



SPIS TREŚCI NUMERU 9(316)

O pochodzeniu pierwiastków

Monika Szymkowiak

str. 1

Czytelnicy piszą

str. 3

Komputery kwantowe,
czyli wyrachowana
interferencja

Konrad Banaszek

str. 4

Tajemnica liczb Fermata

str. 5

Mała Delta

str. 6

Aktualności

(nie tylko) fizyczne

str. 8

Co zrobić z ORRO?

Andrzej Dąbrowski

str. 9

Wir w zlewie,
czyli o pozornych efektach
pozornej siły

Ewa Czuchry

str.12

Zadania

str.13

Klub 44

str.14

Patrz w niebo

str.16

Wrzesień

str.16

Gammalimatias

str.17

W następnym numerze:

Liczby zespolone

Okładki i ilustracje

Anna Ludwicka

Rysunki techniczne

Marcin Adamski

Wybór artykułów w języku angielskim

<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
– wiceprzewodniczący

Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Tomasz Hofmokl
Andrzej Hrynkiewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior

Krzysztof Maślanka

Janusz Matkowski

Andrzej Mąkowski

Zdzisław Pogoda

Michał Różyczka

Konrad Rudnicki

Grzegorz Sitarski

Andrzej Woszczyk

Eligiusz Złotkiewicz

Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol

Krzysztof Biesaga

Ewa Czuchry

Krzysztof Kordos – sekr. red.

Marek Kordos – red. nac.

Tomasz Kwast

Anna Ludwicka

Anna Rudnik

Witold Sadowski

Joanna Udalska

Anna Wojtyra

Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa

tel. 853-59-61

BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

Wydrukowano

w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.

w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2000 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

str.12

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2000 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

str.13

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

str.16

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

str.16

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na IV kwartał 2000 r. wynosi 9 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.

5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numerzy archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

O pochodzeniu pierwiastków

Monika SZYMKOWIAK

Z czego składa się Wszechświat? Jakie pierwiastki chemiczne są w nim zawarte i w jakich proporcjach? To pytanie bardziej dociepliwa część ludzkości zapewne zadawała sobie od dawna, jednak musiało ono pozostać bez odpowiedzi aż do początku naszego stulecia, kiedy to rozwój astrofizyki i podstawowego jej narzędzia – spektroskopii – pozwolił na coraz dokładniejsze badanie składu chemicznego odległych ciał niebieskich.

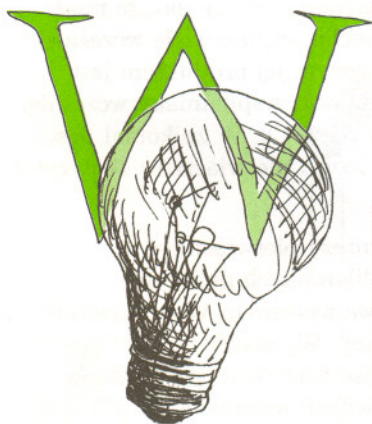
Pierwszym pozaziemskim obiektem, którego skład zbadano, było, oczywiście, Słońce. Okazało się, że składa się ono z grubsza w jednej czwartej z helu, a reszta to wodór. Później naukowcy skierowali swą ciekawość ku innym gwiazdom i materii międzygwiazdowej. Wyniki obserwacji wskazywały jednoznacznie, że wszystkie te obiekty mają zbliżony skład chemiczny!

Pod koniec lat trzydziestych opracowano już pierwsze tabele przedstawiające rozpowszechnienie pierwiastków we Wszechświecie. Gdy tego dokonano, przed naukowcami pojawiło się nowe wyzwanie: teoretyczne wyjaśnienie takiego właśnie stanu rzeczy.

Pierwszym, który się o to pokusił, był G. Lemaître. Wysunął on hipotezę, że Wszechświat zaczął się od stanu, w którym całkowita jego energia skoncentrowana była w przestrzeni o promieniu kilku minut świetlnych. Ten stan Lemaître wyobrażał sobie jako jądro gigantycznego Pierwotnego Atomu. Atom taki byłby niestabilny radioaktywnie i rozpadałby się na fragmenty, które, również niestabilne, rozpadałyby się dalej i ulatywały w przestrzeń kosmiczną. Podział ten zatrzymuje się na pierwiastkach trwałych lub na pierwiastkach o długim czasie życia.

Hipoteza ta była bardzo ogólnikowa i trudno było mówić o jakiegokolwiek jej weryfikacji. Dopiero po jej uściśleniu przez M. Meyera i E. Tellera można było dokonać jej konfrontacji z ówczesnymi obserwacjami. Wówczas zwolenników tej teorii spotkało rozczarowanie. Okazało się, że nie potrafi ona wyjaśnić, skąd wzięły się lekkie pierwiastki. A przecież to z nich właśnie zbudowany jest Wszechświat w ponad 99%!

Kilkanaście lat później w kosmologii zyskał popularność model rozszerzającego się Wszechświata, zaproponowany przez Friedmana, a rozwój fizyki jądrowej istotnie zmienił stan wiedzy o procesach, które mogą zachodzić w warunkach wysokiej gęstości, ciśnienia i temperatury, jakie musiały panować w pierwszych chwilach po Wielkim Wybuchu. Znając dobrze te dwie gałęzie fizyki, G. Gamow opracował zupełnie inną od poprzednich teorię powstawania pierwiastków we Wszechświecie. Wiedział on, że w modelu Friedmana gęstość promieniowania zmienia się jak czwarta potęga temperatury, natomiast gęstość materii – jak jej trzecia potęga. Ponieważ temperatura rośnie w miarę cofania się w stronę Wielkiego Wybuchu, to odpowiednio wcześniej gęstość promieniowania musiała przewyższać gęstość materii. Stąd prosty wniosek: we wczesnych etapach ewolucji Wszechświata zdominowany był przez promieniowanie! Gamow wyobrażał sobie wczesne stany materii jako bardzo ściśnięty gaz neutronowy zanurzony w kąpeli promieniowania elektromagnetycznego o bardzo wysokiej temperaturze. Gaz ten zaczął się rozpadać na protony i elektrony, gdy ciśnienie jego spadło w następstwie ekspansji Wszechświata. Wychwytywanie ciągle jeszcze obecnych neutronów przez nowo utworzone protony doprowadziło do powstania jąder deuteru, a następne wychwytywanie neutronów do utworzenia cięższych jąder. Wkrótce współpracę z Gamowem podjęli R. Alpher i H. Bethe (stąd opracowaną przez nich hipotezę do dziś nazywa się α - β - γ). Starali się oni wyznaczyć kształt krzywej obfitości pierwiastków we Wszechświecie i porównać ją z krzywą sporządzoną na podstawie dostępnych wówczas obserwacji. Okazało się, że o ile dla lekkich pierwiastków krzywe niemal się pokrywają, o tyle produkcji cięższych teoria nie potrafiła dobrze wyjaśnić. Wkrótce też zaczęto zwracać uwagę na inne jej mankamenty. C. Hayashi zauważył, że w odpowiednio



wysokiej temperaturze (to jest około 10^{10} K) Wszechświat powinien być wypełniony nie neutronami, lecz mieszaniną protonów i neutronów, a także elektronami, pozytonami, neutrinami i antyneutrinami. Przemiana neutronów w protony i odwrotnie zachodzić musiała dzięki reakcjom z udziałem słabych oddziaływań. Dzięki nim początkowe obfitości protonów i neutronów były niemal równe.

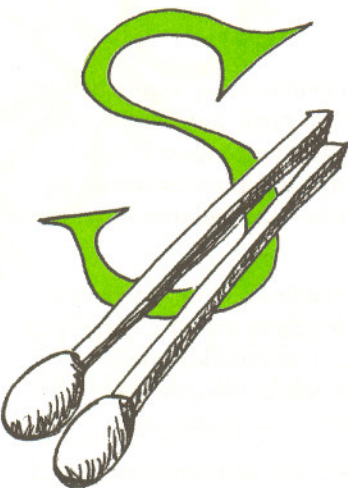
Teoria α - β - γ napotkała też inne trudności. Okazuje się, że w przyrodzie nie występują trwałe jądra atomowe o liczbach masowych 5 i 8, przez które powinien przebiegać łańcuch kolejnych przemian. Poza tym ${}^4\text{He}$ jest jądrem o dużej energii wiązania. Oznacza to, że w praktyce mechanizmy α - β - γ mogą wyprodukować tylko znikome ilości cięższych pierwiastków. Przeciwnicy tej teorii twierdzili złośliwie, że wyjaśnia ona powstanie wszystkich pierwiastków tablicy Mendelejewa aż do helu włącznie. Mimo to hipoteza ta nadal cieszyła się popularnością. Przede wszystkim dlatego, że nie było lepszej. Poza tym dobrze pasowała do modelu Friedmana rozszerzającego się świata. Spodziewano się, że rozwój fizyki jądrowej przyczyni się do wyjaśnienia syntezy cięższych pierwiastków.

Tymczasem rozwój kosmologii poszedł nagle w nieoczekiwanym kierunku. H. Bondi i T. Gold opracowali model Wszechświata stanu stacjonarnego. W modelu tym przez cały czas następuje kreacja materii tak, by pomimo jego rozszerzania się zachował on stałą gęstość. Taki Wszechświat nie był nigdy gęsty i gorący, nie było więc w nim miejsca na procesy α - β - γ . Wtedy to E.M. Burbidge, G.R. Burbidge, A. Fowler i F. Hoyle zaproponowali konkurencyjną teorię nukleosyntezy (nazywamy ją w skrócie BBFH). Mówi ona, że izotopy pierwiastków chemicznych powstają z wodoru drogą przemian jądrowych we wnętrzach gwiazd oraz podczas wybuchów supernowych. Podczas tychże wybuchów jądra powstałych cięższych pierwiastków chemicznych wzbogacają przestrzeń kosmiczną, tak że kolejne pokolenia gwiazd i galaktyk już od początku zawierają ciężkie pierwiastki. W ten oto sposób dokonuje się chemiczna ewolucja Wszechświata.

Teoria BBFH szybko odniosła sukces. Stała się mocnym argumentem dla zwolenników kosmologii stanu stacjonarnego. Jednak po początkowym okresie zafascynowania zauważono poważne jej mankamenty. Przede wszystkim porównano przewidywania z obserwacjami. Według oszacowań BBFH rozpowszechnienie helu wynosi 1–4%, podczas gdy obserwacje wskazywały wyraźnie na około 25%! Podobny problem dotyczył deuteru, który przecież w ogóle nie jest syntetyzowany w gwiazdach, lecz spalany. Poza tym teoria nie wyjaśniała pochodzenia wodoru, zakładała jego istnienie *a priori*, nie była więc kompletna.

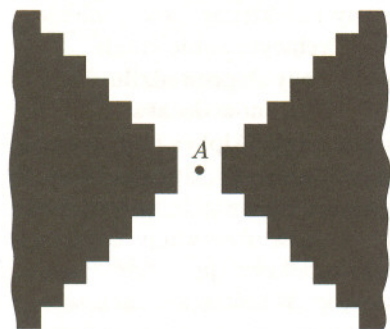
Wreszcie, gdy potwierdzono obserwacyjnie istnienie mikrofalowego promieniowania relikowego, model stanu stacjonarnego został ostatecznie zdyskwalifikowany i teoria α - β - γ powróciła do łask. Była już wtedy dokładniej opracowana i to właśnie na głównych założeniach tej teorii opiera się współczesna standardowa teoria pierwotnej nukleosyntezy. Wiadomo, że miała ona miejsce zaledwie kilka minut po Wielkim Wybuchu, czyli o wiele wcześniej niż powstały wszystkie obiekty astronomiczne. Głównym jej produktem jest hel 4, a to ze względu na jego dużą energię wiązania oraz wspomniany wcześniej brak stabilnych jąder atomowych o liczbach masowych 5 i 8. W znikomej ilości powstaje też lit 7, hel 3 oraz deuter. Produkcji cięższych pierwiastków skutecznie przeciwdziałają bariery kulombowskie.

Obfitości powstałych w czasie pierwotnej nukleosyntezy pierwiastków możemy wyznaczyć z teorii, co wymaga już skomplikowanych obliczeń numerycznych. Obfitości te zależą od panujących we wczesnym Wszechświecie warunków, których, rzecz jasna, dokładnie nie znamy. Wyznaczenie rzeczywistego rozpowszechnienia pierwiastków z obserwacji oraz porównania go z wyznaczonym teoretycznie, przy założeniu pewnych warunków, daje nam zatem informacje o wczesnym Wszechświecie.



Rozwiązanie zadania M 929.

Przykład pokazany jest na rysunku. Każda prosta pozioma (przechodząca przez środki kraterów) jest „prawie w całości” pokolorowana na czarno. Wynika stąd, że prosta pionowa położona odpowiednio daleko od punktu A przecina ją w środku czarnej kratki. Podobnie każda prosta pionowa (przechodząca przez środki kraterów) jest „prawie w całości” pokolorowana na białą. Wynika stąd, że prosta pozioma położona odpowiednio daleko od punktu A przecina ją w środku białej kratki.





Skąd natomiast wzięły się cięższe pierwiastki? W latach 50. E. Salpeter i F. Hoyle opracowali teorię ich syntezy w gwiazdach. Mogą one powstawać pomimo braku stabilnych jąder atomowych o liczbach masowych 5 i 8 dzięki reakcji 3Alfa, w której z trzech jąder helu 4 powstaje jądro węgla 12. Wysoka temperatura i ciśnienie panujące w gwiazdach o masach rzędu masy Słońca i cięższych stwarzają warunki sprzyjające do jej zajścia. W jeszcze masywniejszych gwiazdach przez kolejne przyłączanie jąder helu 4 powstają jądra pierwiastków takich jak tlen, neon czy magnez. W największych i najgorętszych gwiazdach mogą powstawać jeszcze cięższe jądra, do jąder z grupy żelaza włącznie. Na tym jednak kończą się możliwości spokojnej gwiazdowej syntezy. Produkcja cięższych jąder wymaga już doprowadzenia energii z zewnątrz. Energia taka może być uzyskana jedynie podczas wybuchu supernowej. Nie dziwny się więc, że szlachetne metale, takie jak srebro czy złoto, są tak cenne: trzeba było eksplozji o energii rzędu 10^{44} J (o blasku porównywalnym z jasnością galaktyki), by powstały.

Brzeg dowolnej środkowo symetrycznej figury wypukłej mieści się między dwiema elipsoidami jednokładnymi w stosunku \sqrt{n} , gdzie n to wymiar przestrzeni, w której wszystko się odbywa. Na płaszczyźnie więc brzeg dowolnej figury wypukłej mieści się między dwiema elipsami jednokładnymi w stosunku $\sqrt{2}$.

Z krawędzi wielościanu foremnego tworzymy linię łamaną zamkniętą przechodzącą przez wszystkie wierzchołki wielościanu jeden raz. Uważamy za jednakowe te łamane, które dają się nałożyć przez obracanie. Dla czworościanu i sześcianu jest tylko jedna taka łamana, dla dwunastościanu dwie, dla ośmiościanu 3, a dla dwudziestościanu aż 33.

Czytelnicy piszą

W *Delcie* styczniowej z bieżącego roku przypomnieliśmy następujący problem:
przy jakiej ilości płynu w butelce środek ciężkości jest najniższy?

