



## SPIS TREŚCI NUMERU 3 (322)

Dlaczego na podium  
są zawsze trzy miejsca?  
*Jerzy Tyszkiewicz*

Zadania

Zabawy z kalkulatorem (II)  
*Piotr Hajłasz*

„Zespolone” kongruencje  
kwadratowe

Konkurs rozwiązywania zadań  
– Festiwal Nauki 2000

Mała Delta

Hipoteza, twierdzenie,  
dowód, kontrprzykład  
*Marek Kordos*

Aktualności  
(nie tylko) fizyczne

Obrót na płaszczyźnie  
*Piotr Sulich*

Klub 44

Patrz w niebo

Marzec

Gammalimatias

**W następnym numerze:**

Kwantowy efekt Halla

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*

Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim  
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delty*  
można znaleźć w portalu Eduseek  
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 3 zł**

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,  
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.  
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

str. 1 Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
– wiceprzewodniczący

str. 3 Krzysztof Ciesielski  
Jan A. Gaj  
Piotr Goldstein

str. 4 Andrzej Hryniewicz  
Wiesław A. Kamiński  
Marta Kicińska-Habior

str. 6 Krzysztof Maślanka  
Janusz Matkowski  
Andrzej Mąkowski  
Zdzisław Pogoda

str. 7 Michał Różyczka  
Konrad Rudnicki

str. 8 Grzegorz Sitarski  
Andrzej Woszczyk  
Eligiusz Złotkiewicz

str. 9 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol  
Krzysztof Biesaga  
Ewa Czuchry  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Anna Ludwicka  
Anna Rudnik  
Witold Sadowski  
Joanna Udalska  
Anna Wojtyra  
Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa  
tel. 853-59-61  
BARTOL@MIMUW.EDU.PL  
Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Wydrukowano  
w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.  
w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

str.11 01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres  
prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.**  
str.12 Cena jednego numeru w 2001 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie  
okresu prenumeraty.

str.14 W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)  
cena numeru w 2001 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą  
str.16 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

str.16 **Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS  
funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

str.17 Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 2001 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe  
„Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty +  
rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane  
od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.  
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto:  
Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela  
„RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana  
Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax:  
5328-732, internet: [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl), e-mail: [prenumerata@okdp.ruch.com.pl](mailto:prenumerata@okdp.ruch.com.pl)
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
 

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Numerzy archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.



# Dlaczego na podium są zawsze trzy miejsca?

Jerzy TYSZKIEWICZ

Całkiem często zdarza się w sporcie następująca sytuacja: kilka drużyn rozgrywa turniej metodą „każdy z każdym”. I wówczas pojawia się kłopot: oto z grupy eliminacyjnej awansuje jedna drużyna, a tymczasem tabelka z wynikami meczów wygląda następująco:

A	×		
B	0	×	
C	1	0	×
	A	B	C

czyli B przegrała z A, a C wygrała z A i przegrała z B. W takiej sytuacji trudno jest wskazać tę drużynę, która powinna awansować, bo jakkolwiek byśmy ją wybrali, wśród tych nie awansujących jest drużyna jednoznacznie od niej lepsza. Różne są sposoby wybrnięcia z takiego kłopotu. Czasem rozpatruje się liczbę zdobytych bramek, czasem liczbę straconych, czasem różnicę między tymi liczbami; w odwodzie jest jeszcze zawsze wyjście ostateczne: losowanie.

Wyobraźmy sobie, że chcemy z kilku graczy, po rozegraniu turnieju, znowu metodą „każdy z każdym”, wyłonić dwóch najlepszych. Czy może się trafić podobny problem jak poprzednio: niezależnie od wyboru zwycięzców, jest wśród pozostałych taki pechowiec, który z nimi oboma wygrał? (Słowo pechowiec jest w takiej sytuacji chyba całkowicie usprawiedliwione: wygrał z dwoma najlepszymi, a sam nagrody nie dostał.)

A gdybyśmy mieli wybrać trzech zwycięzców? Albo, ogólnie,  $k$  najlepszych?

Żeby dokładnie zrozumieć, o co pytamy, umówmy się, że wyniki turnieju rozegranego przez  $n > 1$  graczy  $A_1, A_2, \dots, A_n$  zapisujemy w postaci tabelki podobnej, jak poprzednio, gdzie kropki oznaczają 0 lub 1.

$A_1$	×			
$A_2$	·	×		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$A_n$	·	·	...	×
	$A_1$	$A_2$	...	$A_n$

To, co nam wyszło, matematycy nazywają *turniejem*: jest to zbiór (zawsze skończony)  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  elementów zwanych *graczami*, oraz relacja *zwycięzania* między graczami spełniająca warunki: żaden gracz nie jest w relacji z samym sobą, a dla dowolnych dwóch różnych graczy  $A, B$  dokładnie jeden z nich zwycięża drugiego. Właśnie ta relacja jest opisana naszą tabelką. 1 w  $j$ -tym wierszu i  $i$ -tej kolumnie oznacza, że gracz  $A_j$  zwycięża gracza  $A_i$ , a 0 w tym samym miejscu oznacza, że gracz  $A_i$  zwycięża gracza  $A_j$ .

Mówimy, że turniej  $T$  ma własność  $W_k$ , gdy dla każdego podzbioru  $k$  jego graczy istnieje inny gracz, który zwycięża każdego w tym  $k$ -elementowym podzbiore. Nasz turniej z drużynami  $A, B$  i  $C$  ma własność  $W_1$ .

Chcemy wiedzieć, czy dla każdego naturalnego  $k$  istnieje turniej o własności  $W_k$ . Jest to pytanie, które w 1962 roku zadał sobie Kurt Schütte. Znalazł on, oprócz przykładu turnieju o własności  $W_1$ , także turniej, mający własność  $W_2$ , na pytanie w całej ogólności jednak nie umiał odpowiedzieć. Zapytał więc o to Paula Erdősa.

Jeszcze tego samego dnia Erdős znał już rozwiązanie: tak, takie turnieje istnieją. Jego dowód był niezwykle pomysłowy i elegancki: jeżeli wyjściowa liczba graczy jest dostatecznie duża (w zależności od wybranego  $k$ ), a wyniki gier ustalone

Artykuł ten dedykuję  
Lidii Korzeniewskiej i Robertowi  
Hajłaszowi, moim szkolnym  
nauczycielom matematyki.



Oczywiście, jeśli turniej ma własność  $W_k$ , to dla dowolnego  $l < k$  ma własność  $W_l$ .

Kurt Schütte (1909–1998), niemiecki logik i matematyk, był doktorantem Davida Hilberta.



losowo (np. przez rzut symetryczną monetą), to szansa, że tak powstały turniej ma własność  $W_k$ , jest dodatnia. Wynika z tego, że można tak dobrać wyniki gier, aby turniej miał tę własność, bo gdyby to było niemożliwe, to prawdopodobieństwo wylosowania takiego turnieju byłoby oczywiście 0. Dowód jest króciutki, a rachunki nietrudne.

Niech  $n$  będzie liczbą graczy w turnieju. Jak powiedzieliśmy, wyniki losujemy, rzucając symetryczną monetą, a rzuty są dla różnych gier niezależne. Będziemy szacować prawdopodobieństwo tego, że wylosowany tym sposobem turniej *nie ma* własności  $W_k$ . Po pierwsze, dla dowolnych, ale ustalonych  $k$  graczy zdarzenie polegające na tym, że pewien ustalony gracz spośród pozostałych *nie* wygra ze wszystkimi  $k$  poprzednimi, ma prawdopodobieństwo  $1 - 2^{-k}$ . Ponieważ wszystkie zdarzenia tej postaci, różniące się wyborem tego dodatkowego gracza, są niezależne, więc prawdopodobieństwo zdarzenia, że tych ustalonych  $k$  graczy nie zostanie pokonanych przez *żadnego* z graczy pozostałych, jest iloczynem prawdopodobieństw i wynosi  $(1 - 2^{-k})^{n-k}$ . W końcu,

zdarzenie, że wylosowany turniej *nie ma* własności  $W_k$ , jest sumą wszystkich zdarzeń, że *jakiś*  $k$  graczy nie zostało jednocześnie pokonanych przez jednego gracza. Ponieważ zawsze prawdopodobieństwo sumy zdarzeń nie jest większe niż suma ich prawdopodobieństw

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_m) \leq P(A_1) + \dots + P(A_m),$$

to prawdopodobieństwo, że wylosowany turniej *nie ma* własności  $W_k$ , nie przekracza  $\binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^{n-k}$ . Jak łatwo sprawdzić (np. używając kryterium d'Alemberta), ten ostatni ciąg jest zbieżny do 0 przy  $n \rightarrow \infty$ , a co za tym idzie, dla dużych  $n$  prawdopodobieństwo wylosowania turnieju o własności  $W_k$  jest dodatnie.

Czy to już pełnia szczęścia? Nie całkiem. Ludzie mają to do siebie, że zwykle nie zadowolają się świadomością, że coś *jest*, tylko chcą to *zobaczyć*. A tego pragnienia dowód Erdősa nie realizuje. Oczywiście, można wziąć niezbędną liczbę graczy i rzucać monetą w celu ustalenia wyników gier. Okazuje się, że w dowodzie Erdősa wystarcza  $\lceil 2^k k(k \ln 2 + 2 \ln k) \rceil$  graczy, co dla  $k = 3$  wynosi 103, więc trzeba wykonać  $\binom{103}{2} = 5253$  rzuty. Mamy wówczas sporą szansę, że powstały turniej będzie miał własność  $W_3$ . Jednak sprawdzenie, czy jest tak na pewno, jest niesłychanie pracochłonne (a można przecież też mieć pecha w losowaniu...). Samych trójelementowych zbiorów graczy jest  $\binom{103}{3} = 176\,851$ . Losowanie i sprawdzanie można wprawdzie powierzyć komputerowi, ale dla  $k = 4$  nawet on będzie w opałach, a dla  $k = 5$  nie da już sobie rady.

Niewierni Tomasz matematyki szukali więc metody, by takie turnieje *konstruować* raczej, niż tylko dowodzić ich istnienia. Taka właśnie konstrukcja została znaleziona przez Ronalda Grahama i Joela Spencera w 1971 roku. Niestety, zatraciła ona całkowicie elementarność dowodu Erdősa. Dość powiedzieć, że twierzeń niezbędnych do udowodnienia, iż konstruowane turnieje mają istotnie własność  $W_k$ , nie zna nawet większość zawodowych matematyków, tak są specjalistyczne.

Autor tego artykułu znalazł jednak niedawno całkiem prostą konstrukcję turniejów o własności  $W_k$ , którą zaraz tu opiszemy.

Zauważmy, że dla tego celu wystarczy podać operację, która dany turniej  $T$  o własności  $W_k$  przekształci w nowy turniej  $T'$  o własności  $W_{k'}$ , gdzie  $k' > k$ . Wtedy, zaczynając od jakiegoś ustalonego turnieju  $T$  o własności, powiedzmy,  $W_2$ , turnieje  $T, T', T'', T''', \dots$  będą miały własność  $W_k$  z coraz to większym  $k$ . Kontynuując ten ciąg dostatecznie daleko, można wtedy uzyskać turniej z własnością  $W_k$  dla dowolnie dużego  $k$ .

Teraz opiszemy taką metodę przeróbki turnieju  $T$ . Zawodnikami turnieju  $T'$  będą uporządkowane *drużyny*, każda składająca się z 3 graczy turnieju  $T$ . Uporządkowanie oznacza, że kolejność graczy w drużynie jest istotna, np. na nasze potrzeby drużyny  $(A, B, C)$  i  $(C, B, A)$  będą różne. Mecz takich drużyn odbywa się następująco:

- Pierwszy gracz pierwszej drużyny gra z pierwszym graczem drugiej drużyny.
- Drugi gracz pierwszej drużyny gra z drugim graczem drugiej drużyny.
- Trzeci gracz pierwszej drużyny gra z trzecim graczem drugiej drużyny.
- Wyniki gier brane są z turnieju  $T$ , a wygrywa ta drużyna, która ma więcej zwycięstw indywidualnych.

Te zasady nie wystarczają do rozstrzygnięcia każdego meczu. Na przykład nie wiadomo, jaki powinien być wynik spotkania drużyn  $(A, B, C)$  i  $(B, A, C)$ . Okazuje się jednak, że niezależnie od tego, jak potraktujemy takie wątpliwe przypadki, jeśli tylko turniej  $T$  ma własność  $W_k$  z  $k > 1$ , to turniej  $T'$  ma własność  $W_{k'}$ , gdzie  $k' = \lfloor 3k/2 \rfloor > k$ .

$\lceil x \rceil$  oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od  $x$ .

$\lfloor x \rfloor$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od  $x$ .





Przekonajmy się o tym. Niech więc  $(A_1, B_1, C_1), \dots, (A_{\lfloor 3k/2 \rfloor}, B_{\lfloor 3k/2 \rfloor}, C_{\lfloor 3k/2 \rfloor})$  będą dowolnymi drużynami w turnieju  $T'$ . Zbiory

$$\{A_1, A_2, \dots, A_k\}, \\ \{B_{\lfloor k/2 \rfloor + 1}, B_{\lfloor k/2 \rfloor + 2}, \dots, B_{\lfloor 3k/2 \rfloor}\}, \\ \{C_1, C_2, \dots, C_{\lfloor k/2 \rfloor}, C_{k+1}, C_{k+2}, \dots, C_{\lfloor 3k/2 \rfloor}\}$$

składają się z co najwyżej  $k$  graczy każdy. Istnieją więc gracze  $A', B', C'$ , wygrywający ze wszystkimi graczami z odpowiednich zbiorów. Jak łatwo sprawdzić, zespół  $(A', B', C')$  wygrywa mecz z każdą z wyjściowych drużyn, bo uzyskuje zawsze co najmniej dwa zwycięstwa indywidualne. I to już koniec dowodu poprawności naszej konstrukcji. Twierdzenie Erdősa zostało wykazane.

