Stąd

$$v = \sqrt{2gh} \approx \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 2001

**Skrót regulaminu**

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

**Zadania z fizyki nr 316, 317**

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

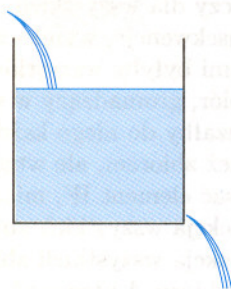
**316.** Wahadło Foucaulta zawieszono na linie o długości 10 m zostało odchyłone od pionu o 1,5 m i puszczono. Jeśli zdarzyło się to w Warszawie, to w jakiej odległości od swojego położenia równowagi przeleci środek masy wahadła?

**317.** W Kosmosie jest więcej neonu niż argonu, a jednak atmosfera Ziemi zawiera prawie 1% argonu i tylko 0,0018% neonu. Podać możliwe przyczyny tej rozbieżności.

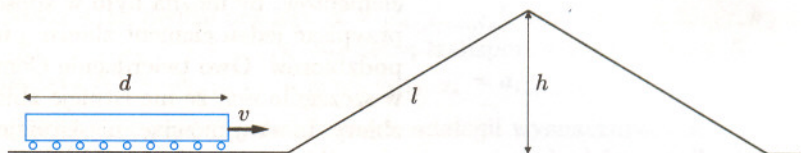
**Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/2000**

Przypominamy treść zadań:

**308.** Pociąg o długości  $d$  jedzie po torze, na którym występuje wzniesienie o kształcie „trójkątnym” (rys. 1), przy czym długość każdego z odcinków równi pochyłej wynosi  $l$ , a wysokość –  $h$ . Jeśli rozkład masy wzdłuż pociągu jest jednorodny, a opory ruchu można zaniedbać (i nie ma też napędu), to jaki warunek musi spełniać prędkość początkowa  $v$ , aby pociąg pokonał wzniesienie?



Rys. 2



Rys. 1

**309.** Do izolowanego termicznie zbiornika zawierającego wodę o masie  $M$  wpływa strumień wody o masie na jednostkę czasu równej  $\alpha$  i dokładnie miesza się z wodą w zbiorniku. Jednocześnie ze zbiornika wypływa stałym strumieniem taka sama ilość wody. Wykazać, że jeśli temperatura  $T$  wpływającej wody zależy harmonicznie od czasu z amplitudą  $T_0$  i częstotliwością  $\omega$  (tzn.  $T(t) = T_0 \sin \omega t + T_1$ ), to temperatura wody wypływającej także zależy harmonicznie od czasu. Obliczyć amplitudę jej zmian.

**308.** Należy oddzielnie rozpatrzyć dwa przypadki:

a) Gdy  $d \geq 2l$ , energia kinetyczna pociągu musi wystarczyć do wzniesienia odcinka pociągu o długości  $2l$  i masie  $2ml/d$  na wysokość  $(1/2)h$  (wartość średnia), czyli

b) Gdy  $d \leq 2l$ , środek masy pociągu musi się wznieść na wysokość  $\frac{l - d/4}{l}h$ , a stąd

$$\frac{mv^2}{2} \geq \frac{2ml}{d} g \frac{h}{2} \quad \text{albo} \quad \frac{v^2}{gh} \geq \frac{2l}{d} \quad \frac{v^2}{gh} \geq 2 - \frac{d}{2l}$$

**309.** Ze względu na mieszanie woda ma w całej objętości zbiornika jednakową temperaturę, równą temperaturze strumienia wypływającego – oznaczmy ją  $T'(t)$ . W ciągu czasu  $dt$  do zbiornika wpływa woda o masie  $\alpha dt$  i temperaturze  $T(t)$ , a bilans ciepła ma postać

$$\alpha dt(T - T') = MdT'$$

Rozwiążemy to równanie „od tyłu”, tzn. założymy, że  $T'(t) = T'_0 \sin \omega t + T_1$  (inaczej konieczna byłaby znajomość techniki rozwiązywania równań różniczkowych). Otrzymujemy

$$T = T' + \frac{M}{\alpha} \frac{dT'}{dt} = T_1 + T'_0 \sin \omega t + T'_0 \frac{M\omega}{\alpha} \cos \omega t$$

Sumę ostatnich dwóch wyrazów można przekształcić do postaci  $T_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , co jest zgodne z podaną zależnością  $T(t)$ . Przesunięcie fazy  $\varphi$  jest tu mało istotne – można je wyeliminować w funkcji  $T(t)$ , a za to wprowadzić w  $T'(t)$ . Amplituda  $T_0$  wynosi

$$T_0 = T'_0 \sqrt{1 + (M\omega/\alpha)^2}$$

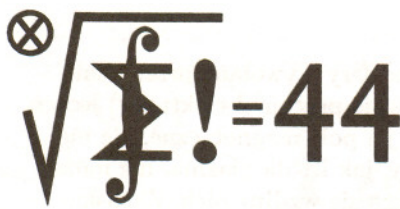
Dzieląc równanie przez pierwiastek, znajdujemy rozwiązanie – szukaną amplitudę  $T'_0$ .

**Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 304 ( $WT=2,40$ ), 305 ( $WT=4,00$ )  
zadań 306 ( $WT=1,40$ ) i 307 ( $WT=3,10$ )  
z numerów 10/2000 i 11/2000

Marek Wójcicki	- Szczecin	41,97
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	38,06
Aleksander Surma	- Myszków	35,38
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	35,06
Tomasz Rudny	- Warszawa	25,62
Jarosław Łazuka	- Warszawa	34,93
Jacek Piotrowski	- Rzeszów	15,34
Tomasz Wietecha	- Tarnów	15,29
Marian Łupieżowicz	- Zebrydowice	14,39

Pan Piotrowski powraca do Ligi po ponad 8 latach przerwy!



Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 2001

419. Wyznaczyć największą liczbę  $\alpha$  oraz najmniejszą liczbę  $\beta$  takie, że nierówność

$$\alpha \leq \frac{|PA| + |PB| + |PC| + |PD|}{|AB| + |AC| + |AD| + |BC| + |BD| + |CD|} \leq \beta$$

zachodzą dla każdego czworokąta  $ABCD$  i dla każdego punktu  $P$  leżącego wewnątrz tego czworokąta.

420. Liczby dodatnie  $a, b, c, d$  spełniają warunek  $a + b = c + d$ . Dowieść, że jeżeli nierówność  $a^n + b^n > c^n + d^n$  zachodzi dla pewnej liczby naturalnej  $n > 1$ , to zachodzi ona dla każdej liczby naturalnej  $n > 1$ .

Zadanie 420 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/2000

Przypominamy treść zadań:

411. Ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 56\}$  usunięto sześć liczb. Dowieść, że z pozostałego zbioru można wybrać czterowyrazowy ciąg  $(a, b, c, d)$  różnych liczb, w którym każdy wyraz (od drugiego począwszy) jest liczbą podzielną przez wyraz poprzedni.

412. Dla ustalonej liczby naturalnej  $n$  obliczyć minimalną wartość, jaką może mieć suma odwrotności długości wszystkich boków i przekątnych  $n$ -kąta wpisanego w okrąg o promieniu 1.

411. Przedstawiamy zbiór  $M = \{1, 2, 3, \dots, 56\}$  jako sumę pięciu zbiorów:

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\},$$

$$B = \{3, 6, 12, 24, 48\},$$

$$C = \{5, 10, 20, 40\},$$

$$D = \{7, 14, 28, 56\}$$

oraz

$$E = M \setminus (A \cup B \cup C \cup D).$$

Zbiory  $A, B, C, D$  liczą łącznie 19 elementów, zatem  $E$  jest zbiorem 37-elementowym. Po usunięciu sześciu liczb ze zbioru  $M$  pozostaje w nim pięćdziesiąt liczb, z których co najmniej trzynaście należy do sumy  $A \cup B \cup C \cup D$ . Co najmniej jeden ze zbiorów  $A, B, C, D$  zawiera cztery z tych trzynastu liczb; tworzą one ciąg  $(a, b, c, d)$  o wymaganej własności.

412. Wielokąt ma  $n$  boków,  $n$  przekątnych łączących co drugi wierzchołek itd.,  $n$  przekątnych łączących co  $k$ -ty wierzchołek, dla  $k \leq m = [(n-1)/2]$ ; gdy  $n$  jest liczbą parzystą, wielokąt ma ponadto  $n/2$  przekątnych „głównych” (łączących pary wierzchołków przeciwnych).

Ustalmy  $k \in \{1, \dots, m\}$  i weźmy pod uwagę przekątne łączące co  $k$ -ty wierzchołek (dla  $k=1$  są to boki wielokąta). Te przekątne wyznaczają  $n$  kątów środkowych  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Długość  $i$ -tej przekątnej wynosi  $2 \sin(\alpha_i/2)$ . Obszary tych kątów pokrywają  $k$ -krotnie kąt pełny wokół środka koła, więc  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 2k\pi$ .

Z nierówności Jensena dla funkcji  $f(x) = 1/\sin x$ , wypukłej w przedziale  $(0; \pi)$ , wynika dolne oszacowanie sumy odwrotności długości rozważanych przekątnych:

$$s_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 \sin(\alpha_i/2)} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \geq \frac{n}{2} \cdot f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{2}\right) = \frac{n}{2} \cdot f\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Biorąc pod uwagę wszystkie boki i przekątne, z wyjątkiem „głównych”, dostajemy oszacowanie dolne

$$s_1 + s_2 + \dots + s_m \geq \frac{n}{2} \sum_{k=1}^m f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sin(k\pi/n)}.$$

Każda z przekątnych głównych (dla  $n$  parzystego) jest nie dłuższa niż średnica koła, równa 2, więc suma odwrotności ich długości jest nie mniejsza niż  $(n/2) \cdot (1/2)$ , czyli  $n/4$ . Wobec tego pełna suma  $S$ , o której mowa w zadaniu, spełnia nierówność

$$S \geq \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{\sin(k\pi/n)} + \varepsilon \cdot \frac{n}{4}, \quad \text{gdzie } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ 0 & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

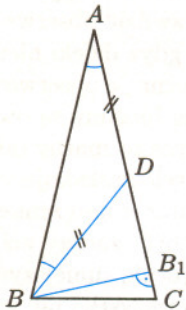
Równość w tym szacowaniu zachodzi dla  $n$ -kąta foremnego, a zatem napisana po prawej stronie liczba jest szukaną wartością minimalną.



#### Rozwiązanie zadania M 950.

Rozważmy trójkąt równoramienny  $ABC$

z kątami  $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}$ .



Niech  $BB_1 = 1$  będzie wysokością w trójkącie  $ABC$ ,  $D$  zaś takim punktem na  $AC$ , że  $AD = BD$ . Wtedy

$\angle BDC = \frac{2\pi}{7}$ . Z trójkątów  $ABB_1$ ,

$BDB_1, BCB_1$  mamy  $AB = AC = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}}$ ,

$BD = AD = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}}$ ,  $CD = BC = \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}}$ .

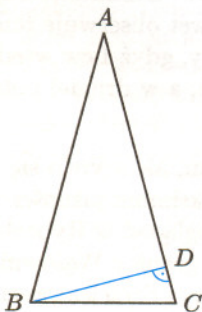
Z równości  $AC = AD + CD$  wynika teraz teza.



#### Rozwiązanie zadania M 951.

Rozważmy taki trójkąt

równoramienny  $ABC$ , że  $\angle A = \frac{\pi}{6}$ ,  
 $AB = AC$ .



Niech  $BD = 1$  będzie jego wysokością. Wtedy  $AB = AC = 2$ ,

$AD = \text{ctg } \frac{\pi}{6}$ ,  $CD = \text{ctg } \frac{5\pi}{12}$  i z równości

$AD + CD = AC$  wynika teza.





**Rozwiązanie zadania F 546.**

Oznaczmy przez  $S_1$  pole przekroju cylindra, przez  $v_1$  prędkość obniżania się poziomu cieczy. Niech  $S_2$  będzie przekrojem otworu na dnie, a  $v_2$  prędkością wypływania cieczy z otworu. Z prawa Bernoulliego mamy

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2,$$

a z zachowania objętości cieczy

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

Rozwiązując te dwa równania, otrzymujemy

$$v_1 = \frac{S_2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}.$$

Wiemy, że  $S_1 = \frac{\pi D^2}{2}$  i  $S_2 = \frac{\pi d^2}{2}$  i stąd

$$v_1 = \frac{d^2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}} \approx \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh},$$

ponieważ  $d^4 \ll D^4$ .

Zorza polarna to świecenie wysokich warstw atmosfery wywołane przez wiatr słoneczny, czyli szybkie cząstki naładowane (głównie protony i elektrony) lecące ze Słońca. Co prawda, chroni Ziemię przed nimi jej pole magnetyczne, ale nie do końca skutecznie. Mianowicie, wiatr słoneczny, jak każda plazma, nie może „wiać” w poprzek linii pola, łatwo natomiast ślizga się wzdłuż nich. Ziemskie pole magnetyczne przypomina pole zwykłego magnesu sztabkowego z biegunami magnetycznymi umieszczonymi w pobliżu biegunów geograficznych (tylko że przy biegunie północnym jest magnetyczny biegun S, a na Antarktydzie biegun N, ale to tutaj nieistotne). Wskutek takiego układu linii pola wiatr słoneczny nie może wnikać do atmosfery w strefie równikowej Ziemi, natomiast ześlizguje się łatwo do stref polarnych – dlatego tam zorze są na porządku dziennym, podczas gdy nigdy nie występują w strefie gorącej. W Polsce zorze są zjawiskiem bardzo rzadkim. Łatwo domyślić się, że zorze powinny pojawiać się częściej w okresach aktywności Słońca, gdy wiatr słoneczny przybiera na sile. I rzeczywiście, taką korelację się obserwuje.

Właściwie identyczny mechanizm powinien wywoływać zorze na innych planetach Układu Słonecznego, co oczywiście wypada sprawdzić obserwacyjnie. Możliwość tego sprawdzenia stworzył Teleskop Hubble’a, gdyż dzięki niemu widać zorze polarne na Jowiszu i Saturnie, co więcej – można je obserwować systematycznie. Okazało się, że na obu tych planetach oba bieguny są otoczone przez pierścienie świecącej atmosfery, czyli że ziemskie zorze to marny odbłask tego, co można by zobaczyć na tych planetach. Jest to o tyle zaskakujące, że natężenie pola magnetycznego Saturna jest porównywalne z natężeniem pola ziemskiego, a wiatr słoneczny w jego okolicach musi być rzadszy niż przy Ziemi. Co innego Jowisz: nic dziwnego, że przy jego 20-krotnie silniejszym polu magnetycznym zorze są tak intensywne. Niestety, to wszystko nie jest takie proste, bo zorze na Saturnie są skorelowane z aktywnością Słońca, a na Jowiszu nie. Jest tak, ponieważ świecenie jowiszowej atmosfery powodują cząstki pochodzące z Io, najaktywniejszego wulkanicznie globu w Układzie Słonecznym. To Io rozsiewa na swojej orbicie materię, którą następnie wchłania Jowisz za pośrednictwem swojego pola magnetycznego. A skutek wizualny jest ten sam.

*Tomasz KWAST*

**Kwiecień**

Najokazalszym gwiazdozbiorem wiosennego wieczornego nieba jest niewątpliwie Lew. Jego najjaśniejsza gwiazda (1,34 mag), Regulus, leży prawie na ekliptyce, przez co, wraz z trzema innymi jasnymi gwiazdami położonymi też w pobliżu ekliptyki, zaliczany był w Średniowieczu do tzw. gwiazd królewskich, wyznaczających pory roku. Ale Kopernik zdetronizował tę gwiazdę, nadając jej tę właśnie, używaną do dziś nazwę, która oznacza Małego Króla. W pobliżu gammy Lwa, jakby na szyi tradycyjnie rysowanego zwierzęcia, znajduje się radiant, czyli pozorne źródło listopadowego roju meteorów, Leonidów. Tak się jednak składa, że kto wieczorem w połowie listopada nawet obserwuje ten rój, to najprawdopodobniej nie będzie wiedział, że to Leonidy, gdyż Lew wtedy jest jeszcze pod horyzontem (wschodzi dopiero koło północy), a w drugiej połowie nocy na ogół się śpi.

Ostatniego dnia marca Wenus miała złączenie ze Słońcem, ale szybko się od niego oddała, a nawet na początku maja osiągnie maksimum jasności – w każdym razie w drugiej połowie kwietnia można ją oglądać w Rybach na wschodnim niebie przed wschodem Słońca. Mars jest na granicy Wężownika (który nie jest zaliczany do gwiazdozbiorów zodiakalnych) i Strzelca; wschodzi koło północy i jest przez cały czas nisko nad horyzontem. Jowisz i Saturn są w Byku i obie te planety widać krótko wieczorem na zachodzie. Pełnia Księżycy wypada 8 IV, now 23 IV. Żadnych jasnych gwiazd w kwietniu Księżyc nie zakrywa.

*T.K.*



**Sprostowanie**

Przepraszam za niezamierzone oszustwo, które ukazało się w  $\Gamma$ -limatiasie 36 (*Delta* 12/2000). Otóż własność 11 liczby **37** dotyczy trójkąta, w którym jedna z przyprostokątnych jest **siódmą**, a nie, jak napisałem, czwartą częścią obwodu. Czwartą część obwodu ma przyprostokątna trójkąta z własności 7.

*JWR*

(średnio!) argument przez  $3/4$ , czyli ma dosyć wyraźną tendencję malejącą. Ma też, oczywiście, losowe kaprysy, które jednak na dłuższą metę muszą zostać przewyżczone przez tendencję malejącą.

Czego więc oczekujemy po 1000 iteracji funkcji  $g$ ? Że przemnoży argument przez

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{1000} \approx 1,1515 \cdot 10^{-125},$$

czyli że skróci go o około 125 cyfr – statystycznie ubywa jedna cyfra co 8 iteracji.

Przewidywania te dobrze zgadzają się z doświadczeniem. Wylosowałem 1000 liczb nieparzystych z przedziału  $(10^{200}; 1,001 \cdot 10^{200})$ , a następnie do każdej z nich 1000 razy zastosowałem funkcję  $g$ . Najmniejsza z otrzymanych liczb miała 25 cyfr (kolejna 36), a największa 118. Po odrzuceniu 5% najmniejszych i 5% największych pozostałe mieściły się w przedziale 53–97 cyfr. Połowa liczb miała 67–85 cyfr, a średnia geometryczna wszystkich liczb wynosiła  $1,57 \cdot 10^{75}$ .

Wystarczy więc analogiczne rozumowanie zastosować do funkcji  $f$ .

Wartości funkcji  $f$  są niepodzielne przez 2, 3, 5 i 7. Rozważmy więc liczbę  $n$  niepodzielną przez żadną z powyższych liczb. Wówczas liczba  $23n + 1$  na pewno dzieli się przez 2, przez 3 dzieli się z prawdopodobieństwem  $1/2$ , przez 5 z  $1/4$ , przez 7 z  $1/6$ . Weźmy pod uwagę siódemkę. Liczba  $23n + 1$  dzieli się przez 7 z prawdopodobieństwem  $1/6$ , po raz drugi podzieli się przez 7 z prawdopodobieństwem  $1/42$ , po raz trzeci z  $1/294$  itd. Średnio oczekujemy podzielności przez 7 w potędze

$$\frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \frac{1}{343} + \dots\right) = \frac{7}{36}.$$

Podobnie oczekujemy, że operacja  $f$  wykona  $5/16$  dzielenia przez 5,  $3/4$  dzielenia przez 3 i 2 dzielenia przez 2.

Należy więc oczekiwać, że wykonanie operacji  $f$  średnio mnoży argument przez

$$\frac{23}{2^2 \cdot 3^{3/4} \cdot 5^{5/16} \cdot 7^{7/36}} \approx 1,0449,$$

co oznacza tendencję do przyrostu jednej cyfry co około 52,427 iteracji funkcji  $f$ . Po 15,6 milionach iteracji ten efekt powinien więc dać przyrost rzędu 300 tysięcy cyfr!!! Powinien więc zdominować wszelkie lokalne wahania. Po wielu milionach iteracji ciąg, o ile od razu nie wpadł w jakiś cykl, powinien zawędrować w setki tysięcy cyfr!!!

**DLACZEGO** więc tego nie zrobił?

**DLACZEGO?**

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (24')

*Wyjaśnienie oszustwa (24):*

Nie jest prawdą, że sześcianiki w przeciwległych narożach mają ten sam kolor – mają różne kolory! Tak więc usuwając przeciwległe naroża, pozostawiamy 255 sześcianików białych i tyleż czarnych. Wnikliwy Czytelnik bez trudu znajdzie sposób podziału danej figury na prostopadłościany  $1 \times 1 \times 2$ .

JWR

## DLACZEGO? (3)

Aby przeanalizować zachowanie ciągu, podanego w poprzednim  $\Gamma$ -limatiasie, zaczniemy od analizy ciągów skonstruowanych podobnie, ale znacznie prościej.

Mam tu na myśli ciągi związane z problemem Collatza znanym potocznie jako problem  $3n + 1$ . Znacie ten problem? Jak znacie, to poczytajcie.

Niech funkcja  $g$  będzie zdefiniowana jak następuje. Aby otrzymać liczbę  $g(n)$ , dzielimy liczbę  $3n + 1$  przez największą potęgę dwójki, przez jaką się da. Do dziś nierozstrzygnięta hipoteza przewiduje, że zaczynając od dowolnej liczby  $n$  i iterując funkcję  $g$ , zawsze dojdziemy do jedynki. Innymi słowy, hipoteza ta głosi, że ciąg iteracji nie trafi na cykl złożony z liczb większych od 1 ani nie ucieknie do nieskończoności.

Hipoteza taka na pewno nie zachodzi dla ciągów będących iteracjami funkcji  $f$  opisanej przed dwoma miesiącami, gdyż znajdujemy 10-elementowy cykl jej iteracji: 47, 541, 1037, 5963, 2743, 701, 4031, 46357, 4231, 331, 47.

Trudno wyrobić sobie intuicyjny pogląd na istnienie lub nieistnienie takich cykli. Ale dobra intuicja może pomóc nam ocenić, czy ciąg iteracji ma tendencję rosnącą czy malejącą.

Przyjrzyjmy się funkcji  $g$  związanej z ciągami „ $3n + 1$ ”. Interesuje nas zmiana wielkości liczby po wykonaniu operacji  $g$ . Co robi ta funkcja z liczbą  $n$ ? Po pierwsze mnoży ją przez 3. Tym, że dodaje 1, nie będziemy sobie zawracać głowy, jeśli interesuje nas przypadek dużych liczb  $n$ . Jeśli  $n$  jest wartością funkcji  $g$ , a tak jest, kiedy analizujemy wielokrotne iteracje funkcji  $g$ , to jest liczbą nieparzystą, zatem liczba  $3n + 1$  jest parzysta. Funkcja  $g$  na pewno podzieli ją przez 2. Nie mamy teraz najmniejszych przesłanek, aby rozstrzygać co do parzystości liczby  $(3n + 1)/2$ , możemy więc przyjąć (intuicja!), że będzie ona parzysta z prawdopodobieństwem  $1/2$ . Wtedy funkcja  $g$  podzieli ją przez 2 i otrzymamy znowu liczbę parzystą z prawdopodobieństwem  $1/2$ , więc kolejne (trzecie) dzielenie przez 2 będzie miało miejsce w  $1/4$  przypadków. A z prawdopodobieństwem  $1/8$  będzie miało miejsce także czwarte dzielenie przez 2. Oczywiście słowo „prawdopodobieństwo” nie nadajemy tu ścisłego sensu, więc proszę nie pytać o przestrzeń zdarzeń elementarnych.

Podsumujemy: funkcja  $g$  mnoży nieparzysty argument przez 3, na pewno dzieli wynik przez 2, w  $1/2$  przypadków jeszcze raz przez 2, w  $1/4$  jeszcze raz itd. Oczekujemy więc średnio

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

dzieleni przez 2. Oczekiwać należy, że funkcja  $g$  mnoży