Było też podane tam szczególne rozwiązanie – mianowicie dotyczące sytuacji, gdy butelka (?) ma kształt walca. Sugerowaliśmy też, że podane tam rozwiązanie, czyli:

wtedy, gdy środek ciężkości całości leży na powierzchni płynu

jest prawdziwe nie tylko w rozpatrzonym przypadku i prosiliśmy Czytelników o podanie ogólnego i prostszego od naszych rachunków rozwiązania.

I rzeczywiście takie rozwiązanie, zawierające *wyniki moich nocnych rozważań* – jak pisze – nadesłał nam Pan Marcin Peczański. Oto ono.

Rozważmy naczynie o dowolnym kształcie napelnione płynem do pewnej wysokości.

Jeżeli poziom płynu w naczyniu leży poniżej środka ciężkości, to dolanie do naczynia niewielkiej ilości płynu spowoduje obniżenie środka ciężkości, gdyż środek ciężkości dodawanego płynu leży poniżej środka ciężkości naczynia z płynem przed dodaniem.

Jeżeli natomiast poziom płynu w naczyniu leży powyżej środka ciężkości, to odlewanie z naczynia niewielkiej ilości płynu spowoduje również obniżenie środka ciężkości, gdyż środek ciężkości ujmowanego płynu leży powyżej środka ciężkości naczynia z płynem przed jego wzięciem.

Z tych dwóch faktów wynika, że podwyższanie poziomu płynu, gdy środek ciężkości leży powyżej tego poziomu, oraz obniżanie poziomu płynu, gdy środek ciężkości leży poniżej tego poziomu, powodują obniżanie położenia środka ciężkości. Zatem środek ciężkości leży najniżej, gdy znajduje się na powierzchni płynu.

c.b.d.u.

Sądzymy, że prostszego rozwiązania raczej już nie ma. Dziękujemy.

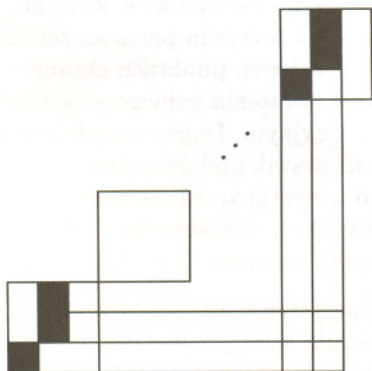
Redakcja

P.S. Podobne rozwiązanie przysłał też Pan Adam Smólski.



Rozwiązanie zadania M 930.

Załóżmy, że kolorujemy na biało i czarno. Rozważmy nieskończony ciąg nie przecinających się wewnętrznie kwadratów 3×3 położonych „wzdłuż przekątnej” (rys). Wśród nich znajdziemy dwa jednakowo pokolorowane (liczba pokolorowań kwadratu 3×3 dwoma kolorami jest skończona). Na przekątnej każdego z tych kwadratów są dwie kratki tego samego koloru (powiedzmy czarnego). Rozważmy przecięcie odpowiednich poziomych i pionowych pasów przechodzących przez te kratki. Jeśli chociaż jedna z czterech kratek tego przecięcia jest czarna, to wraz z odpowiednimi kratkami „na przekątnej” będzie ona tworzyć szukany trójkąt. Jeśli zaś wszystkie cztery kratki są białe, to dowolne trzy z nich tworzą szukany trójkąt.



Konrad BANASZEK

Zapewne każdy użytkownik komputera chciałby, żeby jego urządzenie działało *jeszcze* szybciej i miało *jeszcze* większą pamięć. Powody po temu są rozmaite. Jedni pragnęliby dokładniej poznać tajemnice Wszechświata. Innym zależy z kolei na bardziej prozaicznych zastosowaniach, jak np. przewidywanie pogody. Są wreszcie i tacy, którym marzą się jeszcze mocniejsze wrażenia podczas zmagania z wymagowanymi przeciwnościami losu na ekranie komputera.

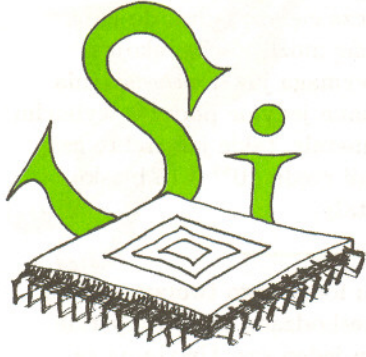
Droga do zwiększenia wydajności komputerów prowadzi obecnie jedna. Jest nią miniaturyzacja, wkraczająca powszechnie wkraczająca powszechnie w nasze codzienne życie. Miniaturyzacja nie może jednak postępować w nieskończoność, przynajmniej na pewno nie zgodnie z dotychczasowymi zasadami działania układów elektronicznych. Trudno jest bowiem wyobrazić sobie ścieżkę w układzie scalonym, której szerokość byłaby porównywalna z rozmiarami atomu, a prąd nią płynący składał się z pojedynczego elektronu. Procesy w takiej skali opisywane są przez mechanikę kwantową. W zjawiskach przez nią opisywanych pojawia się wiele nieoczekiwanych efektów: cząstki zachowują się czasem jak fale, a fale – jak cząstki.

Można jednak popuścić wodze fantazji i zastanowić się nad działaniem komputera złożonego z pojedynczych układów kwantowych. Przede wszystkim musimy znaleźć sposób na kodowanie bitów, czyli podstawowych zero-jedynkowych cegiełek informacji, którymi posługuje się komputer. Dobrym kandydatem do przechowywania jednego bitu informacji jest pojedynczy atom, gdy z jego struktury energetycznej wybierzemy dwa poziomy i przypiszemy im wartości logiczne 0 i 1. Wprowadzając odpowiednie oddziaływanie między dwoma lub więcej atomami, można otrzymać różne wyniki, w zależności od stanu początkowego układu, czyli – w języku informatyki – wykonywać operacje logiczne na stanach wejściowych. Składając razem wiele takich elementarnych operacji, dałoby się zbudować komputer, który w pełni zasługiwałby na przydomek: kwantowy.

Komputer kwantowy ma istotnie nowe cechy w porównaniu z jego klasycznym odpowiednikiem. W mechanice kwantowej bowiem cząstki wykazują własności falowe. Dzięki temu możemy dodawać różne stany kwantowe – czyli tworzyć ich *superpozycje* – na podobnej zasadzie, jak dodają się drgania w ruchu falowym. Każdy z atomów na wejściu układu logicznego nie musi być więc w ściśle określonym stanie 0 lub 1. Możemy je przygotować w stanie superpozycji będącej kombinacją różnych stanów kwantowych. Nasz układ logiczny przetworzy wtedy *równoległe* każdy ze składników i dostarczy na wyjściu superpozycję wyników odpowiadających poszczególnym stanom wejściowym.

Brzmi to bardzo obiecująco, ale pozostaje jeden podstawowy kłopot – odczytanie wyniku obliczeń. Na końcu musimy dokonać pomiaru i sprawdzić, które z atomów znajdują się w stanie 0, a które w stanie 1. Pomiar taki dostarczyłby jednak informacji tylko o jednym ze składników superpozycji. Pomocną analogią jest tutaj doświadczenie z dyfrakcją elektronów, w którym obserwujemy na ekranie rozkład wiązki elektronów po przejściu przez szczelinę. Pojedynczy elektron może zostać zarejestrowany w różnych punktach ekranu z pewnym prawdopodobieństwem. Zaobserwowanie położenia jednego elektronu mówi nam jednak niewiele o pełnym obrazie dyfrakcyjnym. Dopiero wielokrotne powtórzenie doświadczenia przynosi pełny rozkład prawdopodobieństwa na ekranie. Podobnie, aby otrzymać informację o wszystkich składnikach superpozycji przetworzonych przez komputer kwantowy, musielibyśmy wielokrotnie powtórzyć wszystkie operacje logiczne i końcowy pomiar.

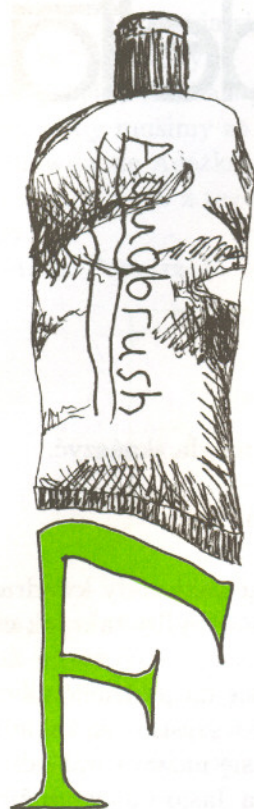
Jest na to jednak rada. Otóż trzeba w pełni wykorzystać dobrodziejstwa mechaniki kwantowej i skłonić poszczególne składniki superpozycji do *interferencji*. Tak jak składając razem drgania falowe, możemy je wzmacniać



Rozwiązanie zadania M 928.

Punkt a) jest szczególnym przypadkiem punktu b) dla $l = m = 2$. Do dowodu b) rozważmy nieskończony poziomy pas szerokości ln , którego brzegiem są dwie proste siatki. Składa się on z nieskończonej liczby słupków szerokości 1 i wysokości ln . Wśród nich znajdziemy m jednakowo pokolorowanych (zasada szufladkowa Dirichleta). Każdy z tych słupków pokolorowany jest n kolorami, wysokość słupków wynosi ln , a więc znajdziemy kolor, którym pokolorowanych jest co najmniej l kratek jednego z wybranych słupków (zasada szufladkowa). Szukane proste to m prostych pionowych przechodzących przez środki wybranych słupków i l prostych poziomych przechodzących przez środki znalezionych l kratek.

Pytanie dodatkowe: A czy kwadrat zawsze istnieje? (Możemy ograniczyć się do dwóch kolorów.)



albo wygaszać (mówimy wtedy o interferencji *konstruktywnej* bądź *destruktywnej*), podobnie interferencja kwantowa pozwala nam manipulować „udziałem” stanów składowych w superpozycji. Przypuśćmy, że naszym zadaniem jest znalezienie rozwiązań spełniających pewien określony warunek. Okazuje się często, że najlepszy algorytm dla zwykłych (klasycznych) komputerów sprowadza się do pracowitego sprawdzenia, które z potencjalnych rozwiązań spełnia wymagane warunki. Komputer kwantowy może przetworzyć równoległe superpozycję potencjalnych rozwiązań, i to w taki sposób, aby te spełniające żądany warunek ulegały interferencji konstruktywnej, czyli wzmocnieniu, natomiast pozostałe interferowały destruktywnie i zostały wygaszone. Pomiar stanu wyjściowego przyniesie nam wtedy tę odpowiedź, której właśnie szukamy.

Przykładem problemu obliczeniowego powyższego typu jest rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze. Złożoność tego problemu rośnie niesłychanie szybko wraz z liczbą cyfr. Jest to praktycznie wykorzystywane w powszechnie używanych protokołach szyfrujących z tak zwanym kluczem publicznym. Mając dwie liczby pierwsze, nietrudno jest znaleźć ich iloczyn. Co więcej, można go ogłosić wszem i wobec bez szczególnej obawy, że ktoś znajdzie jego rozkład na czynniki pierwsze. Procedura kodująca używa tylko tego iloczynu, natomiast do odkodowania zaszyfrowanej informacji potrzebna jest już znajomość obu czynników. Dzięki temu rozszyfrować wiadomość może tylko autor klucza.

Komputer kwantowy (gdyby ktoś go zbudował, oczywiście) byłby w stanie znaleźć rozkład na czynniki pierwsze, używając znacznie mniejszej liczby operacji. Stanowiłoby to poważne zagrożenie dla bezpieczeństwa protokołów szyfrujących z kluczem publicznym. Mechanika kwantowa oferuje jednak coś w zamian – kwantowe systemy kryptograficzne, których bezpieczeństwo gwarantuje całym swoim autorytetem. Ale to już następna historia. . .

Tajemnica liczb Fermata

Wielu badaczom świata liczb marzyło się uzyskanie cudownego wzoru, który dawałby wyłącznie liczby pierwsze. Próbowano wykorzystywać różne formuły, z których dwie pozostały przedmiotem rozważań do dziś. Chodzi mianowicie o liczby postaci $2^m - 1$ i $2^m + 1$ ($m \in \mathbb{N}$). Można wykazać, że jeśli $2^m - 1$ jest liczbą pierwszą, to m jest również liczbą pierwszą. Liczby $M_p = 2^p - 1$ (p – liczba pierwsza) nazywamy liczbami Mersenne’a. Liczby M_2, M_3, M_5, M_7 są pierwsze, ale już liczba M_{11} jest złożona. Prawdopodobnie wśród liczb Mersenne’a jest nieskończenie wiele zarówno liczb pierwszych, jak i złożonych. Największą znaną liczbą pierwszą Mersenne’a była w 1999 r. liczba $M_{6972593}$. Jeśli natomiast liczba $2^m + 1$ jest pierwsza, to $m = 2^n$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Fermat przypuszczał, że zachodzi twierdzenie odwrotne. Oznaczmy $F_n = 2^{2^n} + 1$. Wprawdzie liczby F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 są pierwsze, ale już liczba F_5 jest złożona. Do chwili obecnej wykazano, że liczby F_5, F_6, \dots, F_{23} są złożone (i niektóre inne).

Liczby Fermata mają nieoczekiwany związek z geometrią. Otóż Gauss udowodnił, że jeśli $s = 2^k F_{n_1} F_{n_2} \dots F_{n_t}$, $k \geq 0$, gdzie $F_{n_1}, F_{n_2}, \dots, F_{n_t}$ są różnymi liczbami pierwszymi Fermata, to można skonstruować s -kąąt foremny za pomocą cyrkla i linijki. Nieco później Wantzel wykazał twierdzenie odwrotne. Od czasów Fermata (1640 r.) nie znaleziono nowej liczby pierwszej F_n . Obecnie pierwszą podejrzaną jest F_{24} (mająca 5 050 446 cyfr). Gdyby okazała się pierwsza (co raczej jest wątpliwe), to na podstawie twierdzenia Gaussa można by skonstruować za pomocą cyrkla i linijki F_{24} -kąąt foremny. Jest to wielokąt o ogromnej liczbie boków (na rysunku wyglądałby praktycznie jak koło). Podanie konstrukcji takiego wielokąta to zadanie karkołomne. Byłoby może zatem lepiej, gdyby okazało się, że poza F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 nie ma innych liczb pierwszych Fermata. Czy jednak da się to udowodnić?

Witold BEDNAREK



Rozwiązanie zadania F 531.

Oznaczmy szukany stosunek oporu r_2 dużego boku ramki do oporu r_1 mniejszego przez $x = r_2/r_1$. Po włączeniu ramki do obwodu w punktach A i B mamy

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1 + 2xr_1} = \frac{2(x+1)}{r_1(2x+1)}$$

Po włączeniu ramki w punktach B i C otrzymujemy

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{xr_1} + \frac{1}{2r_1 + xr_1} = \frac{2(x+1)}{xr_1(x+2)}$$

Stosunek oporów jest równy

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{x(x+2)}{2x+1} = 1,6,$$

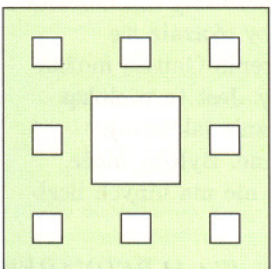
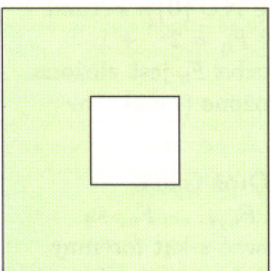
a stąd równanie na x

$$x^2 - 1,2x - 1,6 = 0.$$

Odrzucając ujemny pierwiastek równania otrzymujemy $x = 2$.

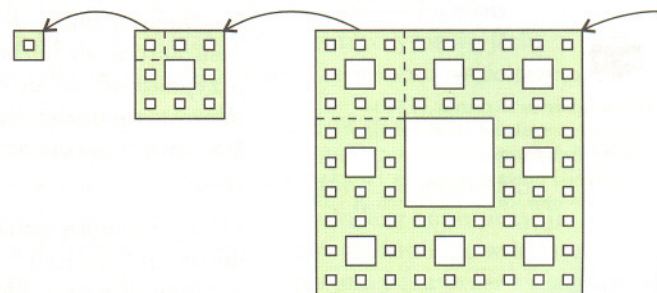
Fatalny fraktalny dywan

- Nie jest źle – powiedział Jasio. – Jest fatalnie.
- dodał po chwili i zaprosił swych przyjaciół do środka. Jacek z Agatką weszli do pokoju. Na podłodze leżał dywan w kształcie kwadratu. Nie było w nim nic nadzwyczajnego oprócz tego, że w samym środku miał wypaloną dziurę.
- Bawiłeś się zapalkami? – zdziwił się Jacek.
- Nie jestem dziewczynką i nie mam zapalek
- mruknął Jasio, a Jacek i jego siostra niemal w tej samej chwili przypomnieli sobie, że w zeszły piątek Jasio kupił sobie zestaw młodego chemika.
- Nie o to zresztą chodzi, skąd się ta dziura wzięła. Trzeba coś z nią zrobić. Tym bardziej że... to jest dywan sąsiada. Miałem mu go wytrzeć i... Sami widzicie.
- Może da się zaszyć?
- Gdzież tam! Za duża dziura.
- Przez chwilę milczeli zrezygnowani.
- No to może równo wytniemy? – zaproponowała Agatka. – Taki kwadracik na środku... Będzie trochę ładniej...
- Nie ma wyjścia – westchnął po chwili namysłu Jasio i spytał – Pomożecie?
- Pomożemy! – zawołali radośnie. Kiedy już było



- po wszystkim, Jacek pokręcił głową.
- Mogłoby być ładniej. Gdyby jeszcze zrobić takie same dziurki dookoła. Tylko mniejsze. O takie... Dał przykład.
- No i coś ty zrobił? Teraz to już chyba rzeczywiście musimy takie dziurki dorobić.
- I co? Nie miałem racji?
- spytał Jacek, gdy wycięli następne 8 kwadratowych dziur. – Ślicznie, prawda?
- Rzeczywiście, teraz to ten dywan jest taki... taki...

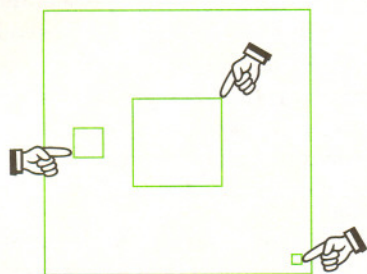
- zaczęła Agatka, ale nie mogła skończyć.
- No jaki?
- Taki... podobny do siebie!
- ?
- No, tak, bo jakby wyciąć taki mały kwadracik, to ten mały kwadracik znów byłby taki jak cały dywan.
- Ja wiem! Takie coś, co się da podzielić na mniejsze części, z których wszystkie są takie jak to coś, tylko mniejsze, to się nazywa fraktal!
- pochwalił się swą wiedzą Jasio i Jacek już wiedział, za co chwilami nie lubi swojego najlepszego kolegi.
- Ojej!- zapiszczała Agatka – To zrobiliśmy fraktalny dywan!
- Zrobiliśmy fatalny dywan – zimno wycedził Jacek. – Żeby on był fraktalny, to trzeba jeszcze dorobić dalsze dziury. Przecież widzisz, że każdy mały kwadracik ma tylko jedną dziurę, a ten duży osiem więcej.
- No to każdemu małemu doróbmy po osiem! – zaproponowała Agatka.
- To wtedy duży będzie miał o 64 więcej!



- No to jeszcze wytnijmy 64 w każdym małym!!
- To w dużym będzie...
- Przestańcie się wydierać! Wiecie, kto pode mną mieszka... – trzeźwo przypomniał Jasio. Uspokoił się.
- Ale... to chyba nie jest dywan...
- Nie, to nie jest dywan aspiranta Sieczko, ale jak będziemy tak wrzeszczeć, to przyjdzie nas upomnieć.

Przez chwilę było cicho.

- No to co? To nie da się tak zrobić, żeby ten dywan był fraktalny?
- Da się, tylko trzeba wycinać w nieskończoność.
- Ojej, a my musimy za godzinę wracać do domu
- zmartwiła się Agatka. - A poza tym, jakbyśmy tak wycinali... to z tego dywanu zostałyby same dziury...
- Eeetam. Popatrz, to by zostało i to. I tutaj.



- Aha, ale to by była tylko taka jedna nitka, tylko że tak pozawijana i pozawijana...
- Czyli dywan byłby jednowymiarowy.
- Niby tak. Ale on by był trochę... - Agatka nie mogła znaleźć słowa. - taki... Bardziej wymiarowy...
- Półtorawymiarowy - mruknął złośliwie Jacek.
- Głupek - obraziła się na brata Agatka.
- A może Agatka ma rację? Może ten dywan ma jeszcze taki inny wymiar?
- No, na pewno - znów ironicznie odezwał się Jacek - Fraktalny może?
- Dlaczego nie? Tylko jak go określić... Hmm, popatrzcie, ten dywan... jakby go tak powycinać w nieskończoność, składałby się z 8 mniejszych kwadracików o boku 3 razy mniejszym niż ten duży...
- To może ma wymiar $8/3$? - zaproponowała Agatka. Jacek popukał się w głowę. - Przecież $8/3$ jest większe od dwóch. Agatka umilkła.
- Gdyby zwykły kwadrat pociąć na kwadraty o boku 3 razy mniejszym, to byłoby ich 9. A jakby pociąć na kwadraty o boku 2 razy mniejszym, to byłoby ich cztery - zastanawiał się Jasio. - Kwadrat ma wymiar 2. Więc trzeba wymyślić taką funkcję, żeby $f(2, 4) = f(3, 9) = 2$. I jeszcze żeby $f(3, 8)$ było między 1 a 2. Macie jakiś pomysł? Jak z 2 i 4 wyliczyć dwójkę? No, i żeby tak samo z 3 i 9 również wyliczyć 2... Myśleli przez chwilę.
- Wiem! - zawołał Jacek - $3^2 = 9$, a także $2^2 = 4$!
- Aha! - ucieszył się Jasio. - To musi być logarytm!
- Loga... co? - spytała Agatka.
- Logarytm z jakiejś liczby $N > 0$ przy podstawie $p > 0$ i różnej od 1, to taka liczba $b = \log_p N$, że $p^b = N$ - wyrecytował Jasio. - Więc np. $\log_2 4 = 2$,

bo $2^2 = 4$, a $\log_3 9 = 2$, bo $3^2 = 9$. Dlatego $\log_p N$ to nasza funkcja $f(p, N)$.

- Agatka spojrzała na Jasia z podziwem, a Jacek z politowaniem. Ech, ten Jasio! Jak on się popisuje, żeby tylko zaimponować kobiecie.
- To jaki wymiar ma ten dywan z dziurami?
- To będzie... $\log_3 8$. Czyli jakaś liczba między 1 a 2, bo $3^1 = 3 < 8$, a $3^2 = 9 > 8$. Chodźmy do drugiego pokoju. Tam mam kalkulator.
- Około 1,893 - oświadczył triumfalnie Jasio, gdy zobaczył wynik.
- Czekaj, czekaj. - powiedział Jacek. - To jaka w końcu jest definicja tego wymiaru fraktalnego?
- Masz fraktal. Rozkładasz go na N części, każda taka sama jak całość, tylko mniejsza p razy. To wymiar fraktala wynosi: $\log_p N$.
- No dobrze, ale czy to działa w innych wymiarach? Sprawdźmy, czy się zgadza dla sześciangu.
- To będzie np. jak dla kostki Rubika... Sześciang możesz rozłożyć na... 27 sześcianów o boku 3 razy mniejszym. I mamy: $\log_3 27 = 3$, bo $3^3 = 27$. A sześciang jest trójwymiarowy! To działa!
- A odcinek?
- Odcinek możesz pociąć np. na cztery odcinki cztery razy krótsze. I masz $\log_4 4 = 1$. Super!
- Słuchaj, Jasiu - powiedział Jacek. - Ten wymiar jest określony tylko dla takich samopodobnych figur. Ale czy ty myślisz, że kwadrat, sześciang i odcinek to są fraktale? Przecież one są zupełnie... takie... normalne.
- To pewnie fraktale są tylko wtedy, gdy ich wymiar fraktalny jest większy od tego zwykłego. Topologicznego - powiedział Jasio, a Agatka znów popatrzyła na niego z dumą. Jacek pokręcił głową. Wcale nie chciałby mieć takiego przemądrzałego szwagra.
- A ja kiedyś słyszałam - powiedziała Agatka - że brzeg płatka śniegu to też fraktal. Policzmy dla niego!
- W tej samej chwili usłyszeli jednak jakiś hałas w pokoju, z którego niedawno wyszli. Pobiegli z powrotem. Okazało się, że to zemdląca mama Jasia. Kiedy ją ocucili, spytała:
- Synku, co ty zrobiłeś z dywanem pana Sierpińskiego? Przecież będziemy musieli ten dywan odkupić! Czy ty wiesz, jak trudno dziś o pieniądze?
- Jasio westchnął, spuścił głowę i pomyślał: czy to zawsze tak w życiu jest, że kiedy tylko człowiek zacznie się zajmować jakimś poważnym naukowym problemem, to od razu musi wracać do szarej codzienności?

Małą Deltę przygotował Witold SADOWSKI

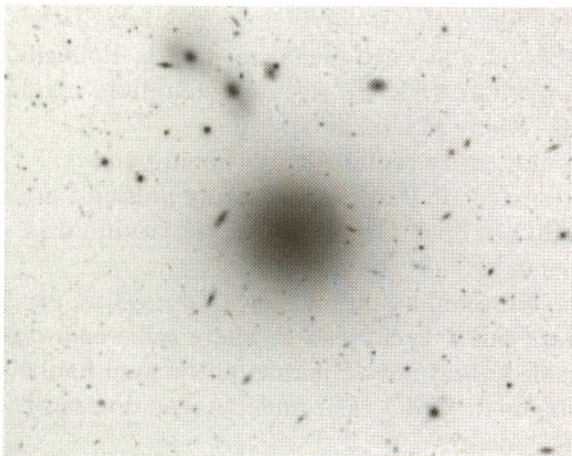
Antu, Kueyen, Melipal i Yepun

Nic wam nie mówią te słowa? Nic dziwnego. Nie każdy zna język Mapuczów (Araukan), Indian żyjących w Chile i Argentynie. Ja akurat nie znam. Słowa te mają jednak szansę upowszechnić się w całej globalnej wiosce. Oznaczają odpowiednio: Słońce, Księżyc, Krzyż Południa i Syriusza. Zostały nimi ochrzczone cztery główne, ośmiometrowe teleskopy układu VLT (Very Large Telescope). Ten największy optyczny instrument astronomiczny budowany jest przez ESO (European Southern Observatory) na (górze) Cerro Paranal na pustyni Atacama w Chile, w pobliżu zwrótnika.

Obserwatorium Paranal jest kompletowane stopniowo. W kwietniu przekazano astronomom do użytku drugi teleskop (Kueyen) i zainstalowano ostatnie główne lustro (Yepun). Teleskopy Antu, Kueyen, Melipal i Yepun będą mogły pracować osobno lub wspólnie. W tym drugim przypadku ich połączona moc zbierania światła będzie odpowiadać pojedynczemu szesnastometrowemu teleskopowi. Będą mogły być użyte w trybie interferometrycznym pozwalającym na obserwację z nadzwyczajną zdolnością rozdzielczą – w analogii do słynnego doświadczenia Hanbury–Browna i Twissa, w którym po raz pierwszy wyznaczono rozmiary gwiazd [1].

Każdy z czterech teleskopów pozwala na zainstalowanie trzech niezależnych instrumentów. W tej chwili (maj) cztery (z ogólnej liczby dwunastu) już działają. Są to FORST1 i FORST2 (Focal Reducer/low dispersion Spectograph), ISAAC (Infrared Spectrometer And Array Camera) i UVES (UV-Visual Echelle Spectrograph). Uzyskiwane wyniki już teraz, na kilka lat przed całkowitym skompletowaniem obserwatorium, zadziwiają tak swoją jakością i oryginalnością, jak i dostrzegalnym nawet dla laika pięknem (patrz okładka).

Okazuje się, że wysokiej klasy instrument potrafi umożliwić dokonanie zaskakujących obserwacji w najmniej spodziewanych miejscach.



Rys. 1

Trzech astronomów prowadziło obserwację karłowatych galaktyk w grupie galaktyk w Pannie za pomocą instrumentu FORST1 zamontowanego w ognisku Cassergraina teleskopu Antu [2]. Uważa się, że odległości tych galaktyk można skutecznie wyznaczyć za pomocą metody SBF (fluktuacji jasności powierzchniowej). Polega ona na rejestracji dokładnego obrazu galaktyki za pomocą kamery CCD i pomiarze fluktuacji jasności od piksela do piksela odpowiadającej fluktuacjom liczby niewyodrębnionych w uzyskiwanym obrazie gwiazd. Amplituda takich fluktuacji jest odwrotnie proporcjonalna do odległości badanej galaktyki. Fluktuacje te są wyłuskane poprzez odjęcie od rejestrowanego obrazu odpowiednio wygładzonego tła galaktyki.

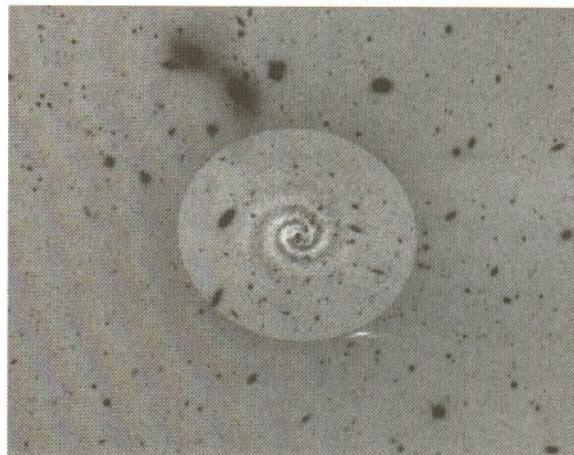
Zastosowanie tej procedury do zarejestrowanego obrazu galaktyki IC3328 (rys. 1) okazało się bardzo zaskakujące. Odkryto regularną spiralną strukturę (rys. 2). Nie jest ona widoczna na pierwszym zdjęciu, gdyż amplituda jasności wynosi zaledwie 3%.

Jakie jest źródło tej najdelikatniejszej i najmniejszej spirali galaktycznej? Zaobserwowany w IC3328 spiralny wzór dowodzi, że galaktyka zawiera cienki dysk. Dostępne dane nie pozwalają na rozróżnienie między samym dyskiem a dyskiem zawartym w sferycznym halo. Struktura galaktyki może być według autorów albo efektem pływowym (po bliskim przejściu innego obiektu), albo tzw. wahadłowo wzmocnionym szumem (swing amplified noise) [2]. Tak czy inaczej IC3328 będzie musiała zmienić swoją przynależność grupową.

Jak widać, już rozgrzewka VLT jest emocjonująca. A to przecież nie jedyne budowane urządzenie obserwacyjne o wyjątkowych możliwościach! Chyba pierwszą katastrofą nowego tysiąclecia będzie astronomiczna klęska urodzaju.

Piotr ZALEWSKI

- [1] R. Hanbury-Brown, R.Q. Twiss, *Nature* **177**(1956)27, **178**(1956)1046,
[2] H. Jarjen, A. Kalnajs i B. Bingeli, astro-ph/0004248.



Rys. 2

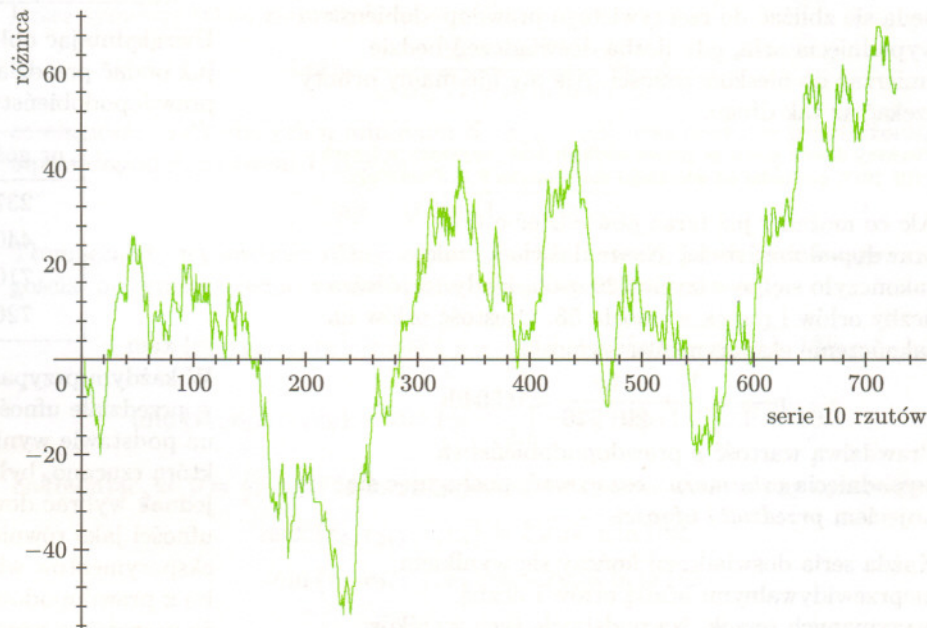
Co zrobić z ORRO?

Andrzej DĄBROWSKI



Jednym z doświadczeń wykonywanych w ubiegłym roku przez gości Festiwalu Nauki w Warszawie było rzucanie monetą. Każdy z uczestników doświadczenia rzucał monetą 10 razy. Do komputera wpisywano różnicę między uzyskaną liczbą orłów i reszek. Na ekranie komputera, po wizycie k -tego gościa, rysowany był wykres krzywej r_k , będącej różnicą liczby orłów i reszek, uzyskanych dotąd w eksperymencie.

Opis doświadczenia z rzucaniem monetą znaleźć można w prawie każdym podręczniku rachunku prawdopodobieństwa. Rzadko jednak spotkamy zapis wyników takiego doświadczenia, bo zapewne autorzy podręczników stwierdzili, że oprócz „smrodku dydaktycznego” żadnych ciekawych wniosków nie można wyciągnąć z konkretnych danych. Bo cóż ciekawego jest w nudnym ciągu wyników ORRO...?



Patrząc na wykres sumy różnic między liczbą orłów i reszek, uzyskany w doświadczeniu z Festiwalu, zauważyć można kilka niepokojących faktów. Gdyby moneta, którą rzucono, była symetryczna, to różnice powinny oscylować w pobliżu 0. Tymczasem wykres przez większą część czasu przebywał ponad osią x , wskazując na przewagę liczby orłów nad liczbą reszek. Po okresie załamania koniunktury orłów (w okresie od momentu pojawienia się 150. gościa aż do gościa nr 237, gdzie przewaga liczby reszek nad liczbą orłów wyniosła 54) i po okresie burzliwej, ale dodatniej stabilizacji (między wizytą trzechsetnego a pięćsetnego gościa) zaczęła się hossa, kończąca się w momencie zakończenia doświadczenia na różnicy, wynoszącej 70 orłów. Szkoda, że już nikt nie zobaczy, jak długo trwałaby ta hossa i jakim wynikiem mogłaby się zakończyć. I szkoda, że nie są to notowania spółki giełdowej, w którą zainwestowaliśmy nasze oszczędności.

Czy taki przebieg doświadczenia może nam coś powiedzieć o prawdopodobieństwie wyrzucenia orła? Czy słusznie podejrzewamy, że moneta jest asymetryczna i jak wielka jest ta asymetria? Zazwyczaj do oszacowania prawdopodobieństwa zdarzenia A

bierze się jego częstość w serii n doświadczeń, czyli ułamek postaci

$$p_n(A) = \frac{l_n(A)}{n},$$

gdzie $l_n(A)$ jest liczbą doświadczeń, w których wystąpiło zdarzenie A .

Oznaczając przez l_{10k} („ O ”) liczbę orłów po wizycie k -tego gościa, a liczbę reszek przez l_{10k} („ R ”), otrzymamy równość

$$r_k = l_{10k}(\text{„}O\text{”)} - l_{10k}(\text{„}R\text{”)}) = 2l_{10k}(\text{„}O\text{”)}) - 10k.$$

Częstość orłów po wizycie k -tej osoby można więc zapisać wzorem

$$p_k = \frac{1}{2} + \frac{r_k}{20k}.$$

Obserwacje krzywej różnic pozwalają nam oszacować prawdopodobieństwo wyrzucenia orła w dowolnym momencie naszego doświadczenia. W momencie absolutnej bessy dla orłów częstość wypadnięcia orła była równa

$$p_{237} = \frac{1}{2} + \frac{-54}{20 \cdot 237} \approx 0,4889.$$

Kiedy po kolejnych wahaniach krzywa różnic wzniosła się na wysokość 46 po wizycie 440 osoby, częstość orłów była równa

$$p_{440} = \frac{1}{2} + \frac{46}{20 \cdot 440} \approx 0,5052.$$

Najwyższą wartość różnicy liczby orłów i reszek, równą 70, osiągnięto po wizycie 710 osoby. Oznacza to, że w tym momencie częstość orłów była równa

$$p_{710} = \frac{1}{2} + \frac{70}{20 \cdot 710} \approx 0,5049,$$

co mogłoby wskazywać na stabilizację wokół wartości 0,505. Nie wiadomo, jak dalej potoczą się losy naszej krzywej i związanej z nią częstości orłów.

Twierdzenie, zwane mocnym prawem wielkich liczb, mówi, że z prawdopodobieństwem 1 częstości orłów będą się zbliżać do rzeczywistego prawdopodobieństwa wypadnięcia orła, gdy liczba doświadczeń będzie zmierzać do nieskończoności. Ale my nie mamy ochoty czekać aż tak długo.

Pierwszy dowód mocnego prawa wielkich liczb, uzyskany w latach 1916–1917, pochodzi od włoskiego matematyka F.P. Cantellego.

Ale co możemy już teraz powiedzieć o tym prawdopodobieństwie? Nasze doświadczenie zakończyło się po wizycie 726 osób, kiedy to różnica liczby orłów i reszek wyniosła 58. Częstość orłów na zakończenie eksperymentu wyniosła

$$p_{726} = \frac{1}{2} + \frac{58}{20 \cdot 726} \approx 0,5040.$$

Prawdziwą wartość p prawdopodobieństwa wypadnięcia orła można oszacować, posługując się pojęciem przedziału ufności.

Każda seria doświadczeń kończy się wynikiem nieprzewidywalnym: liczbą orłów i liczbą otrzymanych reszek. Na podstawie tych wyników możemy skonstruować przedział (też losowy) o tej własności, że prawdopodobieństwo, iż zawiera on liczbę p , jest co najmniej równe γ . Taki przedział nazywamy przedziałem ufności na poziomie ufności γ . W przypadku przedziału, zawierającego prawdopodobieństwo p wyrzucenia orła, przedział taki ma postać

$$[p_n - d_n(\gamma), p_n + d_n(\gamma)].$$

Oznacza to, że jego środek jest równy częstości p_n , a błąd oszacowania p wyraża się wzorem

$$d_n(\gamma) = z(\gamma) \sqrt{\frac{p_n(1-p_n)}{n}}.$$

Współczynnik $z(\gamma)$, wyrażający wpływ poziomu ufności γ na błąd oszacowania parametru p , łatwo obliczyć, gdy wykonamy dużą liczbę rzutów n .

Wystarczy, że liczba pomiarów jest większa od 50.

W tym przypadku $z(\gamma)$ jest liczbą o tej własności, że zmienna losowa Z o standardowym rozkładzie normalnym spełnia warunek $|Z| \leq z(\gamma)$ z prawdopodobieństwem równym γ .

Rozkład normalny nazywamy standardowym, jeśli jego wartość oczekiwana jest równa 0, a odchylenie standardowe 1.

Zazwyczaj poziomy ufności wybiera się równe 0,95 lub 0,99, co jest równoważne przyjęciu wartości $z(\gamma) = 1,96$ lub odpowiednio $z(\gamma) = 2,58$.

Wróćmy do danych, zebranych w trakcie eksperymentu: oszacowanie prawdopodobieństwa wyrzucenia orła po wizycie 237. gościa za pomocą przedziału ufności na poziomie 0,95 miało błąd równy

$$1,96 \sqrt{\frac{0,4889(1-0,4889)}{10 \cdot 237}} \approx 0,0201.$$

Dokładność przedziału ufności zwiększała się w miarę zbierania informacji

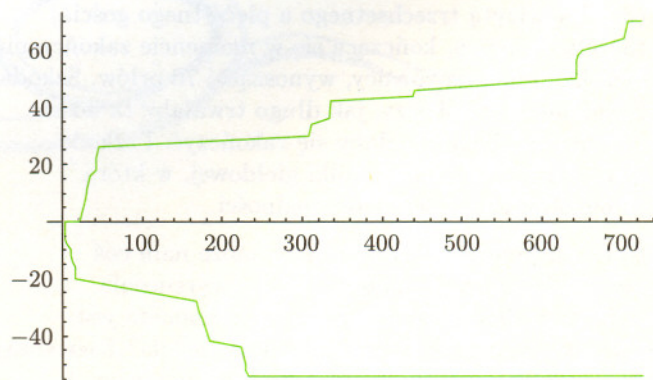
nr gościa	237	440	710	726
błąd	0,0201	0,0148	0,0116	0,0115

Uwzględniając obliczone wartości częstości, możemy już podać przedziały ufności na poziomie 0,95 dla prawdopodobieństwa wyrzucenia orła.

nr gościa	przedział ufności
237	[0,4688, 0,5090]
440	[0,4904, 0,5200]
710	[0,4933, 0,5163]
726	[0,4925, 0,5155]

W każdym przypadku wartość $p = \frac{1}{2}$ mieściła się w przedziale ufności, co oznacza, że moglibyśmy uznać na podstawie wyników tego doświadczenia, iż moneta, którą rzucano, była symetryczna. Sceptyk może jednak wybrać dowolnie inną wartość p przedziału ufności jako równie dobrą. Po zakończeniu wszystkich eksperymentów wiemy jedynie, i to nie na pewno, bo z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95, że prawdziwa wartość prawdopodobieństwa wyrzucenia orła mieści się w przedziale [0,4925, 0,5155].

Omawiając fluktuacje różnicy liczby orłów i reszek, zwróciliśmy uwagę na wartości maksymalne i minimalne tej różnicy. Maksimum obliczone po k kolejnych wizytach gości jest losową, niemającą funkcją k . Podobnie, minimum jest losową, nierosnącą funkcją k . Jak wielkie wartości mogą osiągnąć te funkcje w miarę wzrostu liczby przeprowadzonych rzutów? Oto wykres kolejnych maksimumów i minimum w zależności od numeru kolejnego uczestnika doświadczenia.





Jak widać, maksima rosną powoli, minima ustabilizowały się na poziomie wartości -54 . Interesująca byłaby odpowiedź na pytanie, czy maksima mogłyby rosnąć do nieskończoności, a minima maleć do minus nieskończoności, gdyby obserwacje trwały bardzo długo.

Rosyjski matematyk A. Chinczyn udowodnił w 1924 roku twierdzenie, dotyczące tempa wzrostu liczby sukcesów S_n w n kolejnych niezależnych próbach, w których prawdopodobieństwo sukcesu jest stałe i wynosi p . Twierdzenie to nosi nazwę *prawa iterowanego logarytmu*. Stwierdza ono, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi równość

$$\limsup \frac{S_n - np}{\sqrt{2np(1-p) \ln \ln n}} = 1.$$

Równość ta oznacza, że dla dużych n maksimum S_1, S_2, \dots, S_n jest równe w przybliżeniu, z prawdopodobieństwem 1, liczbie

$$np + \sqrt{2np(1-p) \ln \ln n}.$$

Przez symetrię łatwo zauważyć, że

$$\liminf \frac{S_n - np}{\sqrt{2np(1-p) \ln \ln n}} = -1,$$

co oznacza, że dla dużych n minimum S_1, S_2, \dots, S_n jest równe w przybliżeniu, z prawdopodobieństwem 1, liczbie

$$np - \sqrt{2np(1-p) \ln \ln n}.$$

Tłumacząc to na wartości różnic r_k liczby orłów i reszek po wizycie k -tego gościa, otrzymamy oszacowanie ważne z prawdopodobieństwem 1

$$\max \{r_1, r_2, \dots, r_k\} \approx 20k \left(p - \frac{1}{2} \right) + 4\sqrt{5kp(1-p) \ln \ln 10k},$$

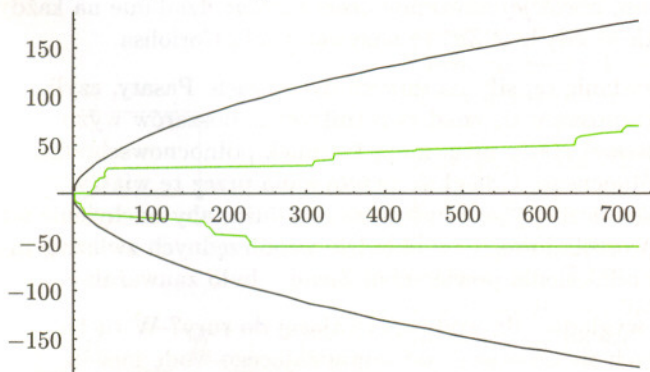
$$\min \{r_1, r_2, \dots, r_k\} \approx 20k \left(p - \frac{1}{2} \right) - 4\sqrt{5kp(1-p) \ln \ln 10k}.$$

Zakładając, że $p = \frac{1}{2}$, czyli że moneta jest symetryczna, otrzymamy oszacowanie

$$\max \{r_1, r_2, \dots, r_k\} \approx 2\sqrt{5k \ln \ln 10k},$$

$$\min \{r_1, r_2, \dots, r_k\} \approx -2\sqrt{5k \ln \ln 10k}.$$

Ze wzorów tych wynika, że maksima i minima w miarę zwiększania liczby rzutów będą zmierzały do odpowiednich nieskończoności, choć dość wolno. Porównując na tym samym wykresie rzeczywiste wartości maksymalnych i minimalnych różnic z oszacowaniem z prawa iterowanego logarytmu, zauważymy, że nasze obawy, iż różnice liczby orłów i reszek są duże, były bezpodstawne. Po wizycie ostatniego gościa mogliśmy oczekiwać nawet różnicy równej 175 (lub -175).



Zjawiska, związane z tak prostym doświadczeniem, jak rzut monetą, dostarczają nam, jak widać, materiału

do wielu niebanalnych rozważań. Pozostało nam do rozstrzygnięcia jeszcze wiele ciekawych pytań.

Obserwując różnice między liczbą orłów i reszek, zauważamy, że czasami ta różnica wynosi 0, co oznacza, iż w tych momentach zrównała się liczba orłów i reszek. Stało się tak 12 razy: podczas wizyty gości numer 1, 24, 59, 127, 152, 153, 282, 388, 462, 471, 539, 594. Średni czas powrotu do zera wyniósł około 50 gości. Od ostatniego zera odwiedziły stoisko jeszcze 132 osoby i nie widać nadziei na wyrównanie orłów i reszek. W końcu doświadczenia byliśmy świadkami hossy orłów, różnica doszła do wartości 70. Czy kiedykolwiek powrócimy do 0? Jaki jest naprawdę średni czas powrotu?

Średni czas powrotu do różnicy równej -6 też wynosi około 50 gości. Czy tak będzie zawsze? Dla dowolnej wartości różnicy? Czy, obserwując w momencie k jakąś różnicę, możemy po dostatecznie długim czasie dojść do dowolnej pomyślanej przez nas różnicy? Jeśli tak, to z jakim prawdopodobieństwem?

Mam nadzieję, że pytania, które tu postawiłem, zainteresowały niektórych Czytelników. Być może będzie okazja, aby do nich powrócić.

Wir w zlewie, czyli o pozornych efektach pozornej siły

Ewa CZUCHRY



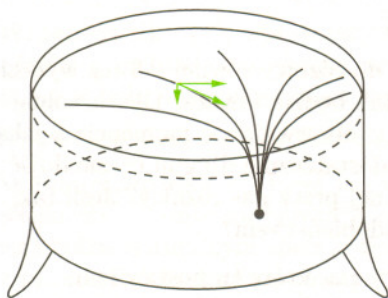
W latach sześćdziesiątych w laboratorium MIT w Bostonie (42°N) wykonano następujące doświadczenie (*Nature* 1962, 196, (4859), 1080–1081), polegające na praktycznym zrealizowaniu dobrze ugruntowanego teoretycznie faktu, że woda spływająca ze zbiornika tworzy obracający się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara spiralny lej (na półkuli północnej). W tym celu wykonano okrągły zbiornik o promieniu 2 metrów i 15 cm wysokości. W samym środku dolnej ścianki zbiornika znajdował się otwór odpływowy, z którego prowadziła 6-metrowa pionowa rura zakończona korkiem. Zbiornik ten wypełniano wodą tak, aby kręciła się ona w kierunku ruchu wskazówek zegara. Następnie odczekano 24 h na ustanie wszelkiego makroskopowego ruchu cząsteczek wody. Jej powierzchnia była w tym czasie przykryta plastikową folią, aby wyeliminować ewentualne prądy powietrza; kontrolowano też temperaturę w całym pomieszczeniu w celu uniknięcia prądów termicznych. Gdy wszystkie przygotowania zostały ukończone, z rury odpływającej wyciągnięto korek. Cały proces spływania wody trwał 20 minut. W ciągu pierwszych 12–15 nie było widocznego obrotu. Około 15. minuty pojawił się widoczny, stale narastający obrót spływającej wody w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Pod koniec doświadczenia ruch ten był już dobrze widoczny i jeden obrót trwał 3–4 sekundy. Podobne doświadczenie wykonano parę lat później w Sydney w Australii (*Nature* 1965, 207, (5001), 1084–1085).

W niektórych podręcznikach fizyki demonstruje się działanie siły Coriolisa na przykładzie wody odpływającej ze zlewu czy umywalki. Na półkuli północnej woda ta ma tworzyć wir kręcący się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a na półkuli południowej – w kierunku zgodnym. Motyw ten jest wykorzystywany w wielu filmach i powieściach sensacyjnych. Pozwala on, na przykład, porwanemu w nieznanym miejscu bohaterowi określić podczas mycia zębów, na jakiej półkuli się znajduje. Zapewne porwany mógłby równie dobrze skonstruować podręczne wahadło Foucaulta i dokonując niezauważenie przez wiele godzin żmudnych obserwacji, określić nawet swoją szerokość geograficzną (o ile oczywiście nie byłby przywiązany do łóżka). Przypuszczając, że porywacze są na tyle profesjonalni, iż nie pozwolą na wiele godzin odosobnienia ani na obserwację nocnego nieba, rzeczywiście zostaje tylko woda odpływająca z umywalki.

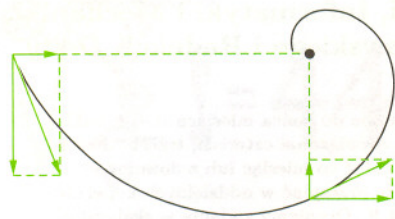
Siła Coriolisa jest to pozorna siła będąca kinematycznym efektem obrotu Ziemi wokół własnej osi. Prędkość liniowa powierzchni Ziemi jest większa na niższych szerokościach geograficznych, czyli bliżej równika, a mniejsza na wyższych szerokościach. Jeśli więc jakiś obiekt, może to być prąd morski lub powietrzny, porusza się południkowo na dłuższym dystansie, jego ruch musi kompensować zmiany prędkości liniowej powierzchni Ziemi na danej szerokości. Na półkuli północnej powoduje to odchylenie w prawo od kierunku ruchu, na półkuli południowej w lewo. Ponieważ zazwyczaj obserwujemy ruch względem ustalonego miejsca na Ziemi, obrót jej powoduje obserwowane działanie na każdy poruszający się obiekt jakiejś „siły”. „Siłę” tę nazywamy siłą Coriolisa.

Można sobie wyobrazić działanie tej siły na dużych dystansach. Pasaty, czyli wielkie masy powietrza przenoszące się znad zwrotnikowych obszarów wyżu atmosferycznego do równikowej strefy niżu, mają kierunek północnowschodni, zamiast spodziewanego północnego. Odległość przebywana przez te wiatry (23 stopnie szerokości geograficznej!) jest wystarczająco duża, aby odchylenie od ruchu południkowego – „prostoliniowego” w układzie współrzędnych związanym z nieinercyjnym układem odniesienia powierzchni Ziemi – było zauważalne.

Jak ten mechanizm może wyglądać dla wody spływającej do rury? W ruchu cząsteczek wody zbliżających się do otworu odprowadzającego wodę można wyodrębnić dwie składowe prędkości (rys. 1). Jedną z nich jest składową poziomą związaną z napływaniem wody z dalszych obszarów zbiornika w okolice odpływu. Drugą składową jest pionowe odpływanie do kanalizacji. Poza



Rys. 1



Rys. 2

najbliższym otoczeniem samego odpływu składowa pozioma prędkości jest większa od składowej pionowej. I to z tą właśnie składową (poziomą) związany jest efekt Coriolisa mający tworzyć spiralny lejek. Działanie siły Coriolisa na składową pionową powodowałoby tylko odchylenie strumienia wody na wschód. Taka siła nie tworzy jednak momentu skręcającego, a więc mogącego wywołać ruch wirowy. Z kolei składowa pozioma siły Coriolisa związana z poziomą składową prędkości powoduje odchylenie od kierunku ruchu w prawo (na półkuli północnej). Dochodzi więc dodatkowy kierunek ruchu wody, prostopadły do związanego z początkowym napływaniem bezpośrednio w kierunku lejka. Wypadkowa tych dwóch prędkości daje spiralny tor ruchu wody (rys. 2).

Taki jest model teoretyczny. W wannie albo w zlewie kuchennym prędkości i przedziały czasu są jednak znacznie mniejsze niż dla pasatów czy antypasatów, dla których efekt Coriolisa obserwujemy. Woda odpływająca do kanalizacji ma zwykle prędkość mniejszą niż metr na sekundę. To daje przyspieszenie odchylenia od kierunku ruchu związane z efektem Coriolisa rzędu 100 mikronów na sekundę do kwadratu. Załóżmy, że woda splywa wprost do zlewu. Przeciętna cząsteczka wody znajduje się w odległości dziesięciu centymetrów od odpływu. Wtedy 100 mikronów na sekundę odpowiada prędkości kątowej równej około dwustu mikroradianom na sekundę. Czyli jeden obrót na godzinę. Zmniejszając rząd wielkości o jeden, mamy jeden obrót na kilka minut. Niezależnie od często przypadkowego początkowego momentu pędu wody (powstałego z początkowych zaburzeń, nieregularnego kształtu naczynia), efekt powyższy jest raczej nieobserwowalny w warunkach domowych. Występujące dodatkowe zaburzenia są tak duże, że efekt Coriolisa sam w sobie nie wpływa zauważalnie na kierunek ruchu wody.

Dla porównania podajemy, że przyspieszenie Ziemi ze strony Słońca wynosi 6 mm/s^2 , a Słońca ze strony centrum Galaktyki 2 Å/s^2 .



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 928. Udowodnić, że dla dowolnego pokolorowania n kolorami kratek nieograniczonej kartki papieru w kratkę można znaleźć

- prostokąt, którego wierzchołki leżą w środkach kratek tego samego koloru, a boki są równoległe do linii siatki,
- l poziomych i m pionowych prostych, które przecinają się w środkach lm kratek tego samego koloru (l, m – dowolne liczby naturalne).

Rozwiązanie na str. 4

M 929. Znaleźć przykład pokolorowania dwoma kolorami kratek nieograniczonej kartki papieru w kratkę, dla którego nie znajdziemy nieskończonego zbioru prostych poziomych i nieskończonego zbioru prostych pionowych przecinających się w środkach kratek tego samego koloru.

Rozwiązanie na str. 2

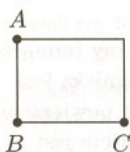
M 930. Udowodnić, że dla dowolnego pokolorowania dwoma kolorami kratek nieograniczonej kartki papieru w kratkę można znaleźć prostokątny trójkąt równoramienny, którego wierzchołki są środkami kratek tego samego koloru.

Rozwiązanie na str. 3

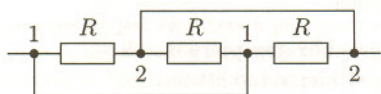
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 531. Ramka prostokątna, wykonana z przewodnika, została włączona do obwodu elektrycznego najpierw w punktach A i B (rys. 1), a następnie w punktach B i C . W pierwszym przypadku opór ramki jest równy R_1 , w drugim $R_2 = 1,6R_1$. Jaki jest stosunek oporów boku większego do mniejszego? Rozwiązanie na str. 5

Rys. 1

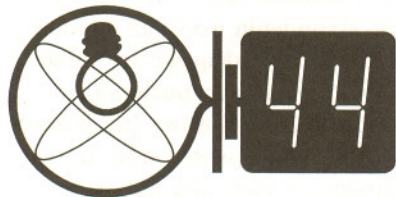


Rys. 2



F 532. Wyznaczyć opór między punktami 1 i 2 (rys. 2), jeśli każdy z trzech oporów jest równy 1Ω . Pomiąć opór przewodników łączących.

Rozwiązanie na str. 16



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 2000

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 292 (WT=3,46) i 293 (WT=2,20)
z numeru 2/2000

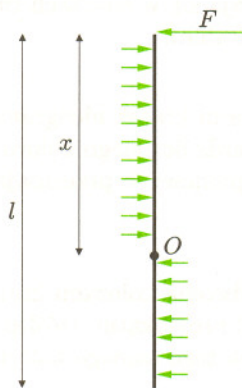
Jarosław Łazuka	- Warszawa	34,93
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	32,24
Aleksander Surma	- Myszków	31,76
Marek Wójcicki	- Szczecin	28,23
Grzegorz Miłoś	- Mielec	24,40
Tomasz Rudny	- Warszawa	22,18

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

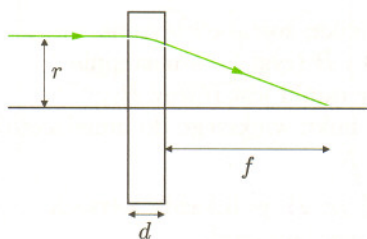
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 393 (WT=3,13) i 394 (WT=1,29)
z numeru 1/2000

Jarosław Łazuka	- Warszawa	45,48
Tomasz Wietecha	- Tarnów	43,60
Rafał Pikula	- Wrocław	42,57
Jerzy Witkowski	- Radlin	40,12
Michał Adamaszek	- Kęty	40,06
Marcin Peczański	- Warszawa	37,87
Andrzej Józwiak	- Kielce	37,72

Pan Łazuka kończy drugą
czterdziestoczworopunktową rundę.



Rys. 1



Rys. 2

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Zadania z fizyki nr 302, 303

Redaguje Jerzy B. BROJAN

302. Przewodząca kula o promieniu r składa się z dwóch zetkniętych półkul. Jaka jest wartość siły odpychającej te półkule, jeśli ładunek całej kuli wynosi Q ?

303. Dwa jednakowe naczynia o ściankach nie przewodzących ciepła są połączone rurką z zaworem (kranikiem). Początkowo w jednym naczyniu znajdował się gaz pod ciśnieniem p i w temperaturze T , a w drugim naczyniu była próżnia. Otwarto zawór, tak że ciśnienia się wyrównały. Jaka będzie wtedy wartość ciśnienia p' oraz temperatur T_1 i T_2 w naczyniach? Gaz jest doskonały, a stosunek jego ciepła właściwych wynosi $\gamma = c_p/c_v$.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/2000

Przypominamy treść zadań:

298. Na poziomym stole leży jednorodny pręt o ciężarze P , przy czym siła jego nacisku na stół jest równo rozłożona (dla każdego jednostkowego odcinka pręta jest jednakowa). Jeśli współczynnik tarcia pręta o stół wynosi f , to jaką siłą trzeba działać na koniec pręta w kierunku poziomym i prostopadłym do pręta, aby ruszyć go z miejsca?

299. Walcowa płytka szklana może mieć właściwości soczewki, jeśli współczynnik załamania szkła jest różny w różnych punktach płytki. Przyjmijmy, że współczynnik ten zależy od odległości od osi optycznej r według wzoru $n(r) = n_0 + \alpha r^\beta$ (a nie zmienia się przy przesunięciach wzdłuż osi). Jakie warunki muszą spełniać parametry w podanym wzorze, aby płytka o grubości d była soczewką o ogniskowej f ? Zakładamy, że ogniskowa jest znacznie dłuższa zarówno od grubości, jak i od średnicy płytki.

298. Ewentualny ruch pręta będzie jego obrotem wokół osi O leżącej w nieznannej odległości x od punktu przyłożenia siły (pomijamy dowód, że oś ta przechodzi przez prostą, na której leży pręt). Siły tarcia statycznego są zatem skierowane zgodnie z rysunkiem 1 (gdzie F - szukana siła zewnętrzna, l - długość pręta). W stanie równowagi ich całkowity moment względem górnego końca pręta jest równy zero, tzn.

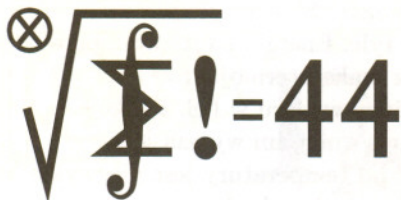
$$\int_0^x s ds = \int_x^l s ds.$$

Stąd $x = l/\sqrt{2}$, zatem łączna siła tarcia skierowana w prawo jest równa $F_+ = Pf/\sqrt{2}$, w lewo - $F_- = Pf(1 - 1/\sqrt{2})$, a szukana siła F wynosi $F = F_+ - F_- = Pf(\sqrt{2} - 1)$.

299. Warunek skupiania się wiązki promieni w ognisku jest równoważny temu, że czas przejścia każdego promienia od odległego źródła przez soczewkę do ogniska jest jednakowy (szczególnie łatwo się o tym przekonać rozpatrując kolejne powierzchnie falowe). Ponieważ w ośrodku o współczynniku załamania n czas przejścia jest proporcjonalny do iloczynu drogi przez n , więc - pomijając pionowe przesunięcia promienia w płytce - otrzymujemy wzór (zob. rys. 2)

$$n(r)d + \sqrt{f^2 + r^2} = \text{const.}$$

Biorąc pod uwagę założenie o długiej ogniskowej f , przybliżamy pierwiastek wyrażeniem $f + r^2/2f$. Po podstawieniu wzoru na $n(r)$ nietrudno stwierdzić, że parametr n_0 nie ma znaczenia, parametr β ma wartość 2, a parametr α równa się $-1/(2fd)$.



Zadania z matematyki nr 405, 406

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań:

30 XI 2000

405. Przez środek I okręgu wpisanego w nierównoramienny trójkąt ostrokątny ABC poprowadzono okręgi k_A, k_B, k_C : okrąg k_A jest mniejszym z dwóch okręgów przechodzących przez I , stycznych do prostych AB i AC ; okręgi k_B i k_C są określone analogicznie. Okręgi k_B i k_C przecinają się w punktach I, P ; okręgi k_C i k_A przecinają się w punktach I, Q ; okręgi k_A i k_B przecinają się w punktach I, R . Dowieść, że środki okręgów opisanych na trójkątach AIP, BIQ, CIR są współliniowe.

406. Czy istnieje rosnący ciąg liczb pierwszych p_1, p_2, p_3, \dots , w którym każdy wyraz (począwszy od drugiego) jest nie mniejszy od średniej arytmetycznej dwóch wyrazów z nim sąsiadujących?

Zadanie 406 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2000

Przypominamy treść zadań:

401. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych $a > 1, n > 1$ o tej własności, że każdy dzielnik pierwszy liczby $a^n - 1$ jest dzielnikiem liczby $a - 1$.

401. Niech (a, n) będzie parą liczb całkowitych o wymaganych własnościach i niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby n . Przyjmijmy, że $p^k \parallel n$ (napis ten oznacza, że n dzieli się dokładnie przez p w potęgę k ; to znaczy, dzieli się przez p^k , ale nie przez p^{k+1}). Mamy równość

$$(1) \quad a^{p^k} - 1 = (a - 1) \cdot A, \quad \text{gdzie} \quad A = a^{p^k - 1} + \dots + a + 1.$$

Weźmy dowolny dzielnik pierwszy p' liczby A . Jest to także dzielnik liczby $a^{p^k} - 1$, więc i liczby $a^n - 1$, więc i liczby $a - 1$ (warunek zadania). Zatem $a \equiv 1 \pmod{p'}$, skąd

$$0 \equiv A \equiv 1 + \dots + 1 + 1 \equiv p^k \pmod{p'},$$

czyli $p' = p$. To dowodzi, że A jest potęgą liczby p oraz że liczba $a - 1$ dzieli się przez p . Określamy wykładnik $m \geq 1$ przez warunek: $p^m \parallel a - 1$.

Przypuśćmy, że p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Wykażemy, że wówczas

$$(2) \quad p^{m+r} \parallel a^{p^r} - 1 \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Dla $r = 0$ jest to prawda. Ustalmy $r \geq 0$ i założmy indukcyjnie, że

$$a^{p^r} - 1 = up^{m+r} \quad (u - \text{liczba niepodzielna przez } p).$$

W takim razie

$$\begin{aligned} a^{p^{r+1}} - 1 &= (up^{m+r} + 1)^p - 1 = \sum_{j=1}^p \binom{p}{j} (up^{m+r})^j = \\ &= p \cdot up^{m+r} + p \cdot \frac{p-1}{2} \cdot u^2 p^{2m+2r} + \sum_{j=3}^p \binom{p}{j} (up^{m+r})^j = \\ &= up^{m+r+1} + (\text{składniki podzielne przez } p^{2m+2r+1}). \end{aligned}$$

Ta liczba dzieli się dokładnie przez p^{m+r+1} ; mamy tezę indukcyjną.

W udowodnionej własności (2) przyjmijmy $r = k$; zgodnie ze wzorem (1) otrzymujemy zależność $p^{m+k} \parallel (a - 1) \cdot A$. Skoro zaś $p^m \parallel a - 1$, dostajemy wniosek, że $p^k \parallel A$. Wcześniej stwierdziliśmy, że A jest potęgą liczby p . To by znaczyło, że $A = p^k$. Taka równość nie jest jednak możliwa, bowiem $a^{p^k} - 1 > p^k(a - 1)$ (nierówność Bernoulliego).

Sprzeczność jest rezultatem przypuszczenia, że p jest liczbą pierwszą nieparzystą. Zatem $p = 2$. A ponieważ p jest dowolnie wybranym dzielnikiem pierwszym liczby n , wynika stąd, że $n = 2^k$. Liczba A jest więc potęgą dwójki (choć niekoniecznie o wykładniku k).

402. Dwieściana kąta DAB równoległoboku $ABCD$ przecina proste BC i CD odpowiednio w punktach K i L . Wykazać, że środek okręgu opisanego na trójkącie CKL leży na okręgu opisanym na trójkącie BCD .

Wykażemy, że $k = 1$. Przypuśćmy, że $k \geq 2$, a więc $4 \mid n$. Każdy dzielnik pierwszy liczby $a^2 + 1$ jest także dzielnikiem liczby $a^4 - 1$, więc i liczby $a^n - 1$, więc i liczby $a - 1$ (warunek zadania), więc i liczby $a^2 - 1$. Wniosek: liczba $a^2 + 1$ nie ma dzielników pierwszych większych od 2; jest więc potęgą dwójki. Mamy sprzeczność, bo $a > 1$ jest liczbą nieparzystą i wobec tego $a^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$.

To dowodzi, że istotnie $k = 1$; stąd $n = 2$. Liczba A we wzorze (1) jest równa $a + 1$. Jak wykazaliśmy chwilę wcześniej, jest to potęgą dwójki.

Dostajemy odpowiedź: tylko para postaci $n = 2, a = 2^s - 1$ (s - liczba całkowita; $s > 1$) może mieć własność, o którą chodzi w zadaniu. Na odwrót, łatwo się przekonać, że każda taka para ma ową własność.

402. Oznaczmy przez O środek okręgu opisanego na trójkącie CKL , przez M - środek boku CK tego trójkąta, a przez E - punkt prostej AD wyznaczający prostą $CE \parallel AK$. Trójkąt KOC jest równoramienny ($|OK| = |OC|$). Zatem

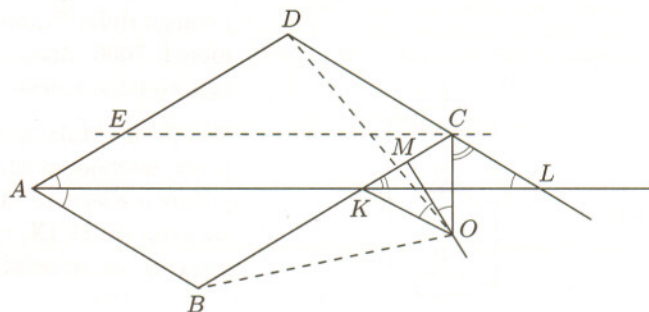
$$\begin{aligned} |\angle OKC| &= 90^\circ - |\angle MOK| = 90^\circ - |\angle MOC| = \\ &= 90^\circ - |\angle CLK| = |\angle OCL|. \end{aligned}$$

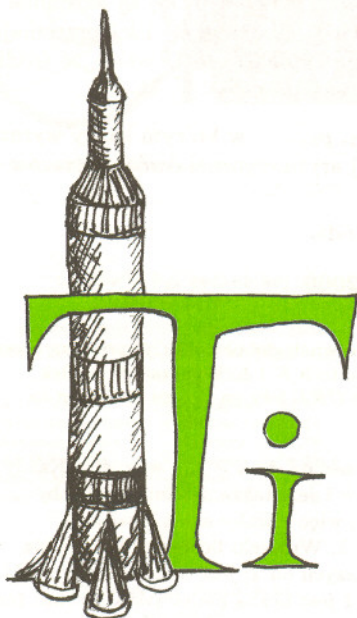
Jeśli $|AB| \geq |AD|$, to $|\angle OKB| = |\angle OKC|, |\angle OCD| = |\angle OCL|$. Jeśli zaś $|AB| \leq |AD|$ (jak na rysunku), to $|\angle OKB| = 180^\circ - |\angle OKC|, |\angle OCD| = 180^\circ - |\angle OCL|$. W każdym przypadku z uzyskanej równości $|\angle OKC| = |\angle OCL|$ wynika równość $|\angle OKB| = |\angle OCD|$.

Trójkąt ABK przystaje do trójkąta EDC ; tak więc $|KB| = |CD|$. Ponadto $|OK| = |OC|$. Wobec tego trójkąt OKB przystaje do trójkąta OCD , i w efekcie $|\angle BOK| = |\angle DOC|$. Z tej równości z kolei wynika równość $|\angle BOD| = |\angle KOC|$. Skoro wreszcie

$$|\angle KOC| = 2 \cdot |\angle MOC| = 2 \cdot |\angle CLK| = |\angle BCD|,$$

zatem, ostatecznie, $|\angle BOD| = |\angle BCD|$. Stąd wynika, że punkt O leży na okręgu wyznaczonym przez punkty B, C, D .





Teoria budowy wewnętrznej gwiazd dowodzi, że nasze Słońce żyje już w przybliżeniu 5 mld lat i pożyje jeszcze drugie tyle. Energia emitowana przez Słońce i wszystkie normalne gwiazdy pochodzi z reakcji termojądrowych toczących się w ich wnętrzach, głównie z przemiany wodoru w hel. Reakcje te ze zrozumiałych powodów zachodzą tym intensywniej, im wyższa jest temperatura, okazuje się jednak, że ta zależność od temperatury jest niezwykle silna. I tak wydajność cyklu protonowego (czyli reakcji zachodzącej w czystym wodorze) zależy od temperatury w potęgę 4 – w każdym razie w warunkach panujących w centrum Słońca. Jeżeli paliwem gwiazdy jest wodór z domieszkami pełniącymi rolę katalizatorów (są nimi węgiel, azot i tlen), to zależność wydajności dominującego wtedy cyklu CNO od temperatury jest jeszcze silniejsza: wykładnik potęgi jest wówczas dwucyfrowy. Ponieważ gwiazda masywniejsza pod własnym ciężarem może materię bardziej ścisnąć i bardziej ogrzać, naturalną konsekwencją tego jest, że gwiazdy masywne świecą silniej, ale też – uwaga! – żyją krócej, choć mają większe zapasy paliwa niż gwiazdy o małej masie.

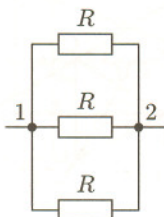
Gwiazda-kandydatka na supernową, czyli mająca masę 10 mas Słońca, żyje kosztem wodoru przez około 20 mln lat, Słońce (które supernową nie będzie) – jak już wspomnieliśmy – pożyje 10 mld lat, a gwiazda o masie np. 0,1 masy Słońca? Obiekt o takiej masie jest niemal na granicy „bycia gwiazdą”, teoria bowiem przewiduje, że przy masie 0,08 masy Słońca i mniejszej kula wodoru nie jest już w stanie pod własnym ciężarem rozgrzać się na tyle, by w jej centrum ruszyły reakcje termojądrowe. Obliczenia modelowe pokazują, że gwiazda o masie 0,1 masy Słońca formuje się już przez ponad miliard lat, a gdy wreszcie zacznie świecić kosztem wodoru, to minie niemal 6 bilionów lat, zanim go wyczerpie. Przyczyny tego są dwie. Po pierwsze, w centrum tak mało masywnej gwiazdy panuje temperatura zaledwie 4 mln kelwinów, a więc paliwo zużywane jest bardzo powoli – gwiazda świeci wtedy z mocą rzędu 1/1000 mocy Słońca. Po drugie, w stosunkowo niskiej temperaturze cała materia gwiazdy jest mało przezroczysta, przez co produkowana w centrum energia, nie mogąc się stamtąd wydostać jako promieniowanie, wymusza konwekcję materii w całej objętości gwiazdy. W ten sposób do centralnego reaktora dostaje się wodór pochodzący nawet z powierzchni gwiazdy, inaczej mówiąc – gwiazda jest stale jednorodna chemicznie i zużywa paliwo bardzo dokładnie. W rezultacie może żyć dłużej, niż wynosi obecny wiek Wszechświata. Pod koniec tak niesłychanie długiego życia gwiazda taka staje się helowym białym karłem i kontynuuje świecenie już tylko kosztem stygnięcia.

Tomasz KWAST

Wrzesień



Rozwiązanie zadania F 532. Potencjały punktów oznaczonych jednakowymi cyframi są równe. Dlatego dany schemat przedstawiamy tak, jak na rysunku. Wtedy otrzymujemy $R = 1/3 \Omega$.



Oprócz pierwszej reprezentantki cefeid, o których pisaliśmy miesiąc temu, delty Cefeusza, można by na wrześnieowym wieczornym niebie zobaczyć w Lutni reprezentantkę innego typu cefeid, mianowicie gwiazdę RR Lyrae. Do tego potrzebna jest co najmniej lornetka, gdyż gwiazda ta ma jasność zmieniającą się w granicach od 7,1 do 8,1 mag. Gwiazdy przedstawione miesiąc temu to tzw. cefeidy klasyczne, jasne olbrzymy, których okresy zmian blasku liczą dziesiątki dni. Gwiazdy typu RR Lyrae to też gwiazdy pulsujące, nieco słabsze, choć również jaśniejsze od Słońca, i o okresach zmian jasności nie przekraczających jednego dnia. Stanowią najliczniejszą grupę gwiazd pulsujących, znamy ich niemal 7000. Znajdują się we wszystkich gromadach kulistych, a pojedyncze egzemplarze równomiernie otaczają całą Galaktykę.

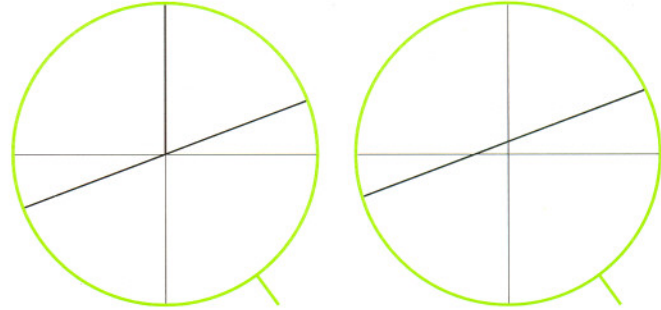
Wenus znajdującą się w Pannie widać po zachodzie Słońca, Marsa zaś w Lwie przed wschodem Słońca. Jowisz i Saturn są w Byku i obie te planety widać od późnego wieczora do rana. Pełnia Księżyca wypada 13 IX, nów 27 IX. Jesień zaczyna się 22 IX, czyli odtąd noce są już dłuższe niż dni. Księżyc żadnej jasnej gwiazdy we wrześniu nie zakryje.

T.K.

Przyjrzyjmy się dokładnie pozornemu podziałowi tego prostokąta na takie same cztery części, biorąc pod lupę punkt, w którym powinny spotkać się zgodnie trzy z tych części (rys. 2).



Rys. 2



Rys. 3

Rys. 4

Dwa górne wielokąty mają wierzchołki dokładnie w punkcie kratowym (rys. 3), podczas gdy przeciwprostokątna dolnego trójkąta przechodzi nieco powyżej (dokładnie $8 \cdot \frac{5}{13} - 3 = \frac{1}{13}$ jednostki) tego punktu (rys. 4).

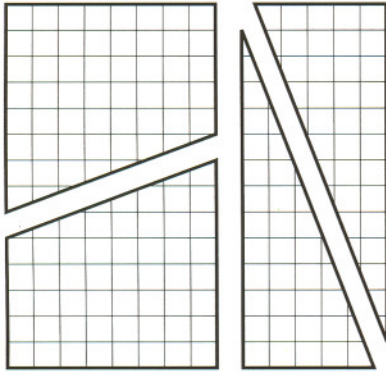
JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (22')

Wyjaśnienie oszustwa (22):

Pole kwadratu jest równe polu prostokąta tylko w przybliżeniu, bo i składanie prostokąta z części jest tylko przybliżone.

Kwadrat został podzielony na dwa trapezy i dwa trójkąty prostokątne (rys. 1).



Rys. 1

Jednak z tych części nie da się dokładnie złożyć prostokąta o bokach 8 i 21.

GRY (16)

Czy grą w rozważanym przez nas sensie jest gra w KRĘGLE? Wyjaśnijmy najpierw, na czym polega ta gra. Na początku gry ustawia się w rzędzie kręgle (rys. 5). Zawodnicy na przemian toczą kulę w kierunku kręgli. Przegrywa ten, kto nie strąci w swoim ruchu żadnego kręglu.

Trzeba przy tym dodać, że kula może strącić dwa sąsiednie kręgle (rys. 6), jak również może strącić tylko jeden kręgiel (rys. 7). Nie jest możliwe strącenie w jednym rzucie dwóch kręgli, które nie sąsiadują ze sobą.

Nasi gracze doszli do takiej wprawy, że precyzyjne wykonanie rzutu nigdy nie stwarza problemu. Gracz strąca te i tylko te kręgle, które zamierza. Nikt nie przegrywa dlatego, że nie trafił w kręgiel. Przegrywa się tylko dlatego, że kręgle się skończyły i nie ma już czego strącić.

Bez trudu spostrzeżesz, Drogi Czytelniku, że tak opisana rozgrywka jest grą w przyjętym przez nas sensie. Jej analizę przeprowadzimy za miesiąc.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl

delcia

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \nu \cdot s$ $\pi=3,141592\dots$
POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY



Dodatek Olimpijski

Zadania I stopnia

Olimpiady Fizycznej, Matematycznej i Astronomicznej 2000/2001

XLIV OLIMPIADA ASTRONOMICZNA 2000/2001

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA (pierwsza seria)

1. Dochodzące do powierzchni Ziemi promieniowanie słoneczne wskutek zjawiska ekstynkcji ulega pochłanianiu i rozpraszaniu, powodując, że Słońce świeci nieco słabiej. Zmianę jasności Słońca (Δm), obserwowanego na wysokości h nad horyzontem, można obliczyć z przybliżonego wzoru

$$\Delta m = \frac{0.2}{\cos(90^\circ - h)}$$

Znajdź szerokość geograficzną, dla której w dniu równonocy w południe ilość padającego promieniowania słonecznego (na jednostkę powierzchni w jednostce czasu) jest równa promieniowaniu padającemu na powierzchnię Marsa w pobliżu równika, gdy Słońce świeci tam w zenicie. W atmosferze Marsa efekt ekstynkcji można pominąć.

2. W momencie, gdy kometa była odległa o 0,6 AU od Słońca i o 0,8 AU od Ziemi, jej odsłoneczny warkocz osiągnął długość kątową 2° . Jaka była wtedy kątowa odległość komety od Słońca (elongacja) i liniowa długość jej warkocza? Załóż, że orbita Ziemi jest okręgiem.

3. W prostokątnym układzie współrzędnych, w którym na osi pionowej zaznaczamy godziny, a na osi poziomej – datę, przedstaw wykresy:
– wschodu i zachodu Słońca,
– wschodu i zachodu Księżyca,
– wschodu i zachodu komety C/1999 S4 (LINEAR) w lipcu i sierpniu 2000 r. w Warszawie. Omów warunki widoczności komety w tych dwóch miesiącach. Dane dotyczące Słońca i Księżyca znajdź samodzielnie.

ZADANIA OBSERWACYJNE

1. Zaprojektuj i wykonaj prosty przyrząd do pomiarów obserwowanej średnicy Księżyca. Wykonanym instrumentem dokonaj serii obserwacji w ciągu miesiąca i wyznacz, o ile zmieniła się zaobserwowana średnica Księżyca.

2. Przeprowadź obserwacje plam na Słońcu na obrazie wytworzonym przez teleskop na ekranie. Wyznacz średnią wartość liczby Wolfa z przeprowadzonych przez siebie obserwacji.

Uwaga!!!

Zachowaj szczególną ostrożność przy kierowaniu przyrządu na Słońce. Pamiętaj, że nie wolno patrzeć przez przyrząd bezpośrednio na Słońce, bo grozi to uszkodzeniem wzroku!

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji prowadzonych w latach 1999–2000, a w szczególności obserwacji pozycji, jasności i kształtu komety C/1999 S4 (LINEAR).

Efemerydy komety podaje tabelka:

data	rektascensja 2000	deklinaacja 2000
30 06 2000	02 ^h 34,41 ^m	+42°53, 2'
5 07 2000	02 ^h 49,68 ^m	+47°06, 6'
10 07 2000	03 ^h 20,66 ^m	+53°17, 0'
15 07 2000	04 ^h 41,52 ^m	+61°44, 0'
20 07 2000	08 ^h 16,06 ^m	+63°07, 9'
25 07 2000	11 ^h 01,01 ^m	+41°05, 3'
30 07 2000	11 ^h 56,45 ^m	+18°36, 3'
4 08 2000	12 ^h 18,82 ^m	+05°13, 2'
9 08 2000	12 ^h 29,65 ^m	−02°31, 4'
14 08 2000	12 ^h 35,50 ^m	−07°22, 0'
24 08 2000	12 ^h 41,20 ^m	−13°02, 6'
3 09 2000	12 ^h 44,17 ^m	−16°22, 6'

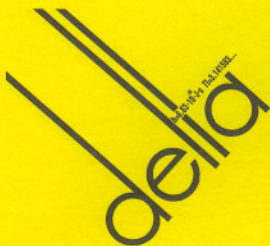
INFORMACJE REGULAMINOWE

- Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół średnich.
- Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne. Rozwiązywanie zadań zawodów II stopnia i III stopnia odbywa się w warunkach kontrolowanej samodzielności.
- W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do **16 października 2000 r.**, rozwiązania 3 zadań, dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.
- Uczniowie, którzy przyślą rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań.
- Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, do **20 listopada br.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.
- W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).
- Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem: **KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY ASTRONOMICZNEJ, Planetarium Śląskie, 41-500 Chorzów, skr. poczt. 10**, w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

- Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.
- Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A-4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: rok i miejsce urodzenia, pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi).
- O uprawnieniach laureatów i finalistów decyduje senat wyższych uczelni. Wśród nagród dla najlepszych znajdują się teleskopy.

ZALECANA LITERATURA

- obowiązujące w szkołach średnich podręczniki do przedmiotów ścisłych;
- H. Chrupała, M.T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych; Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach);
- H. Chrupała, J. Kreiner, M. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*;
- J.M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*;
- J. Mietelski, *Astronomia w geografii*;
- E. Rybka, *Astronomia ogólna*;
- David H. Levy, *NIEBO – Poradnik użytkownika*;
- D.L. Moché, *Astronomia – Przewodnik po Wszechświecie*;
- Słownik szkolny – Astronomia* – praca zbiorowa;
- atlas nieba; obrotowa mapa nieba;
- czasopisma: *Urania – Postępy Astronomii, Wiedza i Życie, Świat Nauki, Delta, Fizyka w Szkole*.



I SERIA

1. Rozwiązać w liczbach całkowitych równanie

$$x^{2000} + 2000^{1999} = x^{1999} + 2000^{2000}.$$

2. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC . Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P . Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i AC , przy czym czworokąt $CLPK$ jest równoległobokiem. Dowieść, że

$$\frac{AE}{EL} = \frac{BD}{DK}.$$

3. Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne $n \geq 2$, że nierówność

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \leq \frac{n-1}{n} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x_1, x_2, \dots, x_n .

4. Rozstrzygnąć, czy w sześciennym pudełku o krawędzi 4 można umieścić 65 kul o średnicy 1.

II SERIA

5. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ i dowolnej liczby pierwszej p liczba

$$n^{p^p} + p^p$$

jest złożona.

6. Liczby całkowite a, b, x, y spełniają równanie

$$a + b\sqrt{2001} = (x + y\sqrt{2001})^{2000}.$$

Udowodnić, że $a \geq 44b$.

7. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A . Punkty D i E leżą na przeciwprostokątnej BC , przy czym $\angle DAE = 45^\circ$. Okrąg opisany na trójkącie ADE przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach P i Q . Dowieść, że $BP + CQ = PQ$.

8. Rozstrzygnąć, dla jakich par liczb naturalnych m i n prostokąt o bokach długości m i n można pociąć na części przystające do figury na rysunku. Każdy z czterech kwadratów na rysunku ma bok długości 1.



III SERIA

9. Dowieść, że wśród dowolnych 12 kolejnych liczb całkowitych dodatnich istnieje liczba nie będąca sumą 10 czwartych potęg liczb całkowitych.

10. Dowieść, że wewnątrz dowolnego trójkąta ABC istnieje punkt P o następującej własności: Każda prosta przechodząca przez punkt P dzieli obwód trójkąta ABC w takim samym stosunku, w jakim dzieli ona jego pole.

11. Układ liczb całkowitych dodatnich c_1, c_2, \dots, c_n nazwiemy dopuszczalnym, gdy za pomocą wagi szalkowej i dwóch kompletów odważników o ciężarach

c_1, c_2, \dots, c_n można zważyć dowolny przedmiot o ciężarze będącym liczbą naturalną nie przekraczającą $2(c_1 + c_2 + \dots + c_n)$. Dla każdej liczby n wyznaczyć maksymalną sumę n liczb tworzących układ dopuszczalny.

Uwaga: Odważniki można kłaść na obie szalki wagi.

12. Rozpatrujemy ciągi liczb całkowitych $x_0, x_1, \dots, x_{2000}$ spełniające warunki

$$x_0 = 0 \quad \text{i} \quad |x_n| = |x_{n-1} + 1| \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots, 2000.$$

Znaleźć najmniejszą wartość wyrażenia

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_{2000}|.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

10 października 2000 r. – I seria

10 listopada 2000 r. – II seria

11 grudnia 2000 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych oraz bieżące informacje można znaleźć w internecie pod adresem:

www.impan.gov.pl/~olimp/

ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Dla województwa pomorskiego:

KOOM – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa śląskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

Dla województwa małopolskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa lubelskiego i podkarpackiego:

KOOM – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20-031 Lublin.

Dla województwa łódzkiego i świętokrzyskiego:

KOOM – Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa wielkopolskiego:

KOOM – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Matejki 48/49, 60-769 Poznań.

Dla województwa lubuskiego i zachodniopomorskiego:

KOOM, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa kujawsko-pomorskiego i warmińsko-mazurskiego:

KOOM – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa mazowieckiego i podlaskiego:

KOOM – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa dolnośląskiego i opolskiego:

KOOM – Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY FIZYCZNEJ

KOOF w Białymstoku, ul. Lipowa 41, 15-224 Białystok (woj. podlaskie, powiaty: kętrzyński, mławowski, piski, giżycki, olecko-gołdapski, ełcki).

KOOF w Częstochowie, Al. Armii Krajowej 13/15, 42-201 Częstochowa (woj. opolskie, woj. świętokrzyskie, powiaty: częstochowski, kłobucki, lubliniecki, myszkowski).

KOOF w Gdańsku, ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk-Wrzeszcz (woj. pomorskie, woj. warmińsko-mazurskie z wyłączeniem powiatów: kętrzyńskiego, mławowskiego, piskiego, giżyckiego, olecko-gołdapskiego, ełckiego).

KOOF w Gliwicach, ul. Bolesława Krzywoustego 2, 44-100 Gliwice (woj. katowickie z wyłączeniem powiatów: częstochowskiego, kłobuckiego, lublinieckiego, myszkowskiego).

KOOF w Krakowie, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków (woj. małopolskie).

KOOF w Lublinie, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, 20-031 Lublin (woj. lubelskie).

KOOF w Łodzi, ul. Pomorska 149, 90-236 Łódź (woj. łódzkie).

KOOF w Poznaniu, ul. Umultowska 85, 60-780 Poznań (woj. wielkopolskie).

KOOF w Rzeszowie, ul. Reytana 16A, 35-310 Rzeszów (woj. podkarpackie).

KOOF w Szczecinie, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin (woj. zachodniopomorskie, woj. lubuskie).

KOOF w Toruniu, ul. Grudziądzka 5, 87-100 Toruń (woj. kujawsko-pomorskie).

KOOF w Warszawie, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa (woj. mazowieckie).

KOOF we Wrocławiu, pl. M. Borna 9, 50-205 Wrocław (woj. wrocławskie).

L OLIMPIADA FIZYCZNA

– ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej w terminach: część I – do **25 października br.**, część II – do **15 listopada br.** O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć w broszurze i na afiszu rozesłanych do szkół średnich.

CZĘŚĆ I (termin wysyłania rozwiązań – 25 października 2000 r.)

Podaj lub wybierz i krótko uzasadnij prawidłową odpowiedź (za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty).

Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres domowy autora pracy, a także nazwę i adres szkoły, klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.

1. Samochód w chwili rozpoczęcia hamowania jechał z prędkością 90 km/h. Po osiągnięciu pewnej prędkości minimalnej samochód zaczął przyspieszać aż do ponownego osiągnięcia prędkości 90 km/h. Od chwili rozpoczęcia hamowania do chwili ponownego osiągnięcia prędkości 90 km/h upłynęła 1 minuta, zaś samochód przebył 1 kilometr drogi. Oblicz najmniejszą prędkość samochodu, wiedząc, że ruch samochodu był początkowo jednostajnie opóźniony, a następnie jednostajnie przyspieszony.

2. Silnik raketowy zużywa tyle samo paliwa w ciągu jednej sekundy podczas próby w fabryce, kiedy jego przemieszczenie, a więc i praca związana z przesunięciem, są równe zeru, jak i podczas lotu rakiety, kiedy praca zużyta na wyniesienie rakiety jest duża. Wyjaśnij ten paradoks.

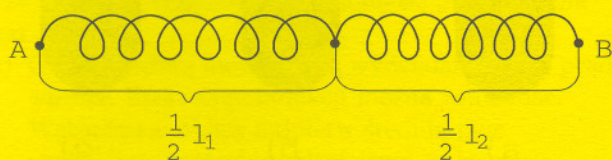
3. Wózek z chronografem (urządzenie zostawiające w równych odstępach czasu ślady wzdłuż przebywanej drogi) pchnięto w stronę takiego samego wózka stojącego na linii ruchu. Drugi wózek był obciążony dodatkowym ciężarkiem o masie 0,5 kg. Wózki połączyły się i dalej toczyły się razem. Na taśmie ułożonej wzdłuż trasy pierwszego wózka chronograf pozostawił ślady, jak na rysunku 1.

Wyznacz masę nieobciążonego wózka.



Rys. 1

4. Dwie sprężyny o długościach l_1 , l_2 i współczynnikach sprężystości k_1 , k_2 przecięto



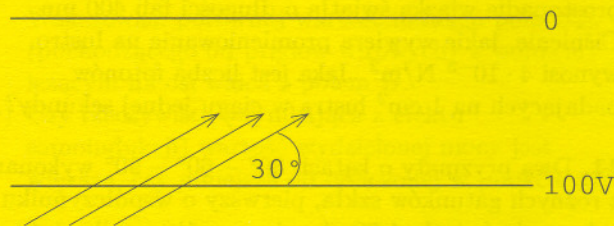
Rys. 2

w połowie ich długości. Połówki dwóch różnych sprężyn połączono końcami, w wyniku czego powstał układ przedstawiony na rysunku 2. Współczynnik sprężystości tego układu jest równy

- a) $\max(k_1, k_2)$,
- b) $\sqrt{k_1 k_2}$,
- c) $(1/2)(k_1 + k_2)$,
- d) $2k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$.

5. Jak wysoko należy się wznieść nad Biegunem Północnym, aby zobaczyć satelitę geostacjonarnego?

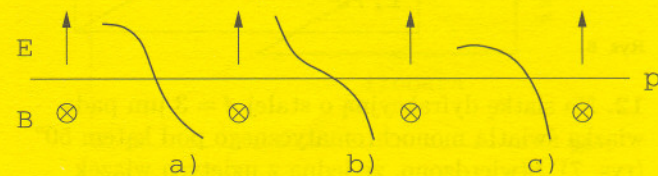
6. Wiązka elektronów przechodzi przez dodatnio naładowaną okładkę kondensatora płaskiego pod kątem 30° (rys. 3). Napięcie między okładkami wynosi 100 V. Z jaką minimalną wartością energii kinetycznej elektrony osiągną drugą okładkę?



Rys. 3

7. Na rysunku 4 pokazane są tory cząstek naładowanych elektrycznie. Tory przecinają płaszczyznę p , która oddziela obszar jednorodnego pola magnetycznego \vec{B} od prostopadłego do niego, jednorodnego pola elektrycznego \vec{E} .

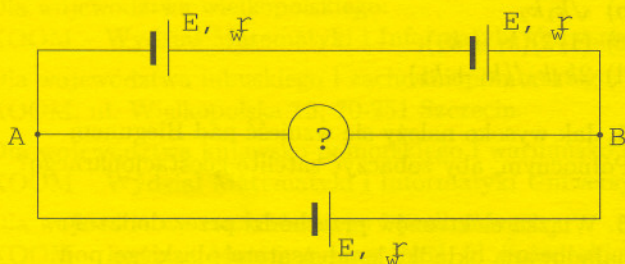
Określ znaki ładunków cząstek poruszających się po tych torach.



Rys. 4

8. Promienie trzech koncentrycznych, metalowych sfer wynoszą odpowiednio $r_1 = 1$ cm, $r_2 = 10$ cm i $r_3 = 20$ cm. Na sferach umieszczone są ładunki równe odpowiednio: $Q_1 = 2 \cdot 10^{-8}$ C, $Q_2 = Q_3 = -Q_1$. Oblicz wartość potencjału na powierzchni pierwszej sfery przy założeniu, że w nieskończoności potencjał jest równy zero.

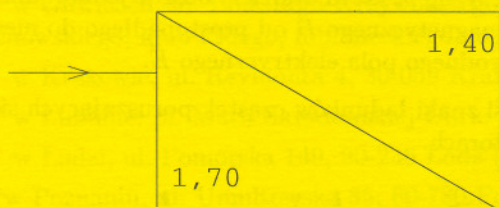
9. Układ elektryczny składa się z trzech identycznych baterii (rys. 5). Co wskazałby doskonały woltomierz, a co doskonały amperomierz, jeżeli włączono by go w układ między punktami A i B?



Rys. 5

10. Na doskonale odbijające zwierciadło płaskie pada prostopadle wiązka światła o długości fali 400 nm. Ciśnienie, jakie wywiera promieniowanie na lustro, wynosi $4 \cdot 10^{-8}$ N/m². Jaka jest liczba fotonów padających na 1 cm² lustra w ciągu jednej sekundy?

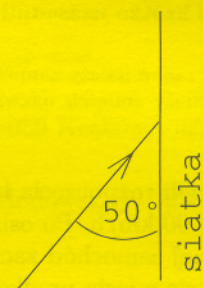
11. Dwa pryzmaty o kątach $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ wykonano z różnych gatunków szkła, pierwszy o współczynniku załamania światła 1,70, drugi o współczynniku 1,40. Pryzmaty skleiono ze sobą jak na rysunku 6. Na pierwszy pryzmat pada prostopadle do powierzchni promień światła. Jaki jest kąt padania promienia wchodzącego do drugiego pryzmatu?



Rys. 6

12. Na siatkę dyfrakcyjną o stałej $d = 3$ μ m pada wiązka światła monochromatycznego pod kątem 50° (rys. 7). Stwierdzono, że jedna z ugiętych wiązek pobięła dalej prostopadle do płaszczyzny siatki.

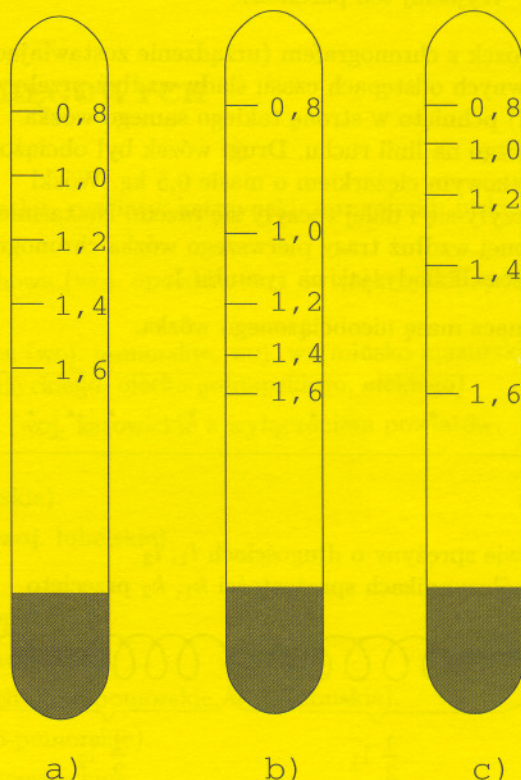
Podaj dwie przykładowe wartości długości fali, dla których mogło zajść takie ugięcie.



Rys. 7

13. Do pomiaru gęstości cieczy używa się areometrów. Przyrząd taki ma postać cienkiej rurki obciążonej na jednym końcu, a posługujemy się nim, pozwalając mu pływać swobodnie w badanej cieczy. W zależności od gęstości cieczy areometr zanurza się głębiej lub płycej. Na rurce jest zamieszczona skala wycechowana w wartościach gęstości cieczy w zależności od głębokości zanurzenia do danego poziomu.

Który z poniższych rysunków najlepiej opisuje wygląd tej skali, jeżeli przekrój rurki jest stały?



Rys. 8

14. W osolonej wodzie jajko pływa zanurzone w 95% swojej objętości. Jeżeli umieścimy nad osoloną wodą warstwę czystej wody, wtedy połowa objętości jajka pływa w wodzie osolonej, a połowa w czystej wodzie. Jaka jest gęstość jajka, a jaka osolonej wody?

15. W dwóch spośród trzech jednakowych pomieszczeń wybito w ścianach otwory na zewnątrz i umieszczono w nich lodówki bez drzwiczek, w pierwszym – stroną

chłodzącą na zewnątrz pomieszczenia, w drugim – stroną chłodzącą skierowaną do wnętrza pomieszczenia. W trzecim pomieszczeniu znajduje się zwykły grzejnik elektryczny. Lodówki i grzejnik pobierają jednakową moc z sieci. W którym pomieszczeniu po długim czasie będzie najcieplej, a w którym najzimniej (ewentualnie w których pomieszczeniach będzie jednakowa temperatura)? Otwór w ścianie jest dobrze uszczelniony tak, że nie ma przewiewu obok lodówki.

CZĘŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań – 15 listopada 2000 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres domowy autora pracy, a także nazwę i adres szkoły, klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

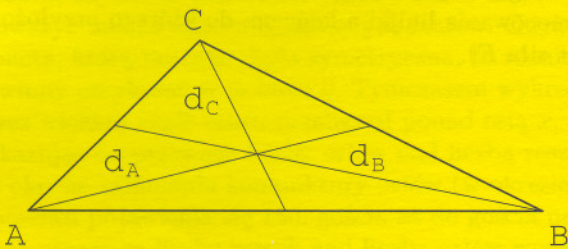
ZADANIA TEORETYCZNE

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

T1. Udowodnij, że moment bezwładności jednorodnego trójkąta względem osi do niego prostopadłej i przechodzącej przez środek masy wyraża się wzorem

$$I_0 = (1/27)m(d_A^2 + d_B^2 + d_C^2),$$

gdzie d_A , d_B i d_C oznaczają długości środkowych tego trójkąta (rys. 1), a m jego masę.



Rys. 1

T2. W jednorodnym polu magnetycznym $B = B_0 \sin \omega t$ znajduje się metalowy walec o promieniu r i długości l ($l \gg r$). Oś walca jest równoległa do kierunku pola B . Opór właściwy metalu jest równy ρ . Względna przenikalność magnetyczna jest równa 1.

a) Oblicz średnią moc cieplną wydziałaną przez prądy wirowe. Efekt samoindukcji można zaniedbać. Wskazówka: oblicz najpierw średnią moc wydziałaną w cienkim pierścieniu walcowym zawartym między promieniami x a $x + dx$,

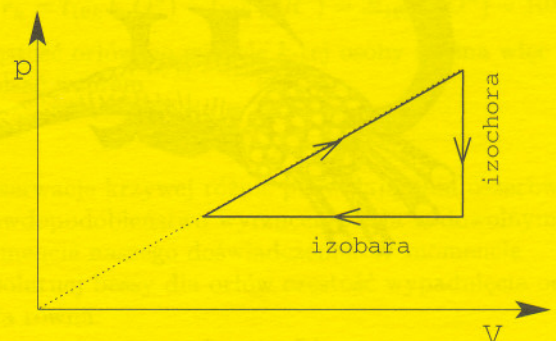
a następnie wykonaj sumowanie (całkowanie) po wszystkich pierścieniach.

b) Jaki warunek muszą spełniać parametry walca aby założenie o pominięciu efektów samoindukcji było prawdziwe?

Wskazówka: porównaj wartość indukcji pola B_{wir} (pochodzącego od prądów wirowych) w punkcie leżącym na osi walca z polem B .

c) Czy rzeczywista (wynikająca z efektu samoindukcji) wartość wydzielonej mocy jest większa, czy mniejsza od obliczonej w punkcie a)?

T3. Jednoatomowy gaz doskonały poddano cyklicznej przemianie, którą przedstawia wykres 2. Wiedząc, że stosunek temperatury najwyższej do najniższej (w skali bezwzględnej), jaką osiąga gaz podczas przemiany, wynosi 16, oblicz sprawność tego cyklu.



Rys. 2

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

D1. Masz do dyspozycji:

- standardowe ogniwo typu R6,
- amperomierz prądu stałego o zakresie do 2 A,
- woltomierz o zakresie do 2 V,
- oporniki o znanej oporności,
- zegarek z sekundnikiem,
- kabelki połączeniowe, krokodyłki.

A. Wyznacz całkowity ładunek elektryczny, który przepłynie przez dane ogniwo do momentu całkowitego jego rozładowania. Porównaj go z tak rozumianym całkowitym ładunkiem elektrycznym akumulatora samochodowego 12 V/45 Ah.

B. Zaplanuj i wykonaj dodatkowe pomiary związane z ogniwem typu R6 tak, aby przedyskutować możliwość zastosowania układu ogniw R6 (nowych) zamiast akumulatora w samochodzie osobowym. Ilu ogniw R6 należałoby użyć i jak je połączyć, aby otrzymać źródło prądu stałego równoważne akumulatorowi?

Uwaga 1. Jako oporników możesz użyć oporników drutowych lub ceramicznych o oporności w granicach 1–2 Ω i opuszczalnej mocy strat co najmniej 1 W. Zamiast opornika możesz użyć opornicy drutowej ze szkolnej pracowni fizycznej.

Uwaga 2. Nie używaj do pomiarów ogniwa alkalicznego.

D2. Mając do dyspozycji:

- naczynie o znanej pojemności,
- zegarek z sekundnikiem lub stoper,
- suwmiarkę,
- linijkę, papier milimetrowy,
- kran z wodą,

wyznacz wartość przyspieszenia ziemskiego na podstawie kształtu strumienia wody wypływającej z kranu.

Przedstaw wyniki na wykresie umożliwiającym wyznaczenie przyspieszenia ziemskiego na podstawie dopasowania prostej do wielu punktów doświadczalnych. Korzystając z wykresu oszacuj błąd pomiarowy. Zaproponuj metodę jego minimalizacji.

D3. Masz do dyspozycji:

- linijkę plastikową,
- uchwyt umożliwiający zamocowanie linijki (np. dwa ciężkie kawałki metalu),
- papier milimetrowy,
- nitkę,
- kawałki plasteliny lub inne ciężarki o znanej masie.

Sprawdź, że wartość odchylenia końca linijki pod wpływem przyłożonej do niego siły F jest proporcjonalna do wartości siły: $\Delta x = \alpha F$.

Wyznacz zależność współczynnika proporcjonalności α od długości linijki (mierzonej między punktem zamocowania linijki a końcem, do którego przyłożona jest siła F).