Ale, ale: dlaczego podium ma zawsze trzy miejsca? To całkiem proste: najmniejszy turniej, który ma własność  $W_2$ , liczy tylko 7 graczy (wiedział to już Schütte), czyli przy dwumiejscowym podium w wielu ligach mogłyby się zdarzać fatalne sytuacje, że pogromca wszystkich medalistów sam medalu nie ma. Tymczasem, jak wykazali Esther i George Szekeres, każdy turniej o własności  $W_3$  liczyć musi co najmniej 19 graczy (i tyłu ich wystarczy). Teraz wszystko jest jasne: oto dlaczego na podium są zawsze trzy miejsca, a ligi we wszelkich dyscyplinach liczą na ogół nie więcej niż 18 zespołów!

Należy tu wspomnieć o liczbie graczy, która jest niezbędna dla uzyskania własności  $W_k$ . Okazuje się, że niekonstruktywny dowód Erdősa jest najoszczędniejszy, dowód przedstawiony w tym artykule jest najrozrzutniejszy, zaś konstrukcja Grahama i Spencera lokuje się pośrodku.

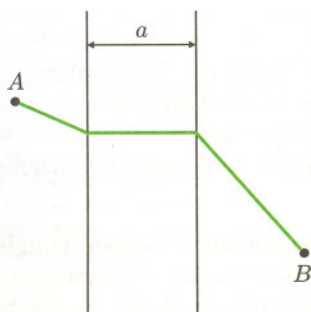
Osobom zainteresowanym innymi niekonstruktywnymi dowodami istnienia skończonych obiektów można polecić książkę Zbigniewa Palki i Andrzeja Rucińskiego *Niekonstruktywne metody matematyki dyskretnej*, WNT 1996.



## Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

Pamiętacie zapewne zadanie pod tytułem „Jedzie Arab na wielbłądzie przez pustynię, chce dotrzeć na imprezę do najbliższej oazy, ale przedtem chce jeszcze umyć zęby w rzece. Jaką drogę ma obrać, żeby było najkrócej?”. Typowe zadanko do zabyśnięcia na szkolnym party. W tym miesiącu więcej materiału do zaimponowania ładnym koleżankom z klasy!



**M 946.** Na płaszczyźnie dane są dwa miasta  $A$  i  $B$ , które leżą po różnych stronach rzeki o szerokości  $a$  (linie brzegowe są prostymi równoległymi). Gdzie trzeba wybudować most (prostopadły do linii brzegowych), aby droga od  $A$  do  $B$  przez ten most była najkrótsza (rysunek obok)?

Rozwiązanie na str. 13

**M 947.** Wykazać, że dowolny czworokąt wpisany w kwadrat  $PQRS$  o boku 1 (po jednym wierzchołku na każdym boku) ma obwód nie mniejszy niż  $2\sqrt{2}$ .  
Rozwiązanie na str. 7

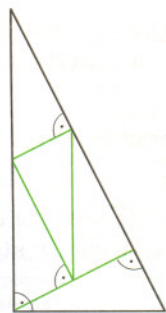
**M 948.** Wewnątrz trójkąta  $ABC$  dane są dwa różne punkty  $M$  i  $N$ . Znaleźć najkrótszą drogę od  $M$  do  $N$ , która ma wspólne punkty kolejno z bokami  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$ .

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 543.** Promień  $r_0$  koła lokomotywy jest równy 1 m w temperaturze  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . Wyznaczyć różnicę w liczbie obrotów koła latem w temperaturze  $t_1 = 25^\circ\text{C}$  i zimą w temperaturze  $t_2 = -25^\circ\text{C}$  na drodze  $l = 1000$  km (współczynnik rozszerzalności cieplnej  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}/\text{K}$ ).  
Rozwiązanie na str. 13

**F 544.** O ile opóźni się na dobę zegar ścienny, który został wyregulowany w temperaturze  $t_1 = 15^\circ\text{C}$ , jeśli umieścić go w pokoju o temperaturze  $t_2 = 30^\circ\text{C}$ . Wahadło zegara ma długość  $l = 0,5$  m (w temperaturze  $t_0$ ) i wykonane jest z mosiądzu ( $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}/\text{K}$ ).  
Rozwiązanie na str. 13



Rysunek 1.

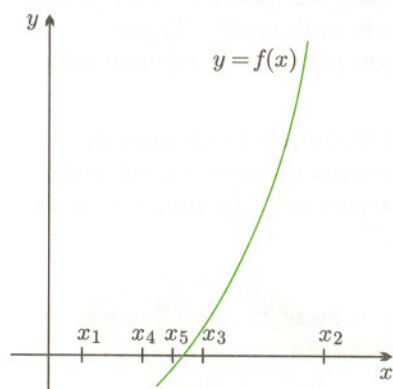
(Rozwiązanie zadania 1 ze str. 7)



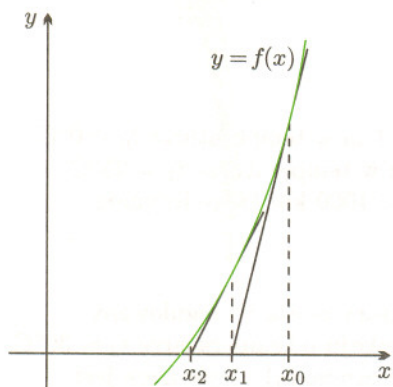
# Zabawy z kalkulatorem (II)

Piotr HAJŁASZ

Oto metoda z poprzedniego artykułu: Niech funkcja  $y = f(x)$  ma wykres mniej więcej taki jak na rysunku 1. Załóżmy, że  $x_1$  leży na lewo od rozwiązania, a  $x_2$  na prawo. Zakładamy, że oba punkty  $x_1$  i  $x_2$  leżą dostatecznie blisko miejsca zerowego funkcji  $f$ , tak że pomiędzy  $x_1$  i  $x_2$  równanie  $f(x) = 0$  ma tylko jeden pierwiastek. Kolejny punkt wybieramy na środku  $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ . Znak liczby  $f(x_3)$  pokazuje, czy punkt  $x_3$  leży na lewo czy na prawo od rozwiązania. Załóżmy, że na prawo. Wówczas, jako kolejne przybliżenie bierzemy  $x_4 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)$ . Analogicznie określamy  $x_5, x_6, x_7, \dots$ . Za każdym razem dzielimy przedział, do którego należy rozwiązanie, na pół. Skracając się długość przedziału świadczy o polepszającej się dokładności przybliżenia. Ponieważ po trzech podziałach długość przedziału skraca się 8 razy, a po czterech 16 razy, więc uzyskamy kolejną dokładną cyfrę rozwinięcia dziesiętnego po wyliczeniu 3-4 nowych przybliżeń  $x_n$ , a dokładniej mniej więcej co 3,3 nowych przybliżeń, bo  $10^{-1} \approx 2^{-3,3}$ . W efekcie, jak widzieliśmy w poprzednim artykule, stosując tę metodę do równania  $x^2 - 2 = 0$ , uzyskaliśmy przybliżoną wartość  $\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 5$  dopiero po obliczeniu  $x_{26}$ . To naprawdę mozolne rachunki.



Rys. 1



Rys. 2

W poprzednim artykule (*Delta* 1/2001) opisaliśmy bardzo prostą metodę pozwalającą na znajdowanie przybliżonego rozwiązania równania  $f(x) = 0$ . Szczególnie dużo uwagi poświęciliśmy znajdowaniu przybliżonej wartości  $\sqrt{2}$ , czyli rozwiązania równania  $x^2 - 2 = 0$ . Metoda była jednak mało skuteczna z racji tego, że wymagała wykonania wielu obliczeń (jej ideę przypominamy na marginesie).

W niniejszym artykule opiszemy zupełnie inną metodę zwaną *metodą stycznych Newtona*. Jak zobaczymy, w odróżnieniu od metody poprzedniej pozwala ona na nieomal błyskawiczne uzyskanie oczekiwanego wyniku.

Rozwiązanie równania  $f(x) = 0$  to punkt przecięcia wykresu funkcji  $y = f(x)$  z osią  $x$ -ów. Załóżmy, że wykres funkcji  $y = f(x)$  wygląda mniej więcej tak jak na rysunku 2.

Weźmy jakiś punkt  $x_0$  leżący na prawo od punktu przecięcia. Narysujmy styczną do wykresu w punkcie  $(x_0, f(x_0))$ . Przecina ona oś  $x$ -ów w jakimś punkcie  $x_1$ . Teraz rysujemy styczną do wykresu w punkcie  $(x_1, f(x_1))$ . Przecina ona oś  $x$ -ów w punkcie  $x_2$  itd. W efekcie otrzymujemy ciąg  $x_n$  zbieżny do rozwiązania równania  $f(x) = 0$ . Zobaczymy, czy ciąg ten można opisać za pomocą jakiegoś konkretnego wzoru. Z rysunku 3. widać, że  $f(x_n) = \tan \alpha_n (x_n - x_{n+1}) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})$ . Stąd otrzymujemy wzór rekurencyjny

$$(1) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

A więc punkt  $x_0$  wybieramy w sposób dowolny (ma to być jednak punkt położony niezbyt daleko od rozwiązania), kolejne zaś punkty obliczamy za pomocą wzoru (1).

Oczywiście  $\sqrt{2}$  jest rozwiązaniem równania  $f(x) = 0$  dla  $f(x) = x^2 - 2$ . Ponieważ  $f'(x) = 2x$ , więc wzór (1) przyjmuje postać

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}.$$

Otrzymaliśmy interesujący wzór opisujący ciąg zbieżny do  $\sqrt{2}$ . Przyjmijmy  $x_0 = 2$  i zobaczymy, jak szybko ten ciąg przybliży się do  $\sqrt{2}$ . Obliczenia wykonałem na moim kalkulatorze:  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 1,5$ ,  $x_2 = 1,416\ 666\ 6$ ,  $x_3 = 1,414\ 215\ 6$ ,  $x_4 = 1,414\ 213\ 5$ . I to wszystko. To jest najlepsze przybliżenie, jakie mogę uzyskać na moim kalkulatorze.

Zobaczymy, jak niebywale lepsza jest to metoda od poprzednio opisanej! Długie i mozolne rachunki zostały zastąpione przez wciśnięcie kilku klawiszy na kalkulatorze. Nie byłoby jednak tej metody, gdyby nie znajomość pochodnych!

Dla jakich równań daje się zastosować tę metodę? Pamiętajmy, że w sposób istotny korzystaliśmy z tego, że wykres wygląda tak jak na rysunku 2. Co to znaczy? Jak to precyzyjnie opisać? Czy da się wytłumaczyć, dlaczego metoda Newtona jest wielokrotnie lepsza od poprzednio opisanej? Czy można oszacować, jak szybko ciąg  $x_n$  dąży do rozwiązania równania?

Aby odpowiedzieć na te pytania, musimy sięgnąć nieco głębiej do matematyki, wyjaśnienie bowiem niebywalej skuteczności metody Newtona ukryte jest w twierdzeniu Taylora.

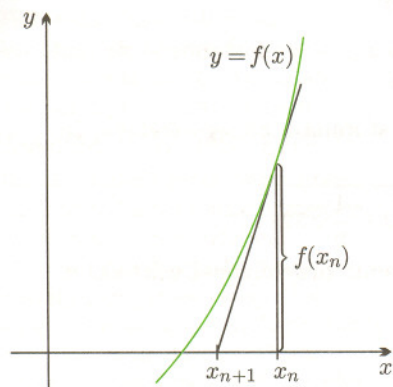
Założmy, że funkcja  $y = f(x)$  ma drugą pochodną ciągłą oraz że  $f(\alpha) = 0$ . Naszym zadaniem jest znalezienie przybliżonej wartości  $\alpha$ .

Założmy, że  $f'(\alpha) \neq 0$ , co oznacza, że wykres funkcji  $y = f(x)$  przecina oś  $x$ -ów w punkcie  $\alpha$  pod kątem różnym od zera, czyli odrzucamy sytuację, w której wykres jest styczny do osi  $x$ -ów w punkcie  $\alpha$ .

Przy badaniu metody Newtona skorzystamy z *Twierdzenia Taylora* (zwanego też wzorem Taylora), które mówi, że jeżeli funkcja  $f$  jest dwukrotnie różniczkowalna,



Istnieje wersja wzoru Taylora, w której występują pochodne funkcji  $f$  rzędów wyższych niż 2. Wówczas twierdzenie Taylora mówi o tym, z jak dużą dokładnością możemy przybliżyć funkcję  $f$  wielomianami.



Rys. 3

Metoda Newtona to jedna z metod numerycznego rozwiązywania równań. Metody numeryczne tworzą bardzo rozbudowany dział matematyki stosowanej. Odgrywają one fundamentalną rolę w fizyce, technice, informatyce. Dużo mówi się o zastosowaniach komputerów, między innymi, do prognozowania pogody, projektowania samolotów i rozwiązywania wielu innych praktycznych problemów. Podstawowa metoda polega na tym, że najpierw matematycy razem z fizykami i inżynierami przeformułują problem na język równań. Są to na ogół bardzo skomplikowane równania różniczkowe, tak skomplikowane, że zazwyczaj ich zrozumienie wymaga wieloletnich studiów matematycznych. Następnie do ich przybliżonego rozwiązania wykorzystuje się komputery. Na ogół wymaga to wielu godzin pracy najszybszych komputerów. Dlatego też istotne jest, aby stosowana przez nas metoda przybliżonego rozwiązywania równania jak najszybciej prowadziła do celu. Z tego też względu metoda Newtona jest znacznie lepsza do zastosowań w komputerach niż metoda omawiana w poprzednim artykule. Trzeba również umieć oszacować błąd przybliżenia, które otrzymujemy. To wszystko są bardzo skomplikowane zagadnienia, wymagające doskonałej znajomości abstrakcyjnej matematyki. Drogi Czytelniku, jeżeli ta tematyka wzbudziła Twoje zainteresowanie, polecam Ci dwie książki: G. Dahlquist, Å. Björk, *Metody numeryczne*, PWN 1983, oraz A. Palczewski, *Równania różniczkowe zwyczajne (teoria i metody numeryczne z wykorzystaniem komputerowego systemu obliczeń symbolicznych)*, WNT 1999. W książce Palczewskiego znajdziesz konkretne przykłady zastosowań w fizyce, elektronice, mechanice, ekonomii, biologii i medycynie. Niestety, obie książki wymagają dość dobrego przygotowania matematycznego w zakresie pierwszych trzech semestrów studiów matematycznych. Obejrzyj je, może zachęca Cię do studiowania matematyki!

to dla dowolnych liczb  $c$  i  $x$  istnieje taka liczba  $\xi$ , leżąca pomiędzy  $c$  i  $x$ , że spełniona jest równość

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - c)^2.$$

Spróbujmy wyjaśnić znaczenie tego twierdzenia. Potraktujmy  $x$  jako zmienną,  $c$  zaś jako ustalony parametr. Zauważmy, że pierwsze dwa składniki po prawej stronie to funkcja liniowa zmiennej  $x$ . Jeśli zaś odległość  $x$  od  $c$  (czyli  $|x - c|$ ) jest mała, to  $(x - c)^2$  ma bardzo małą wartość i w efekcie trzeci składnik sumy po prawej stronie ma bardzo małą wartość. Dlatego też twierdzenie Taylora należy rozumieć jako twierdzenie mówiące o tym, z jak dużą dokładnością możemy przybliżyć funkcję  $f(x)$  funkcją liniową. Mianowicie, funkcja  $f(x)$  różni się od funkcji liniowej  $f(c) + f'(c)(x - c)$  o bardzo niewielką wartość  $\frac{1}{2}f''(\xi)(x - c)^2$ .

Twierdzenie Taylora jest dość abstrakcyjne, zobaczymy jednak, jak niesłychanie skutecznym narzędziem jest ono przy badaniu metody Newtona.

Niech  $x_n$  będzie ciągiem uzyskanym metodą Newtona, dla równania  $f(x) = 0$ , przy założeniach powyżej opisanych. Oznaczmy  $\varepsilon_n = x_n - \alpha$ . Liczba  $\varepsilon_n$  mówi, z jaką dokładnością  $x_n$  przybliża rzeczywistą wartość  $\alpha$ .

Ponieważ założyliśmy, że funkcja  $f$  ma drugą pochodną ciągłą, więc możemy zastosować twierdzenie Taylora. Podstawiając  $x = \alpha$  i  $c = x_n$ , otrzymujemy

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)(\alpha - x_n)^2,$$

gdzie  $\xi$  jest pewną liczbą leżącą pomiędzy  $\alpha$  i  $x_n$ . Dzieliąc przez  $f'(x_n)$ , dostajemy

$$-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - (\alpha - x_n) = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)(\alpha - x_n)^2}{f'(x_n)}.$$

Zauważmy, że na mocy wzoru rekurencyjnego (1) lewa strona to nic innego, jak tylko  $x_{n+1} - \alpha = \varepsilon_{n+1}$ . Stąd zaś otrzymujemy

$$(2) \quad \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)} \varepsilon_n^2.$$

Wzór ten mówi, jak szybko zmienia się błąd przybliżenia. Wartości  $x_n$  szybko zbliżają się do  $\alpha$ , jeżeli  $\varepsilon_n$  szybko dąży do zera. No właśnie, jak odczytać ze wzoru (2) szybkość, z jaką  $\varepsilon_n$  dąży do zera?

Założmy, że  $\alpha$  leży pomiędzy liczbami  $a$  i  $b$ , czyli  $\alpha \in (a, b)$ . Założmy, że funkcja  $f$  ma tę własność, iż iloraz

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(y)}{f'(x)} \right|$$

jest ograniczony z góry przez pewną stałą  $m$  dla dowolnych liczb  $x$  i  $y$  leżących pomiędzy  $a$  i  $b$  (czyli  $x, y \in (a, b)$ ).

Założmy, wreszcie, że przedział  $(a, b)$  jest na tyle szeroki, iż wszystkie wyrazy ciągu  $x_n$  należą do tego przedziału. Wówczas ze wzoru (2) wynika, że  $|\varepsilon_{n+1}| \leq m\varepsilon_n^2$ . To zaś oznacza, że jeżeli, na przykład,  $\varepsilon_1$  i  $m$  są małe, to ciąg  $\varepsilon_n$  bardzo szybko dąży do 0. Istotnie, założmy dla przykładu, że  $m \leq 1$  oraz  $\varepsilon_1 < 0,1$ . Wówczas  $\varepsilon_2 < 0,01$ ,  $\varepsilon_3 < 0,0001$ ,  $\varepsilon_4 < 0,00000001$ , ...,  $\varepsilon_n < 10^{-2^{n-1}}$ . A więc obliczenie kolejnego wyrazu podwaja liczbę dokładnych cyfr po przecinku!

Przyjrzyjmy się omawianemu już przykładowi ciągu zbieżnego do  $\sqrt{2}$ . Funkcja  $f(x) = x^2 - 2$  spełnia warunek

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(y)}{f'(x)} \right| = \frac{1}{2x} < 1 = m,$$

dla dowolnych  $x, y \geq 1$ . Biorąc  $x_0 = 2$ , otrzymujemy  $x_1 = 1,5$ , skąd  $\varepsilon_1 < 0,1$ . Mamy więc sytuację dokładnie taką samą, jak opisana przed chwilą. A więc  $\varepsilon_4 < 0,00000001$ , lepszej dokładności na moim kalkulatorze (na którym wyświetla się 8 cyfr) już nie osiągnę. I rzeczywiście, jak już wcześniej zauważyliśmy, lepszego przybliżenia niż  $x_4$  na tym kalkulatorze nie uzyskam.



W naszych rozważaniach pominieliśmy jeden istotny aspekt: ponieważ obliczenia wykonywałem na kalkulatorze, więc również obliczane przeze mnie wartości wyrazów ciągu  $x_1, x_2, x_3, \dots$  były obciążone pewnym błędem przybliżenia. Kolejne wyrazy ciągu obliczałem, korzystając z przybliżonej wartości wyrazów poprzednich. Czy błędy te przypadkiem nie kumulowały się?

W metodzie omawianej w *Delcie* 1/2001 musieliśmy obliczyć  $x_{26}$ , żeby uzyskać 7 dokładnych cyfr po przecinku. Przy metodzie Newtona dla  $x_{26}$  otrzymalibyśmy co najmniej  $2^{25} = 33\,554\,432$  dokładnych cyfr!.

**Zadanie 1.** Udowodnić nierówność

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{1}{m} (m\varepsilon_0)^{2^n}$$

i wyciągnąć stąd wniosek, że gdy  $|m\varepsilon_0| < 1$ , to  $x_n \rightarrow \alpha$ . Zastanowić się nad stwierdzeniem, że  $x_n$  bardzo szybko dąży do  $\alpha$ .

**Zadanie 2.** Ze wzorów na pierwiastki równań stopnia trzeciego wynika, że pierwiastkiem równania  $x^3 = x + 4$  jest

$$\alpha = \sqrt[3]{2 + \frac{1}{9}\sqrt{321}} + \sqrt[3]{2 - \frac{1}{9}\sqrt{321}}.$$

Wykorzystać metodę Newtona w celu wyznaczenia przybliżonej wartości  $\alpha$ .

## „Zespolone” kongruencje kwadratowe

Kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3 nie daje reszty 2. Zatem kongruencja  $x^2 \equiv 2 \pmod{3}$  nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych. Idąc wytyczonym szlakiem teorii liczb zespolonych (patrz *Delta* 10/2000; można też zajrzeć do *Delty* 4/1999), spróbujmy poszukać rozwiązania na innym gruncie.

Załóżmy, że  $p$  jest taką liczbą pierwszą, dla której równanie  $x^2 \equiv p - 1 \pmod{p}$  nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych. Określamy zbiór par liczb całkowitych ze zbioru  $Z_p = \{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$  z działaniami

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

gdzie działania w nawiasach należy rozumieć jako dodawanie, odejmowanie i mnożenie modulo  $p$ . Można sprawdzić, że zdefiniowane działania mają porządne własności, co fachowo wyraża się, mówiąc, iż zbiór  $Z_p \times Z_p$  z tak określonymi działaniami tworzy ciało. Para postaci  $(a, 0)$  to zwykła liczba całkowita ze zbioru  $Z_p$ . Jednostką urojoną jest, oczywiście,  $i = (0, 1)$ . Mamy bowiem  $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (p - 1, 0)$  (pamiętamy, że działania są określone w zbiorze  $Z_p$ , a więc liczbę  $-1$ , która pojawiła się w wyniku formalnego mnożenia, zastąpiliśmy liczbą  $p - 1$ ).

**Przykład.** Rozwiązać równanie  $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{7}$  (milcząco założyliśmy, że kongruencja  $t^2 \equiv 6 \pmod{7}$  nie ma rozwiązania – łatwo to sprawdzić). Zastosujemy znane wzory. Mamy

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11 \equiv 3 \pmod{7}.$$

Należy wyznaczyć  $\sqrt{\Delta}$ . Ponieważ kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 7 może dawać tylko reszty 0, 1, 2, 4, więc liczba  $\sqrt{\Delta}$  jest „zespolona”. Niech  $\sqrt{\Delta} = (a, b)$ , czyli  $3 = (a, b) \cdot (a, b)$ . Inaczej:  $(3, 0) = (a^2 - b^2, 2ab)$ . Wynika stąd, że  $a^2 - b^2 = 3$  i  $2ab = 0$ . Zatem  $a = 0$  lub  $b = 0$ . Równość  $b = 0$  prowadzi do sprzeczności, bo wtedy  $a^2 \equiv 3 \pmod{7}$ , co jest niemożliwe. Jeśli  $a = 0$ , to  $-b^2 \equiv 3 \pmod{7}$ , co daje  $b = 2$  lub  $b = 5$ . Zatem  $\sqrt{\Delta} = (0, 2)$  lub  $\sqrt{\Delta} = (0, 5)$ , czyli  $\sqrt{\Delta} = 2i$  lub  $\sqrt{\Delta} = 5i$ .

Wobec tego

$$x_1 = \frac{-1 + 2i}{2} = -\frac{1}{2} + i \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-1 + 5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

Co z ułamkami? Przecież szukamy rozwiązań całkowitych. Pamiętajmy jednak, że działania są modulo, a zatem i dzielenie jest modulo:  $\frac{1}{2}$  to 4, bo  $4 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{7}$ .

Ostatecznie

$$x_1 \equiv -4 + i \equiv 3 + i, \quad x_2 \equiv -4 + 20i \equiv 3 + 6i \pmod{7}.$$

Jeszcze prościej otrzymujemy rozwiązania wspomnianej kongruencji  $x^2 \equiv 2 \pmod{3}$ . Mamy tu  $x_1 = i$ ,  $x_2 = 2i$ .

Nasuują się następujące pytania:

- (1) Dla jakich liczb pierwszych  $p$  kongruencja  $x^2 \equiv p - 1 \pmod{p}$  nie zachodzi dla żadnego całkowitego  $x$ ?
- (2) Czy dla dowolnej pary  $(a, 0)$  istnieje taka para  $(x, y)$ , że  $(x, y) \cdot (x, y) = (a, 0)$ , to znaczy czy każdą liczbę z  $Z_p$  można pierwiastkować w sensie „zespolonym”?
- (3) Czy zachodzi Zasadnicze Twierdzenie Algebry w tak określonym ciele  $Z_p \times Z_p$ , to znaczy, czy każdy wielomian o współczynnikach całkowitych ma „zespolone” miejsca zerowe (w sensie kongruencji)?

**Ad (1).** Postulowany warunek spełniają liczby pierwsze  $p$  postaci  $4k + 3$  i tylko takie (np. W. Sierpiński, *Arytmetyka teoretyczna*, PWN, Warszawa 1969, str. 158).

**Ad (2).** Odpowiedź jest pozytywna (j.w.).

**Ad (3).** Odpowiedź jest negatywna. Na przykład kongruencja  $x^3 - x + 1 \equiv 0 \pmod{3}$  nie ma rozwiązania w  $Z_3 \times Z_3$ . Przypuśćmy bowiem, że  $x = a + bi$  jest takim rozwiązaniem. Wówczas

$$(a + bi)^3 - (a + bi) + 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Stąd po przekształceniach otrzymujemy

$$(a^3 - 3ab^2 - a + 1) + (3a^2b - b^3 - b)i \equiv 0 \pmod{3},$$

czyli

$$a^3 - a + 1 \equiv 0 \pmod{3} \quad \text{i} \quad -b^3 - b \equiv 0 \pmod{3}.$$

Ponieważ  $a^3 - a = a(a - 1)(a + 1)$ , więc  $a^3 - a \equiv 0 \pmod{3}$ , bo spośród trzech kolejnych liczb całkowitych jedna zawsze jest podzielna przez 3.

Stąd  $a^3 - a + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ . Proste uogólnienie tego rozumowania wskazuje, że w żadnym ciele skończonym nie zachodzi Zasadnicze Twierdzenie Algebry. Szkoda!



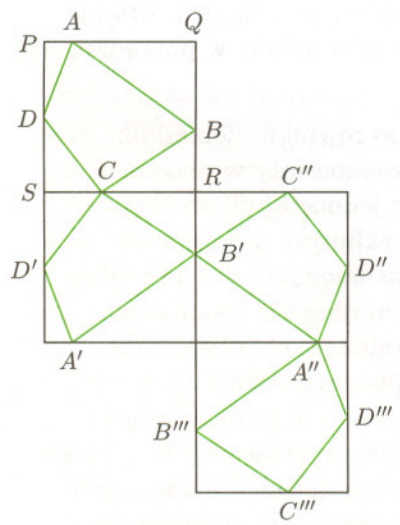
24 września 2000 r. w ramach Festiwalu Nauki odbył się konkurs rozwiązywania zadań matematycznych. Część zadań została zaproponowana przez **Łukasza WIECHECKIEGO** (to ja), a część przez uczestników konkursu. Na rozwiązanie każdego zadania było przewidziane około 5 min. Wszystkie zadania zostały rozwiązane, wszystkie ciastka zjedzone, a i herbatki każdy mógł się napić do woli. Obok przedstawiamy treść zadań, które pojawiły się na tablicy.

- Z. 1.** Podać przykład trójkąta, który można podzielić na 5 przystających trójkątów.
- Z. 2.** Dla dowolnego naturalnego  $n$  znaleźć  $2n + 1$  różnych liczb naturalnych tworzących ciąg arytmetyczny, których iloczyn jest pełnym kwadratem.
- Z. 3.** Na początku (po lewej stronie) prostokątnej planszy  $1 \times 2001$  leżą trzy guziki. Boguś i Goguś grają w grę, w której na zmianę wykonują ruch polegający na przesunięciu jednego z guzików o pewną dodatnią liczbę pól w prawo. Przegrywa ten, który nie może wykonać żadnego posunięcia. Stwierdzić, kto ma strategię wygrywającą: zaczynający czy ten drugi.
- Z. 4.** Dla pewnej liczby naturalnej  $n$  liczby  $2^n$  i  $5^n$  zaczynają się (patrząc od lewej) tą samą cyfrą  $k$ . Znaleźć  $k$ .
- Z. 5.** Punkt  $H$  jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ostrokątnego  $ABC$ . Wiadomo, że  $AB = CH$ . Znaleźć  $\angle ACB$ .
- Z. 6.** Czy równanie  $x^x + y^y = z^z$  ma rozwiązanie w liczbach naturalnych?
- Z. 7.** Udowodnić, że nie istnieją dwa nieprzystające trójkąty prostokątne o tym samym polu i obwodzie.
- Z. 8.** Udowodnić, że jeśli  $a^5$  i  $a^7$  są liczbami naturalnymi, to  $a$  również.
- Z. 9.** Jaka jest minimalna liczba prostokątów a)  $3 \times 4$ , b)  $3 \times 5$ , którymi można pokryć planszę  $13 \times 13$ . (Prostokąty muszą być umieszczone wzdłuż linii podziału planszy na pola  $1 \times 1$  i mogą nachodzić na siebie.)

## Szkiece rozwiązań



**Rozwiązanie zadania M 947.**  
Dokonyjemy kolejno trzech odbić tak jak na rysunku poniżej. Widać, że łamana  $DCB'A''D'''$  ma długość równą obwodowi czworokąta  $ABCD$ , zaś  $|DD''| = 2\sqrt{2}$ . Stąd teza.



- R. 1.** Trójkąt prostokątny o stosunku przystających równym 2, porwana rysunek 1 na str. 3
- R. 2.**  $A, 2A, 3A, \dots, (2n+1)A$ , gdzie  $A = (2n+1)!$ .
- R. 3.** Zaczynający. Pierwszy ruch powinien polegać na przesunięciu jednego z guzików na ostatnie pole. Kolejne ruchy powinny być „kopiaimi” ruchów przeciwnika.
- R. 4.** Niech  $2^n = k \cdot 10^a + b$  i  $5^n = k \cdot 10^c + d$ , gdzie  $b < 10^a$  i  $d < 10^c$ . Z  $2^n \cdot 5^n = 10^n$  wynika, że  $k^2 \cdot 10^{a+c} < 10^n < (k+1)^2 \cdot 10^{a+c}$  i następnie  $k^2 < 10 < (k+1)^2$ , czyli  $k = 3$ . Sytuacja taka ma miejsce np. dla  $n = 5$ .
- R. 5.** Niech  $D$  będzie rzutem punktu  $B$  na bok  $AC$ . Wtedy trójkąty  $ABD$  i  $HCD$  są przystające, gdyż mają równe kąty i długości przeciwprostokątnej. Wymyka stąd, że  $AD = DH$ , czyli trójkąt  $AHD$  jest równoramienny i prostokątny. Stąd  $\angle HAD = 45^\circ$  oraz  $\angle ACB = 90^\circ - \angle HAD = 45^\circ$ .
- R. 6.** Nie. Mielibyśmy wtedy  $x \leq z - 1, y \leq z - 1$ , czyli  $2 \cdot (z - 1)^{z-1} \geq z^z$ , co jest niemożliwe dla  $z \in \mathbb{N}$ .
- R. 7.** Jeśli  $l$  jest obwodem trójkąta prostokątnego,  $P$  – jego polem, zaś  $c$  – przeciwprostokątną, to łatwo sprawdzić, że  $c = \frac{l^2 - 4P}{2l}$ .
- R. 8.**  $a^2 = a^7$  :  $a^5$  jest wtedy wymierna,  $a = a^5$  :  $a^4$  również. Liczba wymierna, której pewna potęga jest całkowita, jest również całkowita.
- R. 9.** Na rysunku 2 na str. 14 pokazano planszę wraz z zaznaczonymi 16 polami, które mają tę własność, że dowolny prostokąt  $3 \times 4$  złożony z całych pól planszy pokrywa co najwyżej jedno z nich. Wynika stąd, że prostokątów musi być co najmniej 16. Odpowiednia plansza z 13 polami dla przypadku b) przedstawiona jest na rysunku 3 na str. 16. Wykazanie, że pokrycie szesnastoma prostokątami dla przypadku a) i trzynastoma dla przypadku b) da się zrealizować, pozostawiamy Czytelnikowi.

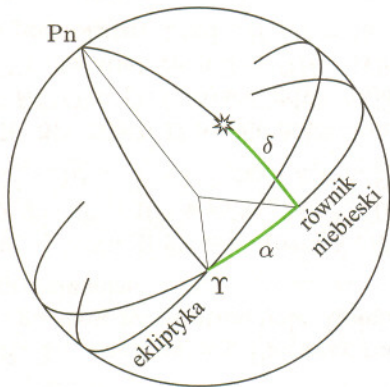




## Jak dokładny jest zegar słoneczny?

Wydaje się, że wśród ludzi panuje przekonanie o tzw. astronomicznej dokładności przewidywania zjawisk niebieskich. Przecież z dokładnością nie gorszą niż co do minuty potrafimy obliczyć momenty wschodu i zachodu dowolnego ciała, początku i końca zaćmień, początków pór roku (choć tego akurat nie sposób sprawdzić) itd. Zapewne więc zegar słoneczny, gdyby go tylko precyzyjnie wykonać, również mógłby być przyrządem bardzo dokładnym. Konstrukcja takiego zegara sama się narzuca. Pręt rzucający cień należy skierować w stronę północnego bieguna nieba (w przybliżeniu w stronę Gwiazdy Polarnej), a na prostopadłej do niego tarczy należy wykreślić podziałkę: skoro obrót Ziemi (nieba) trwa 24 godziny, to np. linie godzinowe powinny być co  $15^\circ$ . I to wszystko. Podziałka powinna być wprawdzie wykreślona po obu stronach tarczy (bo wiosną i latem Słońce będzie oświetlać ją z jednej strony, a jesienią i zimą z drugiej), ale to szczegół techniczny.

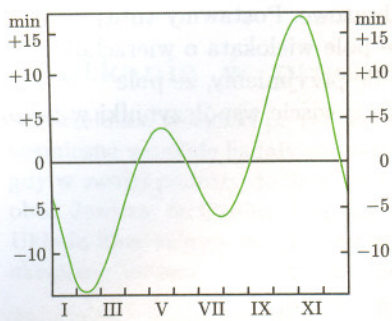
Najczęściej widuje się jednak zegary słoneczne o tarczy poziomej. Można udowodnić, że kierunek cienia pręta (skierowanego w biegun nieba) na takiej tarczy nie zależy wprawdzie od daty, ale kąty między liniami godzinowymi nie są równe. Wszystkie te kąty można oczywiście z góry obliczyć, ale można też linie godzinowe narysować „z natury”, mianowicie pewnego pogodnego dnia zaznaczamy co godzinę kierunek cienia i sprawa załatwiona. I tu właśnie pojawia się pytanie: jak dokładna będzie taka podziałka? Pomijamy oczywiście takie rzeczy jak niedokładność rysunku czy nieostrość cienia pręta. W pierwszym odruchu każdy odpowie, że przecież Ziemia obraca się tak jednostajnie, że do zaobserwowania nierównomierności trzeba mocno zaawansowanych środków technicznych. Nie zapominajmy jednak, że kierunek cienia pręta zależy od położenia Słońca, które porusza się po niebie. Gdyby poruszało się jednostajnie i w dodatku po równiku niebieskim, to wszystko byłoby w porządku, tymczasem...



Rys. 1. Współrzędne gwiazdy:  
 $\alpha$  – rektascensja,  $\delta$  – deklinacja,  
 $\Upsilon$  – punkt równonocy wiosennej.

Przede wszystkim Słońce obiega niebo nie po równiku niebieskim, lecz po tzw. ekliptyce, tj. po kole, którego płaszczyzna leży w płaszczyźnie ziemskiej orbity. Gdyby nawet poruszało się jednostajnie po ekliptyce, to jednakowym zmianom jego położenia na ekliptyce odpowiadałyby niejednakowe zmiany jego rektascensji – współrzędnej liczonej wzdłuż równika i będącej niebieskim odpowiednikiem długości geograficznej (rys. 1). Jest jednak gorzej, bo sam ruch Słońca po ekliptyce, jako skutek niejednostajnego ruchu Ziemi po eliptycznej orbicie, jest też niejednostajny. W rezultacie Słońce prawdziwe (a więc i cień pręta) jest marną wskazówką. Fakt ten opisuje różnica rektascensji fikcyjnego Słońca „średniego” (właśnie poruszającego się z definicji jednostajnie po równiku) i prawdziwego, zwana nieco dziwnie równaniem czasu.





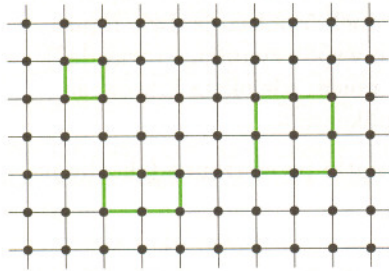
Rys. 2. Równanie czasu.

Równanie czasu można na każdy dzień obliczyć, jest też stabilizowane w rocznikach astronomicznych (rys. 2). Przyjmuje ono wartość zerową tylko cztery razy w roku: 16 IV, 14 VI, 1 IX i 24 XII – wtedy słońce średnie i prawdziwe pokrywają się. Wykreślenie podziałki zegara w tych dniach zagwarantuje nam, że będzie to podziałka „średnia”, najodpowiedniejsza na cały rok. Wartości maksymalne (wynoszące około kwadransa) równanie czasu osiąga dwa razy w roku (12 II i 3 XI). Tak więc zegary słoneczne „chodzą” dość kiepsko, niekiedy z błędem wynoszącym nawet kwadrans, nic więc dziwnego, że już od dawna służą jedynie do ozdoby parków i placów.

Małą Deltę przygotował Tomasz KWAST

## Hipoteza, twierdzenie, dowód, kontrprzykład

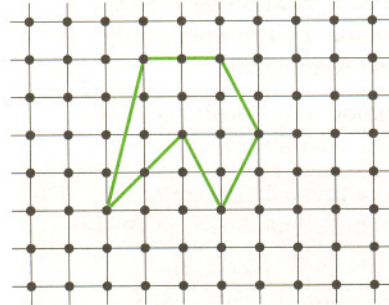
Marek KORDOS



Rys. 1

Tytuł tej notatki to żart opisujący tok pracy matematyka. Oczywiście w rzeczywistości raczej rzadko się zdarza, aby matematyk jakąś hipotezę (a więc przypuszczenie) ogłaszał jako twierdzenie (a więc sąd prawdziwy), a potem dopiero znajdował jego dowód, by po opublikowaniu go znaleźć kontrprzykład (czyli przykład tę hipotezę obalający, a więc przeczący twierdzeniu). Zazwyczaj mając hipotezę, poszukujemy albo dowodu, albo kontrprzykładu. I w zasadzie zawsze (wcześniej lub później) znajduje się albo jedno, albo drugie, a bywa i tak, że dowodzimy, iż hipoteza rozstrzygnąć się nigdy nie da. Oto dwa przykłady, na których można to sobie przećwiczyć.

### Wielokąt na kracie



Rys. 2.  $W = 6$ ,  $B = 8$ ,  $P = 9$ .

Pewnego dnia pod koniec XIX wieku matematyk (austriacki, ale przez przeważającą część życia pracujący w czeskiej Pradze) Georg Pick wpadł na pomysł, że pole każdego wielokąta (narysowanego w układzie współrzędnych) o wierzchołkach w punktach kratowych (czyli o obu współrzędnych całkowitych) da się opisać za pomocą wyrażenia stopnia pierwszego względem liczby  $W$  punktów kratowych leżących wewnątrz tego wielokąta i względem liczby  $B$  punktów kratowych leżących na brzegu tego wielokąta. A zatem pole  $P$  dane jest wzorem

$$(*) \quad kW + lB + m,$$

dla pewnych stałych  $k$ ,  $l$ ,  $m$ .

Gdyby tak rzeczywiście było, to stałe te można bez trudu znaleźć: trzy wielokąty przedstawione na rysunku 1 dają układ trzech równań

$$\begin{cases} k \cdot 0 + l \cdot 4 + m = 1, \\ k \cdot 0 + l \cdot 6 + m = 2, \\ k \cdot 1 + l \cdot 8 + m = 4, \end{cases}$$

mający rozwiązanie  $k = 1$ ,  $l = \frac{1}{2}$ ,  $m = -1$ . Zatem wzór miałby (ewentualnie) postać

$$P = W + \frac{1}{2}B - 1.$$

To była hipoteza Picka. Mógł dla niej szukać dowodu, albo kontrprzykładu. Wybrał to pierwsze i udało mu się: w 1899 ukazała się praca *Geometrisches zur Zahlenlehre*, w której ten dowód się znajdował. Nie będę go tu przedstawiał, tylko zaproponuję wykonanie go samemu lub znalezienie go w jednym ze wskazanych obok miejsc (bądź też w dowolnym innym miejscu).

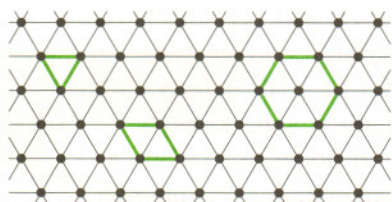
Obejrzyjmy teraz podobną hipotezę na podobny temat. Punktami kratowymi niekoniecznie muszą być punkty siatki kwadratowej. Łatwo wyobrazić sobie

Kolejność według łatwości dostępu; przy okazji: to, co najłatwiej znaleźć, jest najbardziej szkiecowe – dokładny dowód jest podany w ostatniej notce.

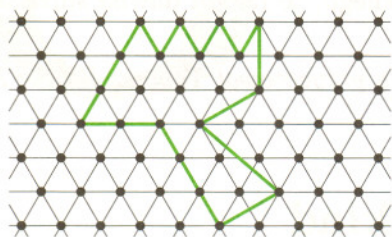
- H. Steinhaus, *Kalejdoskop matematyczny*, np. WSiP 1989, rozdz. IV, pkt. 107;
- H.S.M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, np. 1967, rozdz. 13, par. 13.5;
- *Delta* 4/1993, str. 11.

Tym, których gniewa, iż nie są to odsyłacze internetowe, przypominam, że wszystko, co mogą znaleźć w internecie, jest mniej lub bardziej starannie przepisane przez webmasterów (i współpracujących z nimi maszynistów) ze źródeł tradycyjnych.

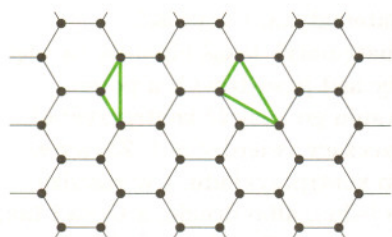




Rys. 3

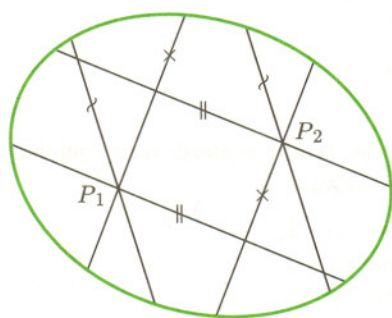


Rys. 4

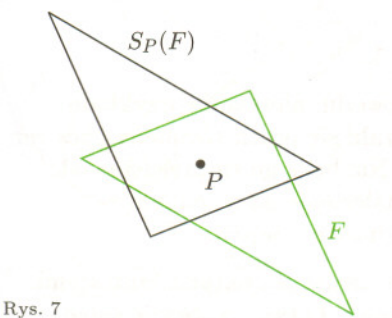


Rys. 5

Figura wypukła to taka, która wraz z każdymi dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek.



Rys. 6



Rys. 7

siatkę z trójkątów równobocznych i jej punkty kratowe. Postawmy tutaj hipotezę analogiczną do hipotezy Picka, czyli że pole wielokąta o wierzchołkach w punktach kratowych dane jest wzorem  $(*)$ , o ile przyjmiemy, że pole najmniejszego trójkąta tej siatki jest równe 1. Oczywiście współczynniki w takim wzorze powinny być inne.

Z rysunku 3 możemy uzyskać układ równań

$$\begin{cases} k \cdot 0 + l \cdot 3 + m = 1, \\ k \cdot 0 + l \cdot 4 + m = 2, \\ k \cdot 1 + l \cdot 6 + m = 6, \end{cases}$$

mający rozwiązanie  $k = 2, l = 1, m = -2$ . Zatem wzór tym razem miałby (ewentualnie) postać

$$P = 2W + B - 2.$$

Można go sprawdzić na bardziej skomplikowanym przykładzie (rys. 4). Wychodzi  $2 \cdot 5 + 18 - 2 = 26$ , co zgadza się (czy na pewno?) z sytuacją na rysunku. Tylko, że to o niczym nie świadczy. Co najwyżej przemawia za tym, by poszukiwać raczej dowodu niż kontrprzykładu (choć pozory czasem mylą). A więc do roboty!

Gdybyśmy spróbowali dostosować twierdzenie Picka do siatki sześciokątnej, to szybko okazałoby się, że jest to niemożliwe. Rysunek 5 pokazuje dwie figury, dla których wzór  $(*)$  daje sprzeczne informacje o współczynniku  $l$  (prawda?). Istnieje kontrprzykład, a więc zależność między polem wielokąta kratowego a punktami kratowymi musi być bardziej skomplikowana.

A jak jest z uogólnieniem twierdzenia Picka na siatki przestrzenne (choćby na siatkę sześcienną)?

## Cięciwy figur wypukłych

Teraz będzie o nowszych sprawach. Proszę poszukać dowodu lub kontrprzykładu dla następującej hipotezy (rys. 6):

jeżeli w figurze (płaskiej) wypukłej każde dwie równoległe cięciwy, przechodzące odpowiednio przez pewien punkt  $P_1$  i pewien punkt  $P_2$ , są tej samej długości, to figura ma środek symetrii.

Tym, którzy wybrali dowód, jako ewentualna pomoc może posłużyć fakt, że wtedy środkiem symetrii byłby zapewne środek odcinka  $P_1P_2$ .

Druga hipoteza została postawiona i udowodniona przez angielskiego (a może szkockiego, bo z St. Andrews) matematyka, Kennetha Falconera, w 1983 roku:

jeśli dla każdego kierunku znamy długość cięciwy przechodzącej przez punkt  $P$  i znamy (niekoniecznie taką samą) długość cięciwy przechodzącej przez punkt  $Q$ , to znamy tym samym figurę wypukłą, której są to cięciwy.

To niestaranne sformułowanie można sprecyzować tak. Dana jest figura wypukła  $F$ . Dla dowolnego punktu  $P$ , leżącego wewnątrz tej figury, funkcja  $f_P$  każdemu kierunkowi przyporządkowuje długość cięciwy figury  $F$  przechodzącej przez  $P$  i mającej ten kierunek. W ten sam sposób dla innego punktu  $Q$  określamy funkcję  $f_Q$ . Twierdzenie Falconera orzeka, iż  $F$  jest jednoznacznie określona przez te dwie funkcje, czyli każda inna figura wypukła wyznacza przynajmniej jedną funkcję inną.

Oczywiście, jeden punkt i jedna funkcja nie wystarczą do jednoznacznego wyznaczenia figury. Kontrprzykład dla przeciwnej hipotezy stanowi dowolna figura wypukła  $F$  i punkt  $P$  nie będący jej środkiem symetrii: obraz symetryczny  $F$  względem  $P$  ma taką samą funkcję  $f_P$  (rys. 7).

Natomiast pomysł, że jedna funkcja  $f_P$  wyznacza figurę wypukłą z dokładnością do przystawiania, ma ciągle (o ile mi wiadomo) status hipotezy. Może więc ktoś z Czytelników z tym się upora.



## Spotkanie w przestworzach i woda

Na przełomie tysiącleci po raz pierwszy dwie sondy kosmiczne wspólnie badały zewnętrzną planetę. W czasie, gdy w swojej podróży do Saturna Cassini przelatywał obok Jowisza, do Ganimedesa, największego księżycy Układu Słonecznego, zbliżył się Galileo, który kończył 29. okrążenie Jowisza.

Jednoczesne pomiary z dwóch różnych punktów pozwoliły na uzyskanie nowych informacji o układzie jowiszowym. Tym razem Galileo obserwował Ganimedesa podczas jego zaćmienia. Naukowcy mają nadzieję na zbadanie zórz polarnych, które występują na Ganimedecie dzięki jego reszkowej atmosferze i polu magnetycznemu, a są zasilane elektronami z pasów radiacyjnych największej planety naszego układu. Pozwoli to na lepsze zbadanie pola magnetycznego największego z księżyców.

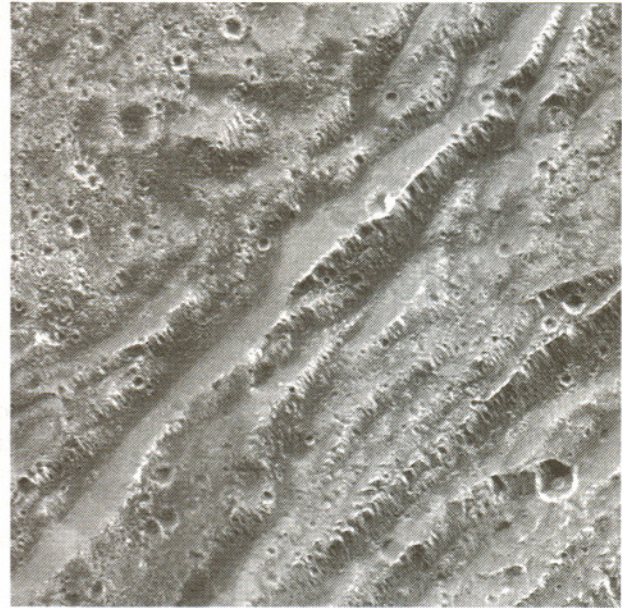
Piszę „pozwole”, bo przesyłanie danych z odległej o prawie godzinę świetlną sondy trwa do kilku miesięcy. Z tego właśnie powodu dopiero w połowie grudnia ogłoszono pierwsze wyniki otrzymane na podstawie danych zebranych przez Galileo podczas poprzedniego, majowego zbliżenia do Ganimedesa na zaledwie 809 km.

Według nich największy księżyc należy dopisać do listy kandydatów na wodne światy. Pewność co do występowania oceanów mamy, co prawda, tylko w przypadku błękitnej planety, ale dzięki Galileo przybywa przesłanek świadczących o obecności słonych oceanów ukrytych pod zamrożoną zewnętrzną powłoką księżyców Jowisza: Europy, Callisto, a teraz Ganimedesa.

Na Europie zewnętrzna skorupa może mieć zaledwie kilka kilometrów. W przypadku Ganimedesa wielokilometrowa warstwa słonej wody, znajdująca się pod prawie dwustukilometrową skorupą, najlepiej pasuje do danych dotyczących jego pola magnetycznego.



Powyższe zdjęcia wykonane za pomocą sondy Galileo ukazują podobieństwa w strukturze powierzchni Ganimedesa (po lewej) i Europy (po prawej). Tego typu ukształtowanie terenu jest wyjątkowe na Ganimedecie i typowe na Europie.



Powiększenie fragmentu „ciemnego” obszaru powierzchni Ganimedesa położonego niedaleko granicy z obszarem „jasnym” (takie granice ukazuje poprzednie zdjęcie). Widoczny jest obszar 16 km na 15 km. Podobne „schodkowe” struktury na Ziemi powstają na skutek ruchów tektonicznych. Potwierdza to przypuszczenie, że jasne obszary powstają na skutek rozwierania się lodowej skorupy Ganimedesa.

Sytuacja jest jednak dużo bardziej skomplikowana niż w przypadku najbardziej przekonującej Europy czy Callisto, ponieważ Ganimedes ma własne silne pole magnetyczne, a nie jedynie indukowane przez magnetyzm Jowisza.

Dodatkową wskazówką są bardzo dokładne zdjęcia powierzchni księżycy i wyniki badań jej składu chemicznego. Na zdjęciach widać struktury bardzo podobne do znalezionych na powierzchni Europy.

Ciemne „włochate” struktury poprzecinane są jasnymi pasami. Jedne i drugie zbudowane są z lodu. Wygląda to tak, jakby jasne, gładkie pasy powstały przez pęknięcie skorupy i wydostanie się wody na powierzchnię i jej zamrożenie. Dodatkowo badania w zakresie podczerwieni wykazały obecność siarczanu magnezu  $MgSO_4$ , który jest dobrym elektrolitem.

W opinii naukowców do utrzymania warstwy ciekłego wewnętrznego oceanu wystarczy ciepło z rozpadów promieniotwórczych we wnętrzu Ganimedesa.

Jak zawsze w przypadku gromadzenia świadectwa występowania gdzieś wody w płynnej postaci pojawia się pytanie o możliwość istnienia tam życia. Odnajdywane w pozornie najmniej sprzyjających miejscach Ziemi żyjątka (ekstremofile) świadczą, że nie jest to niemożliwe. Niestety, jak na razie nie umiemy tego sprawdzić.

Piotr ZALEWSKI

Dalsze informacje można znaleźć w Internecie [galileo.jpl.nasa.gov](http://galileo.jpl.nasa.gov)



Jest to skrót jednej z dwóch prac nagrodzonych srebrnymi medalami na Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2000 r. Kolejną opublikujemy w następnym numerze.

Obrót na płaszczyźnie, który jest przecież elementarnym przekształceniem, można wykorzystać do rozwiązywania całkiem poważnych problemów. O tym właśnie traktowała moja praca. W pierwszej jej części zająłem się zastosowaniem obrotu w geometrii syntetycznej, dowodząc kilku twierdzeń dotyczących nadbudowywania figur płaskich, w tym znane twierdzenie Van Aubela. W drugiej części pokazałem zastosowanie obrotu w geometrii

analitycznej, przy udowadnianiu własności składania obrotów oraz do rozwiązywania zadań. Poniżej prezentuję skrót części pierwszej, złożony z pięciu twierdzeń o nadbudowywaniu figur kwadratami.

### Twierdzenie 1. Środki kwadratów nadbudowanych na bokach równoległoboku są wierzchołkami kwadratu.

**Dowód.** Przez  $A, B, C$  i  $D$  oznaczymy wierzchołki rozważanego równoległoboku (rys. 1). Przez  $K, L, M$  i  $N$  oznaczymy środki kwadratów nadbudowanych odpowiednio na bokach  $AB, BC, CD$  oraz  $AD$ . Mamy:  $\triangle KBL \equiv \triangle MCL$  (cecha  $BKB; CL = BL, KB = MC, \angle KBL = \angle MCL$ ) oraz  $\angle BLC = 90^\circ$  (kątem między przekątnymi kwadratu). Z tych dwóch faktów wynika, że

$$\text{Obr}_L^{90^\circ}(\triangle MCL) = \triangle KBL.$$

A zatem  $ML = KL$  oraz  $ML$  jest prostopadłe do  $KL$ . Widzimy zatem, że dowolne dwa kolejne boki czworokąta  $KLMN$  są równe i prostopadłe. Jest to więc kwadrat.

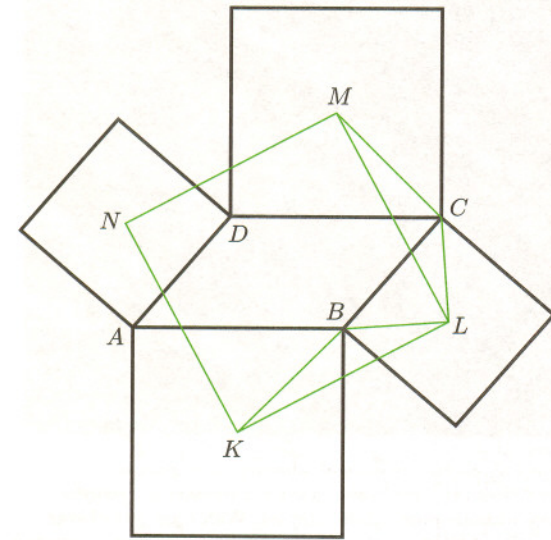
### Twierdzenie 2. Przekątne kwadratu, powstałego ze środków kwadratów nadbudowanych na bokach równoległoboku, przecinają się w punkcie przecięcia jego przekątnych.

**Dowód.** Przez  $A, B, C$  i  $D$  oznaczymy wierzchołki rozważanego równoległoboku (rys. 2). Przez  $K, L, M$  i  $N$  oznaczymy środki kwadratów nadbudowanych odpowiednio na bokach  $AB, BC, CD$  oraz  $AD$ . Jak wiemy, środkiem symetrii równoległoboku jest punkt przecięcia jego przekątnych. Oznaczmy ten punkt dla równoległoboku  $ABCD$  przez  $S$ . Niech punkty  $P$  i  $R$  będą środkami odpowiednio boków  $AD$  i  $BC$  tego równoległoboku. Odcinki  $NP$  i  $LR$  są równe i odpowiednio prostopadłe do odcinków  $AD$  i  $BC$ , również odcinki  $PS$  i  $RS$  są równe. Ponadto  $\angle NPD = \angle LRC = 90^\circ$  oraz  $\angle DPS = \angle BRS$ , bo trójkąt  $BRS$  jest obrazem trójkąta  $DPS$  w symetrii środkowej względem  $S$ :  $S_S(\triangle DPS) = \triangle BRS$ , skąd wynika, że kąty  $NPS$  i  $LRS$  są równe. A zatem  $\triangle NPS \equiv \triangle LRS$  na podstawie cechy  $BKB$  ( $PS = RS, NP = LR, \angle NPS = \angle LRS$ ).

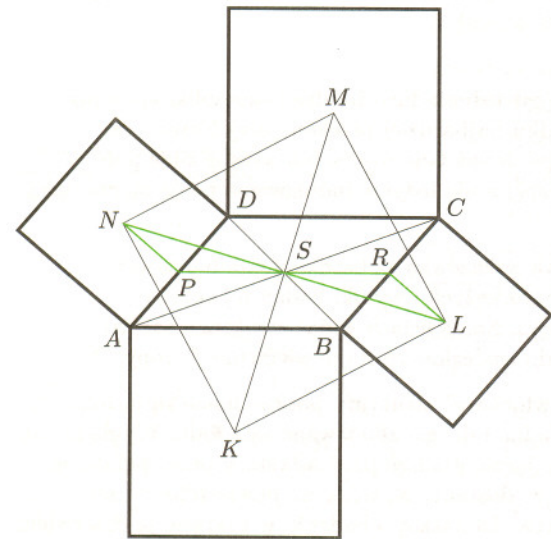
Zauważmy, że z równości  $S_S(\triangle NPS) = \triangle LRS$ , wynika, że  $S$  należy do odcinka  $NL$ . Analogicznie (przy użyciu tego samego obrotu) otrzymujemy, że  $S$  należy do odcinka  $KM$ . Obie przekątne kwadratu  $KLMN$  przechodzą więc przez punkt  $S$ , czyli przecinają się w punkcie przecięcia przekątnych równoległoboku.

### Twierdzenie 3. Jeżeli na dowolnych dwóch bokach trójkąta nadbudujemy kwadraty, to odcinki łączące środki tych kwadratów ze środkiem trzeciego boku trójkąta są równe i prostopadłe.

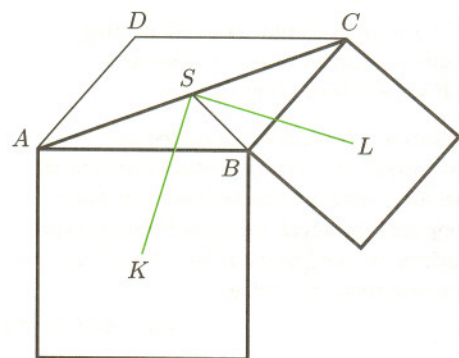
**Dowód.** Nadbudujemy kwadraty na bokach  $AB$  i  $BC$ , ich środki oznaczymy odpowiednio przez  $K$  i  $L$  (rys. 3). Środek odcinka  $CA$  oznaczymy przez  $S$ . Niech  $S_S(B) = D$ . Wtedy  $ABCD$  jest równoległobokiem. Punkt  $S$  jest punktem przecięcia przekątnych tego równoległoboku. Więc i przekątne kwadratu utworzonego ze środków kwadratów nadbudowanych na bokach



Rys. 1

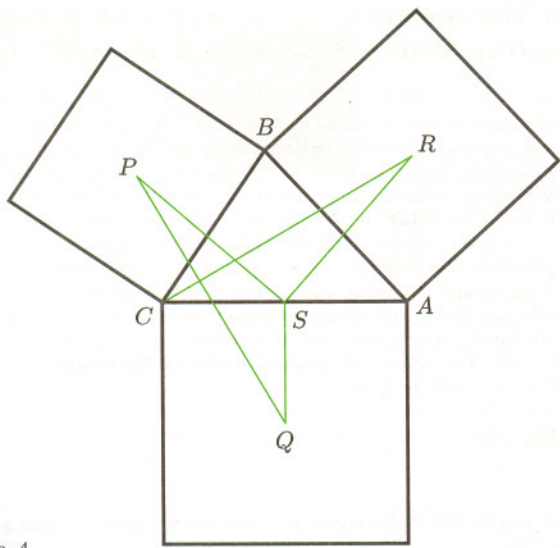


Rys. 2



Rys. 3





Rys. 4

tego równoległoboku przecinają się w punkcie  $S$  (na mocy twierdzenia 2). Z tego, że przekątne kwadratu są równe i się połowią, wynika, iż  $SK = SL$ . Z tego, że przekątne kwadratu przecinają się pod kątem prostym, otrzymujemy, iż  $SK$  jest prostopadłe do  $SL$ , bo  $SK$  i  $SL$  zawierają się w przekątnych kwadratu utworzonego ze środków kwadratów nadbudowanych na bokach równoległoboku.

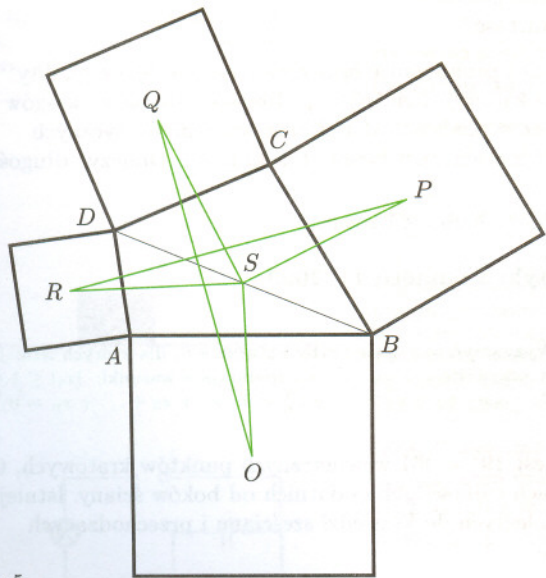
**Twierdzenie 4.** Odcinek łączący środki kwadratów, nadbudowanych na dwóch dowolnych bokach trójkąta, jest przystający i prostopadły do odcinka łączącego środek kwadratu nadbudowanego na trzecim boku z wierzchołkiem nie należącym do tego kwadratu.

**Dowód.** Przez  $A$ ,  $B$  i  $C$  oznaczmy wierzchołki rozważanego trójkąta (rys. 4). Niech  $P$ ,  $Q$  i  $R$  będą środkami kwadratów nadbudowanych odpowiednio na bokach  $BC$ ,  $CA$  oraz  $AB$ . Przez  $S$  oznaczmy środek boku  $CA$ . Na mocy twierdzenia 3 mamy, że  $RS = SP$  oraz  $RS \perp SP$ . Zauważmy że  $SQ = SC$  oraz  $SQ \perp SC$ . Więc  $O_S^{90^\circ}(\triangle RCS) = \triangle QPS$ . Wynika stąd, że  $RC = QP$  oraz  $RC \perp QP$ . Analogicznie (rozważając obroty względem środków odcinków  $AB$  i  $BC$ ) otrzymamy, że  $AP = RQ$ ,  $AP \perp RQ$  oraz  $BQ = PR$ ,  $BQ \perp PR$ .

**Twierdzenie 5 (Van Aubel).** Odcinki łączące środki kwadratów nadbudowanych na przeciwległych bokach czworokąta wypukłego są równe i prostopadłe.

**Dowód.** Oznaczmy wierzchołki rozważanego czworokąta wypukłego przez  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  (rys. 5). Przez  $O$ ,  $P$ ,  $Q$  i  $R$  oznaczmy środki kwadratów nadbudowanych odpowiednio na bokach  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  i  $DA$  czworokąta  $ABCD$ . Przez  $S$  oznaczmy punkt będący środkiem odcinka  $BD$ .

Na mocy twierdzenia 3 dla trójkąta  $ABD$  otrzymujemy,  $OS = RS$  i  $OS \perp RS$ , a dla trójkąta  $BCD$  otrzymujemy,  $QS = PS$  i  $QS \perp PS$ . Zatem  $O_S^{90^\circ}(\triangle SPR) = \triangle SQO$ . Mamy więc:  $PR = QO$  oraz  $PR \perp QO$ .



Rys. 5



**Rozwiązanie zadania F 543.**

Liczba obrotów koła na drodze  $l$  wynosi

$$\text{latem } n_1 = \frac{l}{2\pi r_0(1 + \alpha t_1)}, \quad \text{a zimą } n_2 = \frac{l}{2\pi r_0(1 + \alpha t_2)}.$$

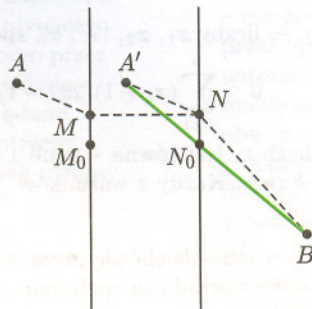
Zatem różnica liczby obrotów wynosi

$$n_2 - n_1 = \frac{l}{2\pi r_0} \left( \frac{1}{1 + \alpha t_2} - \frac{1}{1 + \alpha t_1} \right) \approx 9,5 \text{ obrotów.}$$



**Rozwiązanie zadania M 946.**

Niech  $A'$  powstaje przez przesunięcie punktu  $A$  o wektor prostopadły do rzeki, który ma długość równą szerokości rzeki. Jeśli zbudujemy most  $MN$ , to aby dostać się od  $A$  do  $B$ , będziemy musieli pokonać drogę  $AMNB$ , która ma długość  $a$  + długość łamanej  $A'NB$ . Długość łamanej  $A'NB$  jest najmniejsza, jeśli  $N$  leży na odcinku  $A'B$ , czyli most należy zbudować od  $M_0$  do  $N_0$  (rysunek obok).



**Rozwiązanie zadania F 544.**

Przy prawidłowej pracy zegara wahadło wykonuje  $N$  wahań na dobę

$$N = \frac{24 \cdot 3600}{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}.$$

Przy zmianie temperatury długość wahadła wynosi  $l_1 = l(1 + \alpha(t_2 - t_1))$ . Dlatego zmienia się też i okres wahadła, o wielkość

$$\begin{aligned} \Delta T &= T_1 - T = 2\pi \left( \sqrt{\frac{l_1}{g}} - \sqrt{\frac{l}{g}} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{g} \frac{l_1 - l}{\sqrt{\frac{l_1}{g}} + \sqrt{\frac{l}{g}}}. \end{aligned}$$

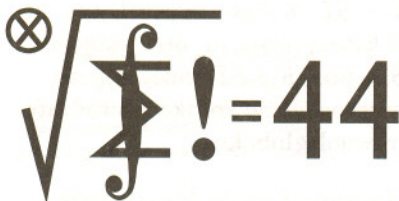
Uwzględniając, że  $l_1 \approx l$ , mamy

$$\Delta T \approx \frac{\pi \alpha l (t_2 - t_1)}{g \sqrt{\frac{l}{g}}}.$$

Po upływie doby zegar opóźni się o

$$t = N \Delta T \approx 12 \cdot 3600 \alpha (t_2 - t_1) \approx 13 \text{ s.}$$





Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 V 2001

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2001.

## Zadania z matematyki nr 417, 418

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**417.** Niech  $n$  będzie ustaloną dodatnią liczbą całkowitą. Znaleźć największą możliwą wartość sumy  $\sum_{i=1}^{2n} |\pi(i) - i|$  dla permutacji  $\pi$  zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ . Ile jest permutacji wyznaczających tę maksymalną wartość?

**418.** Dany jest okrąg  $\Omega$  o środku  $O$  i promieniu  $r$  oraz dwa ustalone różne punkty  $A$  i  $B$  na tym okręgu, w odległości kątowej  $|\angle AOB| = \varphi$ . Rozważamy pary okręgów stycznych wewnętrznie do okręgu  $\Omega$  w punktach  $A$  i  $B$  oraz wzajemnie stycznych zewnętrznie. Punkty ich styczności zewnętrznej tworzą łuk krzywej. Obliczyć długość tego łuku.

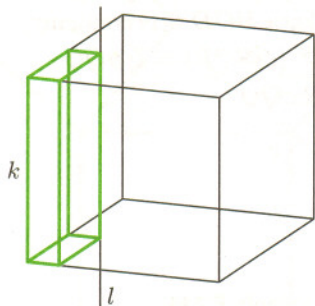
Zadanie **418** zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/2000

Przypominamy treść zadań:

**409.** Z dwóch tysięcy klocek o rozmiarach  $2 \times 2 \times 1$  zbudowano sześcian o krawędzi długości 20. Dowieść, że istnieje prosta przecinająca wnętrze tego sześcianu, ale nie przecinająca wnętrza żadnego klocka.

**410.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których istnieją liczby rzeczywiste  $x_1, x_2, \dots, x_n$  spełniające warunki:  $|x_i| \leq 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$ ;  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n/3$ .



**409.** Na każdej ścianie sześcianu jest  $19^2 = 361$  wewnętrznych punktów kratowych, tzn. punktów położonych w odległościach całkowitych dodatnich od boków ściany. Istnieje więc  $3 \cdot 361 = 1083$  prostych równoległych do krawędzi sześcianu i przechodzących przez wspomniane punkty kratowe.

Niech  $\ell$  będzie jedną z tych prostych. Może ona przecinać wnętrze tylko takiego klocka  $K$ , którego ścianki  $2 \times 2$  są do niej prostopadłe (trafiając w środki tych ścianek). Wybierzmy jedną z czterech krawędzi sześcianu równoległych do prostej  $\ell$  i nazwijmy ją  $k$ .

Weźmy pod uwagę prostopadłościan  $P$  (rys.), którego jedną krawędzią jest  $k$ , jedną krawędzią jest odcinek prostej  $\ell$ , a cztery ściany  $P$  są zawarte w ścianach sześcianu.

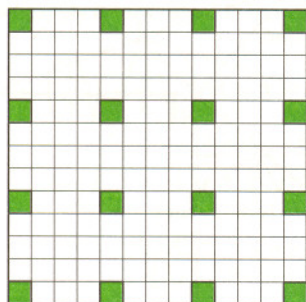
Jeśli prosta  $\ell$  przecina wnętrze klocka  $K$ , to część wspólna  $K \cap P$  jest sześcianikiem o objętości 1. Jeśli  $K'$  jest klockiem nie przekłutym przez prostą  $\ell$ , to zbiór  $K' \cap P$  ma objętość 4, 2 lub 0. Objętość prostopadłościanu  $P$  jest liczbą parzystą; zatem prosta  $\ell$  przecina wnętrza parzystej liczby klocek. To znaczy, że albo nie przecina żadnego, albo co najmniej dwa. Wśród rozważanych 1083 prostych jest wobec tego nie więcej niż 1000 prostych, które przecinają wnętrze jakiegoś klocka. Stąd teza.

**410.** Załóżmy, że liczby  $x_1, x_2, \dots, x_n$  spełniają postulowane warunki. Wówczas

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (x_i + 1)(2x_i - 1)^2 = \sum_{i=1}^n (4x_i^3 - 3x_i + 1) = 0,$$

więc każda z liczb  $x_i$  jest równa  $-1$  lub  $1/2$ . Przyjmijmy, że  $-1$  występuje  $k$  razy, a  $1/2$  występuje  $n - k$  razy. Każdy z warunków  $\sum x_i = n/3$  oraz  $\sum x_i^3 = 0$  sprowadza się do równości  $n = 9k$ .

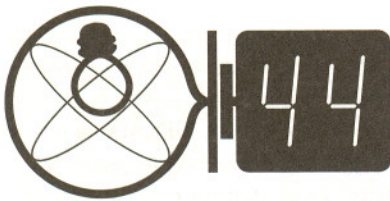
Wniosek: liczba  $n$  musi dzielić się przez 9. Na odwrót, jeśli  $n$  jest liczbą podzielną przez 9, to podane warunki są spełnione przez ciąg  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , w którym jest  $n/9$  wyrazów równych  $-1$ , a pozostałe są równe  $1/2$ .



Rysunek 2.

(Rozwiązanie zadania 9a ze str. 7)





## Zadania z fizyki nr 314, 315

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 V 2001

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

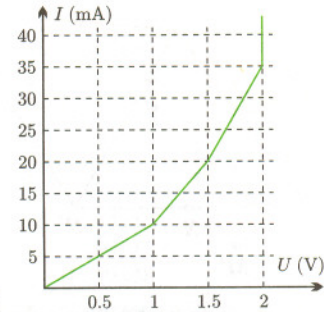
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 302 (WT=2,84) i 303 (WT=3,01)  
z numeru 9/2000

Jarosław Łazuka	-	Warszawa	46,36
Marek Wójcicki	-	Szczecin	37,47
Aleksander Surma	-	Myszków	33,98
Andrzej Nowogrodzki	-	Chocianów	33,66
Andrzej Idzik	-	Bolesławiec	33,56
Tomasz Rudny	-	Warszawa	25,20

Pan Łazuka zaliczył 44 punkty po raz trzeci, zostając ósmym Weteranem Klubu 44 F.

**314.** Kula naładowana powierzchniowo stałą gęstością ładunku składa się z dwóch zetkniętych półkul o tej samej masie. W wyniku wzajemnego odpychania półkule zaczęły się poruszać i oddaliły się na bardzo dużą odległość (ruch zachodzi bez oporów). W którym przypadku prędkość uzyskana przez półkule będzie większa: gdy są przewodzące, czy gdy są nieprzewodzące?

**315.** Mamy do dyspozycji dowolne oporniki oraz dowolną liczbę idealnych diod o napięciu progowym 1 V (tzn. nie przewodzących prądu przy niższym napięciu, a przewodzących dowolnie duży prąd przy napięciu minimalnie większym). Zaprojektować jak najprostszy obwód o dwóch wyjściach, którego charakterystyka prądowo-napięciowa jest dana na przedstawionym wykresie (rys. 1).



Rys. 1

Poza konkursem: Czy istniałoby rozwiązanie, gdyby punkt łamanej o współrzędnych (2; 35) przesunąć w górę do (2; 50)? (Autorowi nie udało się ani znaleźć tego rozwiązania, ani udowodnić, że nie istnieje.)

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/2000

Przypominamy treść zadań:

**306.** Jaką minimalną siłą trzeba działać na klocek o ciężarze  $P$ , aby ruszyć go z miejsca (zob. rys. 2), jeśli współczynnik tarcia między klockiem a podłożem jest równy  $f$ ?

**307.** Dwie jednakowe cewki, kondensator i żaróweczkę zestawiono w obwód (rys. 3) i podłączono do źródła napięcia przemiennego. W poniższych zdaniach wybrać właściwe wersje wyrazów w nawiasach i uzasadnić. Opór uzwojeń cewek można pominąć.

Gdy zwroty nawinięcia obu cewek były zgodne, okazało się, że podczas przesuwania jednej cewki względem drugiej przy pewnej szczególnej ich odległości żaróweczka świeci się (silniej/słabiej), niż przy innych sąsiednich położeniach. Gdy jedną z cewek odwrócono, tak że zwrot jej nawinięcia był przeciwny względem drugiej, również wystąpiła taka szczególna odległość cewek, dla której żaróweczka świeciła się (silniej/słabiej). Gdy zwiększono pojemność kondensatora i ponownie poszukano obu tych szczególnych przypadków, okazało się, że pierwszy z nich występuje przy (większej/mniejszej) odległości cewek niż poprzednio, a drugi przy (większej/mniejszej).

**306.** Oznaczmy siłę działającą na klocek przez  $F$ , a kąt między jej kierunkiem a poziomem przez  $\alpha$ . Siła nacisku klocka na podłoże wynosi  $P - F \sin \alpha$ , czyli maksymalną wartość siły tarcia jest  $f(P - F \sin \alpha)$ . W chwili ruszenia klocka siła ta równa się poziomej składowej siły  $F$ , a stąd

$$F = \frac{Pf}{\cos \alpha + f \sin \alpha}.$$

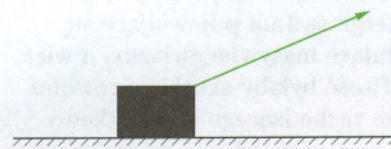
Maksymalną wartość mianownika znajdziemy, przyrównując jego pochodną względem  $\alpha$  do zera. Otrzymujemy  $\operatorname{tg} \alpha = f$ , czyli

$$F_{\min} = \frac{Pf}{\sqrt{1+f^2}}.$$

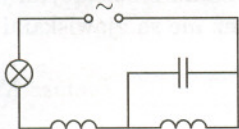
Rozwiązując je, znajdujemy amplitudę prądu płynącego przez żaróweczkę

$$I_1 + I_2 = \frac{U}{(L-M)\omega - (2/C\omega)} \frac{L\omega - (1/C\omega)}{(L+M)\omega}.$$

Zmiana odległości między cewkami wpływa tylko na współczynnik indukcji wzajemnej  $M$ . Widzimy, że rezonans – nieskończona wartość  $I_1 + I_2$  (w praktyce ograniczona przez opór żaróweczki) – występuje dla  $M_1 = L - 2/C\omega^2$ , natomiast drugi przypadek  $M = -L$  odpowiada maksymalnemu sprzężeniu, które wymagałoby osadzenia obu cewek na wspólnym rdzeniu, co nie jest zgodne z opisem zadania. Minimalna wartość  $I_1 + I_2$  występuje dla  $M_2 = -1/C\omega^2$ ; ponieważ  $M_2 < 0$ , więc zgodność z podanymi w treści zadania obserwacjami wymaga, aby  $M_1 > 0$ . Zwiększenie wartości  $C$  oznacza zwiększenie  $M_1$  (rezonans wystąpi przy mniejszej odległości cewek) i zmniejszenie  $|M_2|$  (większa odległość).



Rys. 2



Rys. 3

**307.** Zauważmy na wstępie, że opór  $R$  żaróweczki dodaje się do impedancji reszty obwodu  $Z$  wg wzoru  $Z_{\text{całk}} = \sqrt{R^2 + Z^2}$ , a więc szukając położenia, w którym żaróweczka świeci się najsilniej (ew. naj słabiej), można ten opór pominąć. Wprowadźmy oznaczenia: indukcyjność cewki  $L$ , współczynnik indukcji wzajemnej cewek  $M$  (dodatni dla zgodnego nawinięcia), amplituda napięcia  $U$  źródła, częstość  $\omega = 2\pi f$ , amplituda prądu  $I_1$  płynącego przez prawą cewkę, amplituda prądu  $I_2$  płynącego przez kondensator. Ze względu na pominięcie oporu jedyną możliwą wartością przesunięcia fazy między prądami lub też między napięciami jest  $\pi$ , co w razie potrzeby uwzględnimy, przypisując jednej z amplitud znak ujemny. Z praw Kirchhoffa wynikają równania

$$I_1 L \omega + (I_1 + I_2) M \omega = -\frac{I_2}{C \omega},$$

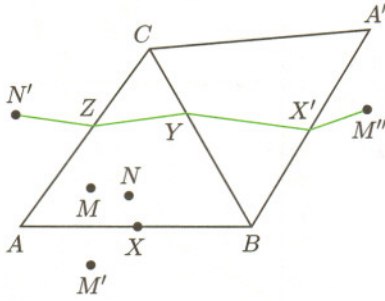
$$U = (I_1 + I_2) L \omega + I_1 M \omega - \frac{I_2}{C \omega}.$$



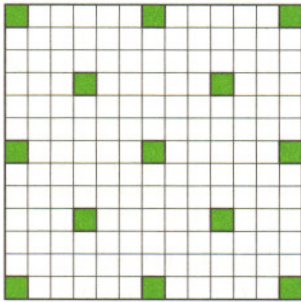


## Rozwiązanie zadania M 948.

Niech  $M'$  będzie odbiciem punktu  $M$  względem  $AB$ , zaś  $M''$  i  $A'$  — odbiciami punktów  $M'$  i  $A$  względem  $BC$ . Wreszcie niech  $N'$  będzie odbiciem  $N$  względem  $AC$  (rys.).



Jeśli  $X, Y, Z$  są punktami na bokach  $AB, BC$  i  $AC$  odpowiednio, przez które przechodzi nasza droga,  $X'$  zaś jest odbiciem  $X$  względem  $BC$ , to długość rozważanej drogi jest nie mniejsza niż długość łamanej  $M''X'YZN'$ , a ta zaś nie mniejsza niż  $|M''N'|$ . Droga o minimalnej długości to ta, dla której  $X', Y, Z$  leżą na odcinku  $M''N'$ .



Rysunek 3.

(Rozwiązanie zadania 9b ze str. 7)

Z dużym prawdopodobieństwem można zgadnąć, że za wszelkie burzliwe procesy toczące się w centralnych częściach galaktyk odpowiedzialna jest masywna czarna dziura – to ona zazwyczaj jest źródłem energii procesów. Okazuje się jednak, że nie zawsze. Otóż od wielu lat znane są galaktyki niezwykle jasne w zakresie podczerwonym. Narzuca się przypuszczenie, że centralną czarną dziurę otacza w nich gruba warstwa pyłu, który pochłania promieniowanie krótkofalowe i wyswiewa pochłoniętą energię w postaci promieniowania niskoenergetycznego, właśnie podczerwonego.

Na początku lat 80. w galaktyce Arp 220 (tzn. o numerze 220 w katalogu galaktyk osobliwych Haltona Arpa) położonej w Wężu wykryto maserowe promieniowanie radiowe cząsteczek OH pochodzące z jej zwartego jądra. Późniejsze jednak obserwacje w podczerwieni prowadzone za pomocą satelity Infrared Space Observatory ujawniły obecność w widmie galaktyki linii absorpcyjnych, co dowodziło, że obszar przerabiający promieniowanie wysokoenergetyczne na niskoenergetyczne nie jest taki mały, jak się początkowo zdawało. Z drugiej strony ujawniły brak pewnych linii emisyjnych obecnych w widmach obiektów zasilanych przez centralną czarną dziurę. Z kolei subtelniejsze obserwacje radiowe wykazały niedawno, że w centrum galaktyki znajduje się nie jedno, lecz kilkanaście bardzo zwartych radioźródeł. Wreszcie dwa lata temu za pomocą Teleskopu Hubble'a po prostu ujrzano skomplikowaną budowę centralnych obszarów galaktyki Arp 220.

Wszystko to musiało doprowadzić do odrzucenia hipotezy czarnej dziury i do uznania, że w centrum galaktyki toczą się wprawdzie burzliwe procesy fizyczne, ale zupełnie innego typu. Mianowicie źródłem energii są tam pojawiające się w zwiększonej obfitości supernowe, czyli eksplodujące masywne gwiazdy, a więc w gruncie rzeczy obiekty dość zwyczajne. Ich obfitość byłaby skutkiem również zwyczajnego procesu powstawania gwiazd, tyle że zachodzącego w wyjątkowo wysokim tempie. Struktura jądra galaktyki, a w szczególności jego podwójność, dowodziłaby, że ostateczną przyczyną tych wszelkich osobliwości jest zlanie się w jedną całość dwóch galaktyk. Zauważmy, że w przeciwieństwie do sytuacji w świecie gwiazd, rozmiary galaktyk są spore w porównaniu z dzielącymi je odległościami, wskutek czego zderzenia galaktyk również nie są zjawiskami nietypowymi.

Tomasz KWAST

## Marzec

Wieczorami wysoko na niebie widzimy gwiazdozbiór Bliźniąt (a przynajmniej najjaśniejsze jego gwiazdy, Kastora i Polluksa), a na wschód i nieco niżej niepozornego Raka, w którym dwa tysiące lat temu znajdowało się letnie stanowisko Słońca. Wskutek precesji ów „punkt Raka” zdążył przesunąć się właśnie do Bliźniąt, ale nazwa pozostała – dlatego północny zwrotnik ciągle nazywamy zwrotnikiem Raka. Sam gwiazdozbiór Raka jest tak dalece niepozorny, że najjaśniejszym w nim obiektem jest gromada otwarta o jasności 3,9 mag, zwana Praesepe (Żłóbek), widoczna gołym okiem jako słaba plamka. Zawiera ona ponad 300 gwiazd, a najjaśniejsze z nich widać już przez lornetkę. Leży w odległości 160 pc, a jej rozmiary nie przekraczają 20 pc. Jest to gromada w skali Galaktyki bardzo młoda. Słońce, które uchodzi za gwiazdę młodą, powiedzmy – w średnim wieku, liczy 5 mld lat, a Praesepe ma, według niektórych ocen, pół miliarda lat. Jak wszystkie gromady otwarte

najprawdopodobniej nie przeżyje następnego miliarda, tzn. gwiazdy owszem, ale sama gromada ulegnie rozproszaniu wśród innych gwiazd Galaktyki.

Wydarzeniem miesiąca będzie niewątpliwie równonoc, która nastąpi 20 III o godz. 14:31. Wkrótce potem w nocy 24/25 III (czyli z soboty na niedzielę – ostatnią w marcu) przesuniemy zegary na czas letni – choć dopiero zacznie się wiosna. Merkury znajdzie się najdalej od Słońca (w odległości 27° na zachód) 11 III i nad ranem można próbować szukać go na wschodzie. Wenus nie widać, bo znajduje się zbyt blisko Słońca, Mars jest na granicy Wężownika i Skorpiona i wschodzi koło północy. Jowisz jest w Byku, a Saturn na granicy Barana i Byka i obie te planety widać wieczorem w zachodniej części nieba. Pełnia Księżyca wypada 9 III, a nów 25 III. Żadnych jasnych gwiazd Księżyc w marcu nie zakrywa.

T.K.



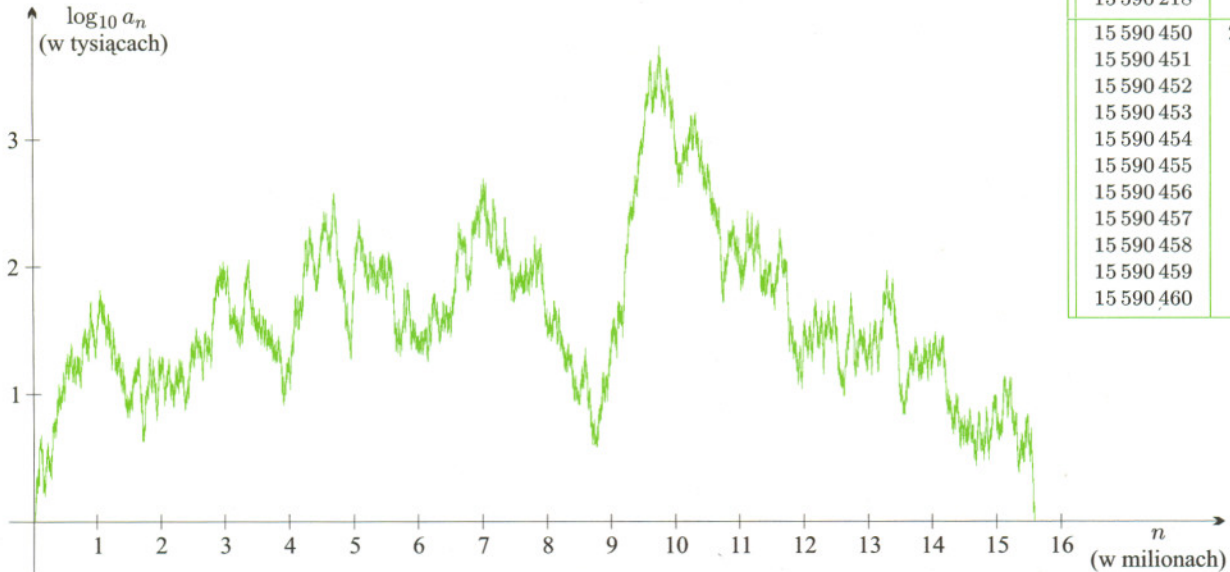
Ciąg  $(a_n)$  spada do jedynki po ponad 15 milionach wyrazów! Dokładniej,  $a_n = 1$  dla  $n \geq 15590459$ .

**DLATEGO** tak dokładnie przedstawiałem jego zachowanie w poprzednim  $\Gamma$ -limatiasie. Z tabelki widać, że przed stabilizacją na wartości 1 ciąg schodzi poniżej tysiąca, po czym na krótko odbija w górę.

Liczba 1 jest punktem stałym zdefiniowanego poprzednio przekształcenia  $f$  (tzn.  $f(1) = 1$ ), zatem wystarczy, że pewien wyraz ciągu jest równy 1, a wszystkie następne też muszą być jedynkami.

## DLACZEGO? (2)

Pewnie sądziłeś, Drogi Czytelniku, że znajdziesz tu wykres przedstawiający sto milionów wyrazów zdefiniowanego poprzednio ciągu  $(a_n)$ . Ja w każdym razie stu milionów nie obiecywałem, za to podaję wykres ponad 15 milionów wyrazów (rysunek) oraz krótką tabelkę.



$n$	$a_n$
15 590 216	691
15 590 217	883
15 590 218	677
15 590 450	299 653
15 590 451	12 763
15 590 452	1 957
15 590 453	3 751
15 590 454	4 793
15 590 455	689
15 590 456	283
15 590 457	31
15 590 458	17
15 590 459	1
15 590 460	1

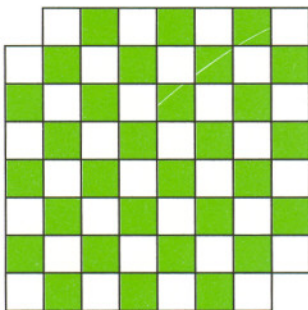
**DLACZEGO** dopiero po ponad 15 milionach iteracji funkcji  $f$  doszliśmy do punktu stałego, skoro po drodze wydawało się, że dany ciąg ucieka do nieskończoności?

**DLACZEGO?** Gdzie był ukryty nierychliwy, ale nieustępliwy mechanizm, który w końcu wędrujący pod niebiosa ciąg ściągnął na ziemię po kilkunastu milionach wyrazów?

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (24)

**ZADANIE:** Z sześcianu o krawędzi 8 usunięto z dwóch przeciwległych naroży sześciany o krawędzi 1. Rozstrzygnąć, czy tak otrzymaną bryłę można podzielić na 255 prostopadłościaków o wymiarach  $1 \times 1 \times 2$ .

**Rozwiązanie:** Nie można. Na początek przeanalizujemy analogiczne zadanie na płaszczyźnie. Szachownicę  $8 \times 8$  z usuniętymi dwoma przeciwległymi narożami kolorujemy dwoma kolorami (czarnym i białym) tak, aby pola sąsiadujące bokiem były pokolorowane różnymi kolorami (rysunek). Widzimy, że usunięte pola mają ten sam kolor (na rysunku czarny), pozostało więc 30 pól czarnych i 32 białe. Ponieważ każdy prostokąt  $2 \times 1$  wycięty (po kratkach) z szachownicy zawiera po jednym polu każdego koloru, danej figury nie można podzielić na 31 prostokątów.



Analogiczne rozumowanie stosujemy do podanej figury przestrzennej. Kolorujemy sześciany jednostkowe dużego sześcianu dwoma kolorami tak, aby sześciany mające wspólną ścianę miały różne kolory. Ponieważ przeciwległe naroża pokolorowane są tym samym kolorem, więc ich usunięcie (założymy, że są czarne) pozostawia 254 sześciany czarne i 256 białych. Każdy prostopadłościak  $1 \times 1 \times 2$  zawiera pola różnego koloru, więc podział opisany w zadaniu nie jest możliwy.

JWR

Korespondencję do  $\Gamma$ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl