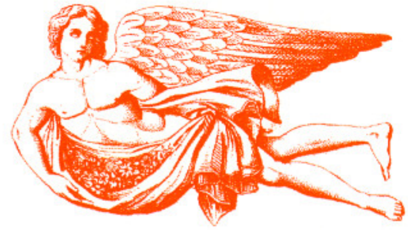
delta

$\hbar=6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s $\pi=3{,}141592...$



SPIS TREŚCI

NUMERU 12 (319)

W następnym numerze:

Krzywe eliptyczne

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*

Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim
http://www.mimuw.edu.pl/delta/

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 853-59-61
BARTOL@MIMUW.EDU.PL
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2001 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2001 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 2001 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.

   Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: www.ruch.pol.pl, e-mail: prenumerata@okdp.ruch.com.pl
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną

do 5 XII	– na I	kwartał roku następnego,
do 5 III	– na II	kwartał roku bieżącego,
do 5 VI	– na III	kwartał roku bieżącego,
do 5 IX	– na IV	kwartał roku bieżącego,

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Nowa geometria

Zbigniew MARCINIAK, Witold SADOWSKI

Tematem jednej z ostatnich Szkół Matematyki Poglądowej (Grzegorzewice, styczeń 2000) było pytanie: *Skąd to się wzięło?* Naszym zdaniem matematyka wzięła się ze zmagań z rzeczywistością pozamatematyczną. Spróbujemy tę tezę zilustrować na przykładzie bardzo starej i poglądowej dyscypliny matematyki, jaką jest geometria.

Ludzi od niepamiętnych czasów fascynuje przestrzeń. Już Starożytni dostrzegli, że panuje w niej ład, który da się sprowadzić do niewielkiej liczby niemal oczywistych zasad. W *Elementach* Euklides formułuje te najprostsze zasady, a następnie wywodzi z nich praktycznie całą ówczesną wiedzę na temat geometrii przestrzeni, w której żyje.

Warto wiedzieć, że geometria riemannowska powstała ponad pół wieku wcześniej niż teoria względności.

Przez ponad dwa tysiąclecia pochodzący od Euklidesa opis przestrzeni był całkowicie zadowalający. Dopiero na początku XX wieku sformułowana przez Einsteina ogólna teoria względności doprowadziła do radykalnej zmiany w pojmowaniu przestrzeni fizycznej w skali kosmicznej, a w konsekwencji – do rewolucji w geometrii. Nowa geometria musiała sobie poradzić z nowymi faktami fizycznymi: otaczająca nas przestrzeń nie jest sztywna i wszędzie jednakowa, lecz „ugina się” pod ciężarem pojawiających się w niej gdzieniegdzie wielkich mas, a w dodatku bez przerwy rozciąga się jak powierzchnia nadmuchiwanego balonu.

Podstawowe pojęcia klasycznej geometrii mają sens w geometrii riemannowskiej, choć czasem występują pod inną nazwą. Na przykład odpowiednikiem prostych Euklidesa są linie geodezyjne, czyli linie, po których w małych kawałkach najkrócej idzie się z jednego punktu do drugiego.

Adekwatnym jej modelem staje się zatem obiekt, którego tylko małe kawałki wyglądają jak przestrzeń Euklidesa $\mathbb{R}^3$. Jest on „pozszywany” z euklidesowych map, na których mamy współrzędne i gdzie możemy uprawiać klasyczną geometrię i mechanikę: badać tory pocisków, wyznaczać ich prędkości itd. Gładkość zszycia gwarantuje, że nie wystąpi sprzeczność, gdy pocisk przeleci z jednej mapy do drugiej. Tak określona geometria nazywana jest od nazwiska jej twórcy, Bernharda Riemanna, geometrią riemannowską.

Według klasycznego modelu atom wodoru, którego rozmiar jest rzędu 10^{-10} m, składa się z 10 tysięcy razy mniejszego jądra oraz jednego maleńkiego elektronu. Ponieważ jądro ma ładunek dodatni, a elektron ujemny, to ich wzajemne przyciąganie powinna równoważyć jakaś siła, chroniąca atom przed zapaścią. Jednakże przypuszczenie, że (szybki) ruch obiegowy elektronu chroni go przed upadkiem na jądro, prowadzi do sprzeczności z prawami fizyki. Wiemy bowiem, że ładunek elektryczny poruszający się w przestrzeni ruchem krzywoliniowym emituje promieniowanie, przez co traci część swojej energii. W konsekwencji, elektron powinien spaść na jądro po mniej więcej 10^{-11} s, co oczywiście nie ma miejsca.

Od połowy lat osiemdziesiątych XX wieku zachodzi w geometrii kolejna rewolucja: miejsce klasycznej już geometrii riemannowskiej zaczyna zajmować tzw. geometria nieprzemienna.

Źródło tej nowej geometrii jest tej samej natury co źródło geometrii riemannowskiej. Podczas gdy geometria riemannowska powstała z korekty naiwnego przypuszczenia, że przestrzeń w skali kosmicznej jest dokładnie taka, jak w zakresie odległości znanych z naszego codziennego życia, tak geometria nieprzemienna rodzi się z obserwacji mikroświata. Okazuje się bowiem, że zgodny z geometrią Euklidesa pogląd, iż najmniejszą, graniczną figurą jest bezwymiarowy punkt, każdy zaś obiekt fizyczny, choćby najmniejszy, jest bryłą, nie wytrzymuje konfrontacji z doświadczeniem!

Fakt, że energia elektronu przyjmuje tylko niektóre, dyskretne wartości – choć z punktu widzenia klasycznej mechaniki, energia elektronu powinna w pewnym zakresie zmieniać się w sposób ciągły w zależności od ciągłej zmiany odległości elektron-jądro – można zaobserwować, gdy przez szklaną rurkę napełnioną wodorem przepuścimy światło, które następnie przepuścimy przez pryzmat. Na ekranie umieszczonym za pryzmatem ujrzymy charakterystyczny układ linii – widmo atomu wodoru. Jest to jego unikalny „podpis chemiczny”; każdy pierwiastek chemiczny ma swój indywidualny układ takich linii.

Planetarny model atomu wodoru, w którym elektron krąży wokół jądra niczym Ziemia wokół Słońca, prowadził do sprzeczności obserwacji z prawami klasycznej fizyki, które przewidywały niemal natychmiastowy upadek elektronu na jądro. Ponadto, wbrew klasycznym przewidywaniom, atom wodoru nie emituje światła o dowolnych, lecz tylko o ściśle określonych częstotliwościach. Częstotliwości te określa wzór Rydberga

$$(*) \qquad \nu = \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) R$$

dla pewnych liczb naturalnych n, m i pewnej stałej R. Z tego potwierdzonego obserwacjami wzoru wynika, że tylko niektóre pary częstotliwości można dodać, by otrzymać częstotliwość też występującą w widmie – jest to tzw. reguła kombinacji. Tymczasem wg klasycznej teorii każde dwie częstotliwości po dodaniu powinny dać trzecią...

Heisenberg był pierwszym uczonym, który zauważył, że tajemnicza reguła kombinacji zachowuje się jak pewna algebra nieprzemienna. Rozważmy bowiem częstotliwości postaci $\nu_i = R/i^2$, gdzie i przebiega pewien skończony zbiór

Heisenberg, badając określoną tu algebrę, był w stanie objaśnić nie tylko częstotliwości kresek obserwowane w widmie atomu, ale także ich intensywności.

liczb I. Częstotliwości występujące we wzorze $(*)$ są postaci $\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j$, tj. można je poindeksować zbiorem $\Delta = \{(i,j) : i, j \in I\}$. Częstotliwości ν_{ij}, ν_{kl} można dodać tylko wtedy, gdy $j = k$. Otrzymujemy wtedy $\nu_{il} = \nu_{ij} + \nu_{jl}$. Mamy zatem w zbiorze Δ działanie „·” określone wzorem

$$(i,j)\cdot(k,l) = \begin{cases} (i,l) & \text{gdy } j = k, \\ 0 & \text{gdy } j \neq k. \end{cases}$$

Każdy widzi, że wynik powyższego działania zależy od kolejności czynników! Tak w teorii przestrzeni pojawiła się algebra nieprzemienna.

⋆ ⋆ ⋆

Funkcje ciągłe na przestrzeni X i przyjmujące wartości rzeczywiste (lub zespolone) tworzą algebrę, gdyż możemy je dodawać i mnożyć podobnie jak liczby rzeczywiste. Element neutralny dodawania to funkcja tożsamościowo równa 0, natomiast element neutralny mnożenia to funkcja tożsamościowo równa 1.

Od dawna wiadomo, że z każdą przestrzenią X (w której określono zbiory otwarte) związana jest w naturalny sposób pewna algebra przemienna. Jest to algebra $C(X)$ funkcji ciągłych na X o wartościach rzeczywistych. Jakie informacje o przestrzeni X możemy odczytać z algebry $C(X)$? Zauważmy na początek, że nie można oczekiwać, by sama znajomość budowy algebry $C(X)$ pozwalała nam np. rozstrzygnąć, czy przestrzeń X jest kulą, czy sześcianem. Można bowiem łatwo wykazać, że jeśli przestrzeń X da się bez rozerwań i zlepień przekształcić na przestrzeń Y (o takich przestrzeniach mówimy, że są topologicznie takie same), to algebry $C(X)$ i $C(Y)$ są identyczne (tak samo zbudowane). Na szczęście algebra $C(X)$ niesie w sobie informacje o tych cechach przestrzeni X, które nie zmieniają się, gdy przestrzeń X poddajemy rozciąganiu lub ściskaniu jak gumową zabawkę. Okazuje się np., że za pomocą algebry $C(X)$ możemy już odróżnić sytuacje, gdy X to sfera, od przypadku, gdy X to powierzchnia dętki rowerowej czy też sfera z dwoma uchami. Kluczowe znaczenie ma twierdzenie Gelfanda–Najmarka, które głosi, że istnieje wyróżniona klasa algebr przemiennych (zwanych przemiennymi C^*-algebrami z jedynką), reprezentujących wszystkie przestrzenie zwarte! Każda algebra należąca do tej klasy koduje w sobie całą informację o topologii dokładnie jednej przestrzeni zwartej X, każda zaś przestrzeń zwarta posiada algebrę funkcji ciągłych o wartościach zespolonych należącą do tej klasy. Zatem wszystko to, co możemy powiedzieć o przestrzeniach zwartych i przekształceniach ciągłych między nimi, potrafimy jednoznacznie przetłumaczyć na język algebry!

Algebra z jedynką to algebra, w której istnieje element neutralny dla mnożenia. C^*-algebra to algebra, której elementy można mnożyć przez liczby zespolone i w której określono operację $*$, spełniającą warunki:

$$(a^*)^* = a,$$
$$(a+b)^* = a^* + b^*,$$
$$(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*,$$
$$(ab)^* = b^* a^*.$$

⋆ ⋆ ⋆

Jaki jest pożytek z powyższego utożsamienia topologii z algebrą? Otóż otrzymujemy szansę na uprawianie geometrii nieprzemiennej. Postąpimy bowiem podobnie jak wtedy, gdy chcemy uprawiać geometrię w przestrzeniach wymiaru wyższego niż trzy. Przypomnijmy – robimy to tak: w dobrze nam znanej przestrzeni trójwymiarowej wprowadzamy układ współrzędnych, utożsamiając ją z obiektem algebraicznym: zbiorem $\mathbb{R}^3$ trójek (x_1, x_2, x_3) liczb rzeczywistych. Następnie odrzucamy założenie, że współrzędne są tylko trzy, i otrzymujemy ogólniejszy obiekt algebraiczny $\mathbb{R}^n$, w którym wprowadzamy pojęcia geometryczne przez analogię z $\mathbb{R}^3$.

Przestrzeń zwarta to taka przestrzeń, w której z dowolnego ciągu punktów można wybrać część tego ciągu zbieżną do pewnego punktu tej przestrzeni.

Analogicznie, w geometrii nieprzemiennej zastępujemy przestrzeń X przez C^*-algebrę przemienną, a następnie odrzucamy założenie przemienności. Ogólniejsze, „nieprzemienne” przestrzenie to hipotetyczne obiekty, których algebry funkcji ciągłych są nieprzemienne. Istnieją (albo nie istnieją) one w takim samym sensie, w jakim istnieje (lub nie – rzecz gustu) przestrzeń czterowymiarowa.

⋆ ⋆ ⋆

Tworzenie geometrii nieprzemiennej polega na budowaniu słowniczka, który każde pojęcie topologiczne tłumaczy na język C^*-algebr. Jest to możliwe na mocy twierdzenia Gelfanda–Najmarka. Sztuka polega jednak na tym, by po stronie algebraicznej nie użyć ani razu przemienności algebry. Wtedy dane pojęcie topologiczne będzie funkcjonowało także w przestrzeniach nieprzemiennych, które zdają się lepiej opisywać mikroświat. Oczywiście, do uprawiania geometrii (i fizyki) sama topologia nie wystarczy. Musimy się jeszcze nauczyć, jak w przestrzeniach nieprzemiennych wprowadzać inne pojęcia matematyczne. To wszystko można zrobić, ale to już temat na inną opowieść...

W poprzednim numerze *Delty* na stronie 2 większość przecinków została przez automat zamieniona na literę Γ. Czytelników i Autorów przepraszamy.

Redakcja

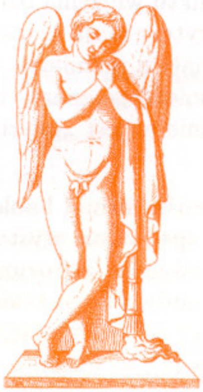
Czy $P \neq NP$? – wyzwanie dla algorytmików XXI wieku

Krzysztof DIKS

Nasze rozważania na temat problemu „Czy $P \neq NP$?”, w skrócie problemu PNP, rozpoczniemy od podania algorytmu rozwiązującego następujące zadanie:

Dane: Formuła boolowska ϕ w postaci koniunkcji zmiennych lub ich negacji.

Pytanie: Czy formuła ϕ jest spełnialna, tzn. czy istnieje takie wartościowanie zmiennych, dla którego formuła ϕ przyjmuje wartość 1 (prawda)?



Przykład: Formuła $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_1$ przyjmuje wartość 1 tylko dla wartościowania $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

Łatwo zauważyć, że formuła ϕ (w postaci z powyższego zadania) jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy nie występują w niej jednocześnie zmienna i jej negacja. Ta obserwacja pozwala sformułować bardzo prosty algorytm rozwiązujący nasze zadanie:

> Dla każdej zmiennej x z ϕ sprawdź, czy w ϕ występują jednocześnie x i $\neg x$. Jeśli taka zmienna nie istnieje, to ϕ jest spełnialna. W przeciwnym razie ϕ nie jest spełnialna.

Sprawny programista bardzo szybko zaprogramuje powyższy algorytm. Musimy tylko sprecyzować, co oznacza sformułowanie *Dana jest formuła boolowska*. Innymi słowy, musimy podać *rozsądny* sposób kodowania formuł. Jednym z możliwych może być następujący sposób kodowania: Przyjmujemy, że zmienne występujące w formule są ponumerowane kolejno $1, 2, \ldots$ Formułę kodujemy jako ciąg liczb oddzielonych średnikami. Pierwszą liczbą w ciągu jest liczba n równa liczbie literałów w formule. Po niej występuje n liczb ze zbioru $\{-n, -(n-1), \ldots, -1, 1, 2, \ldots, n\}$. Jeśli i-tym literałem jest zmienna x_k, to za i-tą spośród tych liczb bierzemy k, jeśli zaś i-tym literałem jest $\neg x_k$, to i-tą liczbą będzie $-k$.

Literał to wystąpienie zmiennej lub jej negacji. W formule z przykładu mamy cztery literały.

Kodem przykładowej formuły jest $4; 1; -2; 3; 1$.

W każdym rozsądnym kodowaniu przyjmuje się ponadto, że do kodowania liczb stosujemy dowolny zapis o podstawie co najmniej 2 (najczęściej właśnie o podstawie 2). Zauważmy, że przy takim kodowaniu długość kodu formuły wynosi co najwyżej $cn \log n$, dla pewnej stałej c. Długość kodu danych będziemy nazywali *rozmiarem* zadania. W przedstawionym powyżej algorytmie literały są porównywane między sobą. Nawet przy bardzo naiwnej implementacji tego algorytmu liczba takich porównań wyniesie co najwyżej n^2. Jeśli uwzględnimy, że porównywanie kodów dwóch literałów wymaga $\log n$ porównań bitów, to liczbę wszystkich operacji da się ograniczyć przez $n^2 \log n$, a idąc dalej możemy powiedzieć, że liczbę operacji wykonywanych przez algorytm da się ograniczyć przez r^k, gdzie r jest rozmiarem danych, a k stałą całkowitą większą od 0. (W naszym przypadku za k można wziąć 3.) W takim przypadku mówimy, że algorytm rozwiązuje zadanie w czasie wielomianowym.

> Klasą P nazywamy zbiór tych zadań algorytmicznych, dla których istnieją algorytmy rozwiązujące je w czasie wielomianowym.

Utrudnijmy teraz nasze wyjściowe zadanie. Powiemy, że formuła boolowska jest *w postaci koniunkcyjno-normalnej* (z ang. *w postaci CNF*), jeśli jest koniunkcją formuł (klauzul), z których każda jest alternatywą zmiennych lub ich negacji, być może zdegenerowaną do jednego literału. Formuła jest w *postaci k-CNF*, jeśli w każdej klauzuli występuje co najwyżej k literałów.

Proszę wykazać, że każdą formułę boolowską można przekształcić do równoważnej (ze względu na spełnialność) formuły w postaci 3-*CNF* o długości tylko wielomianowo większej od długości formuły wyjściowej.

Oto przykład formuły w postaci 2-CNF:

$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$.

Proszę spróbować znaleźć algorytm, który rozwiązuje to zadanie w czasie liniowym, tj. w czasie proporcjonalnym do długości formuły.

Pokazaliśmy, że zadanie spełnialności formuł w postaci 1-*CNF* można rozwiązać w czasie wielomianowym. To stwierdzenie pozostaje w mocy także dla formuł w postaci 2-*CNF*. Sytuacja zmienia się diametralnie, gdy weźmiemy $k \geq 3$. Nie są znane algorytmy, które rozwiązywałyby to zadanie w czasie wielomianowym, nawet dla wielomianów bardzo dużego stopnia, np. 1000. Najlepsze znane algorytmy wymagają czasu co najmniej c^r, gdzie c jest stałą większą od 1, a r jest długością kodu formuły. (Myślę, że Czytelnik nie będzie miał żadnego problemu ze znalezieniem rozsądnego kodowania formuł w postaci koniunkcyjno-normalnej.) O takich algorytmach mówimy, że działają w czasie wykładniczym. Z praktycznego punktu widzenia oznacza to, że nawet na współczesnych komputerach takie algorytmy mają szanse dać wynik w rozsądnym czasie tylko dla danych o bardzo małym rozmiarze. Można zaryzykować stwierdzenie, że jeżeli dla zadania algorytmicznego znamy tylko rozwiązania działające w czasie wykładniczym, to zadanie to jest „praktycznie algorytmicznie nierozwiązywalne".

Jaką interesującą własność ma jeszcze zadanie spełnialności formuł boolowskich? Gdyby ktoś chciał przekonać nas, że dana formuła jest spełnialna, wystarczy, żeby podał odpowiednie wartościowanie zmiennych. Zauważmy, że rozmiar takiego wartościowania nie jest większy od długości formuły. Mając takie wartościowanie, w czasie wielomianowym można obliczyć odpowiadającą mu wartość logiczną formuły. Jeśli tą wartością jest 1 (prawda), to formuła jest spełnialna. Wartościowanie, dla którego formuła jest spełnialna, nazywamy *świadectwem* spełnialności. Algorytm, który sprawdza spełnialność formuły dla danego wartościowania, nazywamy *algorytmem weryfikacji*. Innymi słowy, algorytmu weryfikacji można użyć do wykazania w czasie wielomianowym, że dana formuła jest spełnialna, jeżeli tylko istnieje i dane jest odpowiednie świadectwo.

Skróty P i NP pochodzą z angielskiego, odpowiednio, *polynomial time* i *nondeterministic polynomial time*. Niedeterminizm dotyczy pochodzenia świadectwa, ponieważ nie żąda się podania metody jego konstrukcji.

> Klasą NP nazywamy zbiór tych zadań algorytmicznych, które można weryfikować w czasie wielomianowym.

Łatwo zauważyć, że każde zadanie z P należy do NP, ponieważ zadanie takie można zawsze rozwiązać w czasie wielomianowym i do weryfikacji nie potrzebujemy żadnego świadectwa. Zatem $P \subseteq NP$, a problem PNP to problem

$$\text{Czy } P \not\supseteq NP?$$

Do klasy NP należy tysiące ważnych, praktycznych zadań algorytmicznych, o których nie wiadomo, czy należą do P. Przyjrzyjmy się jeszcze jednemu takiemu zadaniu.

Dane: Nieskierowany graf $G = (V, E)$ oraz liczba naturalna k.

Pytanie: Czy w G istnieje klika rozmiaru k, tzn. czy w G istnieje podgraf k-wierzchołkowy, w którym każda para różnych wierzchołków jest połączona krawędzią?

Problem kliki z pewnością należy do NP. Dla danego k-elementowego podzbioru wierzchołków (świadectwa) można łatwo w czasie wielomianowym, zależnym tylko od rozmiaru grafu, sprawdzić, czy wierzchołki te tworzą klikę. Wykażemy teraz, że gdybyśmy w czasie wielomianowym potrafili rozwiązać zadanie spełnialności, to także w czasie wielomianowym można by rozwiązać zadanie kliki. W tym celu zadanie kliki sprowadzimy do zadania formuł boolowskich. (Poniższą konstrukcję powtarzamy za [5].)

Dla każdego wierzchołka $v \in V$ wprowadzamy k zmiennych boolowskich $x_1^v, x_2^v, \ldots, x_k^v$. Zmienna x_i^v intuicyjnie mówi, że wierzchołek v jest i-tym wierzchołkiem w poszukiwanej klice. Skonstruujemy formułę ϕ, która jest koniunkcją trzech formuł ϕ_1, ϕ_2 i ϕ_3. Oto intuicyjne znaczenie i formalne definicje tych formuł:

- ϕ_1 = „Dla każdego i, $1 \leq i \leq k$, istnieje co najmniej jeden wierzchołek $u \in V$, który jest i-tym wierzchołkiem w klice."

$$\phi_1 = \bigwedge_{i=1}^{k} \Big(\bigvee_{v \in V} x_i^v \Big).$$

- $\phi_2 =$ „Dla każdego i, $1 \leq i \leq k$, żadne dwa wierzchołki nie są jednocześnie i-tymi wierzchołkami w klice".

$$\phi_2 = \bigwedge_{i=1}^{k} \bigwedge_{u,v \in V, u \neq v} (\neg x_i^u \vee \neg x_i^v).$$

- $\phi_2 =$ „Dla każdej pary u, v, jeśli u–v nie jest krawędzią w grafie, to u i v nie są jednocześnie w klice".

$$\phi_3 = \bigwedge_{u-v \notin E} \bigwedge_{1 \leq i,j \leq k} (\neg x_i^u \vee \neg x_j^v).$$

Wystarczy wykazać wielomianową redukcję z zadania spełnialności do zadania kliki.

Pozostawiamy Czytelnikowi wykazanie, że formuła ϕ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G istnieje klika rozmiaru k. Łatwo zauważyć, że rozmiar powstałej formuły jest wielomianowo zależny od rozmiaru grafu, a samą formułę można skonstruować w czasie wielomianowym. W tym przypadku mówimy, że zadanie kliki jest *redukowalne w czasie wielomianowym* do zadania spełnialności. W 1971 roku R. Cook [2] udowodnił, że każde zadanie z NP można w czasie wielomianowym zredukować do zadania spełnialności pewnej formuły boolowskiej. Zadanie, które należy do klasy NP i do którego można zredukować w czasie wielomianowym każde inne zadanie z NP, nazywamy zadaniem NP-zupełnym. W tym sensie zadanie spełnialności jest NP-zupełne. Pozostawiamy Czytelnikom wykazanie, że zadanie kliki jest też NP-zupełne. Rozwiązanie dowolnego zadania NP-zupełnego w czasie wielomianowym pozwalałoby rozwiązywać w czasie wielomianowym każde zadanie z NP.

Pojęcie klasy P wprowadzili niezależnie Cobham [1] i Edmonds [3] w połowie lat sześćdziesiątych. Edmonds wprowadził też pojęcie klasy NP i jako pierwszy sformułował pytanie, czy $P \neq NP$. Metoda redukcji pochodzi od Karpa [4], który za jej pomocą wykazał, że wiele ważnych zadań kombinatorycznych i optymalizacyjnych jest NP-zupełnych. Czytelnika zainteresowanego problemem PNP odsyłamy do lektury 36. rozdziału książki T.C. Cormena, C.E. Leisersona, R.L. Rivesta, *Wprowadzenie do algorytmów*, WNT, 1998. Dowód twierdzenia Cooka można znaleźć w książce A.V. Aho, J.E. Hopcrofta, J.D. Ullmana, *Projektowanie i analiza algorytmów komputerowych*, PWN, 1983.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Cobham. The intrinsic computational complexity difficulty of functions, w *Proceedings of the 1964 Congress for Logic, Methodology, and the Philosophy of Science*, ss. 24–30. North-Holland, 1964.

[2] S. Cook. The complexity of theorem proving procedures, w *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ss. 151–158, 1971.

[3] J. Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17: ss. 449–467, 1971.

[4] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems, w Raymond E. Miller and James W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, ss. 85–103. Plenum Press, 1972.

[5] D.C. Kozen. The design and analysis of algorithms. Springer-Verlag, 1991.

Pod koniec lat 70. potwierdzone zostało występowanie cyklów aktywności magnetycznej na gwiazdach typów widmowych F i G. Stało się to możliwe dzięki wieloletnim (trwającym od 1966 r.) i systematycznym obserwacjom linii widmowych (absorpcyjnych) zjonizowanego wapnia (Ca II H+K) prowadzonych w obserwatorium Mount Wilson. Linie te są bardzo czułym wskaźnikiem aktywności. W ich środkach pojawiają się linie emisyjne, których natężenie zależy od stopnia aktywności gwiazdy. Zaobserwowane wahania natężenia emisji wskazują na fakt, że wiele gwiazd przechodzi okresy zmniejszonej i nasilonej aktywności, podobnie jak Słońce. Długości odkrytych dotychczas cyklów są wprawdzie zbliżone do typowej długości cyklu słonecznego (wynoszą od siedmiu do kilkunastu lat), jednak obserwacje trwają zbyt krótko, by wykluczyć występowanie cyklów o okresach dwudziestu lat i dłuższych.

W 1883 r. astronom Królewskiego Obserwatorium Greenwich, Edward W. Maunder, wysunął hipotezę podważającą przekonanie o niezmienności cyklu słonecznego. Zauważył mianowicie, że w publikacjach astronomicznych z końca XVII i początku XX w. praktycznie nie ma opisów plam słonecznych, co miało świadczyć – jego zdaniem – o zaniku aktywności plamotwórczej Słońca na około 70 lat. Swoje spostrzeżenia opublikował po raz pierwszy w 1894 roku i ponownie w 1922 roku. Żadna z tych publikacji nie została przyjęta poważnie, gdyż jak (zresztą słusznie) uważano: „brak raportów o plamach nie musi świadczyć o braku plam". Dopiero w 1976 roku John E. Eddy potwierdził przypuszczenia Maundera. Nie tylko udokumentował jego hipotezę, lecz wskazał także na istnienie innych, wcześniejszych okresów zaniku aktywności Słońca.

Matematyka a przyroda

Roman DUDA

Kiedy bierzemy do ręki najstarsze greckie i sumeryjskie eposy, staje przed nami świat, w którym to, co otaczało człowieka, było przezeń postrzegane jako wrogie, nieprzewidywalne, rządzone przez kapryśnych bogów. Pewne elementy regularności dostrzegano bardzo daleko, na nieosiągalnym firmamencie niebieskim, który dla człowieka pierwotnego, sprzed tysięcy lat, stanowił sferę *sacrum*, jakościowo odmienną od bliskiej mu fizycznie sfery *profanum*. Na pograniczu obu wyłaniały się wątłe roślinki idei protomatematycznych (najprostszych kształtów, pierwotnego liczenia) na użytek zarówno celów sakralnych (budowa obiektów religijnych, figury w tańcach kultowych, liczenie uczestników itp.), jak i spraw ziemskich (pobór podatków, wymiana handlowa, zaopatrzenie wojska itp.). Z nich wyłoni się z czasem matematyka pierwszych cywilizacji historycznych: sumeryjskiej, egipskiej i innych.

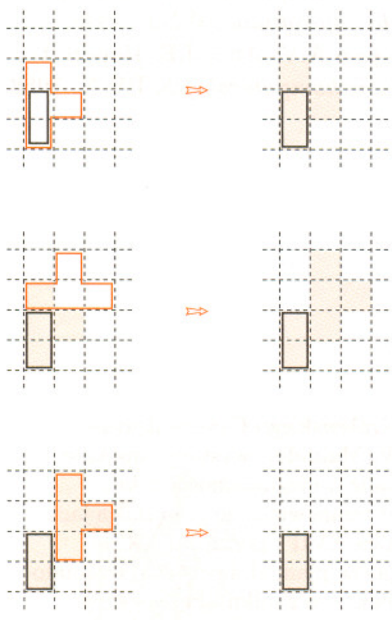
Wielkość Greków polegała nie tylko na tym, że nadali pierwotnym ideom matematycznym kształt w pełni abstrakcyjny i rozpoczęli systematyczne ich rozwijanie, czego niezwykłym pomnikiem stały się *Elementy* Euklidesa – dla cywilizacji europejskiej wzorzec ścisłości i systemu naukowego. Nie ograniczając się do tego, zaproponowali oni jednocześnie (ściślej mówiąc, zrobili to pitagorejczycy), by matematyka stała się językiem opisu świata. Była to metoda alternatywna wobec równocześnie podjętej filozoficznej metody opisywania świata i przez parę wieków toczyła się w Grecji dysputa nad wartością poznawczą każdej z nich. W końcu ustalił się pewien rodzaj kompromisu: matematyka opisywała sakralny świat sfery niebieskiej, czego zwieńczeniem stał się system Ptolemeusza z II wieku, podczas gdy w sferze *profanum* zapanowała filozoficznego pochodzenia fizyka Arystotelesa. Fizyka ta miała charakter wybitnie jakościowy, a jej podstawowymi pojęciami były pojęcia przyczyny celowej, środka świata, ruchu naturalnego i wymuszonego itp.

Ten stan rzeczy utrzymywał się przez jakieś półtora tysiąca lat i dopiero u progu czasów nowożytnych nastąpiły odkrycia, które zakwestionowały zarówno system ptolemejski (przede wszystkim Kopernik, potem Kepler), jak i fizykę arystotelesowską (tutaj największą postacią był Galileusz). Nie obniżyło to notowań matematyki, załamało natomiast fizykę jakościową, na miejsce której Galileusz zaproponował fizykę wyrażaną językiem matematycznym: *Filozofia jest zapisana w ogromnej księdze, którą stale mamy otwartą przed naszymi oczyma: myślę o wszechświecie. Ale nie można jej zrozumieć, jeśli się wpierw nie nauczy rozumieć języka i odróżniać litery, jakimi została zapisana. Zapisana zaś została w języku matematyki, a jej litery to trójkąty, koła i inne figury geometryczne, bez pomocy których niepodobna z niej pojąć ludzkim umysłem ani słowa; bez nich jest to próżne błądzenie po mrocznym labiryncie.*

Aby móc opisywać przyrodę w języku matematyki, trzeba mieć pojęcia wyrażające się geometrycznie i liczbowo, za pomocą których można zadawać przyrodzie pytania i otrzymywać sensowne odpowiedzi. Nabrała wówczas znaczenia metoda eksperymentalna i rozpoczął się proces formowania pojęć, takich jak masa, prędkość, przyspieszenie itp., w języku których Galileusz podał matematyczny opis ruchu ciał swobodnie spadających. Za Galileuszem poszli inni, a wśród nich najwybitniejszy z twórców nowożytnej nauki – Izaak Newton. Stworzył on rachunek różniczkowy i całkowy, ale zasłużoną sławę przyniosło mu przede wszystkim dzieło *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, które zawierało trzy zasady dynamiki i wydedukowany z nich opis matematyczny Układu Słonecznego. Wynikało z tego opisu, że te same trzy zasady rządzą spadaniem jabłka z drzewa i ruchem planet, wyjaśniają zjawiska przypływów i odpływów morza oraz wiele innych, dotychczas tajemniczych zjawisk.

Sukces był olbrzymi, a postępy dynamiki newtonowskiej tak szybkie i tak zdobywcze, że encyklopedyści francuscy głosili, iż po wieku XVII matematyki (wiek Newtona, Kartezjusza, Leibniza i innych) nastąpił wiek XVIII dynamiki,

Rozwiązanie zadania M 938.
Wtedy i tylko wtedy, gdy n jest parzysta. Na rysunku przedstawiono sposób przekolorowania prostokąta 1×2 (w trzech etapach) bez zmian kolorów innych pól.



To pokazuje dostateczność parzystości liczby n. Załóżmy, że n jest nieparzyste. Przy każdej operacji różnica między liczbą pól białych i liczbą pól czarnych zmienia się o wielokrotność 4, a więc jej reszta z dzielenia przez 4 nie zmienia się. Na początku różnica ta wynosi 1 lub -1, na końcu zaś odpowiednio -1 lub 1, z czego wynika, że żądane przekolorowanie jest niemożliwe do wykonania.

wielu zaś uważało, że matematyka ma się ku końcowi, dynamika bowiem wszystko wyjaśni. M. in. Wolter pisał, iż *wszystko jest z góry ustalone*, bardziej zaś precyzyjnie wyraził tę myśl Laplace, wymyślając demona, który byłby zdolny do zmierzenia w jednej chwili położeń i prędkości wszystkich cząsteczek Wszechświata. *Taka inteligencja* – pisał – *objęłaby w jednej i tej samej formule ruchy największych ciał wszechświata i najlżejszych atomów; dla niej nic nie byłoby niepewne, zarówno przeszłość, jak i przyszłość byłaby dla niej teraźniejszością.*

Mylili się jedni i drudzy, jednym zaś z pierwszych zwiastunów zmian było przedstawienie przez Fouriera w roku 1811 równania przewodnictwa cieplnego wraz z rozwiązaniem. Był to początek termodynamiki, nowej gałęzi zmatematyzowanej fizyki, której zastosowania praktyczne (silniki cieplne) przeobraziły świat, ale która różniła się od newtonowskiej dynamiki całkowicie tym, że rozważane przez nią procesy są nieodwracalne: ciepło ulega bezpowrotnie rozproszeniu i nie jesteśmy w stanie odtworzyć, nawet teoretycznie, jego przeszłości.

W pewnym związku z potrzebami fizyki postępy matematyki w wiekach XIX i XX były szybkie, a wzrost jej znaczenia ogromny. Matematyka udostępniała fizyce nowe i nieoczekiwane obszary badawcze, które ta ostatnia śmiało podejmowała. O termodynamice już mówiliśmy. Postępy geometrii umożliwiły Einsteinowi stworzenie teorii względności, która dostarczyła nowy, ściślejszy od newtonowskiego, opis wszechświata, ale jednocześnie wyeliminowała newtonowskie złudzenie absolutnej przestrzeni i absolutnego czasu. Postępy algebry i teorii prawdopodobieństwa umożliwiły Planckowi stworzenie teorii kwantów, która otworzyła przed badaczami świat subatomowy z niezwykłymi konsekwencjami dla fizyki i biologii, ale jednocześnie wyeliminowała złudzenie absolutnej dokładności procesu pomiaru. Rodząca się zaś na naszych oczach teoria chaosu eliminuje ostatecznie sen Laplace'a o deterministycznej przewidywalności wszystkich zjawisk.

Jak z tych kilku uwag widać, rola matematyki polega na dostarczaniu koncepcji teoretycznych (pojęć, teorii, metod), które umożliwiają stawianie przyrodzie właściwych pytań i otrzymywanie odpowiedzi. Dokładniej, geometrię wszechświata teorii względności opisuje 4-wymiarowa rozmaitość, tzw. czasoprzestrzeń, której tensor krzywizny odpowiada rozkładowi materii, a najkrótsze drogi, po których rozchodzi się światło, są geodetykami. A dla teorii kwantów podstawowym tworzywem matematycznym są przestrzenie Hilberta, przy czym analizowane tam własności fizyczne utożsamia się z operatorami w tej przestrzeni, a skończenie wiele wartości, jakie te własności mogą przyjmować, są wartościami własnymi tych operatorów.

Dzięki matematyce wgląd w przyrodę staje się coraz głębszy, ale i matematyka staje się coraz bardziej skomplikowana. Wysoka jest cena poznania.

Wśród rozmaitych przypuszczeń co do natury Gwiazdy Betlejemskiej chyba najczęściej mówi się, że było to złączenie (nawet kilkakrotne w krótkim przedziale czasu) kilku planet. Złączenie Marsa, Jowisza i Saturna nastąpiło w gwiazdozbiorze Ryb w roku 7 p.n.e. Rozpatruje się też bardzo ciasne złączenie Jowisza z Wenus, które nastąpiło w Lwie w 2 r.p.n.e. Jakiś czas temu James A. Deyowng i James L. Hilton z U.S. Naval Observatory w Waszyngtonie obliczyli kolejny raz konfigurację planet i stwierdzili, że Jowisz i Wenus zeszły się na odległość 25″,5 (jest to odległość środków tarcz) 17 czerwca 2 r.p.n.e. o godz. 20:46 czasu efemerydalnego (lub około 3. godzin wcześniej wg czasu uniwersalnego). Nastąpiło więc tu częściowe zakrycie Jowisza przez Wenus. Można sobie wyobrazić, jak niesamowity mógł być to widok dla ówczesnych obserwatorów, a i obecnie z pewnością zrobiłby wrażenie.

Rozwiązanie zadania M 939.
Nie można. Idea dowodu jest dość standardowa, aczkolwiek jej zrealizowanie może nastręczać pewne trudności. W każdą klatkę tablicy wpisujemy 0 lub 1 tak, aby w każdym kwadracie 3×3 i 4×4 znajdowała się parzysta liczba zer oraz aby w pewnym kwadracie 2×2 była nieparzysta liczba zer. Z istnienia takiego ponumerowania wynika od razu negatywna odpowiedź: po dowolnej liczbie operacji kolor (z białego na czarny) zmieni parzysta liczba klatek, którym w naszym ponumerowaniu przypisaliśmy 0.

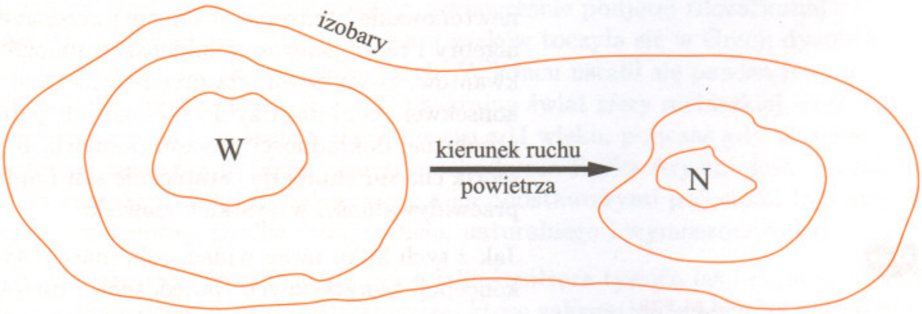
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1

Przykład odpowiedniego ponumerowania podany jest na rysunku. Powstaje ono przez przesuwanie kwadratu 6×6 zaznaczonego linią pogrubioną.

Huragany

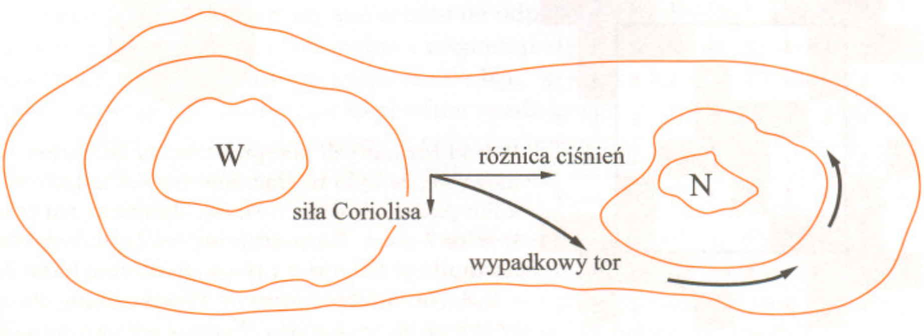
Najsłynniejsze wiatry kuli ziemskiej. Przyczyny wielkich katastrof i zniszczeń, natchnienie twórców literatury i filmu. Co odpowiada za ich powstawanie, nadaje im ogromną siłę?

Postarajmy się najpierw zrozumieć mechanizm powstawania wiatrów, czyli poziomych prądów powietrznych. Głównym czynnikiem powodującym ruch mas powietrza jest różnica ciśnień. Cząsteczki powietrza poruszają się z obszaru o wyższym ciśnieniu (czyli tzw. wyżu barycznego) do obszaru o niższym ciśnieniu (niżu barycznego).



Na skutek ruchu obrotowego Ziemi na cząsteczki powietrza działa jeszcze siła Coriolisa. Siła ta powoduje odchylenie poruszających się obiektów w prawo na półkuli północnej i w lewo na południowej. Odchylenie to zależy, oczywiście, od szerokości geograficznej i prędkości ruchu. Im bliżej biegunów, tym jest ono większe. Podobnie, im większa prędkość, tym większa zmiana kierunku.

Naiwnie spodziewamy się, że kierunek wiatru wokół centrum niżu barycznego jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, czyli zgodnie z kierunkiem siły Coriolisa. Jest jednak odwrotnie. Popatrzmy na rysunek poniżej.

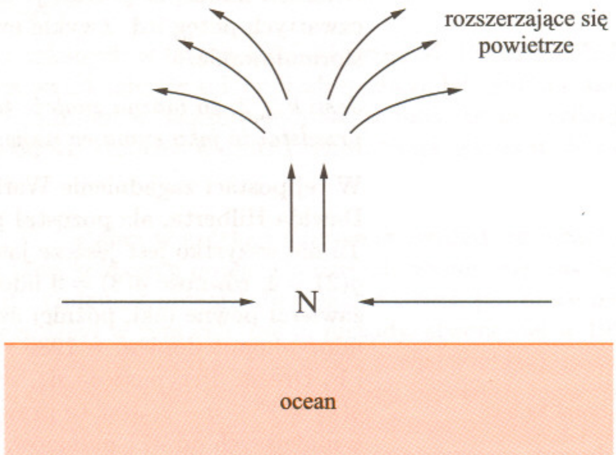


Na cząsteczki powietrza, poruszające się z obszaru wyżu do obszaru niżu, działa siła Coriolisa powodująca odchylenie w prawo (jesteśmy na półkuli północnej). Wypadkowa tej siły i siły spowodowanej różnicą ciśnień na poszczególnych obszarach daje tor jak na rysunku. Wiatr zakręca więc wokół obszaru niskiego ciśnienia przeciwnie do wskazówek zegara (a na półkuli południowej odwrotnie).

⋆ ⋆ ⋆

Taki sam mechanizm odgrywa rolę w powstawaniu huraganów. Huragany są tropikalnymi cyklonami, tzn. potężnymi wirami atmosferycznymi, w których prędkość wiatru przekracza 100 km/h. Kierunek wiru jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara na półkuli północnej i zgodny na półkuli południowej. Huragany (albo tajfuny) tworzą się nad oceanem w obszarze międzyzwrotnikowym, gdzie temperatura wody przekracza 26,5°C, a powietrze jest odpowiednio wilgotne.

Wysoka temperatura wody jest niezbędna do rozpoczęcia procesu formowania się huraganu. Ciepłe wilgotne powietrze, ogrzewane przez powierzchnię wody, napływa spiralnie do centrum niskiego ciśnienia, powodując wznoszenie się powietrza w górę w samym środku obszaru.



Powietrze unosi się i ochładza, para wodna ulega skropleniu (i w postaci deszczu wraca na ziemię), wydzielając przy tym ciepło – ciepło parowania. Dostarczy ono energii dalszemu procesowi, ogrzewając powietrze znajdujące się na tej wysokości. Ciepłe powietrze ma mniejszą gęstość niż zimne, zajmuje więc ono więcej miejsca w przestrzeni. Ogrzane powietrze rozszerza się i ucieka z tego obszaru, co powoduje obniżenie ciśnienia nad powierzchnią wody.

Im niższe ciśnienie, tym więcej powietrza napływa do centrum obszaru. Ten proces powtarza się, samonapędzając i zwiększając prędkość wiatru oraz obniżając ciśnienie w centrum niżu.

W samym centrum panuje bezruch. Wiejący w tym kierunku z dużą prędkością wiatr jest odchylany przez siłę Coriolisa i krąży wokół środka, czyli „oka” cyklonu. (Na samym równiku, choć temperatura powietrza jest wysoka i wilgotność duża, huragany nie powstają – nie ma siły Coriolisa powodującej skręcenie ruchu.) Tuż przy „oku” prędkość wiatru jest największa, drastycznie wzrasta ciśnienie.

Gdy wiatr osiągnie odpowiednio dużą prędkość, nazywa się go huraganem (i zazwyczaj nadaje odpowiednie imię własne). Siła wiatru powoduje duże zniszczenia, szczególnie przy przedostawaniu się huraganu na powierzchnię lądu. Stąd też i zła sława huraganu.

Małą Deltę przygotowała Ewa CZUCHRY

Teoria liczb w dwudziestym wieku

Władysław NARKIEWICZ

0. Teoria liczb, zajmująca się własnościami liczb całkowitych, wymiernych i ich uogólnień, obfituje w wiele problemów, które dadzą się wprawdzie prosto sformułować, ale rozwiązanie których jest zazwyczaj bardzo trudne. Kończące się stulecie przyniosło sporo rozwiązań starych zagadnień, z których najbardziej sensacyjnym było znalezienie przez Andrew Wilesa przed kilku laty dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata, o czym pisała nawet prasa codzienna. Opiszemy teraz pokrótce kilka tych zagadnień, dokonując z konieczności dość subiektywnego ich wyboru.

1. Pierwszym sławnym zagadnieniem rozstrzygniętym w XX wieku był *problem Waringa*, dotyczący przedstawień liczb naturalnych w postaci sumy nieujemnych potęg. W 1770 r. matematyk angielski, Edward Waring, napisał w swej książce *Meditationes Algebraicae*, że każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów (stwierdzenie to pojawiło się już w XVII w, a P. Fermat twierdził nawet, że potrafi je udowodnić), dziewięciu sześcianów, dziewiętnastu czwartych potęg itd. Zwykle uważa się, że za słowem itd. kryje się następujące sformułowanie:

Jeśli $k \geq 2$, to można znaleźć taką liczbę $g(k)$, że każda liczba naturalna da się przedstawić jako suma co najwyżej $g(k)$ k-tych potęg liczb naturalnych.

W tej postaci zagadnienie Waringa zostało rozwiązane w 1909 roku przez Dawida Hilberta, ale pozostał problem znalezienia najmniejszej wartości $g(k)$. Tu nie wszystko jest jeszcze jasne. W XVIII w. J.L. Lagrange udowodnił, że $g(2) = 4$, równość $g(3) = 9$ udowodnił w 1909 r. A. Wieferich (choć jego dowód zawierał pewne luki, później uzupełnione), natomiast równość $g(4) = 19$ została udowodniona dopiero w 1986 r. przez R. Balasubramaniana, J.M. Deshouillersa i F. Dressa. Przypuszcza się, że jeśli q jest częścią całkowitą liczby $(3/2)^k$, to $g(k) = 2^k + q - 2$. Jest to prawda dla wszystkich dostatecznie dużych k oraz dla k mniejszych od 471 milionów.

2. Innym problemem, pochodzącym z XVIII w., jest *problem Goldbacha*, sformułowany po raz pierwszy w liście Goldbacha do Eulera w 1742 r. Chodzi w nim o pokazanie, że każda liczba parzysta, większa od 2, jest sumą dwóch liczb pierwszych, każda zaś liczba nieparzysta, większa od 5, jest sumą trzech liczb pierwszych. Już w 1855 r. sprawdzono, że jest tak dla wszystkich liczb mniejszych od 10 000, a za pomocą komputerów powiększono tę granicę do $4 \cdot 10^{11}$.

W 1937 r. I.M. Winogradow wykazał, że każda dostatecznie duża liczba nieparzysta jest sumą trzech liczb pierwszych, a późniejsze modyfikacje jego dowodu doprowadziły do stwierdzenia, że zachodzi to dla wszystkich liczb większych od $e^{e^{9,715}}$. Niestety, liczba ta jest zbyt duża, by się dało sprawdzić za pomocą komputerów, że dla każdej mniejszej liczby nieparzystej istnieje żądane przedstawienie.

Wcześniej, bo w 1919 r., G.H. Hardy i J.E. Littlewood wykazali, że powyższe twierdzenie Winogradowa wynika z tzw. *hipotezy Riemanna*, głoszącej, że nierzeczywiste zera $x + iy$ funkcji dzeta Riemanna spełniają $x = 1/2$. Hipoteza ta jest równoważna następującej własności, w której nie pojawiają się liczby zespolone: Jeśli dla $x > 0$ i dowolnego y oznaczymy

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(y \log n)}{n^x}$$

oraz

$$g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(y \log n)}{n^x},$$

Rozwiązanie zadania M 937.
Warunek konieczny i dostateczny: $k|n$ lub $k|m$.
Jego dostateczność jest oczywista. Załóżmy , że $k \nmid n$ i $k \nmid m$. Oznaczmy przez r_n i r_m reszty z dzielenia przez k liczb n i m odpowiednio. Możemy przyjąć, że $r_m \geq r_n > 0$. Ponumerujmy kolumny tablicy od 0 do $m-1$, wiersze od 0 do $n-1$, następnie zaś przypiszmy każdej z klatek resztę z dzielenia przez k sumy numerów jej kolumny i wiersza. Niech P_i, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, oznacza zbiór wszystkich klatek, którym przypisana jest reszta i. Nietrudne rozważania prowadzą do wniosku, że dla pewnych i, j zachodzi $|P_i| = |P_j| + 1$. W tym celu wystarczy ograniczyć się do prostokąta w prawym dolnym rogu o rozmiarach $r_n \times r_m$ i przyjąć $i = r_m - 1$ oraz $j = r_m$. Każda pojedyncza operacja zmienia kolor dokładnie jednej klatki z każdego ze zbiorów P_i. Wynika z tego, że dla każdego i liczba operacji jest równa łącznej liczbie przekolorowań wszystkich klatek ze zbioru P_i. Klatka zmienia kolor, gdy liczba jej przekolorowań jest nieparzysta, z czego i z poprzedniego zdania wynika, że liczba operacji potrzebnych do przekolorowania wszystkich klatek tablicy ma taką samą parzystość jak każda z liczb $|P_i|$. Jest to jednak sprzeczne z równością $|P_i| = |P_j| + 1$.

Uwaga: Jeśli zastąpimy prostokąty typu $1 \times k$ dowolnymi $l \times k$, to też będzie niezła zabawa.

to z $f(x,y) = g(x,y) = 0$ wynika $x = 1/2$. Niestety, nikt nie wie do dziś, czy hipoteza Riemanna jest prawdziwa.

Przypadek liczb parzystych okazał się znacznie bardziej skomplikowany. Wiemy jedynie, że jeśli $N_2(x)$ oznacza ilość liczb parzystych mniejszych od x, które nie są sumami dwóch liczb pierwszych, to $N_2(x)/x$ dąży do zera przy wzroście x, a więc znakomita większość liczb parzystych jest żądanej postaci. Ponadto wiemy (twierdzenie Chena z 1966 r.), że każda duża liczba parzysta jest albo sumą dwóch liczb pierwszych, albo sumą liczby pierwszej i liczby będącej iloczynem dwóch liczb pierwszych.

3. W 1801 r. młody Gauss postawił problem, dotyczący teorii form kwadratowych, który można sformułować w sposób zupełnie elementarny. Wiąże się on ze sławnym wielomianem $x^2 - x + 41$, znalezionym przez Eulera. Wielomian ten ma tę własność, że jego wartość jest liczbą pierwszą dla 41 kolejnych całkowitych wartości argumentu x, poczynając od $x = 0$. Problem Gaussa jest równoważny następującemu pytaniu:

Czy istnieje liczba m większa od 41 o tej własności, że wielomian $x^2 - x + m$ przyjmuje dla argumentów $x = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ wyłącznie wartości będące liczbami pierwszymi?

Z rezultatów uzyskanych w latach 1933–34 przez M. Deuringa, L.J. Mordella i H. Heilbronna wyniknęło, że takich liczb m może być jedynie skończenie wiele, a Heilbronn i E. Linfoot wykazali następnie, iż może istnieć tylko jedna taka liczba większa od 41. Dopiero w 1967 r. H.M. Stark wykazał, że takiej liczby w ogóle nie ma.

4. W 1842 r. E. Catalan w krótkiej notatce stwierdził, że liczby $8 = 2^3$ i $9 = 3^2$ tworzą jedyną parę kolejnych potęg. Do dziś nie wiemy, czy tak jest w istocie, ale w 1976 r. R. Tijdeman potrafił dowieść, że takich par może być tylko skończenie wiele. Użył w tym celu nowej metody, stworzonej w 1966 r. przez A. Bakera (która swemu autorowi przyniosła medal Fieldsa), pozwalającej na oszacowanie od dołu niezerowych kombinacji liniowych logarytmów liczb wymiernych. Metoda ta przyczyniła się do istotnego postępu i w innych zagadnieniach teorii liczb, m.in. do istotnego uproszczenia dowodu twierdzenia Starka, o którym mówiliśmy przed chwilą.

Inny problem, dotyczący potęg liczb naturalnych, pochodzi od O. Terquema, który w 1857 r. stwierdził bez dowodu, że iloczyn kolejnych liczb naturalnych nie może być potęgą. To jest zupełnie łatwe w przypadku dwu kolejnych liczb i niewiele trudniejsze w przypadku trzech, jednakże w pełnej swej ogólności problem ten okazał się bardzo trudny i został rozwiązany dopiero w 1975 r. przez P. Erdősa i J.L. Selfridge'a. Wcześniej, bo w 1939 r., Erdős i O. Rigge wykazali niezależnie, że iloczyn kolejnych liczb naturalnych nie może być kwadratem. Użyte tutaj metody są zawiłe, ale w pełni elementarne, aczkolwiek w dowodzie ogólnego przypadku sporą pracę rachunkową musiał wykonać komputer.

5. W 1900 r. odbył się w Paryżu Międzynarodowy Kongres Matematyków, gdzie Dawid Hilbert wygłosił odczyt o problemach, którymi, według niego, będą zajmowali się matematycy w dwudziestym wieku. Wśród tych problemów, obok wspomnianych wyżej problemu Goldbacha i hipotezy Riemanna, pojawiło się parę innych związanych z teorią liczb. Omówimy tutaj dwa z nich, które zostały w pełni rozstrzygnięte.

Pierwszy dotyczy liczb przestępnych. Przypomnijmy, że liczbę nazywamy algebraiczną, gdy jest pierwiastkiem pewnego wielomianu o współczynnikach wymiernych, oczywiście różnego od wielomianu zerowego. Pozostałe liczby nazywają się liczbami przestępnymi. W problemie, postawionym przez Hilberta, chodziło o wykazanie, że jeśli α jest liczbą algebraiczną, różną od 0 i 1, a β jest liczbą algebraiczną niewymierną, to liczba α^β jest przestępna. Żądany dowód został znaleziony w 1935 r. niezależnie przez Aleksandra O. Gelfonda i Theodora Schneidera.

Rozwiązanie zadania F 537.

$F_E = F_G$, czyli $k_0\frac{q_1q_2}{r^2} = G\frac{m_1m_2}{r^2}$,

gdzie q_1, q_2 to ładunki, a m_1, m_2 masy kulek. Stąd

$$\left(\frac{q_1}{m_1}\right)\left(\frac{q_2}{m_2}\right) = \frac{G}{k_0}.$$

Przyjmijmy, że dla obu kulek stosunek liczby elektronów do liczby protonów jest jednakowy, a więc

$$\frac{q_1}{m_1} = \sqrt{\frac{G}{k_0}}.$$

Mamy też, że

$$q_1 = (N_e - N_p)e,$$

gdzie N_e i N_p są liczbami elektronów i protonów, a

$$m_1 = N_pm_p + N_nm_n + N_em_e,$$

gdzie m_p, m_n i m_e są masami odpowiednio protonu, neutronu i elektronu. Przyjmując, że

$$m_p \approx m_n \gg m_e$$

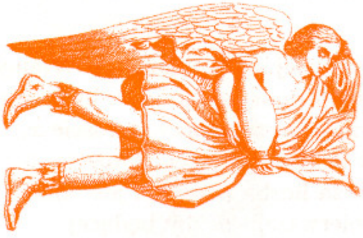
oraz podstawiajac $N_p = N_n$ (w cząsteczce węgla), mamy $m_1 \approx 2N_pm_p$. Stąd

$$\frac{q_1}{m_1} = \frac{(N_e - N_p)e}{2N_pm_p} = \sqrt{\frac{G}{k_0}}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych

$$\frac{N_e - N_p}{N_p} = \frac{2m_p}{e}\sqrt{\frac{G}{k_0}} \approx 1,8 \cdot 10^{-18}.$$

A więc działanie siły grawitacyjnej może zostać zrównoważone wtedy, gdy na jeden dodatkowy elektron przypada aż $5 \cdot 10^{17}$ protonów.



Drugi problem dotyczył rozwiązywania równań diofantycznych, tj. równań postaci

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

przy czym $f(x_1, \ldots, x_n)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, a niewiadomych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ szukamy w zbiorze liczb całkowitych. Hilbert pytał o istnienie algorytmu pozwalającego w skończenie wielu krokach sprawdzić, czy takie równanie ma rozwiązanie, czy też nie. W 1970 roku Jurij Matijasewicz udowodnił, że takiego algorytmu nie ma.

Dwudziesty wiek przyniósł także wielki postęp i w innych zagadnieniach teorii równań diofantycznych. Chyba najbardziej sensacyjnym okazał się wspomniany już wynik A. Wilesa, który w 1995 r. udowodnił, że równanie Fermata

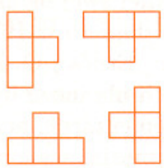
$$x^n + y^n = z^n$$

nie ma dla $n \geq 3$ rozwiązań całkowitych, spełniających warunek $xyz \neq 0$. Wcześniej, bo w 1983 r. Gerd Faltings wykazał, że równanie to może mieć co najwyżej skończenie wiele rozwiązań parami względnie pierwszych. Wynik ten to bardzo szczególny przypadek tzw. *hipotezy Mordella*, którą Faltings wówczas udowodnił, gdzie za co otrzymał medal Fieldsa. Hipoteza ta głosi, że jeśli Γ jest krzywą płaską o równaniu $F(x, y) = 0$, gdzie F jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, a przy tym jej rodzaj jest większy od 1, to może na niej leżeć jedynie skończenie wiele punktów o obu współrzędnych wymiernych. Rodzaj krzywej jest pewną liczbą całkowitą, która w przypadku, gdy Γ nie ma punktów osobliwych (tj. takich, w których znikają obie pochodne cząstkowe wielomianu F), równa jest $(n-1)(n-2)/2$, gdzie n jest stopniem wielomianu F. W przypadku równania Fermata stosuje się hipotezę Mordella do krzywej $X^n + Y^n = 1$, której rodzaj jest większy od 1 przy $n \geq 4$.

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

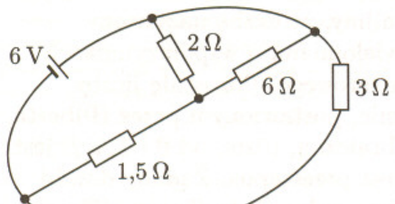
M 937. Prostokątną tablicę o rozmiarach $n \times m$, $n, m \in \mathbb{N}$, podzielono na klatki 1×1 i pokolorowano na biało. Dozwolone jest wielokrotne wykonywanie następujących operacji: zmiana koloru z białego na czarny lub z czarnego na biały wszystkich klatek zawartych w pewnym prostokącie o rozmiarach $1 \times k$ lub $k \times 1$. Kiedy za pomocą skończonej liczby powyższych operacji można zmienić kolor wszystkich klatek na czarny?
Rozwiązanie na str. 10



M 938. Dana jest szachownica o rozmiarach $n \times n$, $n \geq 3$. Dozwolone jest wielokrotne wykonywanie następującej operacji: zmiana koloru na przeciwny wszystkich pól należących do jednej z przedstawionych obok czteropolowych figur na szachownicy. Kiedy za pomocą skończonej liczby powyższych operacji można zmienić kolor wszystkich klatek na przeciwny?
Rozwiązanie na str. 6

M 939. Pokratkowana płaszczyzna jest na początku cała pokolorowana na biało. Dozwolone jest wielokrotne wykonywanie następującej operacji: zmiana koloru na przeciwny wszystkich pól należących do pewnego kwadratu 3×3 lub 4×4. Czy za pomocą tych operacji można zaczernić klatki pewnego kwadratu 2×2 i nie zmienić koloru pozostałych klatek?
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Ewa CZUCHRY



F 537. Dwie kulki węglowe mają niewielki nadmiar elektronów. Jaki musi być stosunek liczby dodatkowych elektronów do liczby protonów, aby siły elektrostatyczna i grawitacyjna równoważyły się?
Rozwiązanie na str. 11

F 538. Jakie jest całkowite natężenie prądu z baterii w obwodzie przedstawionym obok?
Rozwiązanie na str. 14

Milenijne szaleństwo

Pod taką nazwą odbyła się na Uniwersytecie w Michigan jedna z sesji konferencji *Struny 2000* poświęconej superstrunom. Chodziło o wybranie 10 najbardziej zastanawiających problemów, nad rozwiązaniem których fizycy powinni głowić się przez następne milenium. Z listą tą nie są związane żadne nagrody, ale znalezienie odpowiedzi na którekolwiek z poniższych pytań w zasadzie gwarantuje wycieczkę do Sztokholmu. Ostatecznego wyboru dokonali Michael Duff, David Gross i Edward Witten.

1. Czy wszystkie (mierzalne) bezwymiarowe parametry charakteryzujące świat fizyczny można obliczyć, czy też niektóre są dziełem przypadku?

Inaczej mówiąc, czy stałe fizyczne mogłyby mieć inne wartości niż mają? Wiadomo, że Wszechświat wyglądałby zupełnie inaczej, gdyby zmienić wartość stałej Plancka, prędkość światła, ładunek, albo masę elektronu. Nie wiadomo jednak, czy taka zmiana byłaby w ogóle możliwa. Czy istnieje jakaś ukryta symetria determinująca zależności między poszczególnymi parametrami teorii fizycznych?

2. W jaki sposób grawitacja kwantowa może pomóc w wyjaśnieniu powstania Wszechświata?

Dwie podstawowe teorie współczesnej fizyki to ogólna teoria względności opisująca oddziaływania grawitacyjne oraz mechanika kwantowa, na której opiera się tzw. model standardowy opisujący oddziaływania mikroświata. Czy i kiedy uda się połączenie tych dwóch teorii w jedną grawitację kwantową?

3. Jaki jest czas życia protonu i skąd on wynika?

Protony wyglądają na bezwzględnie stabilne. A jednak wszelkie próby tzw. Wielkiej Unifikacji łączącej w jedną teorię oddziaływania mikroświata przewidują, że protony rozpadają się, choć z niezwykle długim czasem życia. Jest on co najmniej tyle razy większy od wieku Wszechświata, ile razy wiek Wszechświata jest dłuższy od roku. Odpowiedź na pytanie o sam czas życia protonu powinna przynieść jakaś kolejna wersja eksperymentu typu SuperKamiokande polegającego na obserwacji olbrzymiej liczby protonów w nadziei przychwycenia któregoś na rozpadaniu się.

4. Czy natura jest supersymetryczna, a jeżeli tak, to jak supersymetria jest łamana?

Wszystkie współczesne próby stworzenia kwantowej grawitacji zakładają supersymetrię postulującą symetrię między budującymi materię fermionami a przenoszącymi oddziaływania bozonami. Symetria ta musi być jednak złamana: supersymetryczni partnerzy znanych cząstek muszą być obdarzeni większą masą, gdyż nie udało się ich dotąd zaobserwować. O supersymetryczności natury mamy szansę przekonać się na drodze doświadczalnej już w ciągu najbliższej dekady. Wtedy, być może, zrozumiemy, jak działa mechanizm ukrywający supersymetrię.

5. Dlaczego Wszechświat wydaje się mieć jeden wymiar czasowy i trzy przestrzenne?

Po pierwsze, czy to wszystko, czy też istnieją ukryte wymiary przewidywane przez teorię strun? Po drugie, ile by tych wymiarów nie było, to dlaczego jest ich właśnie tyle?

6. Dlaczego stała kosmologiczna ma taką wartość, jaką ma? Czy jest równa zeru i czy naprawdę jest stała?

Ostatnio obserwacje astrofizyczne wskazują na różną od zera stałą kosmologiczną. Planowane na nadchodzącą dekadę precyzyjne pomiary mikrofalowego promieniowania tła powinny ostatecznie przesądzić o jej wartości. Tymczasem z fundamentalnego rachunku wynika, że powinna mieć ona wartość około 122 rzędy wielkości większą niż w tej chwili mierzona. Błędność tego rachunku wynika z samego faktu jego przeprowadzenia. Gdyby był poprawny, to nasz Świat by po prostu nie istniał. Nie ma nikogo, kto miałby dobry pomysł na rozwiązanie tego problemu (dlatego rzadko mówi się o nim).

7. Jakie są podstawowe stopnie swobody Teorii M i czy opisuje ona Naturę?

Ta enigmatyczna teoria, będąca jedenastowymiarową supergrawitacją, zawierającą wszystkie pięć wersji teorii superstrun, jest postrzegana jako najbardziej obiecująca tzw. Teoria Wszystkiego. Nie wiadomo jednak do końca ani jak ona naprawdę wygląda, ani czy ma cokolwiek wspólnego z realnym światem.

8. Jakie jest rozwiązanie paradoksu informacyjnego czarnej dziury?

Zgodnie z mechaniką kwantową informacja (w sensie liczby obserwowalnych stopni swobody) nie może ginąć. Co się jednak dzieje z informacją „wpadającą” do czarnej dziury? Czy wbrew mechanice kwantowej informacja ta jest tracona, czy też pozostaje „wyświetlona” na horyzoncie czarnej dziury?

9. Jaka fizyka wyjaśnia olbrzymią różnicę między skalą Plancka a typową masą cząstek elementarnych?

Innymi słowy, dlaczego grawitacja jest tak słaba w porównaniu do innych znanych oddziaływań? Ostatnio zapostulowano, że jej słabość wynika z częściowego uwięzienia w dodatkowych wymiarach. Wykazanie tego może być w zasięgu najbliższej generacji eksperymentów. W przeciwnym przypadku bezpośrednia doświadczalna weryfikacja odpowiedzi na to pytanie może w ogóle nie być możliwa.

10. Czy potrafimy za pomocą chromodynamiki kwantowej ilościowo zrozumieć uwięzienie kwarków i gluonów oraz nieistnienie bezmasowych hadronów?

Odpowiedź na to pytanie wymaga znalezienia metody rozwiązywania równań teorii oddziaływań silnych. W tej chwili największe nadzieje wiąże się z rachunkami na siatkach, w których ciągłą czasoprzestrzeń przybliża się za pomocą punktów kratowych. Wymaga to olbrzymiej ilości czasu komputerowego. Może jednak uda się znaleźć jakąś zupełnie inną metodę?

Czy poznamy kiedyś odpowiedzi na te fundamentalne pytania? Nie jest to pewne. Można jednak zgodzić się „z przewodniczącym jury” Grossem, że pytania są często ważniejsze od odpowiedzi. Na pewno będą one jeszcze długo w centrum zainteresowania „strunowców”, wybitnych umysłów, do których nie przyzna się ani uczciwy matematyk, ani fizyk. Tylko szaleńcy zostają pionierami.

Piotr ZALEWSKI

Na podstawie kopii prezentacji D. Grossa i artykułu G. Johnsona w *The New York Times on The Web*.

Wielki Wybuch: czy, co i dlaczego wybuchło?

T. Zbigniew DWORAK

Czy wybuchło? Raczej tak, ponieważ istniejemy – inaczej musielibyśmy powziąć podejrzenie, iż jesteśmy, na przykład, snem szaleńca śniącego nieprzytomnie…

Co prawda, początek świata może być na różny sposób tłumaczony, jednak spośród zbioru hipotez najsolidniejsze podstawy – głównie dzięki odkryciu „ucieczki galaktyk” i kwazarów, promieniowania reliktowego tła, oceny pierwotnej nukleosyntezy oraz teorii unifikacji oddziaływań fizycznych – ma hipoteza Wielkiego Wybuchu (Big Bang); nazwanego tak początkowo ironicznie przez jej przeciwników, którym jednak niezbyt się powiodło ośmieszenie tej „eksplozywnej” idei powstania Wszechświata.

Nota bene zauważmy, iż nawet stwierdzenie „na początku było Słowo” wcale się z nauką nie kłóci, ponieważ oznacza ono ni mniej, ni więcej to, że na początku była Informacja, która w jakiś sposób zainicjowała początek Wszechświata – ów Wielki Wybuch.

Tym ostatnim zdaniem otwieramy dwie następne kwestie: co i dlaczego wybuchło?

Kiedy powstawała teoria nadgęstych obiektów (czyli „czarnych dziur”), Stephen Hawking odwrócił zadanie i potraktował osobliwość początkową jako jedną, jedyną czarną dziurę, która właśnie w Wielkim Wybuchu stworzyła obecnie istniejący Wszechświat. Na temat stanu owej pierwotnej osobliwości niewiele można powiedzieć, ponieważ załamuje się w niej cała znana współcześnie fizyka. Niektórzy nazywają tę „pramaterię” Ylemem, cokolwiek by to miało znaczyć.

Nie należy wyobrażać sobie, iż Wszechświat wybuchł jak granat. Właściwie wszelkie porównania zawodzą… Razem z pramaterią w pierwotnej osobliwości „zwinięta” była przestrzeń i czas. Z powstaniem Wszechświata powstawała nie tylko obecna materia, lecz również przestrzeń i czas. Coś pewnego na jego temat powiedzieć możemy dopiero od ery Plancka, po około 10^{-44} sekundy od „początku świata”, kiedy – w nieznanym nam jeszcze przejściu fazowym – oddziaływania grawitacyjne oddzieliły się od pozostałych (jądrowych, słabych oraz elektromagnetycznych), które też, w miarę upływu czasu i zmniejszania się gęstości materii oraz energii, oddzielały się od siebie.

Najtrudniej jest odpowiedzieć na pytanie: „dlaczego wybuchło?”. Czy dlatego, że kiedy w pierwotnej osobliwości gęstość pramaterii i temperatura (a więc także energia) zbliżała się niebezpiecznie do nieskończoności (co żadną miarą w realnym świecie nie może się stać), nastąpiło niejako „odwrócenie znaków” i nastąpiła eksplozja? Taki jednak postulat wymaga przyjęcia hipotezy pulsującego Wszechświata, a to odwleka pytanie o początek świata do – abstrakcyjnie ujmując – minus nieskończoności, czyli znowu mamy problem z osobliwością.

Jeśli natomiast przyjmiemy, że wartości temperatury i gęstości osiągnęły wielkość nieskończoną, to także pojawia się kwestia osobliwości, a nawet… transcendencji – więc „Słowo stało się ciałem (materią)”. Problem z fizycznego zamienia się w filozoficzny.

Dopóki zatem nie będziemy mieli teorii, najogólniej to ujmując, „grawitacji kwantowej”, dopóty pytanie o początek świata (dlaczego wybuchło?) zawisa w próżni (a właściwie w nicości) – dosłownie i w przenośni.

⋆ ★ ⋆

Jeśli w płaską figurę wypukłą o polu F wpiszemy n-kąt o największym możliwym polu P_n, to wówczas $P_n \geq F \cdot \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$, a równość zachodzi tylko wtedy, gdy ta figura jest elipsą.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 399 (WT=1,40) i 400 (WT=2,90)
z numeru 4/2000

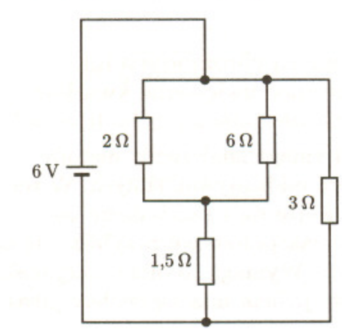
Jerzy Witkowski	– Radlin	44,29
Bartłomiej Dyda	– Wrocław	41,52
Konrad Patkowski	– Gdańsk	41,43
Bartłomiej Marczak	– Warszawa	36,66

Pan Witkowski kończy trzecią rundę i zostaje dwudziestym pierwszym Weteranem matematycznego **Klubu 44**.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 300 (WT=3,80) i 301 (WT=1,25)
z numeru 6/2000

Jarosław Łazuka	– Warszawa	43,43
Marek Wójcicki	– Szczecin	35,68
Aleksander Surma	– Myszków	33,68
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	33,36
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	27,70
Tomasz Rudny	– Warszawa	25,20

Rozwiązanie zadania F 538.
Przerysujmy obwód następująco:



Opór zastępczy R oporów 2Ω i 6Ω wynosi

$$R = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{2}\Omega.$$

Całkowity opór R_1 lewej gałęzi wynosi

$$R_1 = R + 1{,}5\Omega = 3\Omega$$

i stąd całkowity opór obwodu

$$R_c = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{3\Omega}} = 1{,}5\Omega.$$

Natężenie prądu płynącego z baterii wynosi

$$I = \frac{6}{1{,}5}\mathrm{A} = 4\mathrm{A}.$$

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

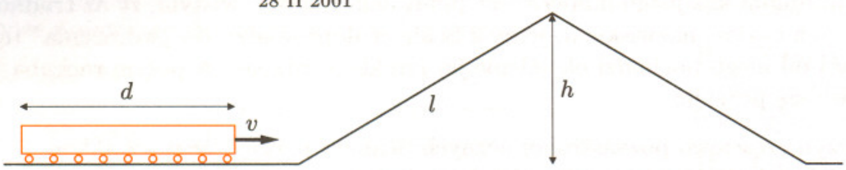
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2001

Zadania z fizyki nr 308, 309

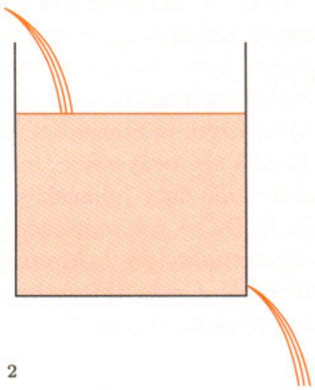
Redaguje Jerzy B. BROJAN

308. Pociąg o długości d jedzie po torze, na którym występuje wzniesienie o kształcie „trójkątnym" (rys. 1), przy czym długość każdego z odcinków równi pochyłej wynosi l, a wysokość – h. Jeśli rozkład masy wzdłuż pociągu jest jednorodny, a opory ruchu można zaniedbać (i nie ma też napędu), to jaki warunek musi spełniać prędkość początkowa v, aby pociąg pokonał wzniesienie?



Rys. 1

309. Do izolowanego termicznie zbiornika zawierającego wodę o masie M wpływa strumień wody o masie na jednostkę czasu równej α i dokładnie miesza się z wodą w zbiorniku. Jednocześnie ze zbiornika wypływa stałym strumieniem taka sama ilość wody. Wykazać, że jeśli temperatura T wpływającej wody zależy harmonicznie od czasu z amplitudą T_0 i częstością ω (tzn. $T(t) = T_0 \sin \omega t + T_1$), to temperatura wody wypływającej także zależy harmonicznie od czasu. Obliczyć amplitudę jej zmian.



Rys. 2

Zadania z matematyki nr 411, 412

Redaguje Marcin E. KUCZMA

411. Ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, 56\}$ usunięto sześć liczb. Dowieść, że z pozostałego zbioru można wybrać czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) różnych liczb, w którym każdy wyraz (od drugiego począwszy) jest liczbą podzielną przez wyraz poprzedni.

412. Dla ustalonej liczby naturalnej n obliczyć minimalną wartość, jaką może mieć suma odwrotności długości wszystkich boków i przekątnych n-kąta wpisanego w okrąg o promieniu 1.

Zadanie **412** zaproponował pan Janusz Olszewski z Suwałk.

Grudzień

Na przełom tysiącleci przyroda nie szykuje nam żadnych rewelacji, daje nam po prostu możliwość oglądania pięknego grudniowego nieba z dwiema planetami. Od wschodu do zachodu niemal przez zenit ciągnie się Droga Mleczna. Wysoko na jej tle znajdują się Kasjopeja i Perseusz z licznymi gromadami otwartymi gwiazd, w tym widoczną gołym okiem podwójną gromadą h i χ w Perseuszu. Również wysoko, na południe od Kasjopei, zobaczymy najjaśniejszą na naszym niebie galaktykę M31 w Andromedzie i – jeśli ktoś ma wyjątkowo dobry wzrok albo lornetkę – M33 w Trójkącie. Na południowym wschodzie wieczorem widać Byka i należące doń dwie gromady: rozproszone na dużym obszarze Hiady i małą gromadę Plejad. Właśnie tam znajdują się w grudniu Jowisz i Saturn, sprawiając wrażenie, że należą do tych gromad.

A jeżeli ktoś poczeka kilka godzin, to doczeka się również na południowym wschodzie widoku Oriona. W sumie, jeżeli pogoda pozwoli, można widzieć bogatą paradę wielu obiektów dostrzegalnych bez pomocy przyrządów. Nie da się jednak ukryć, że już zwykła lornetka czyni ten widok znacznie wspanialszym.

Wenus znajduje się w Koziorożcu i wieczorem zachodzi, Mars w Pannie i w grudniu go nie widać. Jowisz jest w Byku, a Saturn na granicy Barana i Byka. Pełnia Księżyca wypada 11 XII, a nów 25 XII – wtedy też będzie częściowe zaćmienie Słońca, ale widoczne tylko od Meksyku przez Amerykę Północną po Grenlandię. 21 XII około godz. 15 zaczyna się astronomiczna zima, co oznacza, że zapewne mrozy jeszcze przed nami, jednak dni będą już coraz dłuższe.

T.K.

Patrz w niebo

I tak z pierwszym uderzeniem zegara o sylwestrowej północy nastąpi koniec XX wieku i zarazem drugiego tysiąclecia naszej ery. Jubileusze takie, właściwie nie wiadomo po co, skłaniają do obliczania, ile np. sekund trwały oba tysiąclecia. Obliczenie liczby sekund jest fraszką, jeżeli pozna się liczbę dni między dwiema datami, a to właśnie nie jest takie proste. W zakresie jednego roku miesiące mają przecież różne liczby dni, w dłuższych okresach pojawiają się lata przestępne, wreszcie wiadomo, że przez mniej więcej trzy czwarte naszej ery obowiązywał kalendarz juliański, a dopiero potem obecny gregoriański. Wszystko to powoduje, że przy obliczaniu liczby dni między dwiema datami bardzo łatwo jest po prostu się pomylić. Tymczasem znajomość dużych odstępów czasu jest potrzebna w wielu zagadnieniach astronomicznych, zresztą nie tylko. Dlatego astronomowie już dawno wymyślili na to sposób, a nazywa się on juliańską rachubą dni. Zaproponował ją w XVI w. profesor z Lejdy, J. Scaliger, i nazwał tak na cześć swojego ojca, który miał na imię Julian (nie ma to więc nic wspólnego z kalendarzem juliańskim). W gruncie rzeczy przyporządkowanie kolejnym dniom kolejnego numeru jest pomysłem tak oczywistym, że aż trudno wiązać go z czyimś nazwiskiem, jednak Scaliger doprowadził do „wdrożenia” tej rachuby i od niego pochodzi określenie jej punktu zerowego. A potem rachuba ta po prostu się przyjęła.

Z przyczyn częściowo pozaastronomicznych Scaliger przyjął, że początkiem juliańskiej rachuby dni (ery juliańskiej) ma być 1 stycznia 4713 r. p.n.e., czyli roku −4712, gdyż „rok zerowy” nie istnieje. Dokładnie: zero przypada w południe tego dnia (dziś dopowiadamy: w Greenwich), dzięki czemu w Europie nie trzeba podczas nocnych obserwacji zmieniać daty juliańskiej, tj. numeru dnia. Daty juliańskie odpowiadające kilku ważniejszym datom kalendarzowym zawiera tabelka; są one regularnie publikowane w rocznikach astronomicznych. Obecnie numery juliańskie są już siedmiocyfrowe, przy czym w zależności od potrzeb kilkoma początkowymi cyframi numerów można się, oczywiście, nie zajmować. Rzecz jasna, są również algorytmy na obliczanie daty juliańskiej (JD) dla konkretnej daty kalendarzowej (DATA=(R,M,DZ) – rok, miesiąc, dzień) i odwrotnie. Oto przykładowa para takich algorytmów (wg J. Meeus: Astronomical Formulae) w formie programów w BASICU. Część ułamkową dnia (liczoną normalnie od północy) oznaczamy dd; pełna data to DZ.dd.

```
PROGRAM JD(DATA)
IF M = 1 OR M = 2 THEN R = R − 1, M = M + 12
A = INT(R/100)
B = 2 − A + INT(A/4)
JD = INT(365.25 * R) + INT(30.6001 * (M + 1)) + B + DZ.dd + 1720994.5
(dla kalendarza juliańskiego kładziemy A = 0, B = 0)
```

```
PROGRAM DATA(JD)
Z = INT(JD + 0.5)
A = INT((Z − 1867216.25)/36524.25)
B = Z + 1 + A − INT(A/4) + 1524
C = INT((B − 122.1)/365.25)
D = INT(365.25 * C)
E = INT((B − D)/30.6001)
dd = JD + 0.5 − Z
DZ = B − D − INT(30.6001 * E)
IF E < 13.5 THEN M = E − 1 ELSE M = E − 13
IF M < 2.5 THEN R = C − 4715 ELSE R = C − 4716
(dla kalendarza juliańskiego kładziemy A = 0, B = Z + 1524)
```

Zaczynamy więc nowy wiek i milenium momentem, który w rachubie juliańskiej według czasu Greenwich zapisze się jako JD=2451910,5. U nas północ będzie o godzinę wcześniej. Wszystkiego najlepszego!

Tomasz KWAST

Data juliańska w południe daty kalendarzowej

−4712	I	1.5	0.0
0	I	0.5	1 721 057
1000	I	0.5	2 086 307
1500	I	0.5	2 268 932
1582	X	4.5	2 299 160
1582	X	15.5	2 299 161
1600	I	0.5	2 305 447
1700	I	0.5	2 341 972
1800	I	0.5	2 378 496
1900	I	0.5	2 415 020
2000	I	0.5	2 451 544
2001	I	0.5	2 451 910

Dzień „zerowy” to poprzedni względem dnia o numerze 1 danego miesiąca. Rok −4712 to inaczej rok 4713 p.n.e., ponieważ rok „zerowy” nie istnieje. Rozpoczynająca tabelkę data „0 I 0.5” to południe dnia poprzedzającego dzień 1 stycznia 1 r.n.e. Skok rachuby kalendarzowej w roku 1582 wymusiło przejście z kalendarza juliańskiego na gregoriański.

12/00 (36)

Γlimatias

Z okazji zbliżającego się *Gammalimatiasu* numer **37** zaprezentujemy **37** własności liczby **37**. Dziś początek, dokończenie dopiero w następnym tysiącleciu.

1. Zacznijmy od cechy podzielności przez **37**. Liczba naturalna dzieli się przez **37** z taką samą resztą, z jaką dzieli się przez **37** suma liczb utworzonych przez grupki trzycyfrowe, na jakie można podzielić daną liczbę, poczynając od prawej strony (z lewej strony może pojawić się liczba jedno- lub dwucyfrowa).

2. Jak obliczyć sumę sześcianów cyfr liczby **37**? Wystarczy na końcu dopisać 0. Mamy bowiem $\mathbf{3}^3 + \mathbf{7}^3 = \mathbf{37}0$. Żadna inna liczba naturalna nie ma tej własności.

3. Obliczenie sumy kwadratów cyfr liczby **37** jest już trochę bardziej pracochłonne, musimy bowiem dodać do liczby **37** iloczyn jej cyfr:

$$\mathbf{3}^2 + \mathbf{7}^2 = \mathbf{37} + \mathbf{3} \cdot \mathbf{7}\,.$$

4. Podobnie znajdujemy kwadrat różnicy cyfr liczby **37**:

$$(\mathbf{7} - \mathbf{3})^2 = \mathbf{37} - \mathbf{3} \cdot \mathbf{7}\,.$$

5. Niech p będzie liczbą pierwszą, n liczbą parzystą dodatnią mniejszą od $p-1$. Wtedy liczba $1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n$ dzieli się przez p, ale na ogół nie dzieli się przez p^2. Najmniejsza liczba pierwsza p, dla której podzielność przez p^2 jest możliwa, to **37** (dla $n = 32$). Fakt ten można mądrze wysłowić w sposób następujący: **37** jest najmniejszą liczbą pierwszą nieregularną.

Komentarze:

(i) opisana wyżej podzielność jest równoważna podzielności licznika n-tej liczby Bernoulliego przez p,

(ii) dla $n = p-1$ liczba $1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n$ nie dzieli się nawet przez p,

(iii) dla n nieparzystych, spełniających nierówność $3 \le n \le p-2$, liczba $1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n$ dzieli się przez p^2, natomiast dla $n = 1$ liczba ta dzieli się tylko przez p, a przez p^2 już nie.

6. Najmniejszą liczbą pierwszą, dla której opisana wyżej podzielność przez p^2 zachodzi dla więcej niż jednego n, jest **37.** liczba pierwsza, a mianowicie $p = 157$ (n równe 62 i 110). Fakt ten można mądrze wysłowić w sposób następujący: 157 jest najmniejszą liczbą pierwszą o indeksie nieregularności 2.

7. W trójkącie pitagorejskim ABC o przyprostokątnych $BC = 3$ i $AC = 4$ kąt przy wierzchołku A ma w przybliżeniu $\mathbf{37}^\circ$ (rys. 1). Dokładniej: $\mathbf{36}\overset{\circ}{,}87$.

8. W tymże trójkącie kąt przy wierzchołku C jest prosty, gdyby go jednak rozewrzeć do 120°, to bok AB osiągnąłby długość $\sqrt{\mathbf{37}}$ (rys. 2).

9. Jeżeli w trójkącie kąt między bokami długości **3** i **7** ma 60°, to trzeci bok ma długość $\sqrt{\mathbf{37}}$ (rys. 3).

10. Natomiast trójkąt o bokach długości **33** i **7**, tworzących kąt 120°, ma trzeci bok długości **37** (rys. 4).

11. W trójkącie prostokątnym długości boków są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Jedna z przyprostokątnych ma długość równą czwartej części obwodu trójkąta. Obliczyć długość przeciwprostokątnej.

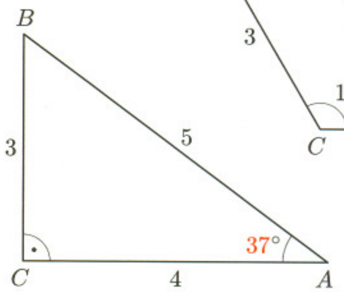
Odpowiedź: **37**.

12. Liczba **37** jest sumą kwadratów będących liczbami trójkątnymi, a mianowicie $\mathbf{37} = 1 + 36 = 1^2 + 6^2 = 1 + (1+2+3+4+5+6+7+8)$.

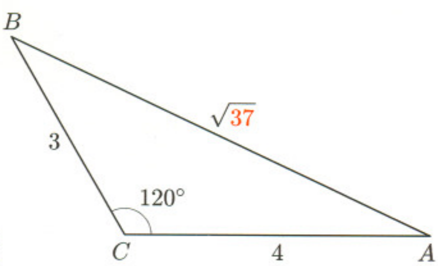
13. Jedyną liczbą czterocyfrową, której cyfry są uporządkowane rosnąco i która jest kwadratem liczby całkowitej, jest $1369 = \mathbf{37}^2$.

14. Wewnątrz koła o promieniu $\sqrt{11}$ i środku w punkcie kratowym (tzn. mającym obie współrzędne całkowite) znajduje się **37** punktów kratowych. To samo dotyczy kół o promieniu $\sqrt{12}$.

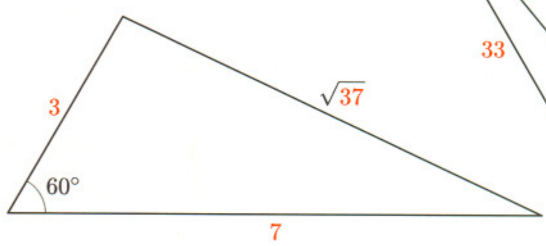
JWR



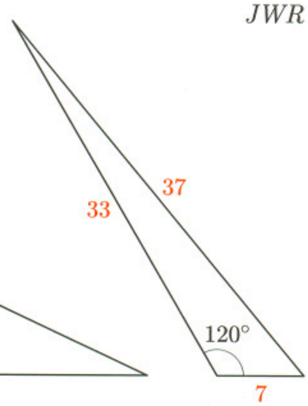
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl