

SPIS TREŚCI NUMERU 2 (321)

Wszechświat i pustka <i>Konrad Rudnicki</i>	str. 1
Ile jest wielościanów z sześcioma ścianami? <i>Marek Kordos</i>	str. 3
Zbieżność ciągów danych przez relację <i>Cristinel Mortici</i>	str. 4
Zadania <i>Marek Kordos</i>	str. 5
Drobiazgi <i>Witold Bednarek</i>	str. 6
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str. 7
Mała Delta	str. 8
Klub 44	str.10
Czerwone na niebieskie <i>Ewa Czuchry</i>	str.15
Patrz w niebo	str.16
Luty	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze: Miejsca na podium

Okladki i ilustracje: *Anna Ludwicka*
Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Internetową wersję *Małej Delt*
można znaleźć w portalu Eduseek
<http://eduseek.ids.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski
Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
– wiceprzewodniczący
Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Andrzej Hryniewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Janusz Matkowski
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda
Michał Różycka
Konrad Rudnicki
Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk
Eligiusz Złotkiewicz
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Ewa Czuchry
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Anna Rudnik
Witold Sadowski
Joanna Udalska
Anna Wojtyra
Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 853-59-61
BARTOL@MIMUW.EDU.PL
Skład systemem TeX wykonała Redakcja.
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2001 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2001 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2001 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Numerzy archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Wszechświat i pustka

Konrad RUDNICKI

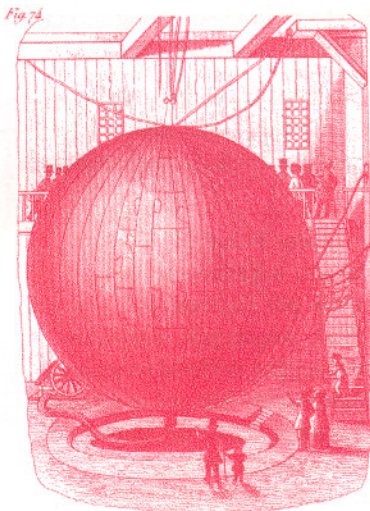
Łatwo stwierdzić, że bynajmniej nie za czasów jakichś starożytnych Rzymian, ale właśnie sto lat temu wyobrażano sobie Wszechświat jako wielką, zapewne nieskończoną pustkę, w której się gdzieś znajdują odosobnione bryły materii – ciała niebieskie. Wystarczy wziąć do ręki jakąkolwiek popularną książkę astronomiczną z początku XX wieku, aby znaleźć w niej odbicie poglądu, że nasza Ziemia jest odizolowanym ciałem niebieskim, na które działają tylko siły grawitacyjne odległych globów – Słońca, Księżyca i (trudno zauważalne) innych planet, oraz światło i ciepło Słońca. Wprawdzie Akademia Francuska jeszcze w XIX wieku przyznała się do pomyłki i uznała, że kamienie (meteoryty) mogą spadać z nieba, a więc, że w przestrzeni międzyplanetarnej krążą jakieś bryłki materii, ale łączna masa tych bryłek jest przecież znikomą. Znano też światło zodiakalne i rozumiano, że to jakieś pyły w pobliżu płaszczyzny ekliptyki, ale właśnie to światło wydawało się zjawiskiem tym bardziej tajemniczym, im konkretniej sobie wyobrażano pustotę pozostałej przestrzeni kosmicznej.

Impulsem do innego spojrzenia na Wszechświat było ostateczne stwierdzenie w pierwszej połowie minionego dopiero co wieku, że tak, jak sądzili William i John Herschlowie, mgławice spiralne są galaktykami. Ponieważ tych galaktyk nie widać w obszarach nieba położonych w Drodze Mlecznej, a raczej trudno było przypuszczać, żeby struktura Wszechświata stosowała się do przestrzennego ułożenia naszej Galaktyki, więc powstała hipoteza ekstynkcji międzygwiazdowej, ciemnej materii w płaszczyźnie galaktycznej zasłaniającej w tych kierunkach widok na daleki Kosmos. Ta hipoteza została szybko potwierdzona przez obserwacje jasności i barw gwiazd. Nasz układ gwiazdowy przestał być w świadomości astronomów pusty, lecz stał się wypełniony niezmiernie subtelną wprawdzie, ale wszędzie obecną materią pyłową. Potem nastąpiło odkrycie międzygwiazdowego gazu towarzyszącego pyłom lub występującego samodzielnie. Zarazem coraz to nowe prace dokumentowały obecność gazów i pyłów również w przestrzeni międzygalaktycznej.

Innym ważnym wydarzeniem było odkrycie promieni kosmicznych. W ciągu kolejnych dziesięcioleci XX wieku poznano wielką różnorodność cząstek elementarnych, obdarzonych ładunkami elektrycznymi i neutralnych, przychodzących z różnych obszarów Wszechświata. Niektóre z nich mają niewyobrażalnie wielką energię. Zarazem obserwacje pozaatmosferyczne pozwoliły stwierdzić, że ciała niebieskie wysyłają nie tylko fale optyczne, ale wszelkiego rodzaju promieniowanie elektromagnetyczne od długich fal radiowych aż po dziedzinę promieniowania gamma. Różnorodność sygnałów docierających z różnych okolic Wszechświata do rozmaitych ciał niebieskich, a w ich liczbie do Ziemi, wzrosła więc znacznie. Okazało się, że nasza planeta nie jest tak odizolowana od świata, jak się dawniej zdawało.

Rzeczony rozwój astronautyki przyniósł też niespodziewane odkrycia w naszym układzie planetarnym. Oto materia słoneczna okazała się nie tylko przejawiać w protuberancjach, słonecznej koronie i w świetle zodiakalnym, ale w postaci wiatru słonecznego przenikać cały nasz układ planetarny, daleko poza orbity Neptuna i Plutona. Można powiedzieć, że Ziemia i inne planety poruszają się wewnątrz owego wiatru, czyli w najbardziej zewnętrznych i stale się rozszerzających warstwach atmosfery słonecznej. Słońce działa bezpośrednio na Ziemię. Można to nawet sformułować tak, że żyjemy wewnątrz Słońca, którego działanie odczuwamy nie tylko w pływach oceanicznych, ale również w postaci burz magnetycznych, zór polarnych i innych zjawisk znanych geofizykom, radiotechnikom, a ostatnio również biologom i lekarzom. Widoczna tarcza słoneczna z plamami, pochodniami i wybuchami jest tylko jakby monitorem informującym nas, co Słońce w danej chwili robi. Poczucie pustki rozciągającej się między nami a Słońcem znikło.

Poznaliśmy, że wokół Ziemi ponad warstwami powietrza mamy jeszcze wypełnione naładowanymi cząstkami pasy van Allena, dowiedzieliśmy się o istnieniu ledwie widocznych pyłowych satelitów Ziemi.





Rozwiązanie zadania F 542.

Na dole balonu ciśnienia wewnętrzne i zewnętrzne są takie same (dlaczego?). Wyobraźmy sobie, że zmieniamy kształt balonu tak, aby był on otwartym od dołu walcem o wysokości H i polu podstawy $P = V/H$. Wtedy jedynymi siłami działającymi w kierunku pionowym na powłokę balonu są siła ciężkości i różnica parć na górną podstawę walca. W takim razie różnica ciśnień musi wynosić

$$\Delta p = MgH/V,$$

co dla wysokości $H \approx 30$ m daje różnicę około 0,5 hPa.

Jeśli w trakcie przepływu nieściśliwego płynu nie jest wykonywana żadna praca, to z prawa Bernoulliego wynika, że całkowite ciśnienie jest stałe

$$p = p_s + \frac{1}{2} \rho v^2$$

(gdzie p_s to ciśnienie statyczne, a połowa iloczynu gęstości ρ i kwadratu prędkości przepływu v odpowiada tzw. ciśnieniu dynamicznemu). W takim razie

$$\Delta p_s = \frac{1}{2} \rho (v^2 - v_0^2).$$

Jeżeli przyjmiemy, że $v_0 = 0$, to różnicę $\Delta p_s = 0,5$ hPa uzyskamy dla prędkości przepływu

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p_s}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \text{ kg/m}^2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{29 \text{ kg/22,4 m}^3}} \approx 9 \text{ m/s}.$$

Przy ponownym czytaniu napisanego zauważyłem, że podałem wybiórczo kilka nazwisk, pomijając inne, ważniejsze, a więc, że należałoby ten tekst uzupełnić przynajmniej dziesiątkami dalszych nazwisk. Ponadto do co drugiego zdania należałoby dać przypis na marginesie lub na dole strony, na czym polega wspomniane odkrycie, jaką metodą go dokonano, jakim instrumentem i kiedy. Tylko że konsekwentnie wszystko uzupełniając i wyjaśniając, otrzymałoby się przynajmniej stustronicową monografię. Po namyśle więc zamiast wielu przypisów daję tylko ten jeden. A tego, czego nie napisałem, Czytelnik zechce sam poszukać w obszernej literaturze, choćby i tej popularnej, aby rzetelnej.

Okazało się, że ziemską atmosferę nie tylko się powoli rozprasza w przestrzeni międzyplanetarnej, ale i odwrotnie – stale jest wzbogacana przez otaczające ją środowisko. Wpada w nią i pozostaje co roku wiele ton materii, między innymi w postaci żelaza meteorowego oraz wody z warkoczy lub pozostałości komet. Część tej materii opada na powierzchnię naszej planety wzbogacając skład gleby.

Odkrywano też pomalą w coraz to nowych obszarach przestrzeni międzygwiazdowej pola elektromagnetyczne. W ten sposób zapełniła się ta przestrzeń w świadomości naukowców nie tylko pyłami i gazami, ale również polami fizycznymi. Pola mają energię. Energia jest materią. Substancja międzygwiazdowa naszej, czy innej galaktyki, to nie tylko bezkształtne masy gazu i pyłu tu i ówdzie przypadkowo skupiające się w masywniejsze mgławice, lecz fizyczne pola o określonych, skomplikowanych, ale bynajmniej nie tylko chaotycznych ukształtowaniach.

W latach pięćdziesiątych Fritz Zwicky odkrył pierwsze galaktyki o znikomej jasności powierzchniowej. W ostatnich dziesięcioleciach astronom amator, ale fachowy fotograf, David Malin, wynalazł sposób ich masowego fotografowania, odkrywania – tak zwaną metodę „malinizacji”. Znalazło się tych galaktyk mnóstwo. Do dziś nie wiadomo, jak się przedstawia stosunek ich liczby do liczby galaktyk „zwykłych”. Rzecz pozostaje w trakcie badań. W każdym razie, biorąc pod uwagę ich istnienie, widać, że przestrzeń Wszechświata jest znacznie „ściślej” wypełniona galaktykami, niż dotychczas uważano. Owe galaktyki małej jasności powierzchniowej są bynajmniej nie tylko karłowate, jak sądzono pierwotnie. Z badań kinematycznych wynika, że są wśród nich również układy gwiazdowe nie ustępujące pod względem rozmiarów i masy wielkim galaktykom „normalnym”. Są one przy tym przezroczyste. Ich masy nie są więc zawarte ani w jasnych gwiazdach, ani w ciemnych pyłach. W świadomości astronomów pusta przestrzeń – tym razem pomiędzy łatwo widocznymi galaktykami – znów się zagęściła.

Dane o ciemnej międzygalaktycznej materii wygaszającej światło widzialne, a promieniującej w podczerwieni i radiowo, oraz o galaktykach o nikłej jasności powierzchniowej, które się między innymi przejawiają w subtelnej poświacie wewnątrz odległych gromad galaktyk, zostały uzupełnione wiadomościami o międzygalaktycznych polach elektromagnetycznych. Niewiele o nich wiemy, ale istnieją one ponad wszelką wątpliwość. W końcowych dziesięcioleciach XX wieku stało się już jasne, że gromady galaktyk są dość szczelnie wypełnione różnymi rodzajami materii.

Lubiącym rozmyślać o „pustych przestrzeniach Wszechświata” pozostawały jeszcze przez pewien czas obszary pomiędzy wielkimi zagęszczeniami gromad galaktyk, stanowiące bąble w „pianie Woronoja”, której strukturę podobno ma nasz Wszechświat. Te obszary nazwano nawet pustkami międzygalaktycznymi. Nim jednak upłynął XX wiek, również w nich odkryto pola elektromagnetyczne. Istnieją też poszlaki obserwacyjne o istnieniu tam ciemnych pyłów i gazów.

Można by też wspomnieć o egzotycznych formach materii występujących w galaktykach i pomiędzy nimi, jeszcze wprawdzie nie odkrytych, ale istniejących według opinii teoretyków. Ograniczamy się jednak do wspomnienia tylko tego, co już zostało obserwacyjnie odkryte.

Obraz Wszechświata z końca XX wieku jest więc całkiem różny od obrazu z jego początków. Nie pusta przestrzeń z pojedynczymi, odizolowanymi ciałami kosmicznymi, lecz skomplikowany konglomerat pól fizycznych i materii w różnych stanach skupienia, przenikających wszystko, wiążących wszystko między sobą. I choć nadal uważamy za istotne grawitacyjne oddziaływania masywnych centrów, nie sposób dziś zrozumieć Wszechświat bez uwzględnienia strug materii wyrzucanej w burzliwych procesach i poruszającej się czasem z podświetlnymi prędkościami, fal uderzeniowych i wszelkiego rodzaju wzajemnego przenikania różnych rodzajów materii. Badania klimatologiczne, a także dotyczące wpływu fal radiowych na człowieka, pokazały, że to, co się dzieje na Ziemi, jest związane w każdym razie z całą Galaktyką, jeśli nie z całym

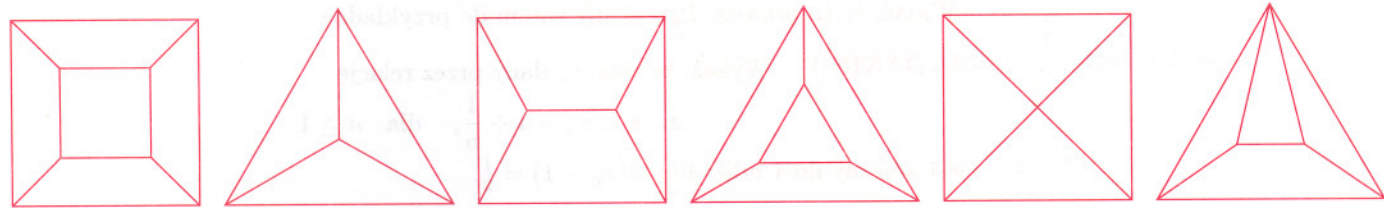
Wszecchiwatem. Powstała nowa gałąź nauki – kosmoekologia, mająca znaczenie dla praktycznych dziedzin życia.

Ten współczesny obraz wydaje się nam dziś całkiem poprawny, tak jak w początku wieku XX wydawał się obraz ówczesny. Co powiedzą potomni przy końcu XXI wieku o obrazie obecnym? Jakie będą widzieli w nim braki? Jakie nowe odkrycia do tego czasu istotnie zmieniają jego „koloryt”?

Ile jest wielościanów z sześcioma ścianami?

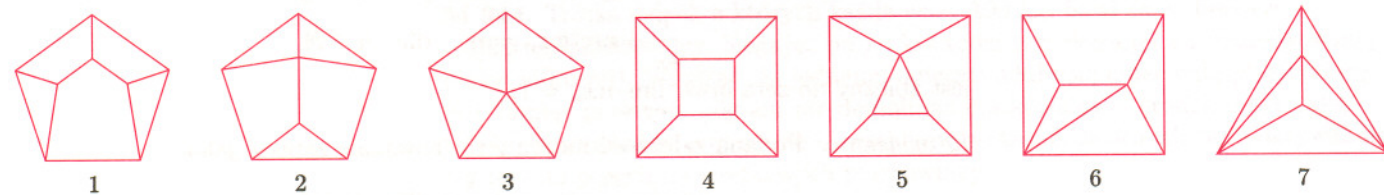
Marek KORDOS

Gdy mamy przed sobą wielościan wypukły z jedną przezroczystą ścianą, to możemy tak do niej zbliżyć oko, aby zobaczyć przez nią wszystkie jego inne ściany, krawędzie i wierzchołki. Mądrze mówimy o tym obrazku: *diagram Schlegela*. Jeśli wielościan ma wszystkie ściany takie same, to jego diagram wygląda tak samo, niezależnie od tego, która ściana jest przezroczysta. Gdy są jednak różne ściany, to diagram można narysować na kilka sposobów.

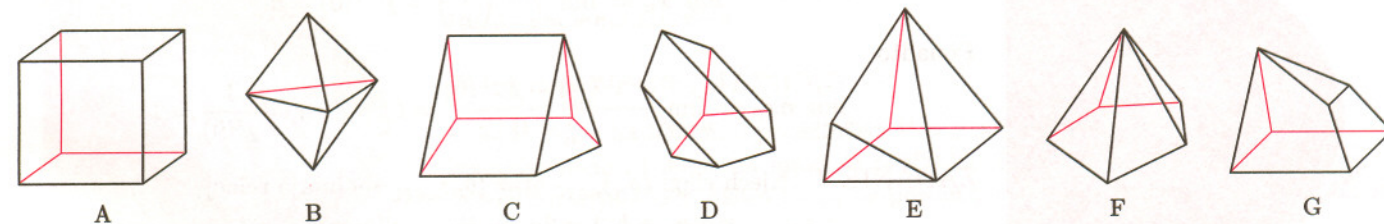


Uważamy, że wielościany są tego samego typu, gdy mają tyle samo ścian, krawędzi i wierzchołków oraz gdy można je tak wzajemnie przyporządkować, że odpowiednie ściany mają tyle samo boków, a w odpowiednich wierzchołkach zbiega się tyle samo krawędzi; np. sześciąt jest tego samego typu, co każdy graniastosłup czworokątny.

Na rysunku wyżej są (jedyne) diagramy sześciąt i czworokątów oraz po dwa różne diagramy graniastosłupa trójkątnego i ostrosłupa czworokątnego. Wielościan z czterema ścianami jest tylko jeden: to czworokąt. Nie wywoła pewnie wielu protestów stwierdzenie, że wielościany z pięcioma ścianami są dwa: graniastosłup trójkątny i ostrosłup czworokątny. Gdy jednak zapytać o wielościany z sześcioma ścianami, to mało kto będzie potrafił wskazać aż siedem różnych takich wielościanów. Czytający ten tekst będzie potrafił, bo właśnie prezentujemy diagramy wszystkich siedmiu.



Aby jednak nie miał zbyt łatwego życia, prezentujemy także siedem obrazków w perspektywie równoległej, przedstawiających te wielościany. Proszę dopasować wielościany do ich diagramów.



Kto ma także ochotę na trening intelektualny, może odpowiedzieć na pytania:

- które z tych wielościanów mogą mieć wszystkie krawędzie równe?
- ile różnych diagramów mają poszczególne sześciocienne wielościany?
- jak udowodnić, że więcej sześciociennych wielościanów nie ma?

Gdy kto chce zaimponować komuś erudycją, to może zapamiętać, że różnych wielościanów 7-ściennych jest 34, 8-ściennych 257, 9-ściennych 2606, 10-ściennych 31 538, 11-ściennych 435 641, a 12-ściennych ponad pięć milionów. Zainteresowanych dalszymi szczegółami prosimy o kontakt.

Zbieżność ciągów danych przez relację

Cristinel MORTICI

Zajmować się będziemy ciągami $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ danymi przez zależność

$$f(x_n) = a_n, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

gdzie f to pewna funkcja odwracalna, natomiast (a_n) to jakiś ciąg. Zauważmy, że w ogólnej sytuacji nie potrafimy bezpośrednio wyliczyć wyrazów ciągu x_n , a nawet jeśli potrafimy, to i tak zazwyczaj nie mamy na to ochoty. Do badania zbieżności ciągu x_n , a także tempa tej zbieżności wcale nie musimy jednak ciągu x_n wyliczać. Wystarczy, że skorzystamy z następującego stwierdzenia:

Jeżeli f i f^{-1} są funkcjami ciągłymi, a ciąg a_n jest zbieżny do a , to ciąg x_n jest zbieżny do $l = f^{-1}(a)$. Jeśli ponadto f ma ciągłą pochodną oraz $f'(l)$ jest różne od zera, to tempo zbieżności ciągu x_n określa wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - l}{a_n - a} = \frac{1}{f'(l)}.$$

Widać, że to prawda. Przejdźmy zatem do przykładów.

ZADANIE 1. Wykaż, że ciąg x_n dany przez relację

$$x_n + \ln x_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \text{dla } n \geq 1$$

jest zbieżny do 1 oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie. Funkcja $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$ jest ściśle rosnąca i różniczkowalna, więc mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = f^{-1}(1) = 1.$$

Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f^{-1}(1)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} = (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}.$$

ZADANIE 2. Wykaż, że ciąg x_n określony przez relację

$$\frac{1}{x_n} + \operatorname{arctg} x_n = n, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

jest zbieżny do zera oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1$.

Rozwiązanie. Podaną zależność możemy równoważnie zapisać jako

$$\frac{x_n}{1 + x_n \operatorname{arctg} x_n} = \frac{1}{n}, \quad \text{dla } n \geq 1.$$

Zatem dla $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \frac{2}{\pi}]$, $f(x) = \frac{x}{1 + x \operatorname{arctg} x}$, mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = f^{-1}(0) = 0.$$

Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) - f^{-1}(0)}{\frac{1}{n} - 0} = (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

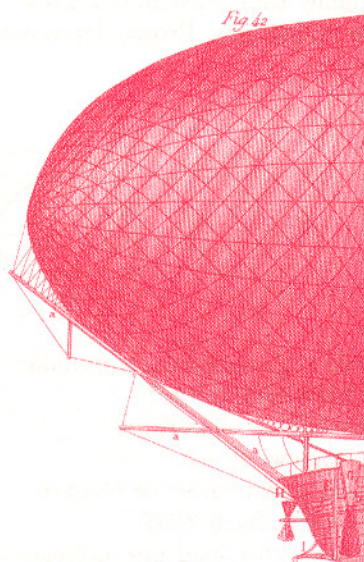
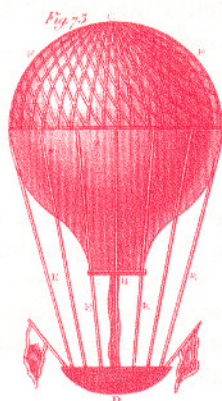
ZADANIE 3. Niech ciągi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniają relację

$$\sin(a_n + b_n) = 2a_n + 3b_n, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wykaż, że jeśli a_n dąży do zera, to b_n też. Oblicz granicę ciągu $\frac{a_n}{b_n}$.

Rozwiązanie. Ciąg $(2a_n + 3b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony, więc $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ także, bo a_n jest zbieżny. Gdyby b_n nie dążył do zera, to niech $(b_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ będzie takim jego podciągiem, że $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{k_n} = l$, gdzie $l \neq 0$. Wówczas w granicy przy n dążącym do nieskończoności z równości

$$\sin(a_{k_n} + b_{k_n}) = 2a_{k_n} + 3b_{k_n}, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$



Proponujemy też dwa zadania do samodzielnego rozwiązania.

1. Wykaż, że ciąg x_n dany przez relację $\operatorname{tg} x_n + \cos x_n = \sqrt[n]{n}$, dla $n \geq 2$ jest zbieżny do zera oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n x_n}{\ln n} = 1.$$

2. Wykaż, że ciąg x_n dany przez relację $2^{x_n} - x_n = n(\sqrt[n]{e} - 1)$, dla $n \geq 2$ jest zbieżny do 1 oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = \frac{1}{2(\ln 4 - 1)}.$$

otrzymujemy, że $\sin l = 3l$, więc $l = 0$. Ponadto mamy

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(a_n + b_n)}{a_n + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3b_n}{a_n + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{a_n}{b_n} + 3}{\frac{a_n}{b_n} + 1},$$

czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = -2$.

ZADANIE 4. Wykaż, że dla każdego rzeczywistego x istnieje takie $y = y_x$, że $\sin(x + y) = 2x + 3y$, a ponadto funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dana przez zależność

$f(x) = y_x$, jest ciągła. Oblicz $I = \int_0^{3\pi} f(x) dx$.

Rozwiązanie. Gdy $t = x + y$, to mamy

$$\begin{cases} x + y = t \\ 2x + 3y = \sin t. \end{cases}$$

Zatem $x = u(t)$ oraz $y = v(t)$, gdzie $u(t) = 3t - \sin t$, $v(t) = -2t + \sin t$.

Oczywiście $y_x = v(u^{-1}(x))$, więc po zamianie zmiennych

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{3\pi} f(x) dx = \int_0^{3\pi} v(u^{-1}(x)) dx = \int_0^{\pi} v(t) u'(t) dt = \\ &= \int_0^{\pi} (-2t + \sin t)(3 - \cos t) dt = 2 - 3\pi^2. \end{aligned}$$



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 943. Niech A_1, B_1, \dots, F_1 będą środkami boków AB, BC, \dots, FA dowolnego sześciokąta. Udowodnić, że punkty przecięcia środkowych trójkątów $A_1C_1E_1$ i $B_1D_1F_1$ pokrywają się.

Rozwiązanie na str. 6

M 944. Trójka dzieci, z których każde waży 100 kg, bawi się w berka w trójkątnej piaskownicy, biegając po jej krawędzi (zbudowanej z niezahartowanej płyty wiórowej). Wiedząc, że jednemu dziecku udało się obiecać całą piaskownicę (nie łamiąc przy tym nóg ani nie demolując piaskownicy) i środek masy całej trójki pozostał w tym czasie nieruchomy, wykazać, że środek ten pokrywał się z punktem przecięcia środkowych piaskownicy.

Rozwiązanie na str. 16

M 945. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ leżą punkty K i L odpowiednio, takie, że $BK : KC = CL : LD$. Udowodnić, że środek masy trójkąta AKL leży na przekątnej BD .

Rozwiązanie na str. 6

Przygotował Piotr ZALEWSKI

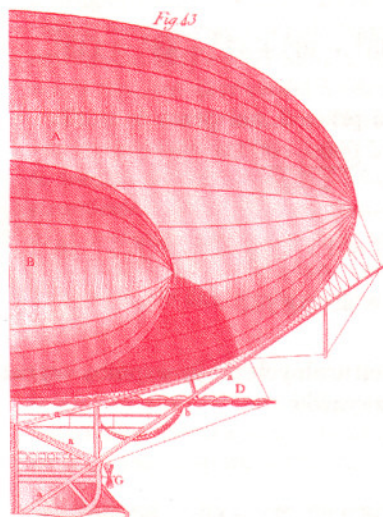
F 541. Powłoka balonu o pojemności $V = 3000 \text{ m}^3$, wraz z koszem, pełnym wyposażeniem i załogą ma masę $M = 500 \text{ kg}$. Jaka jest średnia temperatura T powietrza w powłoce, skoro lecący w powietrzu o temperaturze $T_0 = 20^\circ\text{C}$ balon ani się nie wznosi, ani nie opada?

Przyjąć, że powietrze składa się z 78% azotu, 21% tlenu i 1% argonu, których masy atomowe wynoszą odpowiednio 14, 16 i 40 g/mol.

Rozwiązanie na str. 16

F 542. Oszacować różnicę między ciśnieniem wewnętrznym a zewnętrznym w najwyższej części balonu. Jak duża różnica prędkości jest potrzebna, aby uzyskać podobną różnicę ciśnień statycznych wynikającą z prawa Bernoulliego?

Rozwiązanie na str. 2



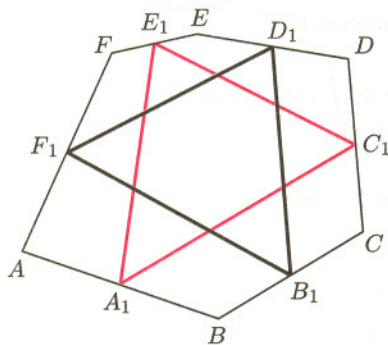
Drobiazgi

Witold BEDNAREK



Rozwiązanie zadania M 943.

Umieścimy w wierzchołkach sześciokąta masy jednostkowe i niech O będzie środkiem masy takiego układu. Ponieważ A_1, C_1 i E_1 są środkami masy par punktów materialnych $(A, B), (C, D)$ i (E, F) , więc O jest środkiem masy trzech punktów materialnych o masach 2 umieszczonych w punktach A_1, C_1 i E_1 , a więc jest punktem przecięcia środkowych trójkąta $A_1C_1E_1$ (łatwe ćwiczenie). Analogicznie wykazujemy, że O jest punktem przecięcia środkowych trójkąta $B_1D_1F_1$.



1. Jeśli A, B, C oznaczają cyfry dziesiętne i $C = A + B$, to

$$\frac{\overbrace{ACC \dots CC}^{n \text{ cyfr}} B}{\underbrace{BCC \dots CC}_n A} = \frac{AB}{BA}$$

2. Wśród liczb

101, 10101, 1010101, 101010101, 10101010101, ...

tylko 101 jest pierwsza.

3. Liczba postaci $\underbrace{99 \dots 99}_n$, poza przypadkiem $n = 1$, nie jest potęgą liczby naturalnej.

4. Są trzy przypadki, dla których pierwiastek n -tego stopnia z liczby naturalnej n -cyfrowej jest równy sumie cyfr tej liczby:

$$\sqrt[2]{81} = 8 + 1, \quad \sqrt[3]{512} = 5 + 1 + 2, \quad \sqrt[4]{2401} = 2 + 4 + 0 + 1.$$

5. Niech A_n będzie liczbą utworzoną z n ostatnich cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $5^{2^n - 1}$. Iloczyn dwóch liczb naturalnych kończących się w zapisie dziesiętnym na A_n kończy się również na A_n . Można obliczyć, że końcówki niezmiennicze przy mnożeniu wynoszą odpowiednio: $A_1 = 5, A_2 = 25, A_3 = 625, A_4 = 0625, A_5 = 90625$, itd. Podobną własność mają końcówki $B_n = 10^n + 1 - A_n$. W tym przypadku $B_1 = 6, B_2 = 76, B_3 = 376, B_4 = 9376, B_5 = 09376$, itd.

6. Równanie

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 + (x+5)^2 + (x+6)^2 + (x+7)^2 + (x+8)^2 + (x+9)^2 + (x+10)^2 = y^2$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x i y . Można sprawdzić, że pary (x_k, y_k) , określone rekurencyjnie przez

$$\begin{aligned} x_1 &= -4, & y_1 &= 11, \\ x_{k+1} &= 10x_k + 3y_k + 45, & y_{k+1} &= 33x_k + 10y_k + 165, \end{aligned}$$

spełniają to równanie. W szczególności

$$38^2 + 39^2 + 40^2 + 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 + 45^2 + 46^2 + 47^2 + 48^2 = 143^2.$$

7. Jeśli a jest liczbą naturalną niepodzielną ani przez 2, ani przez 5, to dla dowolnego k pewna potęga a^n kończy się cyframi $\underbrace{000 \dots 001}_k$.

8. Jeśli (f_n) jest ciągiem Fibonacciego: $f_1 = f_2 = 1$ i $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$, to

$$\operatorname{arctg} f_{2n+1} + \operatorname{arctg} f_{2n+2} = \operatorname{arctg} f_{2n}.$$

9. Jeśli dwa rosnące ciągi arytmetyczne liczb naturalnych mają wspólny wyraz, to ciągi te mają nieskończenie wiele wspólnych wyrazów.

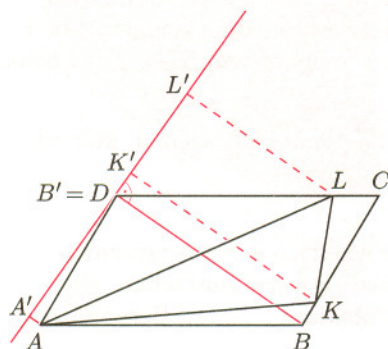
10.

$$\underbrace{11 \dots 11}_{n \text{ cyfr}} \underbrace{22 \dots 22}_{n \text{ cyfr}} = \underbrace{33 \dots 33}_{n \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{33 \dots 34}_{n \text{ cyfr}}, \quad \underbrace{44 \dots 44}_{n \text{ cyfr}} \underbrace{22 \dots 22}_{n \text{ cyfr}} = \underbrace{66 \dots 66}_{n \text{ cyfr}} \cdot \underbrace{66 \dots 67}_{n \text{ cyfr}}.$$



Rozwiązanie zadania M 945.

Niech $k = BK/BC = 1 - (DL/DC)$ i niech A', B', K' i L' będą rzutami prostokątnymi punktów A, B, K i L odpowiednio na prostą prostopadłą do przekątnej BD . Wtedy $B'K' + B'L' = kA'B' + (1-k)A'B' = A'B'$. Tak więc środek masy punktów A', K', L' jest punktem B' . Pozostaje jeszcze zauważyć, że przy rzutowaniu prostokątnym środek masy przechodzi na środek masy.



Kosmiczny klimat

Ostatni rok minionego właśnie stulecia obfitował w anomalie pogodowe. Katastrofalne powodzie nawiedziły wiele rejonów świata. W Polsce jesień była wyjątkowo ciepła z kilkunastostopniowymi temperaturami na początku grudnia.

Trudno o „lepszą” atmosferę dla konferencji poświęconej globalnemu klimatowi, która odbyła się pod koniec ubiegłego listopada w Hadze. Wbrew „sprzyjającym” okolicznościom wielcy tego świata nie zdołali przybliżyć ratyfikacji Protokołu z Kyoto opracowanego na poprzedniej takiej konferencji w 1997 roku. Ma on doprowadzić do znaczącego obniżenia emisji gazów cieplarnianych, w celu powstrzymania tzw. efektu cieplarnianego.

Sam efekt cieplarniany jest faktem. Atmosfera dobrze przepuszcza promieniowanie słoneczne, jednocześnie zatrzymując podczerwone promieniowanie ciepłe Ziemi. Głównym gazem cieplarnianym jest para wodna. Termin „efekt cieplarniany” rezerwuje się jednak często dla (domniemanego) wpływu zwiększającej się koncentracji dwutlenku węgla na ocieplanie się klimatu, które mogłoby mieć katastrofalne skutki dla całej Ziemi.

Fiasko konferencji w Hadze ma podłoże ekonomiczne. Państwa rozwijające się oraz część państw wysoko rozwiniętych (np. Stany Zjednoczone) nie jest przekonana o konieczności poniesienia kosztów ograniczenia emisji gazów cieplarnianych. Ekolodzy i naukowcy „propagujący” efekt cieplarniany rozdzierają szaty. Nie mogą jednak dłużej ignorować faktów. Choć koncentracja CO₂ rośnie, to średnia temperatura nie chce podążać za przewidywaniami modeli rozwijanych przez zwolenników teorii globalnego ocieplenia.

Jak już pisaliśmy dwa lata temu (*Delta* 2/1999), średnia temperatura wzrosła w ciągu ostatniego stulecia, ale, po pierwsze, główny wzrost temperatury przypada na pierwszą połowę XX wieku, podczas gdy 4/5 wzrostu stężenia dwutlenku węgla nastąpiło w ostatnich 50. latach, a po drugie, średnia temperatura w ostatnim milenium była wyższa niż obecnie.

Z drugiej strony rok 2000 przypadł na kulminację ciepłej fazy oscylacji południowej (el niño) i na maksimum aktywności Słońca. A właśnie atmosfera wokół wpływu aktywności Słońca na klimat istotnie zmieniła się za sprawą prac Henrika Svensmarka i jego współpracowników. Trzy lata temu odkryli oni [1,2], że średnie zachmurzenie jest odwrotnie skorelowane ze strumieniem galaktycznego promieniowania kosmicznego, modulowanego intensywnością wiatru słonecznego, który jest naturalną ochroną przed tym promieniowaniem. W ten sposób aktywność Słońca mogłaby wpływać na nasz klimat.

Czwartego grudnia 2000 roku Svensmark opublikował kolejny artykuł [3] potwierdzający korelację między natężeniem docierającego do Ziemi promieniowania kosmicznego a zachmurzeniem.

Galaktyczne promieniowanie kosmiczne jest głównym czynnikiem jonizującym atmosferę. Powstające w wyniku jonizacji aerozole stanowią zarodki kondensacji chmur.

Chmury stanowią ważny element bilansu promieniowania pochłanianego i emitowanego przez Ziemię. Z jednej strony chłodzą – przez odbijanie promieni słonecznych, z drugiej strony ogrzewają – wychwytyjąc promieniowanie podczerwone Ziemi. Efekt netto zależy od wysokości konkretnego rodzaju chmur i ich optycznej grubości. Wysokie cienkie chmury raczej „grzeją”, niskie grube raczej „chłodzą”. Obecnie szacuje się, że chmury odpowiadają za średnie chłodzenie Ziemi na poziomie 27,7 W/m².

Jednakże wpływ jonizacji na różne rodzaje chmur może być różny. Ważne jest, żeby zrozumieć, na formowanie jakich chmur ma wpływ promieniowanie kosmiczne. Ponieważ maksimum jonizacji wypada na wysokości około 15 km, a strumień promieniowania kosmicznego w umiarkowanych i małych szerokościach geograficznych jest dodatkowo osłabiany przez ziemskie pole magnetyczne, można by było sądzić, że efekt będzie najwyraźniejszy dla wysokich chmur w okolicach podbiegunowych. Nowym zaskakującym wynikiem pracy [3] jest pokazanie, że tylko proces tworzenia się niskich chmur i to w stosunkowo małych szerokościach geograficznych jest skorelowany z intensywnością docierającego do nas promieniowania kosmicznego.

Na tylnej okładce na rysunku 1 krzywe niebieskie odpowiadają przebiegom czasowym miesięcznej anomalii stopnia zachmurzenia (odstępstwo od wieloletniej średniej dla danego obszaru Ziemi i danego miesiąca w okresie od lipca 1983 roku do czerwca 1994 roku; tylko z tego okresu dokładne dane satelitarne są dostępne), natomiast krzywe czerwone odpowiadają intensywności galaktycznego promieniowania kosmicznego. Górny rysunek dotyczy chmur wysokich (powyżej 6,5 km), rysunek środkowy chmur na średnich wysokościach, a dolny chmur niskich (poniżej 3,2 km). Jak widać, tylko niskie chmury wykazują – ale za to bardzo wysoką – korelację z intensywnością promieniowania kosmicznego. Przestrzenny rozkład tej korelacji jest pokazany na rysunku 2. Górna mapka odpowiada dolnemu wykresowi rysunku 1. Dolna mapka ukazuje stopień korelacji między temperaturą niskich chmur a promieniowaniem kosmicznym. Wartość współczynnika korelacji pokazano za pomocą skali kolorów zamieszczonej obok mapek. Obszary o współczynniku korelacji większym od 0,6 na górnej i dolnej mapce stanowią odpowiednio 15,8% i 34,6% całkowitej powierzchni Ziemi. Prawdopodobieństwo uzyskania takiego stopnia korelacji przez przypadek zostało [3] oszacowane na 10⁻³. Jak widać, korelacja jest najlepiej widoczna w pasie pomiędzy zwrotnikami.

Oszacowano, że wymuszony przez wzrost aktywności Słońca dodatek do bilansu energetycznego Ziemi wyniósł 1,4 W/m² w ciągu ostatniego stulecia.

Piotr ZALEWSKI

- [1] H. Svensmark, E. Friis-Christensen, *J. Atm. Terr. Phys.* **59** (1997) 1225.
- [2] *Influence of Cosmic Rays on Earth's Climate*, H. Svensmark, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 5027.
- [3] *Low Cloud Properties Influenced by Cosmic Rays*, N.D. Marsh, H. Svensmark, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 5004.



Ale się uniósł!

– Robiliście coś ciekawego w te wakacje? – zapytał od niechcienia kuzyn Jasia, Waldek.

– Ja byłem na obozie harcerskim – odpowiedziała nic nie przeczuwająca Hania Sieczkówna.

– No to rzeczywiście super. Mundury, musztra, latryna, czy może o czymś zapomniałem? – zakpił podstarzały (prawie trzy lata od Jacka starszy) lowelas.

– A my byliśmy w górach – wyrwało się Agatce, zanim Jacek zdążył młodszą siostrę powstrzymać.

– Fascynujące! A doły też zwiedzaliście?

– Nie mówi się doły, tylko doliny – rezolutnie odpowiedziała trochę zdziwiona Agatka, a Jacek uśmiechnął się z satysfakcją. Sprawdzało się to, o czym uprzedzał Jasiak. Typ rzeczywiście

prezentował wręcz kosmiczne zadarcie nosa. Waldek skrzywił się, ale zaraz zignorował mimowolny prztyczek zainkasowany od Agatki. Smarkuła nie była godnym przeciwnikiem.

– Nie męczcie się. Nigdy nie zgadniecie, co JA robiłem.

– Opielieś trzy hektary marchewki? – rzucił Jasiak.

– Co?

– Więcej? – gospodarz udał zaskoczenie – Jeszcze hektar pietruszki?

Waldek popukał się znacząco w czoło, co nie zmieniało faktu, że, jak na razie, przegrywał na punkty 0:2.

– Latałem ... balonem! – odkrył karty.

– Do tego to nie potrzebujesz nawet specjalnego wyposażenia – nie wytrzymał przycajony do tej pory Jacek.

– Co ty powiesz – sparował Waldek – a może wiesz, jak się lata balonem?

Kontra doszła do celu. Oczywiście każdy wie, jak się lata balonem tak w ogóle. Ale tu pewnie będzie chodziło o jakiś szczegół. Może nawet o bardzo szczególny szczegół.

– Oczywiście, że wiem – odparł prawie pewnym głosem, ale uśmiezek Waldka jednoznacznie wskazywał na przymusowy parter na środku maty.



– To się jeszcze okaże – Waldek odroczył wykonanie wyroku i zaczął ze swadą wspominać swoją letnią przygodę.

– Wiecie, ile małych baloników zmieściłoby się w takim prawdziwym balonie?

– Tysiąc – krzyknął Wojtek Sieczko Junior.

– Dziesięć tysięcy – krzyknęła Agatka.

– Nie, dzieciaki, milion! – zatrzymował znawca, zanim Jacek zdążył zastanowić się, jak duży mógł być ten balon. Jeżeli rzeczywiście jest milion

razy bardziej pojemny, to musi mieć wysokość około... 20 metrów! Chyba się zgadza. Waldek nie czekał jednak, aż Jacek skończy obliczenia,

tylko opowiadał o tym, jak taki balon się przewozi, jak duży jest koszt, jak wyglądają i jak zamocowane są palniki. Następnie barwnie opisał nadmuchiwanie monstrualnej powłoki. Jacek dowiedział się, że początkowo balon napęlnia się zimnym powietrzem za pomocą specjalnej dmuchawy. Dopiero gdy powłoka przypomina już balon, rozpoczyna się zianie ogniem do wnętrza leżącego na boku potwora.

– W końcu balon podnosi się. Wtedy trzeba wskoczyć do kosza, trochę jeszcze podgazować i w górę!

– Nie bałeś się? – zapytała Agatka.

– A czego tu się bać?

– Że się wypadnie z kosza, albo że w balonie zrobi się dziurka.

– W balonie nie trzeba robić dziurki, bo on ma specjalny otwór na samej górze.

– A po co? – zapytał Wojtek.

– Żeby można było szybko wylądować – wszedł Waldkowi w słowo Jasiak. – Ten otwór jest normalnie zasłonięty. Jak chce się, żeby balon zaczął opadać, ciągnie się za taką specjalną linkę.

Wtedy ciepłe powietrze ucieka, na jego miejsce od dołu wchodzi cięższe, zimne i lot się obniża.

– Tego używa się nie tylko do lądowania – kontynuował wyjaśnienia przyjaciela Jacek – ale także do sterowania.

– Do jakiego sterowania – przerwał „doświadczony” baloniarz. – Balonem się nie steruje. Leci tam, gdzie wieje wiatr.

– Ale wiatr może wiać w różne strony na różnych wysokościach – ciągnął Jacek niespeszony. – Cała sztuka polega na tym, żeby balon umieścić na odpowiedniej wysokości.

– Mądrzycie się, jakbyście takim balonem latali – uciał Waldek – lepiej posłuchajcie. Wznieśliśmy się zaledwie na kilkanaście metrów. Nasz pilot powiedział, że takie latanie jest najciekawsze.

Przelecieliśmy nad łąką, z której startowaliśmy, zagajnikiem i znaleźliśmy się nad dość długim jeziorem. To było niesamowite. Kompletna cisza, co jakiś czas przerywana huczeniem palników. Z jeziora wylecieliśmy nad pastwisko, na którym pasło się stado krów.

– Muuu – wczuł się w opowiadanie Jasiak wywołując ogólną wesołość – rzeczywiście fascynujące.

– Żebyś wiedział. Wlecieliśmy nad stado po cichutku i wtedy wiecie, co zrobiłem?

– Chyba nie powiesz, że nagle włączyłeś palniki? – zapytała Sieczkówna.

– Jak na harcerkę, to nieźle kumasza. Włączyłem je na całą moc. Nie macie pojęcia, jak te krówka zgłupiały. Zupełnie nie wiedziały, co się dzieje.

– Przecież to jest zabronione.

– Co jest zabronione?

– Straszanie zwierząt palnikami. Do takiego latania balon powinien być wyposażony w specjalne ciche palniki.

– Znalazła się mądralińska, zupełnie jak ten nasz pilot.

– A co, objechał cię – stwierdził Jasiak.

– E tam, trochę pozgredził, ale widok był tak pocieszny, że sam nie mógł się powstrzymać od śmiechu. Po dłuższej chwili spojrzeliśmy, dokąd lecimy i – zawiesił głos – zobaczyliśmy tyralierę topoli. Lecieliśmy trochę za nisko, a topole zbliżały się nieubłaganie. Jasne było, że jeżeli szybko nie poderwiemy balonu w górę, to nie będzie wesoło.

– I co zrobiliście? – zapytał Wojtek.

– No właśnie, eksperciątka. Co trzeba było zrobić?

– Włączyć palniki – nie wytrzymał Jasiak.

– Za późno. Na podgrzanie kilku milionów litrów powietrza trzeba trochę czasu – ściał kuzyna Waldek.

– Rzucić kotwicę – krzyknęła Agatka.

– Jaką kotwicę, to nie łódka.

– Wyrzucić balast – krzyknął Wojtek.

– Balastu nie wozi się w balonach na ogrzane powietrze, tylko w balonach wypełnionych gazem lżejszym od powietrza – Waldek odrzucił i tę propozycję, patrząc znacząco na Jacka, który i tak był świadomy, że nadszedł odroczonego przymusowy parter. Nie miał pojęcia, co należało zrobić. Jedyne, co mu przychodziło do głowy, to że to musi być coś sprzecznego z intuicją.

Popatrzył na Jaśka, ale ten tylko wzruszył ramionami i zauważył, że z braku balastu można było wyrzucić Waldka. Jacek przeniósł wzrok na Hanę. Ich oczy spotkały się i wtedy ona skinęła głową. Zanim zdążył pomyśleć, powiedział.

– Pilot pociągnął za linkę od klapy – teraz dopiero spojrzął na Waldka i uchwycił grymas zaskoczenia. Trafiony, zatopiony – pomyślał.

– Żeby wylądować? – Waldek zapytał z nadzieją skazańca w głosie. – Na to też było za późno – dodał.

– Nie, żeby unieść się w górę – dobił przeciwnika Jacek.

– Jak to? – po raz kolejny nie wytrzymał Jasiak, narażając się na bazylijszkowy wzrok najlepszego przyjaciela.

– No właśnie, jak to? – podchwycił Waldek.

– Nie „jak to?” tylko czy było tak czy nie? – Jacek postanowił nie zwlekać z rozłożeniem adwersarza na łopatkach.

– A więc nie wiesz dlaczego! – wywinął się z uścisku Waldek. – Przyznaję, zgadłeś. Trafiło się ślepej kurze ziarno – dodał pogardliwie. Rzeczywiście pilot pociągnął za sznurek i zaraz go puścił, a balon grzecznie uniósł się dokładnie tyle, ile było trzeba.

– Nie bujasz? – wątpiaco zapytał Jasiak.

– Jak bum cyk cyk. Tak było.

– I może jeszcze potrafisz to wyjaśnić? – nie ustępował gospodarz.

– Oczywiście. Otwarcie na chwilę klapy powoduje ruch powietrza wewnątrz balonu w górę. Po zamknięciu klapy powietrze uderza w nią i unosi balon. Tak, tak, dzieciaki, ucicie się fizyki, bo nie znacie dnia ani godzinki – zaśmiał się i wyszedł z pokoju.

– To chyba nie jest dobre wyjaśnienie – powiedziała Sieczkówna, a Jacek pokiwał głową.

Małą Deltę przygotował Piotr ZALEWSKI

Opisana sytuacja jest zmyślona, ale powstała na podstawie letnich doświadczeń mojego kolegi. Czy potraficie podpowiedzieć redakcji, jaką odpowiedź znajdą Hania i Jacek? Czekamy na listy. Pewną wskazówką mogą być zadania fizyczne w tym numerze.

Klub 44

Regulamin

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Weterani Klubu 44 M (w kolejności

uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5),
M. Galecki (5), J. Uryga (4),
A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał,
T. Rawlik (4), M. Mazur, A. Bonk,
K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza,
P. Kumor (5), P. Gadziński (6),
K. Jedziniak, J. Olszewski (4),
L. Skrzypek (4), H. Kornacki,
T. Wietecha (4), T. Józefczyk,
J. Witkowski

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M

(alfabetycznie):

„dwukrotni”:

Z. Bartold, W. Bednorz, A. Czornik,
P. Jędrzejewicz, M. Kasperski,
H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza,
D. Kurpiel, J. Łazuka, J. Małopolski,
J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz,
K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;
„jednokrotni”:

M. Adamaszek, W. Bednarek,
T. Biegański, W. Boratyński,
M. Czerniakowska, A. Daniluk,
B. Dyda, P. Figurny, M. Fiszer,
Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza,
T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy,
J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz,
P. Kubit, T. Kulpa, A. Langer,
R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak,
J. Mańdziuk, M. Marczak, M. Matłega,
R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki,
J. Milczarek, R. Mitraszewski,
M. Mostowski, W. Olszewski,
K. Patkowski, M. Peczerski, R. Piłula,
B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman,
M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy,
Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka,
T. Szymczyk, W. Szymczyk,
K. Trautman, P. Wach, K. Witek,
A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus,
K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności

uzyskiwania statusu Weterana):

P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski,
A. Surma, P. Gworys, A. Idzik
T. Wietecha
(każdy z nich trzykrotnie osiągnął
44 punkty).

Pozostali członkowie Klubu 44 F

(alfabetycznie):

„dwukrotni”:

J. Lipkowski, J. Łazuka, P. Perkowski;
„jednokrotni”:
A. Borowski, P. Gadziński,
A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak,
B. Mikieliewicz, L. Motyka, R. Musiał,
A. Nowogrodzki, T. Rawlik, R. Repucha,
J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach,
M. Wójcicki.

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delta*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania o najmniej jednym zadaniu.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n + 2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/2000 upłynął 31 stycznia 2001). Szkieletowe rozwiązania podawane są w numerze $n + 4$.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przysyłają zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delta* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkieletowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. 10, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44 M** lub **Klubu 44 F**.

14. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44 M** (lub **Klubu 44 F**) daje tytuł **Weterana Klubu 44 M** (**Klubu 44 F**).

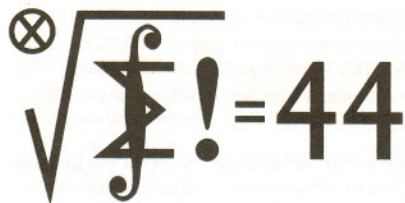
16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delta* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy zbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik powiększy stan swojego konta.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2001

415. Wyznaczyć wszystkie trójki dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c , dla których układ równań

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{a}{x}, \quad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} = \frac{b}{y}, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{c}{z}$$

ma rozwiązanie w liczbach rzeczywistych x, y, z .

416. W kartezjańskim układzie współrzędnych przestrzeni trójwymiarowej rozważamy zbiór X wszystkich punktów o współrzędnych całkowitych nieujemnych. Dwa punkty zbioru X będziemy nazywać *stowarzyszonymi*, gdy sumy ich współrzędnych są równe, a ich odległość wynosi $\sqrt{2}$. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ spełniające warunki:

- jeśli punkt $P \in X$ ma co najmniej jedną współrzędną równą zeru, to $f(P) = 0$;
- jeśli punkt $P \in X$ ma wszystkie współrzędne dodatnie, to

$$f(P) = 1 + \frac{1}{6}(f(P_1) + f(P_2) + f(P_3) + f(P_4) + f(P_5) + f(P_6)),$$

gdzie P_1, \dots, P_6 są sześcioma punktami stowarzyszonymi z P .

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/2000

Przypominamy treść zadań:

407. Dana jest liczba naturalna n oraz n -elementowy zbiór M , zawarty w zbiorze $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$, nie zawierający żadnej pary liczb o sumie równej $2n + 1$. Suma wszystkich liczb ze zbioru M jest znana i wynosi S . Obliczyć sumę kwadratów wszystkich liczb ze zbioru M .

408. Przez punkt P , leżący wewnątrz trójkąta ABC o środku ciężkości G , prowadzimy proste PD, PE, PF równoległe odpowiednio do prostych AG, BG, CG ; punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB . Wykazać, że suma pól trójkątów PAF, PBD i PCE nie zależy od położenia punktu P .

407. Zbiór M składa się z n liczb – po jednym elemencie z każdej pary $\{i, 2n+1-i\}$, $i = 1, \dots, n$. Równoważnie: po jednym elemencie z każdej pary $\{m-(m-i), m+(m-i)\}$, gdzie $m = n + \frac{1}{2}$. Tak więc $M = \{x_1, \dots, x_n\}$,

$$x_i = m + \varepsilon_i(m - i), \quad \varepsilon_i \in \{-1, +1\} \quad \text{dla } i = 1, \dots, n.$$

Wartość sumy $\sum x_i = nm + \sum \varepsilon_i(m - i) = S$ jest znana. Obliczamy sumę kwadratów:

$$\begin{aligned} \sum x_i^2 &= nm^2 + 2m \sum \varepsilon_i(m - i) + \sum (m - i)^2 = \\ &= nm^2 + 2m(S - nm) + nm^2 - 2m \sum i + \sum i^2 = \\ &= 2mS - 2m \cdot \frac{1}{2}n(n + 1) + \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1). \end{aligned}$$

Po podstawieniu $m = n + \frac{1}{2}$ otrzymane wyrażenie upraszcza się do postaci

$$\sum x_i^2 = (2n + 1)\left(S - \frac{1}{3}n(n + 1)\right).$$

408. Przyjmijmy oznaczenia (rys. 1): $\text{pole}(ABC) = S$,

$$\begin{aligned} \text{pole}(PBC) &= S_a, & \text{pole}(PBD) &= S'_a, & \text{pole}(PCD) &= S''_a, \\ \text{pole}(PCA) &= S_b, & \text{pole}(PCE) &= S'_b, & \text{pole}(PAE) &= S''_b, \\ \text{pole}(PAB) &= S_c, & \text{pole}(PAF) &= S'_c, & \text{pole}(PBF) &= S''_c. \end{aligned}$$

Przez punkt P prowadzimy prostą równoległą do BC , przecinającą boki AB i AC odpowiednio w punktach K i L . Zauważamy proporcje (rys. 2):

$$\frac{S_b}{S} = \frac{PL}{BC}, \quad \frac{S_c}{S} = \frac{PK}{BC}, \quad \frac{S'_a}{S_a} = \frac{BD}{BC}, \quad \frac{S''_a}{S_a} = \frac{CD}{BC}.$$

Niech K' i L' będą punktami boku BC otrzymanymi przez rzutowanie punktów K i L w kierunku równoległym do AG . Prosta AG połowi każdy z odcinków $KL, K'L', BC$, więc $BD - CD = K'D - L'D = PK - PL$. Stąd

$$S'_a - S''_a = S_a \cdot \frac{BD - CD}{BC} = S_a \cdot \frac{PK - PL}{BC} = \frac{S_a(S_c - S_b)}{S}.$$

Analogicznie,

$$S'_b - S''_b = \frac{S_b(S_a - S_c)}{S}, \quad S'_c - S''_c = \frac{S_c(S_b - S_a)}{S},$$

i po dodaniu stronami: $(S'_a + S'_b + S'_c) - (S''_a + S''_b + S''_c) = 0$. Oczywiście suma tych sześciu pól jest równa S . Zatem wartość sumy $S'_a + S'_b + S'_c$ jest stała, równa $S/2$, niezależnie od wyboru punktu P .

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 403 (WT=2,01) i 404 (WT=1,25) z numeru 6/2000

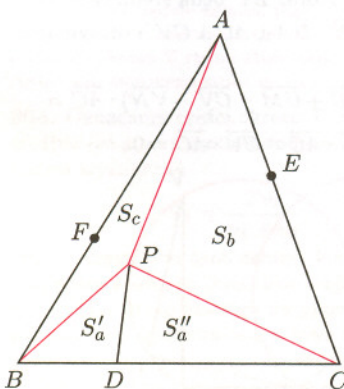
Krzysztof Zapisek	-	42,22
Bartłomiej Dyda	- 1-	41,52
Konrad Patkowski	- 1-	41,43
Bartłomiej Marczak	-	40,32
Paweł Kubit	- 1-	38,27
Andrzej Józwik	-	37,72
Piotr Kumor	- 5-	35,55
Zbigniew Galias	- 1-	35,12
Wojciech Maciak	-	34,30
Marian Lupieżowicz	-	34,24
Paulina Domagalska	-	34,09
Przemysław Gadziński	- 6-	33,44
Artur Arciszewski	-	32,53
Jacek Klisowski	-	30,80
Krzysztof Jasek	-	29,60
Nikodem Szpak	-	29,06
Janusz Olszewski	- 4-	28,22
Marcin Kasperski	- 2-	28,02
Witold Bednarek	- 1-	27,35
Światosław Gal	-	27,16
Zbigniew Sewartowski	-	26,35
Adam Woryna	-	25,42
Mieczysław Jędrzejowski	-	24,99
Monika Walkowiak	-	23,37
Lukasz Kamiński	-	22,98
Witold Bednorz	- 2-	22,43
Andrzej Nagórko	-	21,10

Legenda (przykładowo): stan konta 6-33,44 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 33,44 punktów.

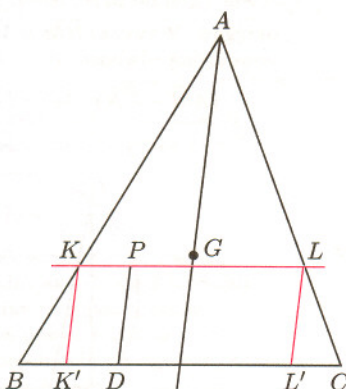
Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1998, 1999 lub 2000.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!



Rys. 1



Rys. 2

Od czasu do czasu spotykamy się z zapytaniem: skąd się biorą zadania Klubu 44? Blisko połowa (prawie wszystkie o numerach parzystych) to, jak wiadomo, propozycje uczestników ligi; o nich za chwilę. Pozostałe proponuje prowadzący ligę. Proponuje – to nie znaczy, że wymyśla; własnego autorstwa jest jedynie pewien ułamek ogólnej liczby zadań. Dalszą część stanowią „produkty uboczne” pracy naukowej zaprzyjaźnionych matematyków. Większa część zadań to rezultat pasyżytywania na materiałach z rozmaitych konkursów matematycznych, które się odbywają na świecie. Najczęściej są to przetworzenia, „wariacje na temat”, lub też zadania optycznie niepodobne do prawzorów, choć przez nie inspirowane. Nic więc dziwnego, że uczestnicy ligi czasami przysyłają tekstki: *rozwiązanie znajduje się* itd. Zabawne, że wskazywane źródła często są zupełnie inne niż te, do których zaglądał redaktor ligi. . . ; cóż, zadania krążą po świecie.

Zadania proponowane przez Czytelników są z pewnością w znacznej części autorskie, ale również wiele z nich to zapożyczenia i przeróbki. Otóż właśnie w ostatnim roku ligowym trafiło się kilka takich przypadków – wśród zadań proponowanych i przez redaktora ligi, i przez jej uczestników. (Najskuteczniejszy w wyłapywaniu takich sytuacji okazał się

* * * * *

Zadanie 389. [Pełny turniej („każdy z każdym”) bez remisów; dokładnie jeden zawodnik pokonał wszystkich innych bezpośrednio ($a \rightarrow c$) lub pośrednio ($a \rightarrow b \rightarrow c$) \Rightarrow faktycznie pokonał wszystkich bezpośrednio] (współczynnik trudności $WT = 2,37$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 11$). Niech $T_{n,k}$ oznacza turniej z udziałem n zawodników, gdy jest wśród nich dokładnie k graczy, z których każdy pokonał wszystkich innych bezpośrednio lub pośrednio. Dla jakich par liczb naturalnych (n, k) ($n \geq 2$, $n \geq k$) turniej $T_{n,k}$ jest możliwy? Takie interesujące zagadnienie analizuje **M. Peczarski** i dowodzi (stosując podwójny schemat indukcyjny), że jedyne pary (n, k) , dla których turniej $T_{n,k}$ nie jest możliwy, to $(4, 4)$ oraz $(n, 2)$. Ponadto wyznacza liczby nieizomorficznych turniejów $T_{n,k}$ dla $n \leq 5$ oraz wykazuje, że gdy $k = 3$, to ta trójka graczy tworzy cykl.

Zadanie 393. [Losowanie m różnych liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 2000\}$; dla jakich m suma tych liczb dzieli się przez 5 z prawdopodobieństwem dokładnie $1/5$?] ($WT=3,13$; $LPR=6$). Liczba 2000 pojawiła się oczywiście dla uczczenia roku milenijnego; jedyną jej istotną tu własnością jest podzielność przez 5.

Typowe uogólnienie: dane liczby naturalne $n \geq m$ oraz p – ustalony nieparzysty dzielnik pierwszy liczby n ; dla $r \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ niech S_r będzie liczbą m -elementowych zbiorów $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ takich, że $\sum x_i \equiv r \pmod{p}$. Teza:

- jeśli $p \nmid m$, to $S_0 = S_1 = \dots = S_{p-1}$ (więc $S_0 = \frac{1}{p} \binom{n}{m}$);
- jeśli $p \mid m$, to $S_0 > S_1 = \dots = S_{p-1}$ (więc $S_0 > \frac{1}{p} \binom{n}{m}$).

P. Kumor, J. Łazuka, T. Wietecha uzyskują te związki dla $p = 5$, a **M. Peczarski, A. Woryna** dla dowolnej liczby pierwszej $p > 2$, wraz ze wzorem (dla przypadku $p \mid m$):

$$S_0 = \frac{1}{p} \binom{n}{m} + \frac{p-1}{p} \binom{n/p}{m/p}.$$

(**M. Peczarski** rozważa także $p = 2$ i dowodzi, że ten wzór jest wówczas słuszny, jeśli $4 \mid m$; gdy natomiast $2 \mid m$, ale $4 \nmid m$, wzór zachodzi ze znakiem odejmowania zamiast dodawania.)

Metody uzasadnień stosowane przez wymienionych autorów są na ogół oparte na tej samej idei, co rozwiązanie firmowe: konstrukcja bijekcji między rodzinami podzbiorów wyznaczających różne reszty (oraz zanurzenia injektywnego dającego nierówność $S_0 > S_1$ gdy $p \mid m$).

Inną ciekawą metodę widzimy w pracy **J. Olszewskiego** (dla $n = 2000$, $p = 5$), który oblicza S_0 (bez rozpatrywania innych reszt), używając funkcji tworzącej

$$f(x, y) = ((1+x)(1+xy)(1+xy^2)(1+xy^3)(1+xy^4))^{400}$$

Zbigniew Skalik.) Zostały wskazane odsyłacze do znajdujących się w literaturze rozwiązań zadań 385, 386, 388, 398 i 404 – takich samych lub bardzo podobnych (zadanie 404 okazało się znanym twierdzeniem analizy kombinatorycznej, zamieszczanym w monografiach).

Do Czytelników proponujących zadania nie w pełni oryginalne kierujemy więc gorącą prośbę o podawanie, skąd zaczerpnięte zostało zadanie (lub jego bezpośredni wzorec). Jeśli ze znanej i łatwo dostępnej książki lub czasopisma, a proponowane jest w wersji nieprzetworzonej, to nie jest to dobry materiał na zadanie ligowe.

Jak przed rokiem, spotkaliśmy się we wrześniu w Warszawie w gronie kilku członków Klubu 44 M, którym czas na to pozwolił. Była, jak zwykle, sesja „szybkiego rozwiązywania zadań”, otwarta dla publiczności i wkomponowana w ciąg imprez IV Festiwalu Nauki.

Przystępujemy do corocznego omówienia wybranych zadań: prezentujemy rozwiązania zgrabniejsze od firmowych, ciekawe uogólnienia; no i patrzymy, które zadania okazały się najtrudniejsze (minimalne liczby poprawnych rozwiązań).

i wykazuje, że S_0 równa się $1/5$ współczynnika przy x^m w wielomianie

$$\sum_{r=0}^4 f(x, e^{2\pi ir/5}) = (x+1)^{2000} + 4(x^5+1)^{400};$$

tak więc $S_0 = \frac{1}{5} \binom{2000}{m} + \delta$, gdzie $\delta = \frac{4}{5} \binom{400}{m/5}$ gdy $5 \mid m$ oraz $\delta = 0$, gdy $5 \nmid m$.

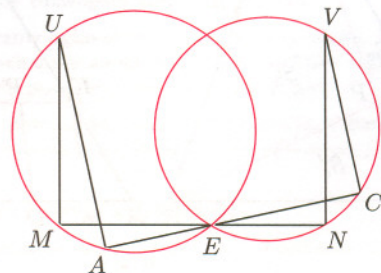
(Jest też próba uzyskania uogólnienia takiego, jak dyskutowane wyżej, bez założenia, że p jest liczbą pierwszą – ale to już nadmiar optymizmu.)

Zadanie 396. [Dane sfery S_1, S_2 o środkach O_1, O_2 oraz punkty $A, B \in S_1$, $C, D \in S_2$, $E, F \in S_1 \cap S_2$; $E \in \overline{AC}$, $F \in \overline{BD}$; $BD \parallel O_1O_2 \Rightarrow$ rzuty prostokątne odcinków AB i CD na prostą AC mają tę samą długość] ($WT=3,30$; $LPR=6$). Rozwiązanie czysto geometryczne, zbliżone do firmowego, podali **K. Patkowski** oraz **M. Peczarski**, który ponadto dołączył rozwiązanie analityczne (we współrzędnych kartezjańskich). **T. Wietecha, A. Woryna, Ł. Kamiński i J. Łazuka** stosują rachunek na wektorach. Przytoczymy w skrócie zgrabne rozumowanie **T. Wietechy**:

Teza zadania jest równoważna równości $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{CD} \cdot \overline{AC}$.

Obracamy odcinek BD wokół prostej O_1O_2 do położenia MN tak, by punkt F przeszedł na E ; wtedy $\overline{MB} = \overline{ND}$, zatem $\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{AM} - \overline{CN}$ i należy wykazać, że $(\overline{AM} - \overline{CN}) \cdot \overline{AC} = 0$. Przecinające się w punkcie E odcinki AC i MN wyznaczają płaszczyznę, która w przekroju ze sferami S_1 i S_2 tworzy okręgi o środkach leżących na prostej równoległej do MN . Niech EU oraz EV będą średnicami tych okręgów. Wówczas $\overline{UM} = \overline{VN}$, $UA \perp AC \perp CV$ i otrzymujemy dowodzoną równość

$$\begin{aligned} (\overline{AM} - \overline{CN}) \cdot \overline{AC} &= (\overline{AU} + \overline{UM} - \overline{CV} - \overline{VN}) \cdot \overline{AC} = \\ &= \overline{AU} \cdot \overline{AC} - \overline{CV} \cdot \overline{AC} = 0. \end{aligned}$$



Zadanie 400. [Wyznaczyć wszystkie pary funkcji $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ klasy C^2 : $(fg)' = f'g'$, $(fg)'' = f''g''$, $fg \neq \text{const}$] ($WT=2,90$; $LPR=4$ (6 ?)). Jest to układ dwóch równań różniczkowych. Zastosowanie mniej lub bardziej standardowych przekształceń i podstawień prowadzi do wyznaczenia dwóch rodzin rozwiązań:

$$\begin{cases} f(x) = Ae^{px} \\ g(x) = Be^{qx} \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} f(x) = A(e^{2x} - C) \\ g(x) = B(e^{2x} + C) \end{cases} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R};$$

A, B, C, p, q – stałe $\neq 0$, $p + q = pq$. W trakcie przekształceń pojawia się konieczność dzielenia przez czynniki, które mogą przyjmować wartość zero; ponadto w pewnym momencie dochodzi się do równania postaci $(\dots)(\dots) \equiv 0$, skąd wniosek, że jeden z czynników jest zerem – zgoda; ale dla pewnych x może to być pierwszy czynnik, a dla innych drugi. Istotną trudność polega na konieczności kontrolowania przedziałów, w których spełnione są uzyskiwane w kolejnych krokach równania, i na wykazaniu, że podane wyżej wzory przedstawiają *ogólne* rozwiązanie w przedziale $(-\infty; +\infty)$; bez tego wyniki mają jedynie charakter lokalny.

Trudność „globalizacji” bez zastrzeżeń pokonali **P. Kumor** i **A. Woryna**, a z drobnymi lukami – **M. Peczarski** i **J. Olszewski**. Ponadto **M. Adamaszek** i **J. Łazuka** bezbłędnie wykonali rachunki i wyprowadzili powyższe wzory, pomijając analizowanie ich dziedziny.

Zadanie 401. [$a, n \in \{2, 3, 4, \dots\}$; każdy dzielnik pierwszy liczby $a^n - 1$ jest dzielnikiem liczby $a - 1 \Rightarrow a, n = ?$] ($WT=2,54$; $LPR=8$). Rozwiązanie firmowe było nadmiernie skomplikowane. Prościej: weźmy dowolny dzielnik pierwszy p liczby n . Mamy równość

$$a^p - 1 = ((a - 1) + 1)^p - 1 = \sum_{j=1}^p \binom{p}{j} (a - 1)^j = (a - 1) \cdot K,$$

gdzie

$$(*) \quad K = p + (a - 1) \sum_{j=2}^p \binom{p}{j} (a - 1)^{j-2} \quad (\text{widać, że } K > p).$$

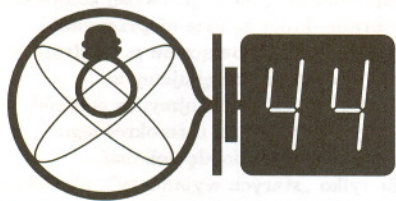
Każdy dzielnik pierwszy liczby K jest też dzielnikiem liczby $a^p - 1$, więc i liczby $a^n - 1$, więc i liczby $a - 1$, i wobec równości (*) musi być równy p . Zatem $K = p^m$ (gdzie $m \geq 2$) oraz $p \mid a - 1$. Jeżeli $p \geq 3$, to wszystkie składniki prawej strony wzoru (*), z wyjątkiem początkowego „ p ”, dzielą się przez p^2 ; sprzeczność.

Tak więc $p = 2$, i w konsekwencji $n = 2^k$. Jeśli $k \geq 2$, to liczba $a^n - 1$ dzieli się przez liczbę $a^2 + 1$, której każdy dzielnik pierwszy musi być wobec tego dzielnikiem liczby $a - 1$, więc i $a^2 - 1$; kolejna sprzeczność, bo $a^2 + 1$ (dla $a > 1$) nie jest potęgą dwójki. Stąd $k = 1$, czyli $n = 2$, oraz $K = 2^m = (a^2 - 1)/(a - 1) = a + 1$, czyli $a = 2^m - 1$.

To zgrabne rozwiązanie podali **W. Bednorz** i **P. Kumor**; także **M. Peczarski**, który zamiast wzoru (*) zastosował

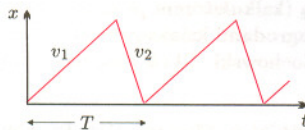
$$\text{przedstawienie } K = p + (a - 1) \sum_{j=1}^{p-1} (p - j)a^{j-1}. \text{ Praktycznie}$$

to samo rozumowanie, chociaż nie w tak zwartej formie, podali **J. Łazuka** i **K. Rałowska**; a dość podobne – **A. Woryna**. Dowody bardziej zawile (ale wciąż chyba prostsze od rozwiązania firmowego) przedstawili **B. Marczak** oraz **J. Olszewski**, który ponadto dostrzegł proste uogólnienie: jeżeli $a > b \geq 1$, $n \geq 2$, $NWD(a, b) = 1$ oraz każdy dzielnik pierwszy liczby $a^n - b^n$ jest dzielnikiem liczby $a - b$, to $n = 2$ oraz $\exists m: a + b = 2^m$.



Termin nadsyłania rozwiązań:

30 IV 2001



Rys. 1

Zadania z fizyki nr 312, 313

Redaguje Jerzy B. BROJAN

312. Równia pochyła o kącie nachylenia α spoczywała na poziomej powierzchni, a na niej położono klocek o masie znacznie większej niż masa równi. Współczynnik tarcia między równią a klockiem wynosi f_1 , a między równią a podłożem – f_2 . Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby równia ruszyła z miejsca? Jeśli ten warunek jest spełniony, to ile wynosi przyspieszenie równi?

313. Fala dźwiękowa biegnie w atmosferze Ziemi (lub innej planety) w górę, przechodząc kolejno przez warstwy coraz bardziej rozrzedzone. Co się stanie z energią tej fali, gdy gęstość będzie znikomo mała (praktycznie rzecz biorąc, będzie to już próżnia)?

Zadanie ma charakter otwarty i możliwe są różne odpowiedzi. Cenione będą staranne uzasadnienia, a w optymalnym przypadku – obliczenia wskazujące, przy jakiej gęstości omawiany mechanizm pochłaniania lub odbicia dźwięku zaczyna być istotny.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/2000

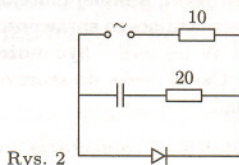
Przypominamy treść zadań:

304. Poziomy stół wykonuje okresowy ruch poziomy według wykresu (rys. 1). Jeśli na tym stole położymy klocek i zaczekamy odpowiednio długo, to jak będzie zależeć jego średnia prędkość przemieszczania się od współczynnika tarcia μ , okresu T ruchu stołu oraz prędkości ruchu jednostajnego stołu v_1 i v_2 ?

304. Oznaczmy części okresu T , w których stół porusza się wzdłuż osi x ze zwrotem dodatnim i ujemnym, przez T_1 i T_2 . Łatwo wyznaczyć

$$T_1 = \frac{Tv_2}{v_1 + v_2}, \quad T_2 = \frac{Tv_1}{v_1 + v_2}.$$

Jeśli w ciągu obu tych czasów klocek zdąży zatrzymać się względem stołu, to jego ruch względny składa się z odcinków spoczynku przeplatanych na przemian odcinkami ruchu jednostajnie opóźnionego w lewo i w prawo w tym samym przyspieszeniu $a = \mu g$ i tą samą prędkością początkową równą zmianie prędkości stołu, czyli $v_1 + v_2$. Zatem jego średnia prędkość (zarówno względem stołu, jak i względem ziemi) jest równa zeru. Tak jest wtedy, gdy czas niezbędny do zmiany



Rys. 2

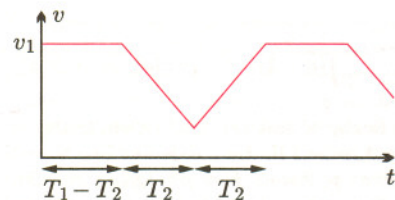
305. Do źródła napięcia przemiennego (sinusoidalnego) o amplitudzie $U_0 = 30$ V przyłączono obwód składający się z diody (doskonalej, tzn. o zerowym oporze w kierunku przewodzenia i nieskończonym oporze w kierunku zaporowym), oporników 10Ω i 20Ω oraz kondensatora o dużej pojemności (rys. 2). Do jakiego napięcia naładuje się kondensator po długim czasie? Pojemność kondensatora jest tak duża, że to napięcie osiąga wartość stałą.

prędkości o $v_1 + v_2$ jest mniejszy zarówno od T_1 , jak i od T_2 :

$$v_1 + v_2 < aT_1, \quad v_1 + v_2 < aT_2,$$

czyli $(v_1 + v_2)^2 < aT_1(v_1 + v_2)$, $(v_1 + v_2)^2 < aT_2(v_1 + v_2)$. Jeśli natomiast jeden z tych warunków nie jest spełniony (np. drugi; załóżmy, że $v_1 < v_2$), to po zakończeniu odcinka spoczynku względem stołu poruszającego się z prędkością v_1 przez cały czas T_2 klocek będzie poruszał się z przyspieszeniem a o zwrocie ujemnym – zatem powrót do prędkości v_1 potrwa tak samo długo, a wykres prędkości względem ziemi będzie miał postać przedstawioną na rysunku 3. Obliczenie średniej prędkości jest nietrudne i daje wynik

$$v_{\text{sr}} = v_1 - aT \left(\frac{v_1}{v_1 + v_2} \right)^2.$$



Rys. 3

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 301 zadaniach

Jarosław Łazuka	- Warszawa	2- 43,43
Zbigniew Galias	- Kraków	38,08
Marek Wójcicki	- Szczecin	1- 35,68
Aleksander Surma	- Myszków	3- 33,68
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	1- 33,36
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	3- 27,70
Artur Arciszewski	- Kielce	26,43
Tomasz Rudny	- Warszawa	25,20
Grzegorz Miłoś	- Mielec	24,40
Marian Łupieżowiec	- Zembrzydowice	12,99
Jacek Konieczny	- Poznań	10,86
Tomasz Wietecha	- Tarnów	3- 8,39
Marcin Misiak	- Poznań	8,16

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1998–2000 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 8 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

1. Zakorkowana butelka jest wypełniona wodą i tylko w szyjce pływa bąbelek powietrza. Jeśli ta butelka porusza się w dół z pewnym przyspieszeniem (zachowując pozycję korkiem do góry), to czy bąbelek: a) pozostanie w szyjce, b) opadnie na dno, c) to zależy od wartości przyspieszenia?

2. Jaś i Małgosia... a właściwie Jan i Małgorzata zgubili się w lesie i wołają o pomoc. Jeśli mają równie silne głosy (na otwartym terenie słychać ich z tej samej odległości), to czy głos będzie lepiej słyszalny w lesie?

3. Na ramce, której nieruchoma część ma kształt prostokątny, a ruchoma jest: a) prostą poprzeczką, b) łukiem okręgu,



rozpięta jest błonka mydlana. W którym przypadku trzeba działać większą siłą na część ruchomą, aby ją przesunąć w prawo?

Zadanie 285. [Prąd zmienny płynie przez opornik i zwojnicę; wyznaczyć przebieg napięcia na podstawie tabeli zależności I_{sk} od L] (współczynnik trudności $WT = 3,10$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 1$). Pan A. Idzik podał rozwiązanie dopasowane do tabeli lepiej od wzorcowego, ponieważ uwzględnił aż trzy człony rozwinięcia szukanej funkcji $U(t)$ na szereg Fouriera (szereg typu $A_0 + A_1 \sin(\omega t) + A_2 \sin(2\omega t)$) zamiast dwóch w rozwiązaniu wzorcowym. Ograniczenie się do tylko trzech członów tłumaczył „leniwstwem” – cóż więc mogliby powiedzieć inni, w tym i prowadzący rubrykę?

Zadanie 287. [Maksymalna energia kinetyczna elektronu powstałego z rozpadu mionu] ($WT = 1,83$, $LPR = 7$).

W zasadzie mogłaby również zachodzić sytuacja, w której klocek w żadnej chwili nie będzie spoczywał względem stołu. Jeśli jednak prędkości v_1 i v_2 nie są równe, to i czasy T_1 i T_2 nie będą równe, więc klocek stopniowo będzie się rozpędzał w kierunku dłuższej trwającego ruchu stołu, dochodząc do ruchu opisanego wyżej.

305. Oznaczmy opór górnego opornika przez R_1 , dolnego przez R_2 , zmienne napięcie źródła przez $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ (niech dodatni znak odpowiada plusowi z prawej), a szukaną wartość napięcia na kondensatorze przez U_1 (łatwo przekonać się, że $U_1 > 0$). Ustalenie się napięcia U_1 oznacza, że ładunek kondensatora zmienia się okresowo, czyli ładunek Q_1 dopływający na kondensator przez oba oporniki w tej części okresu T , gdy $U(t) > U_1$, równa się sumie ładunku Q_2 odpływającego z kondensatora przez oba oporniki w tej części, gdy $U(t) > U_1$ (ale napięcie na diodzie pozostaje dodatnie, tzn. ma kierunek zaporowy) oraz ładunku Q_3 odpływającego z kondensatora przez R_2 w czasie, gdy prąd płynie przez diodę. Nietrudno sprawdzić, że warunkiem „otwarcia” diody jest $U(t) < -U_1 R_1 / R_2$. Zatem wymienione ładunki dane są wzorami

$$Q_1 = \frac{1}{R_1 + R_2} \int (U(t) - U_1) dt, \quad Q_2 = \frac{1}{R_1 + R_2} \int (U_1 - U(t)) dt, \quad Q_3 = \frac{U_1}{R_2} \int dt,$$

gdzie pierwsza całka obejmuje przedział, w którym wyrażenie podcałkowe jest dodatnie, druga – przedział, w którym $U_1 > U(t) > -U_1 R_1 / R_2$, a trzecia – przedział, w którym $U(t) < -U_1 R_1 / R_2$. Najprościej jest od razu wyliczyć różnicę $Q_1 - Q_2$

$$Q_1 - Q_2 = \frac{2}{\omega} \frac{1}{R_1 + R_2} \left(\sqrt{U_0^2 - (U_1 R_1 / R_2)^2} - \frac{\pi}{2} U_1 - U_1 \arcsin \left(\frac{U_1 R_1}{U_0 R_2} \right) \right),$$

natomiast

$$Q_3 = \frac{2}{\omega} \frac{U_1}{R_2} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{U_1 R_1}{U_0 R_2} \right) \right).$$

Po przyrównaniu $Q_1 - Q_2 = Q_3$ podstawiamy wartości liczbowe R_1 i R_2 i numerycznie wyznaczamy $U_1 = 0,257 U_0 = 7,7$ V. (Dość podobne było przed czterema laty zadanie 226.)

Ostatni rocznik ligi fizycznej zamknęliśmy okrągłą liczbą 301 zadań (nadmiarowa jedynka jest pamiątką po przesunięciu przerwy wakacyjnej 5 lat temu, a także „wypadnięciem” jednego zadania w numerze 6/1997). Oznacza to 151 wydań *Delt*y albo około 15 lat działalności. Rocznicowe życzenia należą się wszystkim naszym korespondentom, ale w pierwszej kolejności najbardziej wytrwałym spośród nich: p. Aleksandrowi Surmie, który prawie nieprzerwanie uczestniczy w naszej lidze od samego początku, oraz niemiele mu ustępującemu p. Andrzejowi Nowogrodzkiemu, który „wystartował” od zadania 51. Ze swej strony dziękujemy za życzenia świąteczne, regularnie nadsyłane przez p. Andrzeja Idzika. Odnotujmy, że spośród siedmiu Weteranów **Klubu 44 F** właśnie p. Surma i p. Idzik są najbliżsi czterokrotnego zaliczenia 44 punktów, czego w naszym Klubie jeszcze nikomu nie udało się dokonać. Oczywiście, do udziału w naszej zabawie zapraszamy nie tylko „starych wyjadaczy”, ale także (szczególnie!) nowych uczestników. Przypominamy tylko o konieczności przestrzegania terminu wysyłania rozwiązań – ostatnio kilku klubowiczów stale go przekracza, a to może powodować niezaliczenie punktów na ich koncie.

Trzeci kolejny Turniej Rozwiązywania Zadań z Fizyki (organizowany przez redakcję *Delt*y w ramach Festiwalu Nauki) zgromadził grupę młodzieży nie tylko z liceów, ale i z gimnazjów warszawskich. Pierwsze miejsce wraz z główną nagrodą (kalkulatorem programowalnym) zdobył Konrad Zakrzewski, a następne (premiowane nagrodami książkowymi) – Robert Paciorek, Gabriel Wysocki, Adam Zadrożny i Leszek Żochowski. Obok przedstawiamy najciekawsze z zadań turniejowych.

W naszej tegorocznej korespondencji zwraca uwagę postulat p. Marcina Misiaka, aby w zadaniach było „więcej fizyki, a mniej matematyki”. Chyba rzeczywiście zbyt często nasze zadania wymagają od rozwiązującego sprawności rachunkowej, a zbyt rzadko – jakościowej, logicznej analizy zjawisk. W tej serii – być może – odpowiedzią na ten postulat będzie zadanie 313; ponadto zachęcamy Czytelników do skorzystania z p. 12 regulaminu, tj. do przysyłania własnych propozycji zadań.

Oto najważniejsze uzupełnienia i komentarze wynikające z listów naszych Czytelników:

Pan T. Rudny znalazł to zadanie w zbiorze J. Jędrzejewskiego, W. Kruczka i A. Kujawskiego – ale podana jest tam odpowiedź na nieco inne pytanie, dlatego należało ją uzupełnić.

Zadanie 288. [Dwa krążki „jojo” nawinięte na końcach nici przełożonej przez blok, warunek jednoczesnego spadania] ($WT = 2,46$, $LPR = 3$). Zadanie można było rozwiązać w dwóch liniijkach, a rozmiary krążków nie miały najmniejszego znaczenia. Pułapka się udała – jedynym, który zauważył to już na samym początku (zresztą walcząc z wątpliwościami), był G. Miłoś, natomiast pozostali męczyli się strasznie, rozwiązując równania ruchu obrotowego. Rekordzista zapisał wzorami Lagrange’a i innymi mądrościami ponad 6 stron tekstu, otrzymując skądinąd prawidłowy wynik!

Zadanie 294. [Minimalna prędkość koła zamachowego połączanego przegubowo z ciałem poruszającym się wzdłuż prostej] ($WT = 1,75$, $LPR = 3$). Pan T. Wietecha rozwiązał *analitycznie* równanie trzeciego stopnia wynikające z warunku minimalnej prędkości koła – trudno jednak powiedzieć, że dzięki

zastosowaniu wzorów Cardano rozwiązanie stało się bardziej przejrzyste. Czy w jakimkolwiek problemie fizycznym wzory te spełniają kryterium praktycznej użyteczności? Pozostałe bezbłędne rozwiązania – A. Idzik i M. Wójcicki.

Czerwone na niebieskie

Ewa CZUCHRY

W dielektrykach indukcja elektryczna \mathbf{D} dana jest wzorem

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

gdzie \mathbf{P} oznacza wektor polaryzacji elektrycznej, a \mathbf{E} natężenie zewnętrznego pola elektrycznego, ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni. Polaryzacja wiąże się ze spowodowaną przez pole elektryczne polaryzacją cząsteczek, tzn. kierunkiem ich ustawienia w stosunku do linii pola. Zależność wielkości polaryzacji, opisującej, jak duża część cząsteczek zmienia kierunek ustawienia pod wpływem pola elektrycznego, od wielkości tego pola, jest opisywana ogólnie jakąś funkcją \mathbf{f}

$$\mathbf{P} = \mathbf{f}(\mathbf{E}).$$

Dla uproszczenia założmy, że kierunek rozchodzenia się fali oraz kierunek wektora pola elektrycznego są ustalone. Pozwala to nam zapisać zależność polaryzacji P od natężenia pola E w postaci

$$P = aE + bE^2 + cE^3 + \dots,$$

gdzie a, b, c, \dots to pewne kolejne współczynniki rozwinięcia. Dla małych natężeń pola elektrycznego ważny jest tylko pierwszy, liniowy składnik, zależny od współczynnika a . W niektórych rodzajach substancji można dla odpowiednio dużych natężeń zaobserwować wpływ drugiego i wyższych czynników. Jeden z ciekawszych (i obserwowanych) efektów daje współczynnik kwadratowy – czemu się właśnie chcemy przyjrzeć. Załóżmy więc, że mamy do czynienia z dielektrykiem kwadratowym, tzn. takim, w którym zachodzi związek $P = aE + bE^2$, umieszczonym w polu elektrycznym fali elektromagnetycznej o częstotliwości ω

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

gdzie x jest jednowymiarową współrzędną, a k stałą propagacji, związaną z długością fal λ zależnością: $k = 2\pi/\lambda$. Wewnątrz dielektryka wyindukuje się pole polaryzacji

$$P = aE_0 \cos(\omega t - kx) + bE_0^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Przekształcając $\cos^2(\omega t - kx)$ następująco

$$\cos^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}(\cos(2\omega t - 2kx) + 1),$$

otrzymujemy, że

$$P = aE_0 \cos(\omega t - kx) + \frac{1}{2}bE_0^2 \cos(2\omega t - 2kx) + \frac{1}{2}bE_0^2.$$

Widzimy, że pole polaryzacji można rozłożyć na trzy składowe: podstawową o częstotliwości ω , „drugą harmoniczną” o częstotliwości 2ω i stałą. Najbardziej nas w tej chwili interesuje człon odpowiadający drugiej harmonicznnej

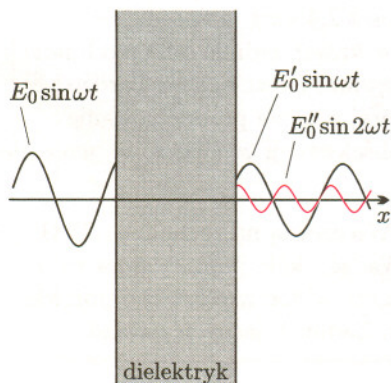
$$P_{II} = P_0^{II} \cos(2\omega t - 2kx).$$

Jest to fala polaryzacji o częstotliwości 2ω i długości $\frac{1}{2}\lambda$. Propagując się w ośrodku, fala ta indukuje falę elektromagnetyczną o tej samej częstotliwości 2ω , ale (z powodu dyspersji równej zero) innej stałej propagacji k'

$$\cos(2\omega t - k'x).$$

Druga harmoniczna została wytworzona po raz pierwszy w 1961 roku w kryształach kwarcu. Użyto wtedy lasera rubinowego o mocy 10 kW.

W początkowej wiązce światła o długości fali $\lambda_1 = 694,3$ nm (barwa czerwona) otrzymano małą domieszkę drugiej harmonicznnej o długości fali $\lambda_2 = 347,2$ nm (nadfiolet). W tym pierwszym eksperymencie wydajność wynosiła 10^{-8} , obecnie uzyskuje się wielkości rzędu 0,2, a doświadczenie jest wykonywane powszechnie w wielu laboratoriach. Lasery czerwone są z wielu powodów dużo praktyczniejsze od niebieskich, metoda powyższa pozwala więc z dobrą wydajnością uzyskiwać w laboratorium światło niebieskie, potrzebne w innych doświadczeniach.

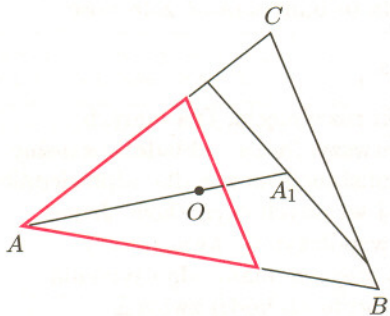




Patrz w niebo

Rozwiązanie zadania M 944.

Oznaczmy środek masy dzieci przez O . Rozpatrzmy chwilę, gdy jeden z bobasów znajduje się w wierzchołku A piaskownicy. Niech A_1 będzie środkiem masy dwóch pozostałych. Jasne jest, że A_1 leży w piaskownicy (jeśli nie na piasku, to chociaż na płycie wiórowej), a O na odcinku AA_1 i dzieli go w stosunku $AO : OA_1 = 2 : 1$. Tak więc O leży w części piaskownicy otrzymanej z piaskownicy ABC przez jednokładność o środku A i skali $2/3$. Analogicznie dostajemy, że O leży w każdej z dwóch pozostałych części piaskownicy, które otrzymujemy z całej piaskownicy przez jednokładność względem wierzchołków B, C i skali $2/3$. Ponieważ przecięcie wszystkich trzech części jest punktem przecięcia środkowych, więc mamy tezę.



Pytanie: Czy zadanie to da się uogólnić na piaskownicy innego typu?



Rozwiązanie zadania F 541.

Powietrze w tym zadaniu można uznać za gaz doskonały. Wtedy jego gęstość jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury

$$\text{bezwzględnej } \rho(T) = \frac{T_0}{T} \rho(T_0).$$

Warunkiem braku ruchu pionowego balonu jest zrównoważenie jego całkowitego ciężaru przez siłę wyporu

$$Mg + V \rho(T)g = V \rho(T_0)g.$$

Gęstość gazu doskonałego w warunkach normalnych jest równa stosunkowi średniej molowej masy cząsteczkowej do objętości molowej $V_{\text{mol}} = 22,4 \text{ dm}^3/\text{mol}$. Pamiętając, że tlen i azot występują w powietrzu w postaci dwuatomowych cząsteczek, możemy obliczyć średnią molową masę cząsteczkową powietrza $m_{\text{mol}} = 0,78 \cdot 28 \text{ g/mol} + 0,21 \cdot 32 \text{ g/mol} + 0,01 \cdot 40 \text{ g/mol} \approx 29 \text{ g/mol}$, a następnie masę powietrza wypieranego przez balon $M_0 = V \rho(T_0) = V m_{\text{mol}}/V_{\text{mol}} \approx 3884 \text{ kg}$. W takim razie średnia temperatura powietrza w balonie wynosi

$$T = \frac{T_0}{1 - M/M_0} = \frac{293 \text{ K}}{1 - 500 \text{ kg}/3884 \text{ kg}} \approx 336 \text{ K},$$

czyli 63°C .

Ewolucja gwiazd polega głównie na stopniowym zużywaniu paliwa jądrowego, czemu towarzyszy nagromadzenie się w „centralnym reaktorze” produktów przemian termojądrowych. Każda gwiazda przez większość swojego życia przerabia wodór na hel, maszyniejsze są w stanie hel wykorzystać jako paliwo i tworzyć w ten sposób cięższe pierwiastki itd. Najmasywniejsze wreszcie wybuchają jako supernowe, rozsiewając w przestrzeni wyprodukowane osobiście ciężkie pierwiastki, które w przyszłości będą służyć następnym pokoleniom gwiazd. Faza spalania wodoru trwa najdłużej. Przeciętnym gwiazdom – takim jak Słońce – zajmuje to miliardy lat. Fazy następne zachodzą szybciej, ale i tak w tempie niezauważalnym w skali życia ludzkiego. Wybuchy supernowych są już zjawiskami zdecydowanie gwałtownymi i są praktycznie jedynymi możliwymi do zauważenia i bardzo rzadko obserwowanymi przejawami ewolucji.

Tak w każdym razie było do niedawna. Jest mianowicie w kulistej gromadzie M 3 (NGC 5272), wśród wielu innych, krótkookresowa cefeida o jasności w przybliżeniu 15 mag, oznaczona symbolem V79. Jej okres zmian jasności znany był od dawna i wynosił 11,6 h. Z tego, co wiemy obecnie o wewnętrznej budowie takich gwiazd, wynikało, że gwiazda pulsuje w tzw. modzie podstawowym, czyli radialne okresowe ruchy jej materii odbywają się zgodnie w niemal całej jej objętości. Sytuacja ta trwała do lat 60 minionego wieku, do kiedy gwiazda ta była często obserwowana. Wiele nowych obserwacji gwiazdy V79 pojawiło się, gdy od 1996 roku zaczęto ją śledzić za pomocą kamery CCD. Okazało się, że główne zmiany jej jasności zachodzą teraz z okresem 8,6 h. Z dopasowania modelu budowy wewnętrznej wynikło, że gwiazda zaczęła pulsować w „pierwszym tonie harmonicznym” (jak dźwięcząca struna, gdy ją łagodnie przytrzymać w połowie długości). Specjaliści twierdzą, że przyczyną takiej jakościowej zmiany może być właśnie stosowna niezmiernie drobna ilościowa zmiana budowy gwiazdy. Widocznie ewolucja, postępująca niezwykle – w naszym rozumieniu – powoli, lecz nieustannie, doprowadziła do takiego nowego rozkładu gęstości, temperatury, tempa produkcji energii itd. wewnątrz gwiazdy, że wymusiło to pojawienie się nowego rodzaju pulsacji. Byłby to pierwszy przypadek zaobserwowania niekatastroficznych, konkretnych zmian ewolucyjnych u gwiazdy.

Tomasz KWAST

Luty

Gwiazdozbiór Kasjopei należy do najłatwiejszych do rozpoznania, gdyż jego pięć najjaśniejszych gwiazd tworzy w Drodze Mlecznej charakterystyczną rozciągniętą literę W. Jest gwiazdozbiorem okołobiegunowym, czyli nigdy nie zachodzącym w naszej szerokości geograficznej. W lutowe wieczory widzimy go na północnym zachodzie. Środkowa gwiazda Kasjopei, gamma, jest gwiazdą zmienną, a obecnie najjaśniejszą w gwiazdozbiórce. Jest to jasny olbrzym typu B0 o masie niemal 20 mas Słońca i o jasności 2,4 mag, a znajduje się w odległości 250 pc. Jest to pierwsza gwiazda, w której widmie odkryto linie emisyjne (Angelo Secchi w 1886 r.). Wokół tej gwiazdy rozciąga się bardzo rozległa (do 1,5 mld km) gazowa otoczka, w której właśnie promieniowanie gwiazdy powoduje wzbudzenie atomów, a w konsekwencji wyświecanie przez nie linii emisyjnych.

Wenus jest w Rybach i widać ją jako Gwiazdę Wieczorną na zachodzie; 22 II osiąga swoją największą jasność. Mars jest w Wadze i koło północy dopiero wschodzi. Jowisz i Saturn są w Byku i obie planety widać w pierwszej połowie nocy. Pełnia Księżyca wypada 8 II, a now 23 II. Żadnych jasnych gwiazd w lutym Księżyc nie zakrywa.

T.K.

DLACZEGO? (1)

Rozważmy ciąg określony następująco. Niech $a_0 = 6803$ oraz niech dla $n \geq 0$

$$a_{n+1} = f(a_n),$$

gdzie $f(k)$ jest liczbą $23k + 1$ podzieloną przez $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$, przy czym a, b, c, d są największe możliwe. Innymi słowy, funkcja f mnoży liczbę przez 23, dodaje 1, a następnie usuwa z rozkładu na czynniki pierwsze czynniki jednocyfrowe. Natomiast a_n jest n -krotną iteracją funkcji f zastosowaną do liczby 6803.

Przyjrzyjmy się dokładnie ciągowi (a_n) . Początkowe wyrazy ciągu podane są w tabeli. Widzimy, że ciąg ma tendencję rosnącą, chociaż nie jest monotoniczny – największy wyraz w tabeli to 10-cyfrowe a_{14} . Zaznaczenie na wykresie wartości a_n dla $n \leq 1000$ pokazuje oblicze ciągu (rys. 1). Widzimy, że jest on dosyć kapryśny, ale ogólnie ma tendencję wzrostową. Odnotujemy, że $a_{33} = 96\,345\,474\,713$ ma 11 cyfr, potem ciąg spada do 6-cyfrowego $a_{55} = 255\,709$, a największy wyraz a_{245} ma 31 cyfr.

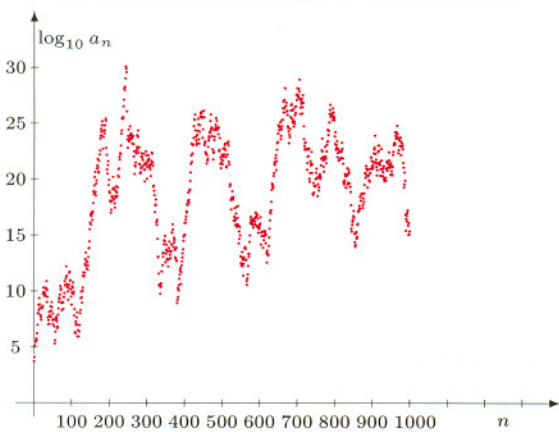
Patrząc na dziesięć tysięcy wyrazów ciągu (rys. 2), znajdujemy nowy rekord a_{9975} mający 76 cyfr. Po drodze jednak ciąg spada do 15-cyfrowego a_{6609} . Zaraz potem ciąg wędruje w setki cyfr. Na rysunku 3 widzimy, jak po osiągnięciu lokalnego minimum a_{70217} z 287 cyframi ciąg odbija w górę, aby ustanowić 656-cyfrowy rekord a_{83618} .

Milion wyrazów ciągu (rys. 4) nie pokazuje nic rewelacyjnego. Wprawdzie ciąg schodzi w dół do 204 cyfr przy a_{166083} , ale później idzie w górę do 1733-cyfrowego a_{903460} . Dziesięć milionów wyrazów (rys. 5) – spadek do 590-cyfrowego $a_{8761878}$ jest szybko zrekompensowany gwałtownym wzrostem do nowego rekordu $a_{9746404}$ z 3736 cyframi (podanie tak dużej liczby zajęłoby prawie cały Γ-limatias).

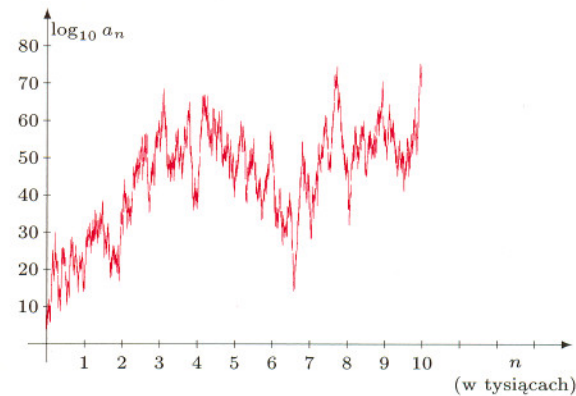
No i popatrz teraz, Drogi Czytelniku, co ja robię. Wziąłem sobie jakiś ciąg. Trochę kapryśny, ale uciekający do góry. Liczę miliony jego wyrazów, które idą w tysiące cyfr i ekscytuję się jego kolejnymi wznętami i upadkami.

n	a_n
0	6803
1	15647
2	179941
3	344887
4	440689
5	422327
6	693823
7	531931
8	2039069
9	11724647
10	134833441
11	129215381
12	742988441
13	267011471
14	3070631917
15	840768263
16	386753401
17	92659669
18	59199233
19	34039559
20	391454929

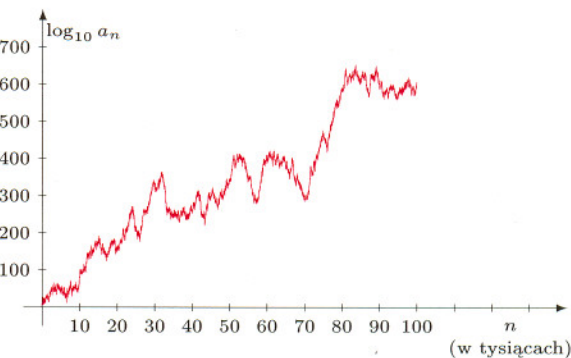
DLACZEGO to robię?
DLACZEGO?
 Czyżbym naprawdę
 nie miał nic ciekawszego do opowiedzenia?



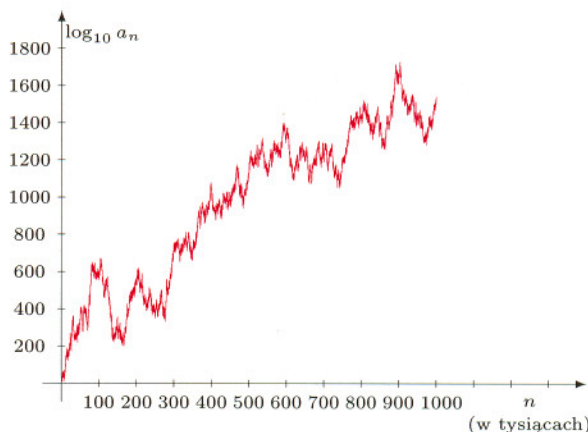
Rys. 1



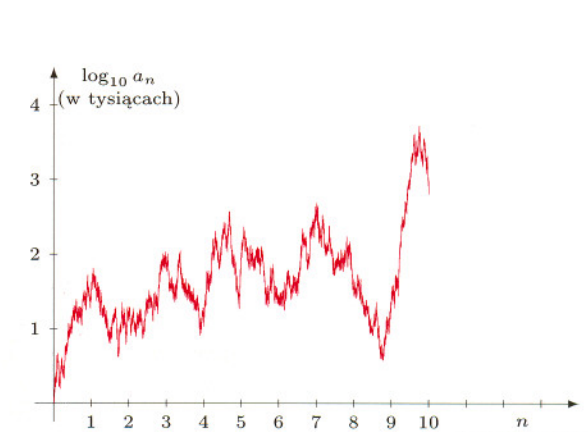
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl