

## SPIS TREŚCI NUMERU 11 (318)

Czasoprzestrzeń z kotem  
na horyzoncie  
*Mikołaj Korzyński*  
*i Magda Stobińska* str. 1

Zasada Lagrange'a  
a geometria  
*Ewa Gora,*  
*Aleksiej Tretiakow*  
*i Henryk Żołądek* str. 4

Zadania str. 6

Aktualności  
(nie tylko) fizyczne str. 7

Mała Delta str. 8

Klub 44 str. 9

Teoria Galois dla  
bardzo niecierpliwych  
*Łukasz Wiechecki* str.10

Eksploatacja przestrzeni  
kosmicznej najdonioślejszą  
zdobyczą XX wieku  
*Krzysztof Ziolkowski* str.12

Patrz w niebo str.16

Listopad str.16

Gammalimatias str.17

**W następnym numerze:**  
**Matematyka a przyroda**

Okładki i ilustracje: *Anna Ludwicka*  
Rysunki techniczne: *Marcin Adamski*

Wybór artykułów w języku angielskim  
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski  
**Cena 1 egzemplarza 3 zł**

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:  
Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichoński  
– wiceprzewodniczący  
Krzysztof Ciesielski  
Jan A. Gaj  
Piotr Goldstein  
**Tomasz Hofmoki**  
Andrzej Hryniewicz  
Wiesław A. Kamiński  
Marta Kicińska-Habior  
Krzysztof Maślanka  
Janusz Matkowski  
Andrzej Mąkowski  
Zdzisław Pogoda  
Michał Różycka  
Konrad Rudnicki  
Grzegorz Sitarski  
Andrzej Woszczyk  
Eligiusz Złotkiewicz  
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
Wiktor Bartol  
Krzysztof Biesaga  
Ewa Czuchry  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Anna Ludwicka  
Anna Rudnik  
Witold Sadowski  
Joanna Udalska  
Anna Wojtyra  
Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Adres Redakcji:  
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa  
tel. 853-59-61  
BARTOL@MIMUW.EDU.PL  
Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.

Wydrukowano  
w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.  
w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2001 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2001 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 2001 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę: cena prenumeraty + rzeczywiste koszty wysyłki. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru.  
Wpłaty przyjmuje Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy „RUCH” SA na konto: Pekao SA IV O/W-wa 12401053-40060347-2700-401112-001 lub kasa Oddziału.
5. Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” SA OKDP, 00-958 Warszawa, skrytka pocztowa 12, ul. Jana Kazimierza 31/33, lub telefonicznie: (22) 5328-731, 5328-820, 5328-816, fax: 5328-732, internet: [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl), e-mail: [prenumerata@okdp.ruch.com.pl](mailto:prenumerata@okdp.ruch.com.pl)
6. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną
 

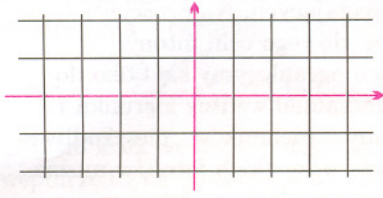
|          |          |                          |
|----------|----------|--------------------------|
| do 5 XII | – na I   | kwartał roku następnego, |
| do 5 III | – na II  | kwartał roku bieżącego,  |
| do 5 VI  | – na III | kwartał roku bieżącego,  |
| do 5 IX  | – na IV  | kwartał roku bieżącego,  |

# Czasoprzestrzeń z kotem na horyzoncie

Mikołaj KORZYŃSKI i Magda STOBINIŃSKA

Gdy układ współrzędnych zawodzi...

Kartezjusz przypisywał punktom na płaszczyźnie pary liczb za pomocą siatki złożonej z dwóch prostopadłych rodzin prostych.



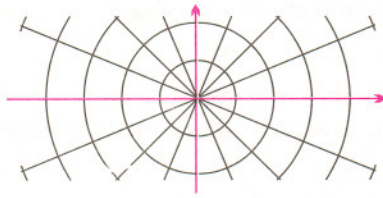
W tym podejściu odległość  $\Delta s$  między dwoma punktami spełnia równanie

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

Nie jest to, oczywiście, jedyny sposób określenia położenia punktów na płaszczyźnie. Konkurencyjna metoda to np. *biegunowy układ współrzędnych*  $(r, \varphi)$ , związany z poprzednim wzorami:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Siatka tego układu współrzędnych to pajęczyna:



Podanie pełnego wzoru na odległość punktów w tym układzie jest trudniejsze i niecelowe – w fizyce zazwyczaj interesuje nas odległość bardzo bliskich punktów (infinitesimalna). Ogólnie wzór na infinitesimalną odległość punktów można zapisać w następującej formie

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

gdzie układ funkcji  $g_{\mu\nu}$  to składowe *tensora metrycznego* albo metryki.

Funkcje te zależą od układu współrzędnych, np. w układzie biegunowym metryka ma postać

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Zauważmy, że środek układu biegunowego nie ma dobrze określonej współrzędnej  $\varphi$ : wszystkie punkty, dla których  $r = 0$ , mają współrzędne kartezjańskie  $x = 0, y = 0$ . Odbija się to także na postaci metryki w tym punkcie – znika wyraz zawierający  $d\varphi^2$ . Ten układ współrzędnych nie jest więc dobry, gdy chcemy opisać np. krzywą przechodzącą przez środek układu współrzędnych. Ale patologia metryki jest tylko wynikiem złego sposobu numeracji punktów na płaszczyźnie, a nie jakąś szczególną cechą punktu  $x = 0, y = 0$ . Podobnie źle zachowuje się układ współrzędnych sferycznych, czyli długość i szerokość geograficzna na globusie:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

„Patologiczne” są w tym przypadku prócz środka układu punkty „bieguna północnego i południowego”  $\theta = 0$  i  $\theta = \pi$ .

Wszystkie powyższe przykłady pokazują osobliwość pozorów: metryka w pewnych miejscach „źle zachowuje się”, ale można „przywołać ją do porządku”, odpowiednio zmieniając współrzędne.

Pomysł, by punkty w geometrii oznaczać liczbami rzeczywistymi, pochodzi od Kartezjusza i Fermata. Podejście to pozwala zastosować cały aparat analizy i algebry do zagadnień geometrii i fizyki. W fizyce oprócz dobrze znanego ze szkoły układu kartezjańskiego stosuje się inne układy (patrz margines). Postępuje się tak zwłaszcza wtedy, gdy zagadnienie ma jakąś szczególną symetrię, np. sferyczną.

Dobranie odpowiedniego układu do zagadnienia nie zawsze jest sprawą łatwą. Jest to wyjątkowo trudne w przypadku geometrii nieeuklidesowej, gdzie prostoliniowe, kartezjańskie układy współrzędnych nie istnieją. W fizyce z taką sytuacją spotkano się w Ogólnej Teorii Względności. Grawitację opisuje się tam przy użyciu geometrii (np. *Delta* 9/1998).

Wkrótce po odkryciu przez Alberta Einsteina i Davida Hilberta równań pola grawitacyjnego Karl Schwarzschild znalazł ich rozwiązanie dla czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej – odpowiednik pola grawitacyjnego punktu obdarzonego masą  $M$  w teorii Newtona. Czasoprzestrzeń Schwarzschilda opisujemy czterema współzrędnymi, oznaczanymi zazwyczaj  $t, r, \theta$  i  $\varphi$ . „Odległość”, czyli interwał dwu bliskich punktów w czasoprzestrzeni, dana jest wzorem

$$(1) \quad ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Stosujemy układ jednostek, w którym stała grawitacyjna  $G = 1$ , prędkość światła  $c = 1$ . W dwu ostatnich współczynnikach rozpoznajemy odległość na powierzchni dwuwymiarowej sfery o promieniu  $r$ . Co więcej, dla dużych wartości  $r$  wyrazy przy  $dt^2$  i  $dr^2$  dążą do  $\pm 1$ , a cała metryka do metryki sferycznego układu współrzędnych na przestrzeni euklidesowej z czasem (tzw. *czasoprzestrzeni Minkowskiego*). Ta cecha, zwana asymptotyczną płaskością, jest geometrycznym wyrazem faktu, że oddziaływanie grawitacyjne zanika daleko od źródła (ale uwaga – w przeciwieństwie do sferycznego układu współrzędnych –  $r$  nie jest geometryczną odległością od źródła, lecz parametrem pozwalającym z grubsza powiedzieć, jak daleko od środka jesteśmy).

Znacznie gorzej wygląda zachowanie się współczynników metryki dla małych  $r$ . Oprócz spodziewanej osobliwości dla  $r = 0$  kłopoty sprawia powierzchnia  $r = 2M$ , tzw. *horyzont Schwarzschilda*. Początkowo sądzono, że ta osobliwość nie odgrywa w praktyce żadnej roli (dla Słońca wystąpiłaby, gdyby jego rozmiary, bez zmiany masy, spadły do kilku kilometrów), potem jednak, wraz z rozwojem wiedzy o ewolucji gwiazd, astronomowie i fizycy zaczęli coraz poważniej spekulować na temat obiektów, w których horyzont rzeczywiście istnieje. Nazwano je czarnymi dziurami.

W sposób naturalny pojawia się więc pytanie: co stanie się z cząstką, która spadnie na powierzchnię horyzontu, czyli jak wygląda równanie przechodzącej przezeń geodezyjnej – i czy w ogóle takie geodezyjne istnieją? Dopiero w 1960 roku problem ten ostatecznie rozwiązał Martin Kruskal. Zdefiniował on nowe współrzędne, w których czasoprzestrzeń Schwarzschilda możemy oglądać w całej okazałości.

Zanim jednak podamy szczegóły konstrukcji Kruskala, musimy zapoznać się bliżej z własnościami czasoprzestrzeni Schwarzschilda: zbadamy, jak pole grawitacyjne w tej czasoprzestrzeni wpływa na spadek swobodny ciał masywnych.

Wyobraźmy sobie astronautę-observatora umieszczonego w rakiecie utrzymującej się za pomocą silników w punkcie o stałych współrzędnych  $r, \varphi, \theta$ . Możemy się spodziewać, że będzie on odczuwać na pokładzie swojej rakiety przyspieszenie, odpowiednik newtonowskiego  $\vec{g}$ . By to sprawdzić, nasz astronauta upuści w swojej rakiecie niewielkiego kota. (Od czasów Schrödingera

koty są bardzo popularne w fizyce jako bohaterowie eksperymentów myślowych). Spróbujmy zbadać co się z nim stanie po osiągnięciu powierzchni  $r = 2M$  a potem (jeśli przeżyje) powierzchni  $r = 0$ .

Początkowo kot spada dalej swobodnie czyli porusza się po geodezyjnej o warunkach początkowych zadanych równościami jego czteropędkości i czteropędkości rakiety. Równanie ruchu zwierzaka ma postać (patrz *Delta* 9/1998)

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta.$$

Różniczkowanie odbywa się względem czasu własnego  $\tau$  kota. Ale póki prędkość kota względem rakiety jest znacznie mniejsza niż  $c$  jego czas własny praktycznie pokrywa się z czasem pokładowym rakiety. Prócz tego spośród sumowanych wyrazów po prawej stronie znaczenie ma tylko  $\Gamma^\mu_{00} u^0 u^0$  – wszystkie pozostałe składowe czteropędkości są bardzo małe w porównaniu z  $u^0$ . Równanie ruchu upraszcza się więc do

$$\frac{du^r}{d\tau} = -\frac{M}{r^2},$$

pozostałe zaś pochodne znikają. To jeszcze nie koniec obliczeń: wspominaliśmy już że  $r$  nie jest poprawnie mierzoną odległością. Uwzględnienie tego prowadzi do równania przyspieszenia

$$a^r = -\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}.$$

Widać że wynik dla małych  $M$  i dużych  $r$  staje się równy co do wartości newtonowskiemu  $\vec{g}$ . Z drugiej strony dla małych  $r$  przyspieszenie rośnie znacznie szybciej niż wynikałoby to z rachunku klasycznego – dążąc do nieskończoności na powierzchni  $r = 2M$ !

Oznacza to że astronauta nie powinien obniżać lotu do wysokości promienia grawitacyjnego ciężkiego obiektu. Nie ma tam możliwości utrzymania się na stałej wysokości bez względu na moc czy siłę ciągu silników: przyspieszenie grawitacyjne jest nieskończone. Podobnie żadna siła nie utrzyma kota gdy spadnie na powierzchnię horyzontu. Rozumowanie to uzasadnia nazwę „horyzont” nadaną powierzchni  $r = 2M$ . Horyzont to miejsce z którego nie ma powrotu.

Wciąż jednak nie wiemy co dzieje się z kotem w trakcie mijania horyzontu. Pokazaliśmy tylko że względem kogoś kto horyzontu **nie przekracza** ( $r = \text{const}$ ) kot doznaje nieskończonego przyspieszenia. Trudno jednak stwierdzić czy ten fakt ma jakiś wpływ na jego kondycję: można wszak wymyślić obserwatora względem którego Ziemia wraz z nią Czytelnik ma nieskończone przyspieszenie a nawet dobrać tak układ współrzędnych by ów obserwator miał stałe współrzędne przestrzenne. Absurdalne wyniki jakie dałaby analiza ruchu Ziemi w tym układzie ( $a = \infty$ ) raczej nie powinny spędzać snu z powiek Ziemianom...

Podsumujmy naszą dyskusję: współrzędne  $t, r, \varphi, \theta$  pokazują czasoprzestrzeń z punktu widzenia obserwatorów którzy w jakiś sposób np. za pomocą silników utrzymują się na stałej wysokości  $r$ ; tyle

że takich obserwatorów *nie ma na wysokości  $2M$  i niżej* (przynajmniej spośród obserwatorów obdarzonych masą) więc dziwnego że próby opisu ruchu cząstek nie udają się. To sugeruje sposób na pozbycie się kłopotów: spróbujmy opisać czasoprzestrzeń Schwarzschilda z punktu widzenia obserwatorów (cząstek) swobodnie spadających. Najprościej rachunkowo jest wybrać do tego celu fotony. W dalszych obliczeniach ograniczymy się tylko do fotonów spadających radialnie wzdłuż kierunku  $r$ . Dzięki temu eliminujemy z rachunków „nieszkodliwe” współrzędne  $\theta$  i  $\varphi$ . Zbiór wszystkich fotonów można podzielić na dwa mniejsze podzbiory: fotonów „uciekających” i „wpadających”. Te pierwsze wraz ze wzrostem czasu oddalają się od czarnej dziury ( $\frac{dr}{dt} > 0$ ) te drugie przeciwnie.

Linie świata fotonów spełniają więc zależność

$$(2) \quad ds^2 = 0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2.$$

Jest to równanie różniczkowe pierwszego rzędu dla funkcji  $r(t)$  lub  $t(r)$ . Łatwo pozwala ono wyznaczyć linie świata fotonów w nowych współrzędnych

$$U := t - r_* = \text{const},$$

$$V := t + r_* = \text{const},$$

gdzie parametr  $r_*$  zwany współrzędną żółtą dany jest przez zależność

$$r_* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|.$$

Teraz równanie  $U = \text{const}$  opisuje geodezyjną fotonów „uciekających” a  $V = \text{const}$  fotonów „wpadających”. Postaramy się wyrazić element liniowy (2) w nowych współrzędnych

$$(3) \quad \begin{aligned} 2r_* &= V - U, \\ 2t &= V + U, \end{aligned}$$

stąd

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dU dV + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Powierzchnia horyzontu  $r = 2M$  nadal sprawia nam kłopot. Jednak ta zamiana zmiennych nie była bezcelowa. Powierzchnie  $U = \text{const}$  i  $V = \text{const}$  są geometrycznie dobrze określone tylko sposób ich parametryzacji jest zły. Jest to taki sam problem jaki dotyczył sfery i jej rzekomych osobliwości na biegunach. Wiadomo jednak że sfera istnieje i nie jest osobliwa a z „niewygodnymi” punktami uporać się można za pomocą nowej parametryzacji jej powierzchni. Podobnie tutaj powinniśmy zaproponować nową parametryzację: jeżeli zadziałamy funkcją  $\exp$  na obie strony równania (3) to otrzymamy równość

$$(4) \quad e^{(V-U)/4M} = e^{r_*/2M} = \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| e^{r/2M}.$$

Nowe parametry definiujemy następująco: dla  $r > 2M$

$$\begin{aligned} p &:= -e^{-U/4M} = -\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} e^{-t/4M}, \\ q &:= e^{V/4M} = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} e^{t/4M} \end{aligned}$$

oraz dla  $r < 2M$

$$p := e^{-u/4M} = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} e^{-t/4M},$$

$$q := e^{v/4M} = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} e^{t/4M},$$

Pozwalają one wyeliminować „sprawcę” całego zamieszania – czynnik  $1 - 2M/r$  z elementu liniowego

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dp dq + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Ostatni krok wreszcie polega na powrocie ze współrzędnych „fotonowych”, zadanych przez trajektorie tych cząstek, do współrzędnych  $(u, v)$ , z których jedna jest czysto czasowa, a druga czysto przestrzenna – operowanie takimi współrzędnymi jest bardziej intuicyjne. Robimy to w następujący sposób:

dla  $r > 2M$  definiujemy

$$(5) \quad u := \frac{1}{2}(q - p) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M),$$

$$(6) \quad v := \frac{1}{2}(p + q) = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M),$$

a dla  $r < 2M$

$$(7) \quad u := \frac{1}{2}(q - p) = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M),$$

$$(8) \quad v := \frac{1}{2}(p + q) = \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M).$$

Metryka ma teraz postać

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (dv^2 - du^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Oto współrzędne Kruskala–Szekeres w całej okazałości. We wzorach na metrykę może dziwić ciągle używanie starej współrzędnej  $r$ . Od tej pory jednak  $r$  powinno być traktowane jako funkcja nowych współrzędnych  $u$  i  $v$ , zadana w sposób uwikłany wzorem:

dla  $r > 2M$

$$(9) \quad u^2 - v^2 = \left(\frac{2M}{r} - 1\right) e^{r/2M},$$

dla  $r < 2M$

$$(10) \quad v^2 - u^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) e^{r/2M}.$$

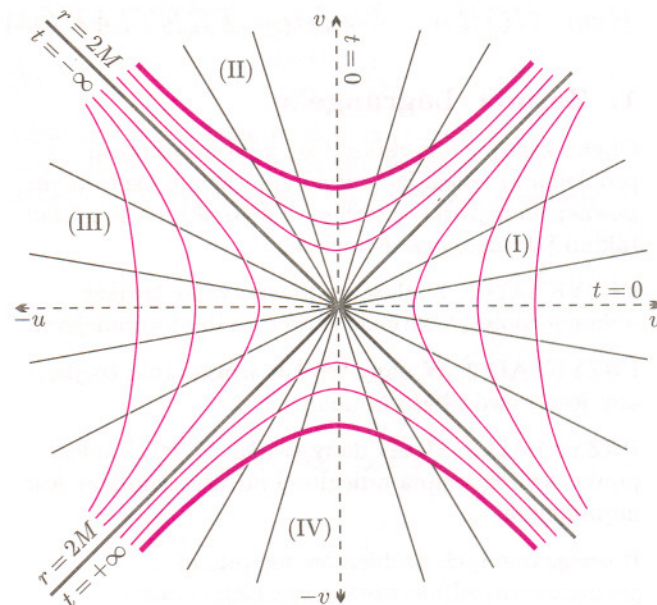
W tych wzorach nie otrzymujemy żadnej osobliwości dla powierzchni  $r = 2M$ . Wszystkie składowe metryki oraz współrzędne  $u$  i  $v$  przyjmują skończone wartości dla każdej skończonej wartości  $r$  z wyłączeniem  $r = 0$ . Pozbyliśmy się przynajmniej jednej osobliwości.

Kot nie zostanie na razie rozerwany na strzępy, ale przeżyje przygodę swojego życia: swobodny spadek do czarnej dziury! Ostatnią, niestety, ponieważ, jak się przekonamy, nie uda mu się w żaden sposób uniknąć spotkania z osobliwością w  $r = 0$ .

Teraz ciekawostka: rozważmy punkty dalekie od horyzontu, czyli takie, dla których  $r \gg 2M$ . Ze wzorów łączących współrzędne Kruskala ze starymi  $r$  i  $t$  możemy łatwo przekonać się, że zachodzi dla nich nierówność  $u^2 \gg v^2$ . Ale można ją spełnić na dwa

sposoby: albo  $u \gg |v|$ , albo  $u \ll -|v|$ . Odkryliśmy ciekawą rzecz – czasoprzestrzeń jest „podwójna”! Jak to rozumieć?

Przypomnijmy sobie nasze wzory zadające współrzędne Kruskala–Szekeres oraz wzory (9)–(10). Były one słuszne, o ile były spełnione odpowiednio zależności  $u > |v|$  dla  $r > 2M$  oraz  $v > |u|$  dla  $r < 2M$ . Wzór (9) spełniają także inaczej dobrane  $u_*$  i  $v_*$ , mianowicie  $u_* = -u$  oraz  $v_* = -v$ . Te ujemne pierwiastki opisują punkty, których we współrzędnych Schwarzschilda nie było. Odkryliśmy więc na papierze nowe, „ukryte” dotychczas regiony czasoprzestrzeni. Dopiero współrzędne Kruskala, rozszerzone do dowolnych rzeczywistych  $u$  i  $v$ , dają pełny, globalny opis geometrii czasoprzestrzeni: pierwsza para współrzędnych opisuje region I, druga II, itd. Współrzędne Schwarzschilda opisywały tylko regiony I–II. Spójrzmy na rysunek:

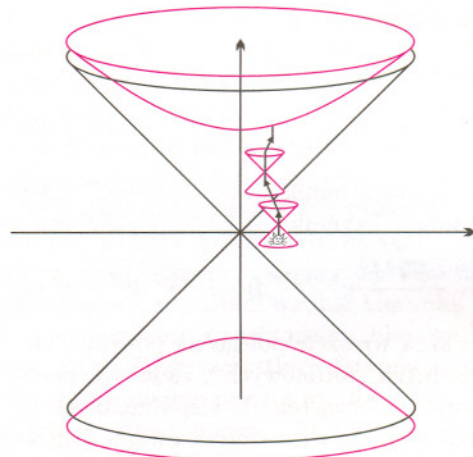


Co można powiedzieć o tych czterech częściach czasoprzestrzeni? Diagram Kruskala interpretujemy następująco: regiony I i III to identyczne, lecz rozłączne, asymptotycznie płaskie wszechświaty, znajdujące się na zewnątrz promienia grawitacyjnego czarnej dziury; natomiast regiony II i IV to także identyczne pod względem fizycznym światy, z taką różnicą, że strzałki czasu w nich zawarte są skierowane przeciwnie.

Wracając jeszcze do poprzedniej dyskusji współrzędnych Kruskala–Szekeres, ze wzorów (5)–(8) wynika, że na diagramie powierzchnie stałego  $r$  są hiperbolami o asymptotach zadanych równaniami  $u = v$  oraz  $u = -v$ . Natomiast powierzchnie stałego czasu są liniami prostymi, promieniście rozchodzącymi się ze środka układu współrzędnych. Analogicznie, radialne linie zerowe (linie światła fotonów) są postaci  $du = dv$  oraz  $du = -dv$ . Oznacza to, że pozbyliśmy się kłopotów związanych z „zamykaniem się” stożków świetlnych we współrzędnych Schwarzschilda dla

cząstek dobiegających do powierzchni  $r = 2M$ . Stożki we współrzędnych Kruskala–Szekeres’a są zawsze zbudowane z tworzących nachylonych pod kątem  $45^\circ$  do osi układu.

Jesteśmy już gotowi do opisanego losów kota pod horyzontem. Kot, jako obiekt masywny, porusza się zawsze po krzywej czasowej, czyli jego czteroprędkość zawsze znajduje się wewnątrz stożka świetlnego. Na diagramie Kruskala oznacza to, że jego czteroprędkość jest zawsze skierowana „w górę”, w kierunku rosnącego  $u$ , a malejącego  $r$ . Wobec tego spotkanie kota z osobliwością w  $r = 0$  jest nieuniknione.



## Zasada Lagrange’a a geometria

Ewa GORA, Aleksiej TRETIKOW i Henryk ŻOŁĄDEK

### 1. Zasada Lagrange’a

Chyba każdy z nas zetknął się z interesującymi problemami polegającymi na znalezieniu ekstremum pewnej funkcji (na określonym zbiorze), na przykład takimi jak niżej przedstawione:

**PRZYKŁAD 1.** Znaleźć na płaszczyźnie trójkąt o danym polu  $P$ , którego obwód byłby najmniejszy.

**PRZYKŁAD 2.** W dany trójkąt wpisać taki trójkąt, aby jego obwód był minimalny.

**PRZYKŁAD 3.** Mamy dany trójkąt  $ABC$ . Znaleźć punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

Rozwiązanie tych problemów metodami geometrycznymi nie zawsze jest elementarne.

W niniejszym tekście chcemy przedstawić uniwersalny sposób rozwiązania następującego problemu geometrycznego na ekstremum:

*Dla danego trójkąta  $ABC$  i danej liczby naturalnej  $n = 2, 3, \dots$  znaleźć punkt, dla którego suma  $|x_1|^n + |x_2|^n + |x_3|^n$  potęg odległości od boków jest najmniejsza.*

Do rozwiązania tego problemu proponujemy klasyczny sposób Lagrange’a. W XVIII w. Lagrange wykonał następującą ogólną metodę rozwiązywania zagadnień optymalizacji. Przypuśćmy, że mamy znaleźć ekstremum funkcji  $\varphi(x)$  określonej na zbiorze  $X \subset \mathbb{R}^n$ , danym pewnymi równaniami i nierównościami:  $f_i(x) = 0$  lub  $f_i(x) \geq 0$  (gdzie funkcje  $f_i$  są różniczkowalne).

Jeżeli punkt ekstremalny  $x^*$  leży we wnętrzu obszaru  $X$  (który ma niepuste wnętrze), to warunkiem koniecznym jest

$$(1) \quad \varphi'(x^*) = 0,$$

$$\text{tzn. } \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x^*) = \dots = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x^*) = 0.$$

Natomiast jeśli punkt  $x^*$  nie należy do wnętrza obszaru  $X$ , tylko leży na jego brzegu, wówczas powyższe twierdzenie nie ma sensu. Mamy do czynienia z ekstremum warunkowym: szukamy  $\min \varphi(x)$  przy warunkach  $f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0$ . Korzystamy wtedy z zasady Lagrange’a.

**Zasada Lagrange’a** mówi, że w tym przypadku warunkiem koniecznym ekstremum w  $x^*$  jest

$$(2) \quad \varphi'(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f'_i(x^*),$$

gdzie  $\lambda_i$  są tzw. *mnożnikami Lagrange’a*. Mamy tutaj  $n + m$  danych równań ( $n$  równań na pochodne cząstkowe w (2) i  $m$  równań  $f_i(x) = 0$ ) na  $n + m$  szukanych  $x_1^*, \dots, x_n^*$  i  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ .

Przy rozwiązywaniu konkretnego problemu poszukuje się ekstremów we wnętrzu  $X$  i we wszystkich gładkich kawałkach brzegu, a następnie porównuje się otrzymane wartości funkcji  $\varphi$  (patrz [1]).

### 2. Pewne zagadnienie geometryczne

*Dla danego trójkąta  $ABC$  znaleźć punkt, którego suma kwadratów odległości od boków trójkąta jest najmniejsza.*

Rozwiążemy to zadanie, posługując się powyższą zasadą Lagrange’a, a następnie zinterpretujemy rozwiązanie w terminach tzw. symedian.

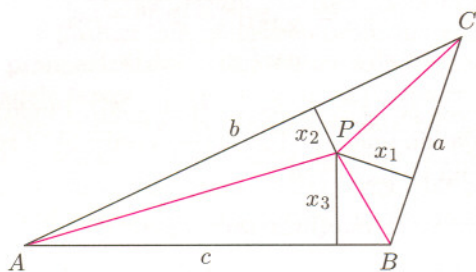
W naszym przypadku funkcją  $\varphi(x)$  będzie

$$(3) \quad \varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

gdzie  $x_1, x_2, x_3$  są odległościami punktu  $P$  od boków  $BC, AC, AB$  (rys. 1). Zakładamy jeszcze, że  $x_i \geq 0$ , jeśli  $x_i$  leży w tej samej półpłaszczyźnie co i sam trójkąt, w przeciwnym przypadku będzie  $x_i \leq 0$ .

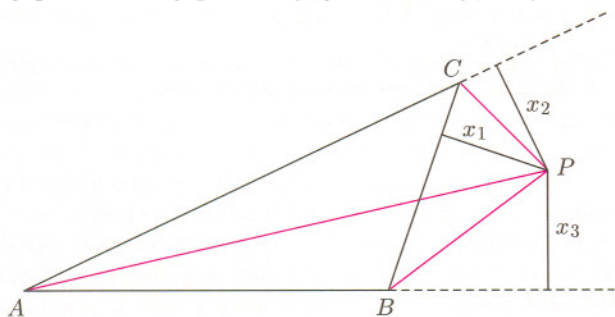
Oznaczmy jeszcze przez  $a, b, c$  odpowiednie długości boków trójkąta. Pole trójkąta  $BPC$  wynosi  $\frac{1}{2}ax_1$ , pole trójkąta  $ACP$  wynosi  $\frac{1}{2}bx_2$  i pole trójkąta  $ABP$  wynosi  $\frac{1}{2}cx_3$ . Ponieważ w sumie dają pole całego trójkąta  $S$ , to mamy dokładnie jedno ograniczenie na  $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{2}bx_2 + \frac{1}{2}cx_3 - S = 0.$$



Rys. 1

Funkcje (3) i ograniczenie (4) są dobre również wtedy, gdy punkt  $P$  leży poza trójkątem  $ABC$  (rys. 2).



Rys. 2

Zgodnie z zasadą Lagrange'a mamy układ równań  $\varphi'(x) = \lambda f'(x)$ , tzn.

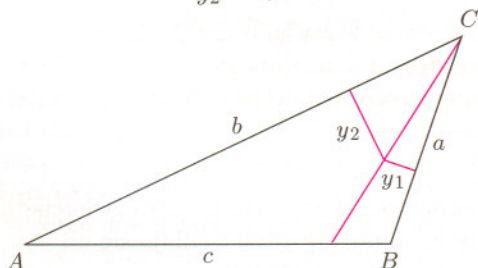
$$(5) \quad \begin{aligned} 2x_1 &= \frac{1}{2}\lambda a, & 2x_2 &= \frac{1}{2}\lambda b, & 2x_3 &= \frac{1}{2}\lambda c, \\ \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{2}bx_2 + \frac{1}{2}cx_3 &= S. \end{aligned}$$

Pierwsze trzy równania w (5) dają

$$(6) \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{a}{b}, \quad \frac{x_1}{x_3} = \frac{a}{c}, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{b}{c}.$$

Pierwsza równość w (6) mówi, że punkt minimalny leży na prostej  $l_C$  przechodzącej przez wierzchołek  $C$  i przecinającej bok  $AB$  tak, że odległości  $y_1, y_2$  jej punktów od prostych  $CB$  i  $CA$  (rys. 3) spełniają zależność

$$(7) \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{a}{b}.$$



Rys. 3

Punkt  $P$  jest wyznaczony jako wspólny punkt przecięcia się prostych  $l_A, l_B$  i  $l_C$  wychodzących z odpowiednich wierzchołków. Łatwo wykazać, że te proste przecinają się w jednym punkcie. Istotnie, jeśli dla punktu przecięcia się prostych  $l_C$  i  $l_A$  zachodzą pierwsze dwie równości w (6), to również i trzecia równość jest prawdziwa.

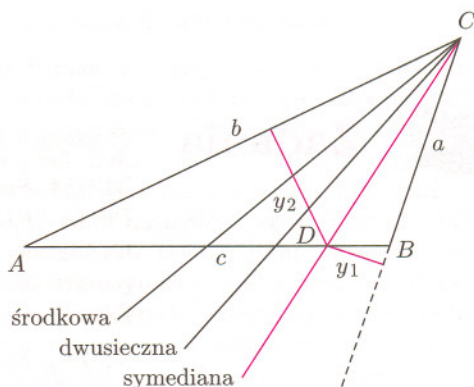
Wydaje się, że proste  $l_A, l_B, l_C$  powinny być nam skądś znane. Przypomnijmy sobie, jakie naturalne proste stowarzyszone z trójkątem przecinają się w jednym punkcie. Są to: dwusieczne kątów wewnętrznych, środkowe boków, wysokości i symetralne boków. Okazuje się, że  $l_A, l_B, l_C$  nie są żadnymi z powyższych. Są to tzw. symediany.

Symedianą trójkąta nazywamy odbicie środkowej względem dwusiecznej kąta przy wierzchołku, przez który przechodzi środkowa (rys. 4).

Aby wykazać, że nasza prosta  $l_C$  jest symedianą, skorzystamy z następującej równości

$$(8) \quad \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{a^2}{b^2},$$

gdzie  $D$  jest punktem przecięcia prostej  $AB$  z symedianą (rys. 4). Wzór (8) można znaleźć w książce [3] (można także wyprowadzić go samemu).



Rys. 4

Niech  $y_1, y_2$  będą odległościami punktu  $D$  od prostych  $CB$  i  $CA$  oraz niech  $h$  oznacza wysokość punktu  $C$  nad podstawą  $AB$ . Licząc na dwa sposoby pole trójkąta  $BCD$ , dostajemy

$$\frac{1}{2}ay_1 = \frac{1}{2}|BD|h.$$

Przeprowadzając analogiczny rachunek dla trójkąta  $ACD$ , otrzymamy

$$\frac{1}{2}by_2 = \frac{1}{2}|AD|h.$$

Stąd mamy

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{b|BD|}{a|AD|},$$

co na mocy (8) daje

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{a}{b}.$$

Udowodniliśmy zatem bardzo interesującą własność: *Punkt przecięcia się symedian trójkąta jest punktem, dla którego suma kwadratów odległości od boków jest najmniejsza.*

### 3. Minimalizacja sumy $n$ -tych potęg odległości

Mamy teraz przypadek, gdy funkcja  $\varphi$  jest postaci

$$(9) \quad \varphi_n(x) = |x_1|^n + |x_2|^n + |x_3|^n$$

i jedynym ograniczeniem jest warunek

$$f(x) = \frac{1}{2}ax_1 + \frac{1}{2}bx_2 + \frac{1}{2}cx_3 - S = 0.$$

Wówczas zgodnie z zasadą Lagrange'a mamy

$$(10) \quad \begin{aligned} nx_1^{n-1} &= \frac{1}{2}\lambda a, \\ nx_2^{n-1} &= \frac{1}{2}\lambda b, \\ nx_3^{n-1} &= \frac{1}{2}\lambda c, \end{aligned}$$

skąd otrzymujemy

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1} = \frac{a}{b}, \quad \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{n-1} = \frac{a}{c},$$

a co po przekształceniu daje nam

$$(11) \quad \frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/(n-1)}, \quad \frac{x_1}{x_3} = \left(\frac{a}{c}\right)^{1/(n-1)}.$$

Jeśli teraz założymy, że  $n \rightarrow \infty$ , to prawe strony równości w (11) dążą do 1. To sugeruje, że ciąg

$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$  punktów minimum funkcji  $\varphi_n(x)$  dąży przy  $n \rightarrow \infty$  do punktu  $x^{(\infty)}$ , dla którego  $x_1^{(\infty)} = x_2^{(\infty)} = x_3^{(\infty)}$ ; tzn.  $x^{(\infty)}$  jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt.

Można inaczej dowieść zbieżności ciągu  $x^{(n)}$ , wykorzystując metody analizy funkcjonalnej.

W przestrzeni wektorowej  $\mathbb{R}^3$  wprowadzamy normy

$$\begin{aligned} \|x\|_n &= \sqrt[n]{|x_1|^n + |x_2|^n + |x_3|^n}, \\ \|x\|_\infty &= \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|). \end{aligned}$$

Wiadomo, że  $\|x\|_n \rightarrow \|x\|_\infty$  (patrz [2]). Punkty  $x^{(n)}$  realizują minimum  $\|\cdot\|_n$ . Zatem punkt  $x^{(\infty)}$  realizuje minimum  $\|\cdot\|_\infty$ , czyli

$$\min(\max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)),$$

Stąd już łatwo otrzymać, że  $|x_1^{(\infty)}| = |x_2^{(\infty)}| = |x_3^{(\infty)}|$ .

#### Literatura

- [1] V.G. Karmanov, *Matematičeskoje programirovanie*, Nauka, Moskwa, 1986 (po rosyjsku).
- [2] L.A. Lusternik, W.I. Sobolew, *Elementy analizy funkcjonalnej*, PWN, 1959.
- [3] M. Szurek, *Opowieści geometryczne*, PWN, Warszawa, 1995.
- [4] S.J. Zetel, *Geometria trójkąta*, PZWS, 1964.



## Zadania

Redaguje *Lukasz WIECHECKI*

**M 934.** Średnice  $AB$  i  $CD$  okręgu o promieniu  $R$  przecinają się pod kątem  $\alpha$ . Punkt  $M$  leży na okręgu, a punkty  $P$  i  $Q$  są rzutami prostokątnymi punktu  $M$  na średnice  $AB$  i  $CD$ . Udowodnić, że długość odcinka  $PQ$  nie zależy od wyboru punktu  $M$ . Znaleźć długość  $PQ$ .

Rozwiązanie na str. 11

**M 935.** Na bokach  $AB, BC, CD, DA$  prostokąta  $ABCD$  wybrano punkty  $K, L, M, N$  odpowiednio, różne od wierzchołków prostokąta. Wiadomo, że  $KL \parallel MN$  i  $KM \perp LN$ . Dowieść, że punkt  $S$  przecięcia odcinków  $KM$  i  $LN$  leży na przekątnej  $BD$  prostokąta.

Rozwiązanie na str. 11

**M 936.** Punkt  $D$  jest środkiem okręgu opisanego na takim trójkącie ostrokątnym  $ABC$ , że okrąg przechodzący przez punkty  $A, B, D$  przecina odcinki  $AC$  i  $BC$  w punktach  $M$  i  $N$  (oprócz  $A$  i  $B$ ). Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach  $ABD$  i  $MNC$  mają równe promienie.

Rozwiązanie na str. 12

Redaguje *Ewa CZUCHRY*

**F 535.** Na wysokości 5 m jest zawieszona żarówka o natężeniu 200 cd. Największe oświetlenie jest pod żarówką i zmniejsza się równomiernie we wszystkich kierunkach. Ile wynosi pole obszaru, wewnątrz którego oświetlenie jest nie mniejsze od 1 lx?

Rozwiązanie na str. 16

**F 536.** Dwa płaskie zwierciadła tworzą kąt dwuścienny  $\alpha$ . Na zwierciadła te pada promień w płaszczyźnie do nich prostopadłej i odbija się od obu. Wyznaczyć kąt, o jaki odchyli się promień po odbiciu.

Rozwiązanie na str. 16



## Co we Wszechświecie piszczy?

Od dawna nic, bo Wszechświat jest zbyt rzadki. Na początku było jednak inaczej. Żeby się o tym przekonać, wystarczy zrobić odpowiednio dokładne zdjęcie młodego Wszechświata, a następnie wykonać precyzyjną analizę odkształceń spowodowanych rozchodzącymi się falami dźwiękowymi. Obraz „Wszechświatka” dociera do nas stale w postaci mikrofalowego promieniowania tła. To promieniowanie reliktowe niesie informację o rozkładzie temperatury, w chwili gdy Wszechświat stał się przezroczysty dla promieniowania na skutek zrekombinowania elektronowo-protonowej plazmy w atomy wodoru. Nastąpiło to 300 tysięcy lat po wielkim wybuchu, gdy temperatura spadła poniżej 3000 K.

Promieniowanie reliktowe jest chyba najdoskonalszym przykładem promieniowaniem ciała doskonale czarnego. Obserwowany rozkład odpowiada obecnie temperaturze około 2,7 K, gdyż rozszerzający się Wszechświat stale stygnie.

Przestrzenny (kątowy) rozkład mierzonej w paśmie mikrofal temperatury nie jest idealnie jednorodny. Najłatwiej dostrzec anizotropię związaną z naszym (naszej Galaktyki) ruchem. Znacznie ciekawsze są jednak fluktuacje temperatury po raz pierwszy zmierzone (opublikowane) w 1992 roku przez zespół eksperymentu COBE (Cosmic Background Explorer). Odpowiadają one fluktuacjom gęstości, z których powinien wywodzić się obecny rozkład materii we Wszechświecie. Dane zebrane przez COBE dowodzą, że amplituda tych fluktuacji nie zależy od skali kątovej w zakresie od 10 do 90 stopni. Jest to zgodne z przewidywaniami modeli kosmologicznych.

Czas na tytułowy pisk. Dla mniejszych skal kątowych, rzędu jednego stopnia i jeszcze mniejszych, od dawna oczekiwano zaobserwowania szeregu wzmocnień fluktuacji. Położenie pierwszego maksimum powinno odpowiadać tzw. horyzontowi akustycznemu, czyli odległości, na jaką fluktuacja gęstości plazmy (czyli fala dźwiękowa) zdążyła się rozprzestrzenić w czasie od Wielkiego Wybuchu do rozdzielenia się promieniowania i materii. Następne wzmocnienia odpowiadałyby kolejnym harmonicznym „piskiem podstawowym”. Amplitudy kolejnych wzmocnień i odpowiadające im skale kątovej niosłyby informację o podstawowych parametrach kosmologicznych, takich jak stała Hubble’a czy całkowita gęstość energii  $\Omega_0$  oraz jej trzy składowe: gęstość barionowa  $\Omega_b$ , gęstość ciemnej materii niebarionowej  $\Omega_c$  i gęstość energii związana ze stałą kosmologiczną  $\Omega_\Lambda$ .

Przez ostatnie dziesięć lat wykonano szereg pomiarów z większą niż w przypadku COBE kątową zdolnością rozdzielczą. W tym roku dwa eksperymenty balonowe BOOMERANG i MAXIMA-1 opublikowały wyniki bezapelacyjnie dowodzące istnienia pierwszego ze spodziewanych maksimum [1]. Jego położenie na skali kątovej zależy w zasadzie tylko od geometrii Wszechświata zdeterminowanej całkowitą gęstością

energii. Wynika to stąd, że skoro potrafimy obliczyć liniowy rozmiar horyzontu akustycznego i naszą drogę, jaką przebyły fotony promieniowania relikowego, to mierzony rozmiar kątovej horyzontu akustycznego zależy tylko od tego, ile wynosi suma kątów w odpowiednim trójkącie równoramiennym. Jeżeli, w zgodzie z przewidywaniami modeli inflacyjnych,  $\Omega_0 = 1$ , to przestrzeń jest euklidesowa, czyli suma kątów w dowolnym trójkącie wynosi  $\pi$ . Wyniki analiz dokładnych map promieniowania, zmierzonych przez eksperymenty BOOMERANG i MAXIMA-1, okazały się zgodne z tym przewidywaniem (w granicach błędu pomiarowego).

Na marginesie warto zauważyć związaną z tym wynikiem eksplozję artykułów o naleśnikach i siodłach, w których poglądowo tłumaczy się, że Wszechświat jest płaski jak naleśnik, choć mógłby być krzywy jak siodło lub jak sfera. Z mojego doświadczenia wynika całkowita bezużyteczność, jeżeli nie szkodliwość takiego „poglądowego” tłumaczenia zwłaszcza ujemnej krzywizny przestrzeni, gdyż siodło (w przestrzeni euklidesowej), w odróżnieniu od przestrzeni o ujemnej krzywiznie, nie może mieć symetrii obrotowej. Żeby pojąć, o co chodzi, trzeba i tak najpierw zrozumieć jakąś wersję związku krzywizny z wartością sumy kątów w trójkącie. Gdzie więc ta poglądowość?

Wróćmy jednak do naszych pisków. Z dokładniejszej analizy wynika, że ze zmierzonymi mapami promieniowania relikowego zgodne są tylko te wersje modeli inflacyjnych, w których występuje albo niebarionowa ciemna materia, albo stała kosmologiczna, a najlepiej i jedno, i drugie. Wtedy wyniki zgadzają się też z innymi pomiarami, np. ograniczeniami wynikającymi z pomiaru przesunięcia ku czerwieni odległych supernowych typu Ia lub pomiarów struktury wielkoskalowej [2]. Dodatkowo analiza wskazuje na większą niż wynikająca z modelu nukleosyntezy gęstość materii barionowej. Rozbieżność jest na poziomie 2–3 odchyłeń standardowych (a nie 23, jak wydrukowano w artykule G. Mussera we wrześniowym *Świecie Nauki*). Biorąc pod uwagę skomplikowaną interpretację wyników, uznałbym to raczej za zadziwiająco dobrą zgodność.

Przyszłość pomiarów promieniowania relikowego rysuje się bardzo ciekawie. Część już zebranego materiału czeka jeszcze na opracowanie, a na wiosnę ma być wyniesiony na orbitę instrument MAP, dzięki któremu powinniśmy uzyskać dużo dokładniejsze mapy promieniowania. Natomiast w 2007 roku planowane jest umieszczenie w tym samym punkcie Lagrange’a L2 układu Ziemia-Słońce aparatu PLANCK, który powinien całkowicie wyzyskać muzykę parametrów kosmologicznych utrwaloną w promieniowaniu doskonale czarnego młodego Wszechświata.

Piotr ZALEWSKI

[1] *Cosmology from MAXIMA-1, BOOMERANG & COBE/DMR CMB Observations*, A.H. Jaffe i inni, astro-ph/0007333

[2] A.E. Lange i inni, astro-ph/0005004

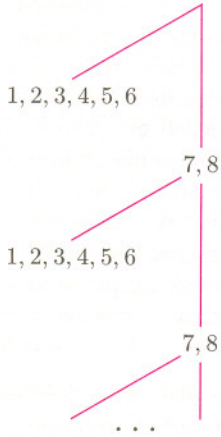


# 8

## Rzuć monetą!

Przypuśćmy, że chcielibyśmy zagrać w naszą ulubioną grę, do której potrzebna jest sześcienna kostka. Niestety, nie mamy żadnej kostki.

To jednak nie oznacza, że nie możemy zagrać w naszą grę. Jeśli mamy przy sobie np. monetę, to możemy jej użyć. Jeśli jest to 50 groszy, to kostkę można kupić, ale nie o to chodzi – możemy zastąpić rzut kostką rzucaniem monetą. Sposób jest taki: rzucamy trzy razy – mogło wypaść 8 różnych wyników: **OOO** (1), **OOR** (2), **ORO** (3), **ORR** (4), **ROO** (5), **ROR** (6), **RRO** (7), **RRR** (8). W ten sposób otrzymaliśmy kostkę ośmiościenną, ale to nie ma znaczenia: jeśli „wypadło” 7 lub 8, to rzucamy monetą kolejne trzy razy – jeśli znowu wypadło 7 lub 8, to dalej rzucamy i tak dalej. W ten sposób zastąpiliśmy rzut kostką średnio czterema rzutami monetą. Jeśli jesteśmy „w lepszej sytuacji materialnej” i mamy dwie czy trzy różne monety, to możemy sobie ułatwić zadanie, rzucając nimi jednocześnie.

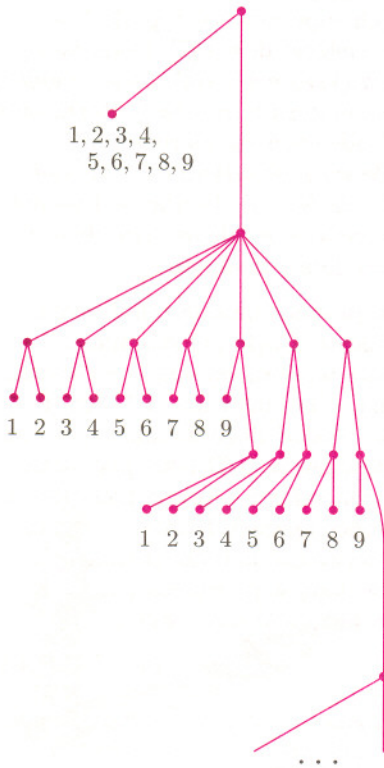


Problem można uogólnić. Możemy potrzebować innej kostki niż sześcienna – w niektórych grach używa się kostek mających 4, 8, 10, 12 lub 20 ścian (wszystkie poza 10-ścienną mają zwykle postać brył foremnych) oraz „dwuściennych” monet. Teraz również nie mamy potrzebnej kostki – mamy monetę lub inną kostkę, ale nie tę, co trzeba. (Możemy mieć też, na przykład, karty lub stoper – tych przedmiotów również można w pewien sposób użyć do losowania.)

Oto kilka prostych metod. Jeśli mamy monetę, a potrzebujemy kostki czworościennej, rzucamy dwa razy monetą – w podobny sposób, jak wcześniej. Jeśli mamy monetę i „kostkę trójścienną” (niekoniecznie prawdziwą) – można, również w podobny sposób, otrzymać kostkę sześcienną. Jeśli mamy kostkę czworościenną, a potrzebujemy trójścienną, to rzucamy nią, aż wypadnie 1, 2 lub 3 (podobną metodę stosowaliśmy już wcześniej). Trzeba tylko pamiętać o tym, żeby każdy wynik był możliwy i równie prawdopodobny.

Metody opisane powyżej (i podobne) można połączyć. Można zastąpić kostkę sześcienną monetą i trójścienną kostką, trójścienną kostkę czworościenną, czworościenną kostkę – monetą. Ta metoda jest lepsza od pierwszej – wykonujemy średnio mniej rzutów. (Pierwszą metodę można łatwo poprawić tak, żeby była równoważna.)

Jednak dobra metoda nie musi powstawać z połączenia powyższych. Oto przykład. Potrzebujemy kostki dziewięćściennej, a mamy monetę. Rzucamy monetą 4 razy. Jest 16 możliwości. Dla dziewięciu z nich kończymy. W pozostałych przypadkach rzucamy monetą jeszcze raz, każda możliwość się „rozdwaja” i powstaje 14 możliwości, z których 9 kończy i zostaje 5. Rzucamy monetą jeszcze raz, 9 z 10 przypadków kończy, a dla jednego, ostatniego powtarzamy procedurę.



Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 397 (WT=2,76) i 398 (WT=1,07) z numeru 3/2000

|                    |            |       |
|--------------------|------------|-------|
| Marcin Peczański   | - Warszawa | 46,12 |
| Michał Adamaszek   | - Kęty     | 45,01 |
| Rafał Pikula       | - Wrocław  | 44,76 |
| Jerzy Witkowski    | - Radlin   | 42,31 |
| Konrad Patkowski   | - Gdańsk   | 41,43 |
| Bartłomiej Dyda    | - Wrocław  | 40,12 |
| Bartłomiej Marczak | - Warszawa | 36,66 |

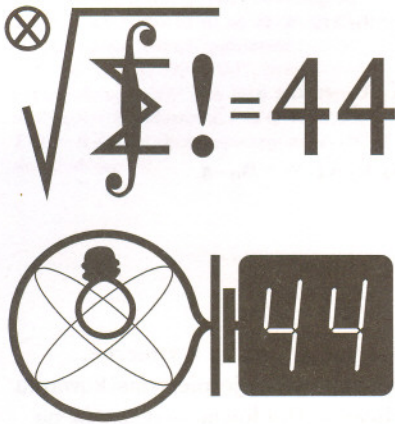
Trzy sumy powyżej 44 i trzy nowe nazwiska! Panowie Peczański, Adamaszek, Pikula: witamy w **Klubie 44 M**.

Ta metoda jest prawidłowa – i w pewnym sensie najlepsza, bo można udowodnić, że średnia liczba wykonywanych rzutów monetą jest najmniejsza możliwa. Jeśli się jej uważnie przyjrzymy, zauważymy, że nie jest ona w rzeczywistości aż tak skomplikowana. Jeśli w danym momencie liczba możliwości jest większa niż liczba ścianek potrzebnej kostki – np. po 4 rzutach mamy 16 możliwości i  $16 > 9$  – to dziewięć z nich numerujemy, a w pozostałych przypadkach rzucamy kolejny raz, podwajając liczbę możliwości. Jeśli się jeszcze uważniej przyjrzymy, to zauważymy, że można ją wykonać dla dowolnej potrzebnej kostki, a także dla dowolnej (jednej) kostki lub monety posiadanej... Można udowodnić, że uogólniona metoda (dobrze uogólniona) jest najlepsza pod względem liczby potrzebnych rzutów.

*Małą Deltę przygotował Eryk KOPCZYŃSKI  
na motywach swojej pracy*

*wyróżnionej w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1999 r.*

**Klub 44**



**Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji Delt**

**Skrót regulaminu**

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 I 2001

**Zadania z matematyki nr 409, 410**

*Redaguje Marcin E. KUCZMA*

**409.** Z dwóch tysięcy klocków o rozmiarach  $2 \times 2 \times 1$  zbudowano sześcian o krawędzi długości 20. Dowieść, że istnieje prosta przecinająca wewnątrz tego sześcianu, ale nie przecinająca wnętrza żadnego klocka.

**410.** Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których istnieją liczby rzeczywiste  $x_1, x_2, \dots, x_n$  spełniające warunki:  $|x_i| \leq 1$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0$ ;  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n/3$ .

Zadanie **410** zaproponował pan Paweł Kubit z Krosna.

**Zadania z fizyki nr 306, 307**

*Redaguje Jerzy B. BROJAN*

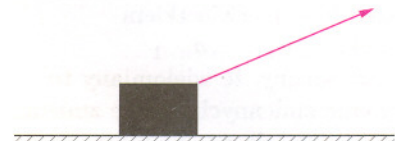
**306.** Jaką minimalną siłą trzeba działać na klocek o ciężarze  $P$ , aby ruszyć go z miejsca (zob. rys. 1), jeśli współczynnik tarcia między klockiem a podłożem jest równy  $f$ ?

**307.** Dwie jednakowe cewki, kondensator i żarówczkę zestawiono w obwód (rys. 2) i podłączono do źródła napięcia przemiennego. W poniższych zdaniach wybrać właściwe wersje wyrazów w nawiasach i uzasadnić. Opór uzwojeń cewek można pominąć.

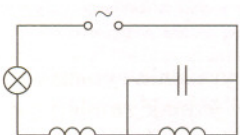
Gdy zwroty nawinięcia obu cewek były zgodne, okazało się, że podczas przesuwania jednej cewki względem drugiej przy pewnej szczególnej ich odległości żarówczka świeci się (silniej/słabiej), niż przy innych sąsiednich położeniach. Gdy jedną z cewek odwrócono, tak że zwrot jej nawinięcia był przeciwny względem drugiej, również wystąpiła taka szczególna odległość cewek, dla której żarówczka świeciła się (silniej/słabiej). Gdy zwiększono pojemność kondensatora i ponownie poszukano obu tych szczególnych przypadków, okazało się, że pierwszy z nich występuje przy (większej/mniejszej) odległości cewek, niż poprzednio, a drugi przy (większej/mniejszej).

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 296 (WT=1,77), 297 (WT=2,29), 298 (WT=2,44) i 299 (WT=3,76) z numeru 4/2000 i 5/2000

|                     |               |       |
|---------------------|---------------|-------|
| Jarosław Łazuka     | - Warszawa    | 42,18 |
| Marek Wójcicki      | - Szczecin    | 35,68 |
| Andrzej Nowogrodzki | - Chocianów   | 32,73 |
| Aleksander Surma    | - Myszków     | 32,43 |
| Andrzej Idzik       | - Bolesławiec | 24,93 |
| Tomasz Rudny        | - Warszawa    | 23,95 |



Rys. 1



Rys. 2

# Teoria Galois dla bardzo niecierpliwych

Łukasz WIECHECKI

Jeśli chcesz dowiedzieć się, jak dowodzi się nieistnienia wzorów na pierwiastki wielomianów stopni od 5 w górę, a nie lubisz ślęczeć dniami i nocami nad podręcznikami do matematyki „wyższej”, to ten artykuł jest dla Ciebie. Ci, którzy są „w temacie”, nie będą zawiedzeni, przedstawiamy tu bowiem rozwiązanie historycznie dość wczesne (co nie znaczy głupsze), dość różniące się od tego, co przedstawiane jest w standardowych podręcznikach teorii Galois.

Rozważamy ogólne równanie  $n$ -tego stopnia

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = 0,$$

którego pierwiastkami są  $X_1, \dots, X_n$ . Mamy więc

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = (X - X_1) \dots (X - X_n),$$

z czego wynikają wzory Viète'a:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i = -a_{n-1} \\ s_2(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j = a_{n-2} \\ s_3(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq i < j < k} X_i X_j X_k = -a_{n-3} \\ \dots \\ s_n(X_1, \dots, X_n) = X_1 X_2 \dots X_n = (-1)^n a_0. \end{array} \right.$$



Rozpoczynając walkę o pierwiastki, mamy do dyspozycji liczby wymierne, współczynniki  $a_i$ , cztery działania arytmetyczne oraz operacje pierwiastkowania dowolnego stopnia. Tymi właśnie narzędziami chcemy zbudować wyrażenia na pierwiastki. Na przykład pierwiastkami wielomianu  $X^2 + a_1X + a_0 = 0$  są

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2},$$

a wielomianu  $X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$

$$\sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

gdzie  $p = a_1 - \frac{a_2^2}{3}$  i  $q = a_0 - \frac{a_2 a_1}{3} + 2\left(\frac{a_2}{3}\right)^3$ . Papieru nie starczyłoby do wypisania wzorów stopień wyżej, ale da się.

Konstruując wzory na pierwiastki wielomianu, którego współczynniki  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  są bliżej niesprecyzowanymi symbolami, operujemy faktycznie na wyrażeniach wymiernych zmiennych  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , a także tym, co powstaje z nich przez wielokrotne wykonywanie operacji pierwiastkowania (dowolnego stopnia). Chcielibyśmy, aby jedno z takich wyrażen było pierwiastkiem wielomianu. W naszych rozważaniach współczynniki  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  zamienimy na wielomiany  $s_i$  ze wzorów Viète'a. Zauważmy, że wielomiany te są symetryczne, co oznacza, że dowolne przestawienie zmiennych  $X_i$  nie zmienia tych wielomianów, co wyraża wzór: dla dowolnej permutacji  $\sigma \in S_n$  mamy

$$s_i(X_1, X_2, \dots, X_n) = s_i(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}),$$

czyli w symbolice skróconej

$$s_i = s_i^\sigma.$$

Na początku naszej drogi mamy więc do dyspozycji wyrażenia symetryczne. Przy pierwiastkowaniu symetryczność wyrażenia może jednak zmniejszyć się, tzn. zbiór permutacji, które nie zmieniają wyrażenia, może być po spierwiastkowaniu mniejszy niż przed nim. Na przykład wyrażenie  $(X_1 - X_2)^2$

Permutacją na zbiorze  $\{1, 2, \dots, n\}$  nazywamy odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne tego zbioru na siebie. Permutacje zapisuje się np. tak:  $\begin{pmatrix} 123456 \\ 231546 \end{pmatrix}$ . W zapisie tym pod każdą liczbą na górze stoi jej obraz przy danej permutacji, czyli 1 na 2, 2 na 3 i 3 z powrotem na 1, 4 na 5, 5 z powrotem na 4. Napis  $(k_1 k_2 \dots k_m)$  oznacza permutację, która przeprowadza  $k_1$  na  $k_2$ ,  $k_2$  na  $k_3$ , ...,  $k_{m-1}$  na  $k_m$ ,  $k_m$  na  $k_1$ , pozostałe zaś elementy na siebie. Napis  $(123)(45)$  oznacza po prostu złożenie permutacji  $(123)$  i  $(45)$  (najpierw wykonujemy  $(45)$  a później  $(123)$ ).

Zbiór wszystkich permutacji na zbiorze  $\{1, 2, \dots, n\}$  oznaczamy przez  $S_n$ .

Permutacje z  $S_n$  działają na wielomianach od  $n$  zmiennych. Działając permutacją  $\sigma$  na wielomianie  $w(X_1, \dots, X_n)$ , otrzymamy nowy taki wielomian  $w^\sigma$ , że

$$w(X_1, \dots, X_n) = w(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}),$$

czyli np.  $(X_1^3 - 2X_2^2 + 5X_3)^{(123)} = X_2^3 - 2X_3^2 + 5X_1$ .



#### Rozwiązanie zadania M 934.

Niech  $O$  będzie środkiem okręgu. Załóżmy, że  $P \neq O$  i  $Q \neq O$  (przypadek, gdy  $P = O$  lub  $Q = O$  jest dość trywialny). Na czworokącie, którego wierzchołkami są  $M, P, Q, O$  można opisać okrąg, ponieważ  $\angle MQO = \angle MPO = 90^\circ$ , przy czym odcinek  $MO$  jest jego średnicą o długości  $R$ . Mamy  $\angle PMQ = \alpha$ , więc  $PQ = R \sin \alpha$  (okrąg opisany na  $\triangle PQM$  ma średnicę  $R$ ).



#### Rozwiązanie zadania M 935.

Na czworokątach  $DMSN$  i  $BKSL$  można opisać okręgi, ponieważ w obu z nich jest para przeciwległych kątów prostych. Wynika stąd, że  $\angle DSN = \angle DMN$  i  $\angle BSL = \angle BKL$ . Ponieważ  $\angle BKL = \angle DMN$  (odcinki  $MN$  i  $KL$  są równoległe), więc  $\angle DSN = \angle BSL$ . Oznacza to, że punkty  $D, S, B$  leżą na jednej prostej, czyli  $S \in BD$ .

(tzw. delta dla wielomianu stopnia 2) jest w pełni symetryczne, ale  $X_1 - X_2$  już nie. Tak więc wyobrażamy sobie, że w procesie znajdowania wzorów na pierwiastki przez kolejne pierwiastkowania (oczywiście w międzyczasie wykonujemy cztery działania arytmetyczne na arsenale wygenerowanych wyrażeń) dokonujemy niejako desymetryzacji dostępnych wyrażeń, dopóki nie wpadnie nam w łapy jeden z pierwiastków (prawda, że mało symetryczny?). Będziemy się przy tym starać, aby pozostawać cały czas w domenie funkcji wymiernych, czyli wyrażeń postaci  $\frac{w(X_1, \dots, X_n)}{v(X_1, \dots, X_n)}$ , gdzie  $w$  i  $v$  są wielomianami zmiennych  $X_1, \dots, X_n$ .

Powstaje tu jednak drobny problem. Przecież pierwiastkując pewną funkcję wymierną (np.  $s_1 = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ), możemy nie otrzymać znowu funkcji wymiernej, lecz jakiegoś paskudztwa (nie istnieje funkcja wymierna, która byłaby równa  $\sqrt{X_1 + X_2 + \dots + X_n}$ ). Być może nie wychodząc poza obszar grzecznych funkcji wymiernych, nie da się otrzymać za pomocą naszych środków żadnego pierwiastka, ale da się to zrobić jakąś drogą okrężną, brodząc w błocie różnych niewymiernych paskudztw. Otóż pierwsza, dość długa i mało efektywna część dowodu polega na wykazaniu, że jeśli pierwiastek  $X_1$  jest osiągalny, to można to zrobić, nie brudząc się w ten sposób. Pominiemy tę część dowodu i przejdziemy od razu do Grand Finale.

**Lemat.** Niech  $u(X_1, \dots, X_n)$  i  $a(X_1, \dots, X_n)$  ( $n \geq 5$ ) będą funkcjami wymiernymi (powiedzmy, o współczynnikach zespolonych, dla ustalenia uwagi), takimi, że  $u^k = a$ . Jeśli dla pewnej liczby naturalnej  $k$  funkcja  $a$  nie zmienia się przy działaniu permutacji  $\sigma = (123)$  oraz  $\tau = (345)$ , to  $u$  również.

*Dowód.* Zastosujemy  $\sigma$  do równości  $u^k = a$ . Dostaniemy  $\sigma(u)^k = \sigma(a) = a$ , a więc  $\sigma(u)^k = u^k$ . Założymy, że  $u \neq 0$ , bo tak będzie przyjemniej. Wtedy możemy napisać  $(\frac{\sigma(u)}{u})^k = 1$ , czyli  $\sigma(u) = \omega_\sigma u$ , gdzie  $\omega_\sigma$  jest pewnym pierwiastkiem stopnia  $k$  z 1. Działając na ostatnią równość przekształceniem  $\sigma$ , otrzymamy  $\sigma^2(u) = \omega_\sigma^2 u$  i jeszcze raz  $\sigma^3(u) = \omega_\sigma^3 u$ . No dobrze, ale  $\sigma^3$  jest identycznością, więc  $\sigma^3(u) = u$ , a stąd  $\omega_\sigma^3 = 1$ . Analogiczna argumentacja prowadzi do wniosku, że  $\tau(u) = \omega_\tau u$ , gdzie  $\omega_\tau$  jest pierwiastkiem stopnia  $k$  z 1 oraz  $\omega_\tau^3 = 1$ . Stąd  $\sigma\tau(u) = \omega_\sigma\omega_\tau u$  i  $\sigma^2\tau(u) = \omega_\sigma^2\omega_\tau u$ . Jak łatwo obliczyć, mamy  $\sigma\tau = (12345)$  i  $\sigma^2\tau = (13452)$ , a więc  $(\sigma\tau)^5 = (\sigma^2\tau)^5 = \text{id}$ . Stąd wnioskujemy  $(\omega_\sigma\omega_\tau)^5 = (\omega_\sigma\omega_\tau)^5 = 1$ . Ponieważ zaś  $\omega_\sigma = \omega_\sigma^6(\omega_\sigma\omega_\tau)^5(\omega_\sigma^5\omega_\tau)^{-5}$ , więc na mocy wyprowadzonych równości  $\omega_\sigma = 1$ . Stąd i z  $(\omega_\sigma\omega_\tau)^5 = 1$  dostajemy  $\omega_\tau^5 = 1$ . Równość  $\omega_\tau = \omega_\tau^6\omega_\tau^{-5}$  daje więc  $\omega_\tau = 1$ . To kończy dowód. ■

Jeden rzut beretem do mety:

#### Zasadnicze Twierdzenie Tego Artykułu

Nie istnieją wzory na pierwiastki równań stopnia większego niż 4.

*Dowód.* Z lematu wynika, że jakkolwiek byśmy pierwiastkowali w obrębie funkcji wymiernych, zawsze otrzymywane funkcje wymierne będą niezmiennicze przy działaniu permutacji  $(123)$  i  $(345)$  (startujemy od funkcji symetrycznych).

A to znaczy, że nigdy nie dojdziemy się do  $X_1$ , który taki nie jest. Jest jasne, że w takim razie pozostałych pierwiastków również nie osiągniemy. Z opuszczonej pierwszej części dowodu wynika teraz teza. ■

Metoda dowodu tu przedstawiona ma swoje zady i walety. Z jednej strony dość szybko prowadzi do celu, z drugiej zaś nie wnikamy w niej za bardzo w strukturę algebraiczną zbioru permutacji, przez co mamy raczej zamkniętą drogę do rozmaitych uogólnień. Można się pytać, dlaczego w dowodzie lematu wzięliśmy właśnie permutacje  $(123)$  i  $(345)$  oraz dlaczego żaden tego typu trick nie przechodzi dla  $n = 3$  i 4. Poza tym zwróćmy uwagę na jedną kwestię. Udowodniliśmy, że jednego ogólnego wzoru nie ma, ale może dla każdego konkretnego wielomianu, powiedzmy o współczynnikach wymiernych, istnieją inne wzory. Słowem nie udowodniliśmy, że istnieje wielomian, powiedzmy o współczynnikach wymiernych, którego pierwiastki nie dadzą się osiągnąć narzędziami: liczby wymierne, cztery działania arytmetyczne i operacje

pierwiastkowania dowolnych stopni. To jak gdyby dwie różne sprawy. W dowodzie operowaliśmy na symbolach, które z natury rzeczy nie podlegają żadnym nietrywialnym relacjom algebraicznym, wszystko było tam dość sztywne. Jeśli jednak w napisie symbolicznym

$$X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$$

zastąpimy literki  $a_i$  konkretnymi liczbami, np.  $X^5 - X - 1 = 0$ , to współczynniki będą spełniać różne relacje, np.  $a_1^2 + a_0 = 0$  (podstawowe wielomiany symetryczne  $s_i$  nie spełniają żadnych tego typu relacji – to można wykazać) i kto wie, czy przy odpowiednim manipulowaniu nie dobijemy się do pierwiastków tego jednego konkretnego wielomianu za pomocą naszych ulubionych narzędzi. Faktem jest, że akurat dla  $X^n - X - 1 = 0$  ( $n \geq 5$ ) jest to niemożliwe (wynik z 1987 r.), ale teorię, która pozwala rozpracowywać takie przypadki, stworzył dopiero genialny Galois (1811–1832). Ale to już za długa bajka...



#### Rozwiązanie zadania M 936.

Niech  $O$  będzie środkiem okręgu przechodzącego przez  $A, B, D$ . Oznaczmy  $\angle ACB = \gamma$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle BAC = \alpha$ . Mamy  $\angle ADB = 2\gamma$  ( $D$  jest środkiem odpowiedniego okręgu). Poza tym  $\angle AMB = \angle ADB = \angle ANB = 2\gamma$  (wszystkie trzy kąty są oparte na tym samym łuku okręgu o środku  $O$ ). Stąd  $\angle MBA = 180^\circ - 2\gamma - \alpha$  oraz  $\angle NAB = 180^\circ - 2\gamma - \beta$ . Następnie  $\angle MOA = 2\angle MBA = 360^\circ - 4\gamma - 2\alpha$  oraz  $\angle NOB = 2\angle NAB = 360^\circ - 4\gamma - 2\beta$ . Mamy również  $\angle AOB = 360^\circ - 2\angle ADB = 360^\circ - 4\gamma$  ( $\angle AOB$  oznacza tutaj kąt zawierający punkt  $D$ ).

Mamy więc

$$\begin{aligned} \angle MON &= \angle AOB - \angle MOA - \angle NOB = (360^\circ - 4\gamma) - (360^\circ - 4\gamma - 2\alpha) - (360^\circ - 4\gamma - 2\beta) = \\ &= -360^\circ + 4\gamma + 2\alpha + 2\beta = 2\gamma. \end{aligned}$$

Ostatecznie  $\angle MON = 2\gamma$ . Jeśli zatem odbijemy trójkąt  $MNC$  względem prostej  $MN$ , to punkt  $C$  „wyląduje” na okręgu opisanym na  $\triangle ABD$ . wynika z tego, że promienie okręgów opisanych na  $\triangle ADB$  i  $\triangle MNC$  są równe.

## Eksploracja przestrzeni kosmicznej najdonioślejszą zdobyczą XX wieku

Krzysztof ZIOŁKOWSKI

Na początku 1999 roku amerykańska telewizja CNN przeprowadziła sondaż mający wskazać, które z dziesięciu zaproponowanych wydarzeń kończącego się stulecia można uznać za najważniejsze. Prawie połowa (48%) spośród ponad 45 tys. respondentów uznała, że był to lot człowieka na Księżyc w 1969 r. Następnie wymieniono Holocaust (15%) i zrzućenie bomby atomowej na Hiroszimę (15%). Na czwartym miejscu (9%) znalazł się pierwszy lot samolotu braci Wright w 1903 r. Wyniki tej ankiety nie tylko potwierdzają powszechną na ogół opinię, że wiek XX był okresem ogromnych kontrastów, ale także wydają się ujawniać aktualność odwiecznych marzeń człowieka o wzbiciu się ponad Ziemię, symbolizowanych ciągle żywym w kulturze euroatlantyckiej mitem o Dedalu i Ikarze. Ich urzeczywistnienie jest wynikiem wysiłku wielu pokoleń, rozpoczętego u progu czasów nowożytnych niezwykle projektami maszyn latających Leonarda da Vinci.

W drugiej połowie XX stulecia wykrystalizowała się nowa dyscyplina współczesnego przyrodznawstwa, łącząca dzięki wykorzystaniu technik kosmicznych

różne elementy poznawcze i aplikacyjne fizyki, astronomii i nauk o Ziemi. Określa się ją zwykle mianem badań kosmicznych. Za jej początek można przyjąć wystrzelenie pierwszego sztucznego satelity Ziemi w dniu 4 października 1957 r. oraz pierwszy lot kosmiczny człowieka 12 kwietnia 1961 r. Po 40 latach od tamtych wydarzeń eksploracja przestrzeni kosmicznej jest już czymś tak naturalnym i oczywistym, że obecnie nawet nie bardzo zdajemy sobie sprawę z tego, jak wiele zawdzięczamy rozwojowi nauki i techniki w tym zakresie.

Aktywność człowieka w przestrzeni kosmicznej obejmuje obecnie cztery rodzaje działalności:

- skierowaną ku Ziemi, służącą różnym dziedzinom nauk o Ziemi oraz ich zastosowaniom w meteorologii, telekomunikacji, nawigacji, teledetekcji itp.;
- wykorzystującą unikatowe warunki przestrzeni kosmicznej (np. próżnię, stan nieważkości) do eksperymentowania w dziedzinie fizyki, chemii, biologii, medycyny itp., a także do wykonywania różnych zadań produkcyjnych;

- dotyczącą badań otoczenia Ziemi przez sondowanie ciał Układu Słonecznego i przestrzeni międzyplanetarnej;
- zmierzającą do lepszego poznania Wszechświata dzięki możliwości prowadzenia obserwacji astronomicznych spoza atmosfery ziemskiej.

Dotychczas odbyło się prawie 4 tys. startów rakiet, w wyniku czego poza Ziemią znalazło się około 25 tys. różnych obiektów. Spośród nich mniej więcej 17 tys. już nie istnieje (najczęściej uległy spaleni w atmosferze ziemskiej), a około 8 tys. krąży wokół Ziemi lub porusza się w dalszych rejonach przestrzeni międzyplanetarnej. Liczbę czynnych sztucznych satelitów i sond kosmicznych ocenia się obecnie na ponad 600. Kilka obiektów skonstruowanych ręką ludzką zdołało już oddalić się od Słońca bardziej niż najdalsza planeta Układu Słonecznego. Na czterech ciałach niebieskich (Księżycu i trzech planetach: Wenus, Marsie i Jowiszu) działały przyrządy zbudowane przez człowieka, a jedno (Księżyc) odwiedzili ludzie. W przestrzeni kosmicznej przebywało prawie 400 osób, a rekordzista spędził na orbicie okołoziemskiej ogółem niemal 750 dni (podczas trzech lotów).

Spojrzenie na Ziemię z przestrzeni kosmicznej dało możliwość badań różnych zjawisk i procesów zachodzących w atmosferze i na powierzchni w dużej skali. Spośród nauk o Ziemi pierwsza skorzystała z tego meteorologia, dostrzegając łatwość otrzymania z orbity okołoziemskiej globalnego obrazu atmosfery. Pierwszy satelita meteorologiczny został uruchomiony w 1960 r. Od połowy lat 70. satelity takie zaczęto umieszczać na tzw. orbicie geostacjonarnej. Jest to orbita kołowa, położona w płaszczyźnie równika ziemskiego, na której okres obiegu jest równy okresowi obrotu Ziemi. Poruszający się po takiej orbicie obiekt znajduje się więc stale nad jednym punktem równika w odległości 35,8 tys. km od powierzchni Ziemi. Dlatego satelita meteorologiczny znajdujący się na orbicie geostacjonarnej może stale monitorować przebieg procesów pogodowych na tym samym obszarze Ziemi.

Drugim po meteorologii najpoważniejszym obecnie użytkownikiem orbit geostacjonarnych jest telekomunikacja. Pierwsze próby wykorzystania sztucznych satelitów w tej dziedzinie sięgają także 1960 r., ale pierwsza transmisja telewizyjna przez Ocean Atlantycki odbyła się w 1962 r. Największym dziś satelitą telekomunikacyjnym jest amerykański obiekt Galaxy XI wystrzelony 22 grudnia 1999 r. za pomocą rakiety Ariane 4 Europejskiej Agencji Kosmicznej; jego masa wynosi 4500 kg, a rozpiętość (wraz z panelami baterii słonecznych) sięga 31 m; ma funkcjonować przez 15 lat. Obecnie krąży wokół Ziemi po orbicie geostacjonarnej około 250 czynnych satelitów łącznościowych i meteorologicznych.

Zbliżonym do zagadnień łączności satelitarnej jest problem nawigacji. Pierwszy satelitarny system nawigacyjny powstał już na początku lat 60. Ale precyzyjne określenie pozycji w dowolnym punkcie globu ziemskiego, niezależnie od warunków atmosferycznych oraz zarówno w dzień, jak i w nocy, umożliwił dopiero działający w pełni od 1993 r. system GPS (ang. Global Positioning System) zbudowany przez Departament Obrony USA. Składa się on z 24 satelitów, krążących po prawie kołowych, rozmaicie usytuowanych orbitach, w odległości około 20 tys. km od powierzchni Ziemi. Ich ruchy zostały tak zaplanowane, aby w każdym momencie, z każdego punktu powierzchni Ziemi, można było odebrać sygnały radiowe co najmniej 4 satelitów. Każdy satelita stale emituje dane o swoim położeniu w przestrzeni oraz dokładny czas z pokładowego zegara atomowego. Informacje te, odebrane przez użytkownika wyposażonego w specjalny odbiornik, umożliwiają obliczenie jego pozycji na Ziemi z dokładnością około 30 m. Kody wojskowe pozwalają na osiągnięcie jeszcze większej dokładności, a najnowsze udoskonalenia systemu dają nawet dokładność milimetrową.

Kolejnym wielkim obszarem zastosowań sztucznych satelitów Ziemi jest teledetekcja. Pierwszym obiektem przeznaczonym do systematycznego śledzenia całej powierzchni Ziemi był satelita Landsat, wystrzelony w 1972 r. na prawie kołową orbitę biegunową, która przebiegała na wysokości około 900 km. Ogrom informacji uzyskiwanej z satelitów teledetekcyjnych znalazł zastosowanie w bardzo wielu dziedzinach. Globalne monitorowanie stanu środowiska naturalnego dostarcza danych zarówno o jego zasobach, jak i zanieczyszczeniach czy zagrożeniach, których, być może, nie jesteśmy jeszcze nawet świadomi. Przykładem obiektu przeznaczonego do takiego całościowego monitorowania Ziemi jest amerykański satelita Terra wystrzelony 18 grudnia 1999 r. Trudno wreszcie nie wspomnieć i o tym, że prawie wszystkie z omówionych funkcji sztucznych satelitów Ziemi znajdują zastosowania militarne, a więc niewiele informacji na ten temat przenika do wiadomości publicznej. Pozostaje tylko ufać, że są to głównie satelity zwiadowcze, służące przede wszystkim do kontroli przestrzegania porozumień międzynarodowych, zwiększając bezpieczeństwo poszczególnych państw i całego globu.

Dzięki technikom kosmicznym przestrzeń okołoziemską pełni rolę unikatowego laboratorium badawczego. Z jego możliwości najwięcej czerpie fizyka kosmiczna, której jednym z głównych zadań jest poznanie podstawowych zjawisk fizycznych w bezpośrednio otaczającej Ziemię przestrzeni. Fizyka kosmiczna jest w znacznym stopniu fizyką plazmy poddanej działaniu zmiennych pól elektrycznych i magnetycznych. Specyfiką plazmy kosmicznej, w odróżnieniu od

typowej sytuacji laboratoryjnej, jest brak ścianek „naczynia” niszczących samoistne procesy plazmowe, oraz olbrzymie rozmiary, a zatem stosunkowo długie skale czasowe charakterystycznych procesów. Dzięki temu w laboratorium kosmicznym można prowadzić badania i eksperymenty absolutnie niewykonalne w warunkach ziemskich.

Innymi obszarami wykorzystania laboratorium kosmicznego są: inżynieria materiałowa oraz biologia i medycyna kosmiczna. Prace w tych dziedzinach prowadzone są niemal od samego początku działalności człowieka w przestrzeni pozaziemskiej, w szczególności należały do głównych punktów programów pierwszych okołoziemskich lotów załogowych, a następnie prac prowadzonych w stacjach orbitalnych (w latach 70. radzieckie stacje Salut i amerykański Skylab, rosyjski Mir w latach 1986–1999). Od 1998 r. powstaje na orbicie okołoziemskiej międzynarodowa stacja kosmiczna Alfa. Warto tu wspomnieć o dokonaniach polskiego astronauty Mirosława Hermaszewskiego, który na przełomie czerwca i lipca 1978 r. spędził kilka dni na pokładzie Saluta 6. Choć jego lot został nadużyty propagandowo dla doraźnych celów politycznych i dziś z tego pewnie powodu odchodzi raczej w niepamięć, to jednak nie należy zapominać, że umożliwił polskim naukowcom wykonanie kilku interesujących eksperymentów. Do najciekawszych należało zbadanie, jak w warunkach mikrogravitacji przebiega proces krystalizacji z fazy ciekłej pewnego typu półprzewodników. Zachodząca w warunkach ziemskich konwekcja utrudnia otrzymanie jednorodnych stopów takich półprzewodników, a ich jakość i własności fizyczne zależą właśnie od jednorodności materiału.

Najbardziej spektakularne osiągnięcia w badaniach kosmicznych przyniosło sondowanie Układu Słonecznego. Obiekty zbudowane przez człowieka dotarły już do wszystkich planet z wyjątkiem Plutona. Przelatywały też przez głowy i warkocze komet oraz zbliżały się do planetoid. Pierwsze sondy międzyplanetarne kierowano, oczywiście, ku Księżycowi. Rywalizacja między ówczesnymi mocarstwami w jego zdobywaniu doprowadziła do tego, że już w 1969 r., czyli zaledwie 12 lat po wystrzeleniu pierwszego sztucznego satelity Ziemi, człowiek stanął na powierzchni Księżyca, a na dalsze osiągnięcia nie trzeba było długo czekać. W latach 70. zobaczyliśmy np. pierwsze zdjęcia powierzchni najbliższych planet – Wenus i Marsa – wykonane z pokładu sond, które na nich łagodnie lądowały (radzieckie Wenery na Wenus i amerykańskie Vikingi na Marsie). Dzięki pracy tych i wielu innych sond został zwielokrotniony zasób wiedzy o Wenus i Marsie oraz rozwiane fałszywe wyobrażenia i koncepcje związane np. ze słynnymi dawniej kanałami marsjańskimi. W tym też czasie nastąpiły pierwsze przeloty sond kosmicznych koło największych planet Układu Słonecznego. W grudniu 1973 r. zbliżył

się do Jowisza Pioneer 10, a rok później przeleciała koło niego bliźniacza sonda Pioneer 11, która następnie dotarła do Saturna, mijając go we wrześniu 1979 r. Dzięki tym misjom odkryto np. pasy radiacyjne wokół Jowisza i poznano szczegóły jego rozległej magnetosfery, a także zaktualizowano wartości mas planet i ich księżyców. Były one jednak dopiero wstępem do jednego z największych osiągnięć w ramach eksploracji przestrzeni kosmicznej, jakim jest niewątpliwie lot dwóch sond Voyager.

Niezwykłość misji Voyager bierze się nie tylko z dostarczenia przez obie sondy ogromu informacji o wszystkich czterech wielkich planetach, lecz także stąd, że opuściwszy już Układ Słoneczny są ciągle czynne i być może za kilka lat doniosą o przekroczeniu granicy heliosfery. Byłoby to bezpośrednim potwierdzeniem wielu dociekań teoretycznych dotyczących obszaru dominacji plazmy wiatru słonecznego nad plazmą ośrodka międzygwiazdowego. Sondy Voyager zostały wystrzelone z Ziemi w 1977 r. Przez układ Jowisza przeleciały w 1979 r., odkrywając m.in. pierścienie Jowisza i aktywność wulkaniczną księżycy Io. Voyager 1, po przelocie koło Saturna w 1980 r., jest obecnie najodleglejszą sondą kosmiczną – we wrześniu 1999 r., czyli w 22 lata po swym starcie, znajdował się w odległości ponad 75 j.a. od Słońca. Voyager 2 zbliżył się do Saturna w 1981 r., a następnie do najdalszych planet Układu Słonecznego: Urana w 1986 r. i Neptuna w 1989 r. Ogromna część tego, co dziś wiadomo o tych odległych olbrzymach planetarnych, jest zasługą tej właśnie sondy.

Po sukcesach misji Voyager kolejne radykalne wzbogacenie wiedzy o Jowiszu i jego księżycach nastąpiło w drugiej połowie lat 90. za sprawą sondy Galileo, która od grudnia 1995 r. jest sztucznym satelitą największej planety. Jej zawdzięczamy m.in. odkrycie oceanu płynnej wody pod niezbyt grubą skorupą lodową na powierzchni satelity Jowisza o nazwie Europa, dzięki czemu księżyc ten stał się drugim po Marsie obiektem Układu Słonecznego, na którym – być może – warto poszukiwać życia. Dalszego wzbogacenia wiedzy o Saturnie oraz jego pierścieniach i księżycach oczekuje się po r. 2004, w którym doleci do tej planety i stanie się jej sztucznym satelitą sonda Cassini wystrzelona w październiku 1997 r. Ostatnie dziesięciolecie przyniosło też znaczne pogłębienie znajomości bliższych Ziemi planet. Z pokładu sztucznego satelity Wenus o nazwie Magellan wykonano w latach 1990–1993 pomiary radarowe, które umożliwiły opracowanie mapy całej powierzchni tej planety, niewidocznej z powodu spowijającej ją stale grubej warstwy chmur. Z kolei krążąca wokół Marsa od 1997 r. sonda Mars Global Surveyor dostarcza zdjęć powierzchni czerwonej planety, z których tworzona jest szczegółowa mapa Marsa. Program ten jest już nawet odczytywany jako początek przygotowań do lotu człowieka na Marsa, choć przebiega nie bez przykrych

porażek, jak np. niedawne fiasko misji Mars Surveyor '98.

Rosnące zainteresowanie małymi ciałami Układu Słonecznego wynika przede wszystkim ze zrozumienia, że komety i planetoidy są pozostałościami materii, z której powstał Układ Słoneczny, zawierają więc informacje o naszej przeszłości. Pierwszego przelotu przez warkocz komety Giacobiniego–Zinnera, w odległości około 8000 km od jądra, dokonała we wrześniu 1985 r. sonda ICE (ang. *International Cometary Explorer*). W marcu 1986 r. cała flotyła sond kosmicznych dokonała obserwacji ze stosunkowo niewielkiej odległości oraz przeprowadziła badania *in situ* słynnej komety Halleya, która wtedy właśnie znowu była w pobliżu Słońca. Najgłębszego zanurzenia się w głowę komety dokonała zachodnioeuropejska sonda Giotto, która minęła jądro w odległości około 600 km z prędkością 68 km/s. Najbardziej spektakularnym rezultatem było uzyskanie obrazu jądra komety Halleya, gdyż dotychczas nie tylko nie dało się zobaczyć żadnego jądra kometarnego, ale nawet nie bardzo było wiadomo, czy stanowią one jedną bryłę materii. W 1992 r. sonda Giotto przeleciała jeszcze przez głowę komety Grigga–Skjellerupa, dostarczając ciekawych informacji o emisji gazu i pyłu z jej jądra oraz o strukturze jego otoczenia plazmowego.

Pierwsze obrazy planetoid z bliska przekazała sonda Galileo. Po starcie z Ziemi w 1989 r., zanim osiągnęła Jowisza w końcu 1995 r., zbliżyła się w październiku 1991 r. do Gaspry i w sierpniu 1993 r. do Idy. Wykonane przez nią zdjęcia Idy ujawniły obecność satelity tej planetoidy, co było pierwszym obserwacyjnym potwierdzeniem przypuszczenia, że niektóre małe planety mogą mieć księżyce. Pierwszą sondą przeznaczoną do badań planetoid jest NEAR (ang. *Near Earth Asteroid Rendezvous*) wystrzelona w lutym 1996 r. Wprawdzie jej celem jest Eros, ale już w czerwcu 1997 r. przeleciała koło Matyldy, której osobliwością okazała się jej gęstość, znacznie mniejsza niż innych planetoid. W lipcu 1999 r. w odległości zaledwie kilku kilometrów od powierzchni małej planetoidy Braille przeleciała sonda Deep Space 1, która w 2001 r. ma się jeszcze zbliżyć do dwóch komet. Planowane są następne misje do komet i planetoid.

Dziś sondy kosmiczne penetrują wprawdzie niemal cały Układ Słoneczny, jednak dalsze obszary Wszechświata pozostają niedostępne dla tej metody badawczej i astronomia opiera się nadal wyłącznie na obserwacjach. Dzięki jednak wyniesieniu instrumentów astronomicznych poza atmosferę ziemską astronomia zyskała możliwość śledzenia promieniowania ciał niebieskich w całym zakresie widma elektromagnetycznego. Obserwacje prowadzone z orbity okołoziemskiej wolne są ponadto od najrozmaitszych zakłóceń powodowanych przez atmosferę. Zrewolucjonizowało to badania astronomiczne i wręcz niewyobrażalnie rozszerzyło

wiedzę o Wszechświecie w ciągu zaledwie kilku ostatnich dziesięcioleci.

Pierwsze orbitalne obserwatoria astronomiczne zostały uruchomione w końcu lat 60. Do najbardziej płodnych naukowo obiektów można zaliczyć satelitę IUE (ang. *International Ultraviolet Explorer*) prowadzącego w latach 1978–1996 obserwacje nieba w nadfiolecie. Wśród wielu satelitów przeznaczonych do odbioru promieniowania rentgenowskiego szczególnie zasłużonym wydaje się ROSAT, który działał w latach 1990–1998. Przeglądu całego nieba w dalekiej podczerwieni dokonał satelita IRAS (ang. *Infrared Astronomical Satellite*) w 1983 r. Obserwacjom promieniowania z pogranicza podczerwieni i milimetrowych fal radiowych poświęcona była w latach 1989–1993 misja COBE (ang. *Cosmic Background Explorer*), której jednym z najważniejszych rezultatów było odkrycie anizotropii promieniowania tła, mającej fundamentalne znaczenie kosmologiczne. Satelita Hipparcos, działając w latach 1989–1993, umożliwił opracowanie – znacznie dokładniejszego niż dotychczasowe – katalogu pozycji, ruchów własnych i jasności 1,2 mln gwiazd, na którego podstawie m.in. stwierdzono, że skala odległości obserwowalnego Wszechświata jest mniej więcej 10% większa, niż dotychczas sądzono. Nie można wreszcie nie wspomnieć o najdoskonalszym chyba narzędziu współczesnej astronomii, jakim jest Teleskop Kosmiczny Hubble'a. Umieszczony na orbicie okołoziemskiej w 1990 r. wślawił się wieloma odkryciami i dostarczył ogromnie dużo cennych obserwacji najrozmaitszych obiektów. Jest pierwszym instrumentem powstającego w przestrzeni kosmicznej wielkiego obserwatorium astronomicznego – drugim jest teleskop promieniowania gamma im. Comptona uruchomiony w 1991 r., a trzecim teleskop rentgenowski Chandra wystrzelony w 1999 r.

Na zakończenie trzeba spytać, czy to wszystko uzasadnia tytułową tezę tego artykułu. Zastanawiając się nad odpowiedzią, warto jeszcze zdać sobie sprawę z tego, że w badaniach kosmicznych upatruje się dziś jeden z podstawowych mechanizmów postępu cywilizacyjnego. Początkowo – podobnie jak w przeszłości, kiedy siłą napędową rozwoju techniki były głównie wojny – tym, co przede wszystkim prowadziło do spektakularnych osiągnięć w tzw. podboju Kosmosu, była rywalizacja między dwoma mocarstwami – Stanami Zjednoczonymi Ameryki Północnej i Związkiem Socjalistycznych Republik Radzieckich – stanowiąca istotny element ówczesnych rozgrywek politycznych. Przy końcu XX wieku, gdy drugie z wymienionych mocarstw już nie istnieje, a rywalizacja przeradza się powoli we współpracę, eksploracja przestrzeni kosmicznej coraz wyraźniej przejmuje rolę kluczowego stymulatora wzrostu gospodarczego oraz staje się najbardziej płodnym obszarem narodzin nowych technologii i postępu wielu kierunków nauki i techniki.



## Patrz w niebo

Obecność układów planetarnych przy wielu gwiazdach nie jest już w dzisiejszych czasach żadną rewelacją. Zresztą już np. obserwacje Syriusza, przeprowadzone w latach 1850–1920, wykazały, że ma on satelitę. Okazała się nim wprawdzie nie planeta, lecz druga gwiazda, biały karzeł, Syriusz B, ale idea obserwacji jest do dziś ta sama. Obserwuje się mianowicie okresowe zmiany położenia gwiazdy (jeżeli leży ona dostatecznie blisko) lub okresowe zmiany prędkości radialnej, gdy wskutek dużej odległości tylko one są mierzalne. W ciągu ostatniego stulecia mocno zmieniły się techniki obserwacyjne i wykorzystując zjawisko Dopplera, można mierzyć prędkości radialne z dokładnością metrów na sekundę.

Nic więc dziwnego, że z pomiarów takich można wydedukować nie tylko sam fakt posiadania satelity (planety) przez gwiazdę, lecz także kształt orbity niewidocznej planety. Regularny sinusoidalny przebieg zmian prędkości radialnej gwiazdy dowodzi, oczywiście, że planeta obiega ją po orbicie kołowej, a generalnie z przebiegu prędkości radialnej można wyliczyć mimośród orbity planety. Skoro planety, jak się obecnie przyjmuje, powstają w wyniku kondensowania się resztek mgławicy dającej początek gwiazdzie, to działające przez długi czas w takiej mgławicy opory ośrodka powinny nadać młodym planetom orbity zbliżone do kołowych – co obserwujemy w naszym Układzie Słonecznym. Tymczasem odkrywa się również planety na orbitach o dużych mimośrodkach, np. przy 70 Virginis, HD 114762 lub 16 Cygni B. W tym ostatnim przypadku mimośród orbity oceniono na 0,69, co przy znajomości innych jeszcze parametrów układu świadczy, że odległość planety od gwiazdy zmienia się w granicach od 84 do 425 mln km.

Jako przyczynę powstania silnie eliptycznych orbit rozważa się bliskie spotkania planet w formującym się układzie planetarnym. Sprawa jednak nie jest prosta, gdyż wydaje się, że w wyniku pojedynczego spotkania jedna planeta nie może przekazać drugiej tyle momentu pędu, by ta ostatnia przeszła na orbitę „kometarną”. Z innych możliwości rozważa się więc – na razie dość ogólnikowo – spotkanie z planetą o orbicie leżącej w innej płaszczyźnie, spotkanie z dwiema planetami niemal na raz, czy wreszcie uzyskanie momentu pędu już na wczesnym etapie życia układu planetarnego od szybko rotującej protogwiazdy. Nikt zresztą nie twierdził, że nie może być wielu przyczyn eliptyczności orbit. Na dzień dzisiejszy problem pozostaje otwarty.

*Tomasz KWAST*

## Listopad

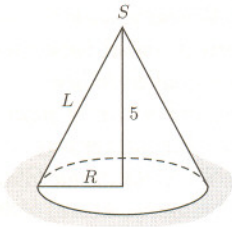
W listopadowe wieczory Droga Mleczna rozciąga się od wschodu do zachodu i przechodzi prawie przez zenit. Widać w niej (choćby przez lornetkę) mnóstwo otwartych gromad gwiazd. Są to dość luźne zgrupowania gwiazd o jednakowym wieku i składzie chemicznym, a różniących się tylko masą. Gromady te są ponadto bardzo młode w skali kosmicznej i nietrwałe. Przyczyną tej nietrwałości jest pole grawitacyjne całej Galaktyki, które każe różnym częściom gromady obiegać centrum Galaktyki w różnym tempie. Gromada stopniowo ulega wtedy rozciągnięciu i jako zbyt słabo związana własną grawitacją rozprasza się po upływie kilku milionów lat – choć są też znacznie trwalsze. Właśnie teraz w pobliżu zenitu widać gołym okiem parę pięknych gromad otwartych oznaczonych jako  $h$  i  $\chi$  Perseusza. Oczywiście, jeszcze piękniej widać je przez małą lunetę czy nawet lornetkę.

Wenus jest w Strzelcu i świeci jasno po zachodzie Słońca, a Mars w Pannie i wschodzi dopiero po północy. Jowisz i Saturn są w Byku i obie planety widać przez całą noc; dokładniej – Saturn 19 XI, a Jowisz 28 XI znajduje się w opozycji do Słońca, czyli w przeciwnej niż Słońce stronie nieba. Pełnia Księżycy wypada 11 XI, a nów 25 XI. Żadnych zakryć jasnych gwiazd w listopadzie nie ma.

*T.K.*



**Rozwiązanie zadania F 535.**  
Zgodnie z warunkiem zadania poszukiwany obszar jest kołem i oświetlenie w punktach leżących na ograniczającym je okręgu wynosi 1 lx.



Oświetlenie obliczamy ze wzoru

$$E = \frac{I}{l^2} \cos \alpha,$$

gdzie

$$l = \sqrt{5^2 + R^2}, \quad \cos \alpha = \frac{5}{l}.$$

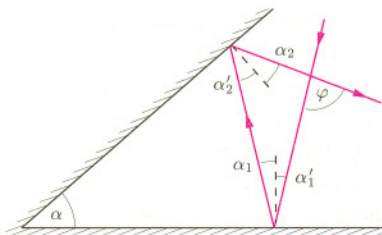
Podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$E = \frac{5I}{(5^2 + R^2)^{3/2}},$$

stąd  $R^2 = 75$ . Szukane pole wynosi więc  $S = \pi R^2 \approx 235,5 \text{ m}^2$ .



**Rozwiązanie zadania F 536.**  
Kąt odchylenia promienia padającego jest równy  $\varphi$ .



Z prawa odbicia światła wynika  $\alpha_1 = \alpha_1'$ ,  $\alpha_2 = \alpha_2'$ . Z geometrycznych rozważań wynika, że  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ . Kąt  $\varphi$  jest kątem zewnętrznym trójkąta i równa się  $2\alpha_1 + 2\alpha_2$ . Wobec tego  $\varphi = 2\alpha$ .

przyjmuje postać  $0 \cdot I_{2000} = 0$ , a z tego, niestety, niczego wywnioskować się nie da.

Dla  $n = 2000$  poprawne rozwiązanie zadania wygląda następująco:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2000x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4000x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4000x}{8000} \Big|_0^{2\pi} = \pi.$$

Zatem

$$I_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq 2000, \\ \pi & \text{dla } n = 2000. \end{cases}$$

JWR

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (23')

*Wyjaśnienie oszustwa (23):* Przedstawiony rachunek jest prawie poprawny. Zawodzi tylko dla  $n = 2000$ , kiedy to równość

$$\frac{4000000 - n^2}{4000000} \cdot I_n = 0$$

## GRY (17)

Dokonanie pełnej analizy gry KRĘGLE prowadzi do następującej tabeli liczb Grundy'ego  $k(n)$  pozycji złożonej z  $n$  kręgli stojących obok siebie:

|    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |    |   |
|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|----|---|
| 0  | 0 | 12 | 4 | 24 | 4 | 36 | 4 | 48 | 4 | 60 | 4 | 72 | 4 | 84 | 4 |
| 1  | 1 | 13 | 1 | 25 | 1 | 37 | 1 | 49 | 1 | 61 | 1 | 73 | 1 | 85 | 1 |
| 2  | 2 | 14 | 2 | 26 | 2 | 38 | 2 | 50 | 2 | 62 | 2 | 74 | 2 | 86 | 2 |
| 3  | 3 | 15 | 7 | 27 | 8 | 39 | 3 | 51 | 8 | 63 | 8 | 75 | 8 | 87 | 8 |
| 4  | 1 | 16 | 1 | 28 | 5 | 40 | 1 | 52 | 1 | 64 | 1 | 76 | 1 | 88 | 1 |
| 5  | 4 | 17 | 4 | 29 | 4 | 41 | 4 | 53 | 4 | 65 | 4 | 77 | 4 | 89 | 4 |
| 6  | 3 | 18 | 3 | 30 | 7 | 42 | 7 | 54 | 7 | 66 | 7 | 78 | 7 | 90 | 7 |
| 7  | 2 | 19 | 2 | 31 | 2 | 43 | 2 | 55 | 2 | 67 | 2 | 79 | 2 | 91 | 2 |
| 8  | 1 | 20 | 1 | 32 | 1 | 44 | 1 | 56 | 1 | 68 | 1 | 80 | 1 | 92 | 1 |
| 9  | 4 | 21 | 4 | 33 | 8 | 45 | 8 | 57 | 4 | 69 | 8 | 81 | 8 | 93 | 8 |
| 10 | 2 | 22 | 6 | 34 | 6 | 46 | 2 | 58 | 2 | 70 | 6 | 82 | 2 | 94 | 2 |
| 11 | 6 | 23 | 7 | 35 | 7 | 47 | 7 | 59 | 7 | 71 | 7 | 83 | 7 | 95 | 7 |

Powyzsza tabela daje wartości  $k(n)$  dla wszystkich liczb całkowitych nieujemnych  $n$ . Okazuje się bowiem, że  $k(n + 12) = k(n)$  dla  $n \geq 71$ . Tak więc możemy z niej odczytać, że  $k(1000000) = k(76) = 1$ .

Nietrudno zauważyć, że w tabeli tej nie występuje (poza  $n = 0$ ) liczba 0. Fakt ten można wyjaśnić w bardzo prosty sposób. Otóż liczba Grundy'ego 0 oznacza, że wygrywającą

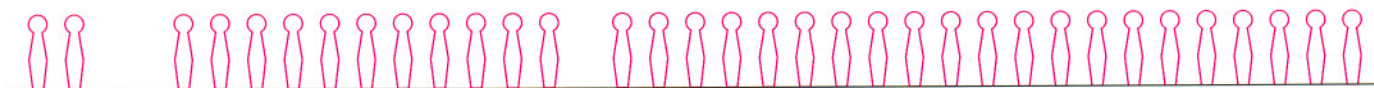
strategię ma gracz drugi, podczas gdy przy dodatniej liczbie Grundy'ego wygrywa gracz rozpoczynający. Jeżeli zaczynamy grę KRĘGLE od pozycji złożonej z kręgli ustawionych obok siebie, łatwo wskazać strategię wygrywającą dla gracza pierwszego. W pierwszym rzucie powinien on potoczyć kulę w sam środek rzędu kręgli. Jeśli liczba kręgli jest nieparzysta, straci wówczas jeden kręgiel, jeśli parzysta, dwa kręgle. Tak czy owak, pozostawi dwa rzędky kręgli jednakowej liczności. Dalsza rozgrywka odbywać się będzie na dwóch egzemplarzach tej samej gry. Cokolwiek wykona gracz drugi na jednym egzemplarzu, gracz rozpoczynający powtórzy na drugim. A to, jak już wiemy, jest gwarancją powodzenia.

Skoro tak prosto wygląda strategia w tej grze, po co nam tabela liczb Grundy'ego? No cóż, możemy być postawieni przed koniecznością wykonania ruchu w pozycji nie mającej w sobie żadnej symetrii. Wyobraźmy sobie, że stajemy do gry KRĘGLE z precyzyjnie rzucającym, ale nie znającym wygrywającej strategii przeciwnikiem.

Zaczynamy od 37 kręgli ustawionych w rzędku i przeciwnik w swoim pierwszym ruchu strąca szesnasty kręgiel od brzegu, pozostawiając dwa rzędy mające 15 i 21 kręgli.



Wygraną mamy już w kieszeni. Wystarczy wybrać jeden z trzech (lub sześciu, jeśli rozróżniamy nieistotną kolejność ustawienia skupisk kręgli) wygrywających ruchów prowadzących do pozycji



2 11 21



15 3 17



15 11 8

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl