

SPIS TREŚCI NUMERU 8(315)

Łańcuchy Markowa a ryzyko kredytowe <i>Wojciech Kuryłek</i>	str. 1
Zadania <i>Tomasz Bulik</i>	str. 3
GRB 990123 <i>Tomasz Bulik</i>	str. 4
Tryptyk o liczbach pierwszych <i>Witold Bednarek</i>	str. 6
Mała Delta <i>Grzegorz Łukaszewicz</i>	str. 8
Punkty wymierne na krzywych płaskich <i>Grzegorz Łukaszewicz</i>	str.10
Ta przyroda jest niegłupia... <i>Krzysztof Rejmer</i>	str.11
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Sierpień	str.16
Gammalimatias	str.17
W następnym numerze: Komputery kwantowe	
Okładki i ilustracje <i>Anna Ludwicka</i>	
Rysunki techniczne <i>Marcin Adamski</i>	

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichocki
 – wiceprzewodniczący
 Krzysztof Ciesielski
 Jan A. Gaj
 Piotr Goldstein
 Tomasz Hofmokl
 Andrzej Hrynkiewicz
 Wiesław A. Kamiński
 Marta Kicińska-Habior
 Krzysztof Maślanka
 Janusz Matkowski
 Andrzej Mąkowski
 Zdzisław Pogoda
 Michał Różyczka
 Konrad Rudnicki
 Grzegorz Sitarski
 Andrzej Woszczyk
 Eligiusz Złotkiewicz
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol
 Krzysztof Biesaga
 Ewa Czuchry
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nac.
 Tomasz Kwast
 Anna Ludwicka
 Anna Rudnik
 Witold Sadowski
 Joanna Udalska
 Anna Wojtyra
 Piotr Zalewski – z-ca red. nac.
 Adres Redakcji:
 ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
 tel. 853-59-61
 BARTOL@MIMUW.EDU.PL
 Skład systemem TeX wykonała Redakcja.
 Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
 w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2000 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.
 W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2000 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.
Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.
 Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na IV kwartał 2000 r. wynosi 9 zł.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
- Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
- Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę		
5 XII	20 XI	na I kwartał	roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,	
5 VI	20 V	na III kwartał,	
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.	
- Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numerary archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Wojciech KURYŁEK

Istnieje oczywista asymetria informacyjna między bankami a kredytobiorcami. Bank udzielając kredytu ponosi ryzyko, gdyż nie ma pewności w momencie podpisania umowy, że należność zostanie w całości i terminowo spłacona.

Banki, radząc sobie z tym problemem, zaczęły na bazie dostępnych im informacji klasyfikować kredytobiorców ze względu na prawdopodobieństwo ich potencjalnego niewywiązania się ze zobowiązań.

Możemy zatem przyjąć, że każdemu kredytobiorcy bank przypisuje pewną ocenę (numer ratingowy), będącą liczbą ze zbioru $\{1, \dots, K\}$. Im wyższy numer ratingowy, tym większe prawdopodobieństwo niewywiązania się kredytobiorcy z umowy, a najwyższa K -ta klasa oznacza niewypłacalność kredytobiorcy. Załóżmy, że ocena taka przypisywana jest kredytobiorcom co kwartał. Co kwartał kredytobiorca ma więc szansę zmienić przypisany mu rating. Proces ten opisywać będziemy za pomocą tzw. jednorodnego łańcucha Markowa. Podejście takie pomoże nam w określeniu, jak będzie się zmieniał w sensie jakości kredytowej skład portfela kredytowego banku.

Łańcuch Markowa to ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=0,1,\dots}$, w którym stan w danej chwili zależy jedynie od stanu w chwili poprzedniej.

W sposób bardziej formalny możemy zapisać, że dla $n = 0, 1, \dots$ zachodzi $P(X_{n+1} \in A_{n+1} | X_n \in A_n, \dots, X_0 \in A_0) = P(X_{n+1} \in A_{n+1} | X_n \in A_n)$. Mówimy, że łańcuch jest jednorodny, jeżeli prawdopodobieństwo przejść między stanami nie zależy od czasu, tj. dla $n = 0, 1, \dots$ zachodzi $P(X_{n+1} \in A_{n+1} | X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1 | X_0 \in A_0)$.

W rozpatrywanej przez nas sytuacji możemy przyjąć, że powyższy ciąg zmiennych losowych przyjmuje wartości ze zbioru $\{1, \dots, K\}$.

Prawdopodobieństwo tego, iż kredytobiorca w kolejnym okresie otrzyma ocenę j pod warunkiem, że w okresie poprzednim otrzymał ocenę i , oznaczmy przez p_{ij} , tj. $p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i)$ dla $i, j = 1, \dots, K$. Dla wygody, prawdopodobieństwa przejścia jednorodnego łańcucha Markowa możemy zapisać w formie macierzy $\Pi = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$. Macierz tę nazywamy *macierzą przejścia*. Niech ponadto $v^1 = (v_1^1, \dots, v_K^1)$ oznacza rozkład ratingów w pierwszym z analizowanych kwartałów, tzn. niech liczba v_i^1 określa, jaki procent wszystkich kredytobiorców miał w tym okresie ocenę i .

Jesteśmy zainteresowani wyznaczeniem przyszłego rozkładu ratingów w portfelu kredytowym banku. Jak łatwo zauważyć, wykorzystując wzór na prawdopodobieństwo całkowite, prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany w n -tym kwartale kredytobiorca będzie miał przypisany j -ty rating, wyraża się jako

$$v_j^n = \sum_{i=1}^K v_i^{n-1} p_{ij}.$$

Rozkład $v^n = (v_1^n, \dots, v_K^n)$ daje się więc w łatwy sposób przedstawić, wykorzystując macierz przejścia Π

$$v^n = v^{n-1} \Pi.$$

Łatwo zauważyć, że

$$v^n = v^1 (\Pi)^{n-1},$$

gdzie $(\Pi)^{n-1}$ oznacza $n - 1$ potęgę macierzy przejścia Π .

Występujące w macierzy przejścia prawdopodobieństwa warunkowe p_{ij} dla $i, j = 1, \dots, K$, szacuje się na podstawie danych z przeszłości przez określenie częstości przechodzenia kredytobiorców między różnymi ratingami. Zatem w prosty sposób można określić na podstawie pewnej zaobserwowanej w przeszłości dynamiki zachowań kredytobiorców przyszły rozkład ratingów w portfelu kredytowym banku. Zilustruje to przedstawiony dalej przykład.

Rozważmy bank udzielający długoterminowych kredytów inwestycyjnych. Bank sporządza co kwartał rating każdego z kredytobiorców, klasyfikując go jako kredytobiorcę o dobrej kondycji finansowej (D), wypłacalnego kredytobiorcę o złej sytuacji finansowej (Z) albo jako kredytobiorcę niewypłacalnego (N). Załóżmy, że w ostatnich trzech kwartałach obserwowaliśmy następujące zachowanie kredytobiorców:

Rating	I kw.	Zmiana ratingu	II kw.	Zmiana ratingu	III kw.	Zmiana ratingu
D	1500	D 1000 Z 500 N 0	1700	D 1100 Z 580 N 20	2000	D 1200 Z 750 N 50
Z	1400	D 400 Z 800 N 200	1300	D 320 Z 800 N 180	1380	D 380 Z 900 N 100
N	100	D 0 Z 0 N 100	300	D 0 Z 0 N 300	480	D 0 Z 0 N 480

Jak łatwo zauważyć na podstawie powyższej tabelki, liczba kredytów w portfelu banku zwiększa się z kwartału na kwartał, gdyż bank udziela nowych kredytów podmiotom znajdującym się w dobrej sytuacji finansowej. Wiedząc, że w chwili obecnej w portfelu banku znajduje się 1900 kredytów o ratingu D , 1650 kredytów o ratingu Z oraz 580 kredytów niewypłacalnych (N), należy określić rozkład ratingów w portfelu kredytowym banku za rok, zakładając, że liczba kredytów znajdujących się w portfelu banku pozostanie w ciągu tego roku stała.

Aby być zgodnym z wprowadzonymi wcześniej oznaczeniami, ponumerujemy ratingi w następujący sposób: $D \rightarrow 1$, $Z \rightarrow 2$, $N \rightarrow 3$. Załóżmy ponadto, że proces generujący zmiany ratingów jest jednorodnym łańcuchem Markowa o macierzy przejścia $\Pi = (p_{ij})_{i,j=1,2,3}$. Macierz tę należy oszacować na podstawie obserwacji zamieszczonych w powyższej tabeli. Za oszacowania warunkowych prawdopodobieństw przejść przyjmujemy średnie częstości przechodzenia między ratingami:

$$\hat{p}_{11} = \frac{1}{3} \left(\frac{1000}{1500} + \frac{1100}{1700} + \frac{1200}{2000} \right) = 0,63791,$$

$$\hat{p}_{12} = \frac{1}{3} \left(\frac{500}{1500} + \frac{580}{1700} + \frac{750}{2000} \right) = 0,34984,$$

$$\hat{p}_{13} = \frac{1}{3} \left(\frac{0}{1500} + \frac{20}{1700} + \frac{50}{2000} \right) = 0,0012255,$$

$$\hat{p}_{21} = \frac{1}{3} \left(\frac{400}{1400} + \frac{320}{1300} + \frac{380}{1380} \right) = 0,26908,$$

$$\hat{p}_{22} = \frac{1}{3} \left(\frac{800}{1400} + \frac{800}{1300} + \frac{900}{1380} \right) = 0,613,$$

$$\hat{p}_{23} = \frac{1}{3} \left(\frac{200}{1400} + \frac{180}{1300} + \frac{100}{1380} \right) = 0,11793,$$

$$\hat{p}_{31} = \frac{1}{3} \left(\frac{0}{100} + \frac{0}{300} + \frac{0}{480} \right) = 0,$$

$$\hat{p}_{32} = \frac{1}{3} \left(\frac{0}{100} + \frac{0}{300} + \frac{0}{480} \right) = 0,$$

$$\hat{p}_{33} = \frac{1}{3} \left(\frac{100}{100} + \frac{300}{300} + \frac{480}{480} \right) = 1.$$

Jak łatwo spostrzec, stan niewypłacalności (3) jest stanem *pochłaniającym*, tj. takim, którego prawdopodobieństwo opuszczenia jest równe zero.

Oznaczmy przez $\hat{\Pi} = (p_{ij})_{i,j=1,2,3}$ otrzymany estymator macierzy przejścia Π . Ma on następującą postać

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 0,637\,91 & 0,349\,84 & 0,001\,225\,5 \\ 0,269\,08 & 0,613 & 0,117\,93 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ponadto z treści zadania wiemy, że obecny rozkład ratingów wyraża się jako

$$v^1 = \left(\frac{1900}{1900 + 1650 + 580}, \frac{1650}{1900 + 1650 + 580}, \frac{580}{1900 + 1650 + 580} \right),$$

czyli

$$v^1 = (0,460\,05, 0,399\,52, 0,140\,44).$$

Rozkład ratingów za rok (po czterech kwartałach) możemy określić jako

$$v^5 = v^1(\hat{\Pi})^4.$$

Pozostawiając trud obliczenia czwartej potęgi macierzy $\hat{\Pi}$ lubiącym rachunki Czytelnikom, podaję tylko końcowy wynik

$$v^5 = (0,313\,84, 0,342\,55, 0,343\,64).$$

Warto wspomnieć, że w stosowaniu wyżej wymienionej metody kluczową rolę odgrywało założenie o tym, iż w ciągu najbliższego roku nie zwiększy się liczba kredytobiorców. Założenie to wydaje się jednak mało realistyczne. Powstaje więc pytanie: jaki będzie rozkład kredytów za rok, zakładając utrzymanie się dotychczasowej średniej stopy wzrostu liczby kredytów udzielanych kredytobiorcom znajdującym się w dobrej sytuacji finansowej? Odpowiedź pozostawiam zainteresowanym Czytelnikom.

Artykuł ten chciałbym zakończyć następującą konkluzją: nie sposób dziś studiować na przyzwoitym poziomie zarówno ekonomii, jak i finansów, nie mając odpowiedniego przygotowania formalnego. Przygotowanie takie daje na pewno studiowanie matematyki. Stąd też coraz bardziej popularne staje się równoległe studiowanie powyższych kierunków i matematyki.

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 925. Udowodnić, że czworościan jest ortocentryczny wtedy i tylko wtedy, gdy każde dwie jego przeciwległe krawędzie są prostopadłe.

Rozwiązanie na str. 6

M 926. a) Udowodnić, że sumy kwadratów dwóch par przeciwległych krawędzi czworościanu są równe wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie trzeciej pary są prostopadłe.

b) Udowodnić, że czworościan jest ortocentryczny wtedy i tylko wtedy, gdy sumy kwadratów przeciwległych krawędzi są równe.

Rozwiązanie na str. 7

M 927. Udowodnić, że czworościan jest ortocentryczny wtedy i tylko wtedy, gdy odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi są równej długości.

Rozwiązanie na str. 15

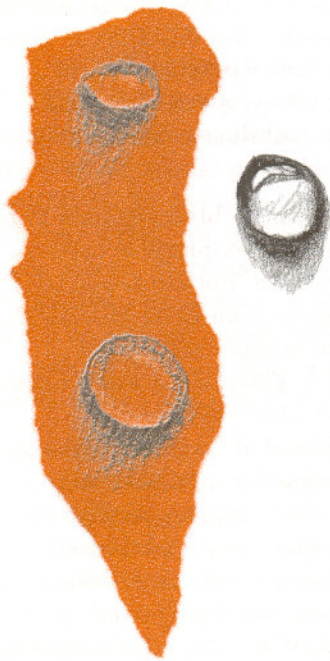
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 529. Z sikawki strażackiej wypływa strumień wody pod kątem $\alpha = 35^\circ$ do poziomu. Struga wody pada w odległości $l = 12$ m od sikawki. Ile wody wylewa się w ciągu jednej minuty, jeśli pole przekroju otworu wynosi $S = 1$ cm²? Opór powietrza pomijamy.

Rozwiązanie na str. 16

F 530. Z otworu wywierconego w bocznej ścianie naczynia na poziomie równym jednej trzeciej słupa wody w naczyniu (rys.) wycieka strumień wody. Na jakiej innej wysokości trzeba wywiercić drugi otwór, aby zasięg obu strumieni był jednakowy?

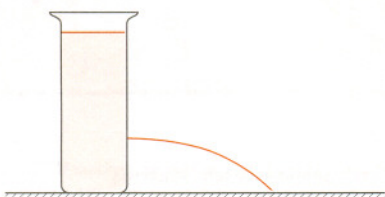
Rozwiązanie na str. 11



Zadania



Czworościan nazywamy ortocentrycznym, jeśli jego wysokości przecinają się w jednym punkcie.



Co kryje się pod tym enigmatycznym skrótem? Nie jest to bynajmniej numer rejestracyjny samochodu poszukiwanego przez policję za przekroczenie prędkości. . . Jest to oznaczenie błysku gamma, który przekroczył wszelkie granice jasności znane dotychczas astronomom!

Błyski gamma zostały odkryte już ponad 30 lat temu, w roku 1967, przez amerykańskie satelity wojskowe serii Vela. Satelity te miały za zadanie monitorować wybuchy jądrowe na Ziemi i w przestrzeni kosmicznej. Zamiast tego wykryły nowe kosmiczne źródła promieni gamma. Przez kilka lat wyniki tych obserwacji były utajnione, naukowcy musieli się bowiem upewnić, że mają do czynienia ze zjawiskami kosmicznymi, a nie z jakąś formą wybuchów jądrowych w przestrzeni kosmicznej.

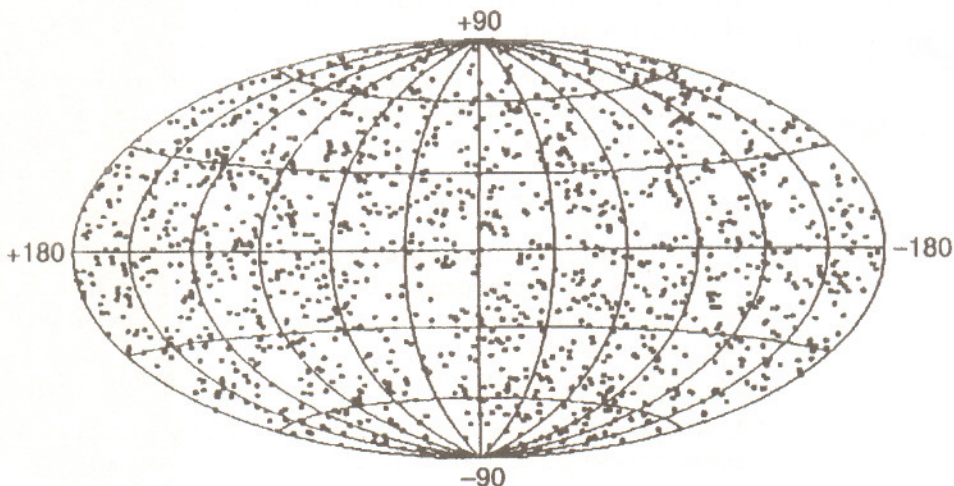
Do dnia dzisiejszego zarejestrowano parę tysięcy błysków gamma. Oznaczane są one symbolem GRB (z angielskiego *gamma-ray burst*) i datą rejestracji. Pojawiają się na niebie mniej więcej raz dziennie. Błyski mogą trwać od kilku milisekund do paru tysięcy sekund – istnieje jeden przypadek, kiedy podejrzewa się, że zarejestrowano błysk trwający dwa dni! Błyski gamma tworzą wyraźne dwie grupy – błyski krótsze i dłuższe niż kilka sekund.

Dziś wiemy, że rozkład błysków gamma na niebie jest izotropowy, to znaczy, że pojawiają się one na całym niebie zupełnie losowo. W latach 70. i 80. astronomowie uważali, że świadczy to o lokalnym pochodzeniu błysków. Sądzono, że są rozłożone równomiernie na niebie, podobnie jak gwiazdy naszego bliskiego kosmicznego otoczenia. Gwiazdy odległe skupiają się w Drodze Mlecznej, nie są więc rozłożone równomiernie na niebie. Sądzono, że tak też będzie w przypadku błysków gamma i że czulsze instrumenty zaobserwują gromadzenie się słabych błysków gamma wzdłuż Drogi Mlecznej. Okazało się jednak, że jest

inaczej. Wystrzelony w 1991 r. satelita CGRO (*Compton Gamma Ray Observatory*) stwierdził, że nawet słabe błyski są rozłożone równomiernie (rys. 1).

Wyniki te świadczyły o tym, że błyski gamma to nie zjawiska lokalne, lecz potężne eksplozje w bardzo odległych zakątkach Kosmosu. Potwierdzenie tej hipotezy przyszło dopiero w roku 1997. Mianowicie 8 maja tego roku włosko-holenderski satelita Beppo-SAX zaobserwował kilkudziesięciosekundowy błysk. Na pozycję błysku skierował kamerę rentgenowską i zaobserwował znikające źródło rentgenowskie. Jednocześnie kilka teleskopów optycznych prowadziło obserwację tego rejonu nieba w poszukiwaniu źródła optycznego (tak zwanej poświaty) związanego z tym błyskiem. Poszukiwania te zakończyły się sukcesem, a potężny teleskop Kecka na Hawajach znalazł w widmie poświaty linie emisyjne i absorpcyjne przesunięte ku czerwieni ($z = 0,835$), tak jak to ma miejsce w widmach odległych galaktyk. Tak więc po raz pierwszy w sposób bezpośredni potwierdzono, że błyski gamma zachodzą w odległościach kosmologicznych (czyli wyznaczanych przy wykorzystaniu prawa Hubble'a).

Błysk GRB 990123, jak już wiemy, nastąpił 23 stycznia 1999 r. Zaobserwowało go kilka satelitów. Był to jeden z najjaśniejszych błysków, jakie kiedykolwiek zarejestrowano. Był to też pierwszy błysk, jaki kiedykolwiek widziano w czasie trwania błysku gamma również przez teleskop optyczny. Stało się to możliwe dzięki sieci GCN i nowoczesnym zautomatyzowanym teleskopom. Sieć GCN (*Gamma-ray Coordinate Network*) to system przekazywania informacji o błyskach gamma zarówno do całego środowiska astronomicznego, jak i do zautomatyzowanych teleskopów optycznych, dzięki któremu od wykrycia błysku do skierowania w jego



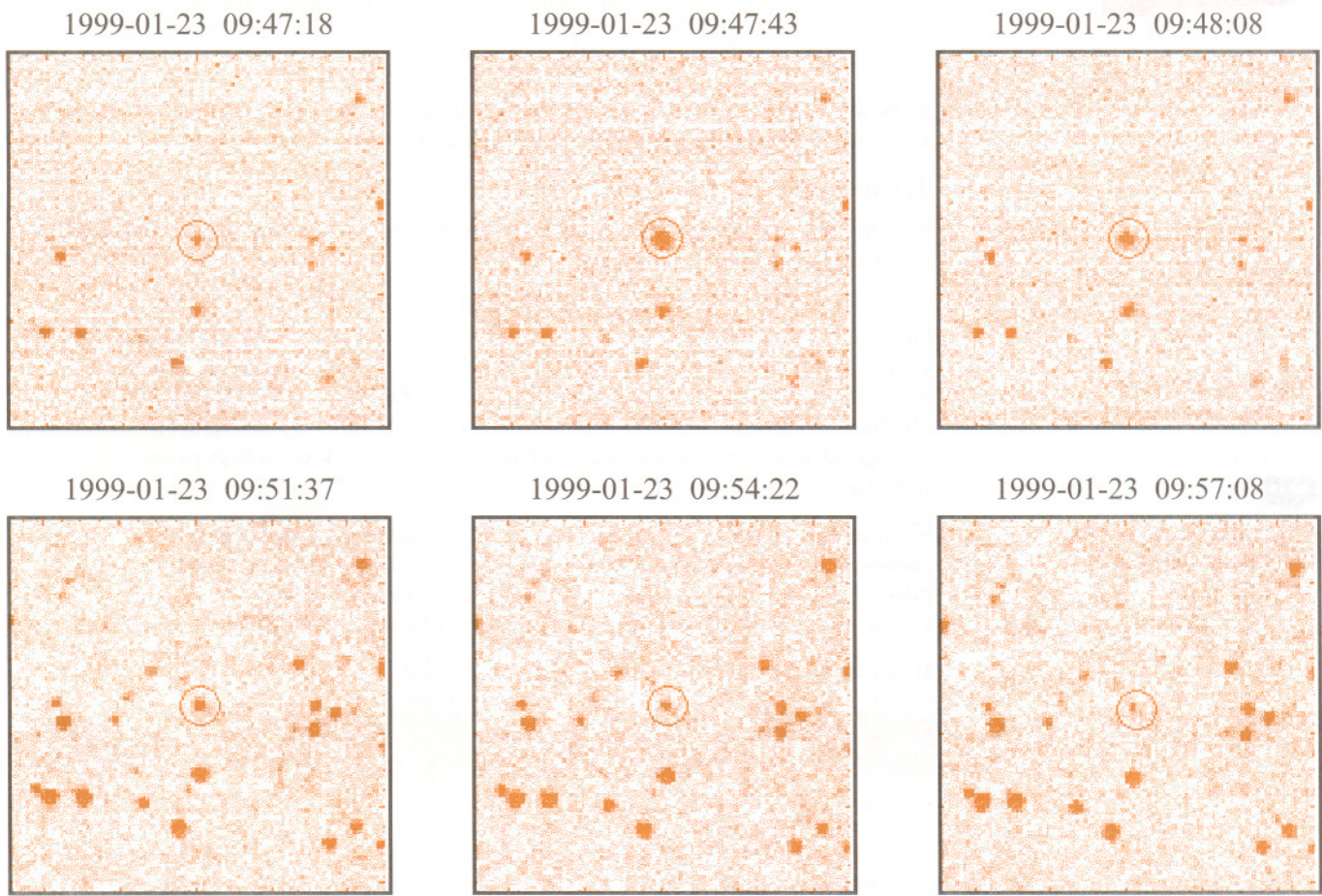
Rys. 1. Miejsca ponad tysiąca zarejestrowanych przez BATSE błysków gamma, ukazanych we współrzędnych galaktycznych, sugerują kosmologiczne powiązania tych zjawisk.

stronę teleskopu upływa nie więcej niż pół minuty. Teleskop ROTSE (*Robotic Optical Transient Search Experiment*) obserwował miejsce błysku już w 25 sekund po jego wykryciu! Błysk ten trwał ponad 100 sekund, a maksimum jasności miał mniej więcej w 40–50 sekund po wykryciu, to znaczy kiedy ROTSE już był na niego skierowany! ROTSE zrobił sześć zdjęć (rys. 2), na których widoczny jest zmienny obiekt, który najpierw pojaśniał aż do ósmej wielkości gwiazdowej, a później zaczął zanikać. W chwili najwyższej jasności błysk GRB 990123 byłby obserwowalny przez zwykłą lornetkę, gdyby tylko wiedzieć, kiedy i w jakim kierunku ją skierować...

Znając odległości błysków i ich jasność widzianą z Ziemi, można wyliczyć ilość energii wydzielonej w błysku. Okazuje się, że jest ona ogromna. Błyski gamma wydzielają w ciągu kilku sekund podobną ilość energii, jaką Słońce wydzieli w ciągu całego swojego życia, czyli przez mniej więcej 10 miliardów lat! W promieniach gamma wydzielana jest energia stanowiąca znaczącą część masy Słońca. W przypadku błysku GRB 990123 (przypomnijmy, że był on jednym z najjaśniejszych) ta ilość energii to około 10^{49} J, co odpowiada masie większej niż masa Słońca. W czasie

trwania błysk GRB 990123 był jaśniejszy niż wszystkie gwiazdy w obserwowalnym Wszechświecie!

Jakie mogą być mechanizmy fizyczne odpowiedzialne za tak olbrzymią eksplozję? Musi to być kosmiczna katastrofa, prawdopodobnie z powstaniem lub też udziałem czarnej dziury. Rozpatruje się dwa scenariusze: kolizję czarnej dziury i gwiazdy neutronowej lub też końcowy etap życia bardzo masywnej, szybko rotującej gwiazdy o masie ponad sto razy większej od masy Słońca. W obu przypadkach oczekuje się powstania czarnej dziury otoczonej pierścieniem (lub też grubym dyskiem materii). W takim systemie mogą wytworzyć się wypływy materii z prędkością bardzo bliską prędkości światła. Wypływy takie zachowują się jak kosmiczne reflektory, które świecą jedynie dokładnie w kierunku prędkości wypływu. Zauważmy, że oceniając ilość energii w błysku, zakładaliśmy, że źródło świeci we wszystkich kierunkach jednakowo. Jeżeli zaś mielibyśmy do czynienia ze świeceniem w jednym kierunku, to niezbędna do tego energia mogłaby być o kilka rzędów wielkości mniejsza. Szczegóły procesów fizycznych toczących się w źródłach błysków gamma są ciągle zagadką i stanowią przedmiot intensywnych badań.



Rys. 2. Przebieg zjawiska GRB 990123 w zakresie optycznym. Istotna jest względna jasność (intensywność) centralnego obiektu (w kółku) w porównaniu do pozostałych gwiazd, których jasność jest stała.

Tryptyk o liczbach pierwszych

Witold BEDNAREK

Twierdzenie Czebyszewa

Pafnutij Czebyszew udowodnił, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ istnieje co najmniej jedna taka liczba pierwsza, że $n < p < 2n$.

Wniosek. Jeżeli p_k oznacza k -tą liczbę pierwszą, to

$$p_{k+1} < 2p_k \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

Dowód. Niech k oznacza dowolną ustaloną liczbę naturalną. Zgodnie z twierdzeniem Czebyszewa istnieje taka liczba pierwsza q , że $p_k < q < 2p_k$. Mamy, oczywiście, $q \geq p_{k+1}$. Tak więc $p_{k+1} \leq q < 2p_k$, skąd $p_{k+1} < 2p_k$.

Udowodnimy, że dla każdej liczby naturalnej $m > 0$ suma

$$(*) \quad \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m+1}$$

nie jest całkowita.

Dowód. Oznaczmy przez p_k największą liczbę pierwszą nie większą od $2m+1$, gdzie m jest ustaloną dodatnią liczbą naturalną. Oczywiście $p_k > 2$. Zatem p_k jest liczbą nieparzystą. Liczba p_k znajduje się wśród liczb $1, 3, 5, \dots, 2m+1$. Wykażemy, że żadna z liczb $1, 3, 5, \dots, 2m+1$, oprócz p_k , nie jest podzielna przez p_k . Gdyby tak nie było, to wśród liczb $1, 3, 5, \dots, 2m+1$ znajdowałyby się liczba postaci $l \cdot p_k$, gdzie $l \geq 3$ jest liczbą naturalną. Tak więc $3p_k \leq lp_k \leq 2m+1$. Z określenia p_k mamy jednak $p_{k+1} > 2m+1$. Wobec tego $p_{k+1} > 3p_k > 2p_k$, co jest sprzeczne z wnioskiem z twierdzenia Czebyszewa.

Po sprowadzeniu sumy (*) do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$\frac{A}{B} + \frac{1}{p_k} = \frac{Ap_k + B}{Bp_k}$$

gdzie liczby A i B są naturalne i B nie jest podzielne przez p_k . Liczba $\frac{Ap_k+B}{Bp_k}$ nie jest całkowita, gdyż licznik tego ułamka nie jest podzielny przez p_k .

Izolowane liczby pierwsze

Słynne twierdzenie Dirichleta głosi, że jeżeli liczby naturalne a i r są względnie pierwsze, to ciąg arytmetyczny

$$a, a+r, a+2r, \dots$$

zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Rozważmy ciąg arytmetyczny $(15n+8)$. Ciąg ten zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Niech $p = 15n_0 + 8$ będzie jedną z nich. Liczba $p-2 = 15n_0 + 6 = 3(5n_0 + 2)$ jest złożona. Podobnie, liczba $p+2 = 15n_0 + 10 = 5(3n_0 + 2)$ jest złożona. Zatem najbliższa liczba pierwsza może być odległa od p (w lewo lub w prawo) co najmniej o 4.

Udowodnimy ogólnie, że dla dowolnej liczby naturalnej m istnieje taka liczba pierwsza p , że najbliższa liczba pierwsza jest odległa od p co najmniej o $2m+2$. Niech q_k^+ będzie nieparzystym dzielnikiem pierwszym liczby $2^{m+2} + 2k$, a q_k^- będzie nieparzystym dzielnikiem pierwszym liczby $2^{m+2} - 2k$ dla $k = 1, 2, \dots, m$.

Rozważmy ciąg arytmetyczny $(q_1^+ q_2^+ \dots q_m^+ q_1^- q_2^- \dots q_m^- \cdot n + 2^{m+2})$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Z twierdzenia Dirichleta wynika, że ciąg ten zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Niech

$$p = q_1^+ q_2^+ \dots q_m^+ q_1^- q_2^- \dots q_m^- \cdot n_0 + 2^{m+2}$$

będzie jedną z nich. Liczba

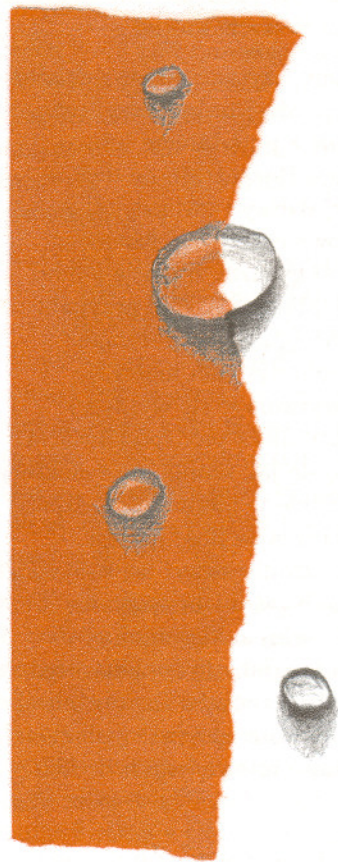
$$p + 2k = q_1^+ q_2^+ \dots q_m^+ q_1^- q_2^- \dots q_m^- \cdot n_0 + 2^{m+2} + 2k$$

jest podzielna przez q_k^+ , a więc jest złożona ($k = 1, 2, \dots, m$).

Podobnie, liczba

$$p - 2k = q_1^+ q_2^+ \dots q_m^+ q_1^- q_2^- \dots q_m^- \cdot n_0 + 2^{m+2} - 2k$$

jest złożona, gdyż jest podzielna przez q_k^- ($k = 1, 2, \dots, m$). Należy jeszcze



Rozwiązanie zadania M 925.

Wysokości czworokąta $ABCD$ poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy krawędzie AB i CD są prostopadłe. (Płaszczyzna zawierająca obie te wysokości zawiera również krawędź AB i jest prostopadła do CD .) Wynika stąd, że w czworokącie ortocentrycznym przeciwległe krawędzie są prostopadłe, a także, że jeśli przeciwległe krawędzie czworokąta są prostopadłe, to jego dowolne dwie wysokości przecinają się. Trzeba wykazać, że punkt przecięcia jest zawsze ten sam. Niech wysokości poprowadzone z punktów A i B przecinają się w punkcie E . Wysokość poprowadzona z wierzchołka C nie może, oczywiście, leżeć w płaszczyźnie ABE . Stąd łatwo już zauważyć, że przechodzi ona przez punkt E .

uzasadnić, że liczby $2^{m+2} + 2k$ i $2^{m+2} - 2k$ mają dzielnik pierwszy nieparzysty, czyli że nie są potęgami dwójki.

Przypuśćmy, że $2^{m+2} + 2k = 2^s$ dla pewnych naturalnych m, k, s . Ponieważ $k \leq m$ i $m \leq 2^{m-1}$, więc $2^{m+2} + 2k \leq 2^{m+2} + 2^m$. Oczywiście $2^{m+2} < 2^{m+2} + 2^m$. Wobec tego $2^{m+2} < 2^s \leq 2^{m+2} + 2^m < 2^{m+3}$. Stąd $m+2 < s < m+3$, co dla naturalnych s i m jest niemożliwe.

Analogicznie wykazujemy, że założenie $2^{m+2} - 2k = 2^s$ prowadzi do sprzeczności.

Różnica pierwiastków kolejnych liczb pierwszych

Niech p_k oznacza k -tą liczbę pierwszą. Wykażemy, że kres dolny zbioru liczb postaci $\sqrt{p_{k+1}} - \sqrt{p_k}$ dla $k \in \mathbb{N}$ wynosi zero.

Przypuśćmy, że kres ten jest dodatni. Istnieje więc taka liczba $\varepsilon > 0$, że

$$\sqrt{p_{k+1}} - \sqrt{p_k} \geq \varepsilon \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

Wówczas

$$\frac{1}{\sqrt{p_k}} - \frac{1}{\sqrt{p_{k+1}}} = \frac{\sqrt{p_{k+1}} - \sqrt{p_k}}{\sqrt{p_k p_{k+1}}} \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_k p_{k+1}}} > \frac{\varepsilon}{p_{k+1}} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

Podstawiamy $k = 1, 2, \dots, n$ i dodajemy te nierówności

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p_1}} - \frac{1}{\sqrt{p_2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{p_2}} - \frac{1}{\sqrt{p_3}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{p_{n-1}}} - \frac{1}{\sqrt{p_n}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{p_n}} - \frac{1}{\sqrt{p_{n+1}}}\right) > \varepsilon \left(\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \dots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_{n+1}}\right).$$

Po dokonaniu redukcji otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{p_1}} - \frac{1}{\sqrt{p_{n+1}}} > \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_{k+1}},$$

skąd

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_{k+1}} < \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{p_1}} - \frac{1}{\sqrt{p_{n+1}}}\right) < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_1}} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2}}.$$

Wiadomo jednak, że szereg złożony z odwrotności wszystkich liczb pierwszych jest rozbieżny do nieskończoności. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że szukany kres dolny jest równy zeru.

Prawdopodobnie zachodzi więcej, a mianowicie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{p_{k+1}} - \sqrt{p_k}) = 0.$$

Inna hipoteza głosi, że

$$\sqrt{p_{k+1}} - \sqrt{p_k} < 1 \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

Gdyby powyższa nierówność była prawdziwa dla każdego k , to wynikałaby z niej nieudowodniona dotąd hipoteza:

Między dwoma dowolnymi kolejnymi kwadratami liczb naturalnych znajduje się co najmniej jedna liczba pierwsza.

Istotnie, niech n będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Niech p_k oznacza największą liczbę pierwszą mniejszą od $(n+1)^2$. Wówczas p_{k+1} jest większe od $(n+1)^2$, skąd $n+1 < \sqrt{p_{k+1}}$. Ponadto na mocy przyjętego założenia $\sqrt{p_{k+1}} < \sqrt{p_k} + 1$. Zatem $n+1 < \sqrt{p_k} + 1$. Stąd $n^2 < p_k$. Ostatecznie otrzymujemy $n^2 < p_k < (n+1)^2$.



Rozwiązanie zadania M 926.

a) Równość $AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$ przepisujemy w zapisie wektorowym:

$$\begin{aligned} & |\vec{AB} + \vec{BC}|^2 + |\vec{BC} + \vec{CD}|^2 = \\ & = |\vec{BC}|^2 + |\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}|^2, \text{ co po} \\ & \text{rozpisaniu za pomocą iloczynu skalarnego} \\ & \text{okazuje się być równoważne równości} \\ & \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0, \text{ czyli prostokątności} \\ & \text{krawędzi } AB \text{ i } CD. \end{aligned}$$

b) Wynika od razu z zadania M 925 i zadania M 926a.

Jeśli jakaś figura wypukła da się pokryć za pomocą 100 kół jednostkowych, to zmieszczą się w tej figurze co najwyżej 74 rozłączne jednostkowe koła. Oczywiście liczba 100 nie jest tu żadną wyróżnioną liczbą – zawsze liczba rozłącznych kół jednostkowych, mieszczących się w figurze (nie będącej kołem jednostkowym) wypukłej, jest mniejsza od $\frac{3}{4}$ liczby jednostkowych kół pokrywających tę figurę.

Dlaczego na zdjęciach rentgenowskich wymiary obrazów przedmiotów są zawsze większe od ich wymiarów rzeczywistych? Otóż dlatego, że źródło promieni rentgenowskich jest punktowe, wobec tego też wiązka promieni rentgenowskich jest rozbieżna i tym samym „cień” przedmiotu jest zawsze większy od samego przedmiotu.

Weekend w Kosmosie?

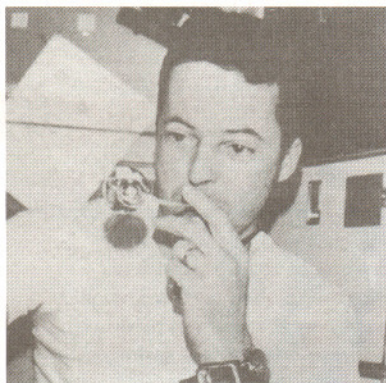
Ludzi na Ziemi przybywa, dostępna nam przestrzeń kurczy się ostatnio coraz bardziej. Od czasów Kolumba niewiele już odkryliśmy, a z satelity można zajrzeć w każdy zakątek naszego globu. Przydałaby się więc jakaś wyprawa w NIEZNANE. Ostatnio zaczęto już nawet sprzedawać przyszłym inwestorom działki na Księżycu (aczkolwiek jest to „ziemia niczyja”). Kto wie, może więc niedługo zaczną być modne krótkie wypadki w Kosmos? Może niekoniecznie od razu na jakieś kolonie czy ośrodki księżycowe albo na inne planety. Może – powiedzmy na sam początek – na przykład na stacje kosmiczne krążące po orbitach okołozemskich.

W najprostszych do wyobrażenia sobie takich stacjach panuje stan *nieważkości*. Stan taki można też zrealizować, gdy siły grawitacyjne i siły bezwładności równoważą się. Tak się dzieje, na przykład, gdy spadamy swobodnie w ziemskim polu grawitacyjnym. A ruch po orbicie okołozemskiej jest właśnie szczególnym przypadkiem spadku swobodnego (*Delta 6/2000*).

Czy można sobie wyobrazić życie w takich warunkach? To, że różne przedmioty są utrzymywane w „całości”, zawdzięczamy głównie siłom oddziaływania wewnętrznego – siłom przyciągania między cząsteczkami substancji, z których są zbudowane. Podobnie jest z ludzkim ciałem – pozbawione ciężającej nam siły grawitacji nie rozpadnie się. Nic więc nie stoi na przeszkodzie, żeby przenieść się na jakiś czas na stację kosmiczną. Wprawdzie można zbudować taką, w której rolę grawitacji pełniłaby siła odśrodkowa bezwładności, ale jest to bardzo skomplikowany i trudny do zrealizowania projekt.

A więc, musimy – przynajmniej w pierwszych, pionierskich, dostępnych szerszemu gronu ludzi, lotach – pogodzić się ze stanem nieważkości. Płacąc zapewne fortunę za taką przejażdżkę, oczekujemy mimo wszystko zachowania pewnych standardów życia. Na pewno jedzenie z tubek czy puszek nie jest zbyt miłe. Spanie w specjalnym hamaku możemy jakoś przeżyć. Ale... płynny pokarm z tubki na śniadanie? (choć lepiej się przemieszczający przez przewód pokarmowy). O nie. Raczej kanapka albo tost, do tego gorąca herbata lub kawa. I tu zaczynają się problemy...

Siadamy do stołu i przypinamy się do fotela. Wyjmujemy z celofanowego opakowania kanapkę, beztrudno ją gryziemy, okruszki spadają na stół... Ejże! Jak to: SPADAJĄ? Unoszą się dookoła nas, wpadając do oczu, nosa... Niezbyt przyjemne (i nadzwyczaj niebezpieczne). Łyk herbaty? Proszę bardzo... Chwila nieostrożności i herbata zamiast



Tak wyglądają bańki mydlane w wykonaniu Josepha Kerwina na Skylabie (1973).

znajdować się w naszym ukochanym kubku w misie, dryfuje sobie beztrudnie nad naszą głową. No cóż, odpinamy się od fotela, bierzemy słomkę i zaczyna się polowanie. Nawet przyjemna zabawa, tym bardziej że połączona z gimnastyką, której tak brakuje naszym mięśniom odzwyczajonym od opierania się sile ciężkości.

Oczywiście w pogoni za łykiem herbaty nie wolno nam zapomnieć o noszeniu zawsze przy sobie różnych drobnych przedmiotów, nawet pozornie nieprzydatnych w Kosmosie monet, które w razie zawiśnięcia pośrodku pokoju-kabiny pozwolą nam dostać się do którejś ze ścian. Po prostu rzucamy czymś w kierunku przeciwnym do tego, w którym chcemy się poruszać, reszta to już zasada zachowania pędu, która – na szczęście – obowiązuje wszędzie i we wszystkich warunkach.

Napiliśmy się w końcu herbaty (która zresztą zdążyła w czasie tej gonitwy mocno wystygnać), włączamy coś w rodzaju odkurzacza, który wsysa wszystkie okruszki i resztki płynu. Zmęczeni i ziajani idziemy wziąć kąpiel... No, może nie od razu kąpiel, bo będziemy mieli podobny problem jak z herbatą – woda może z nas spłynąć w „górze”. Jak tu więc w takich warunkach się umyć? Może prysznic? Skoro coś w rodzaju odkurzacza posprzątało po naszym śniadaniu, więc może też zasysać wodę z prysznica. Pompujemy gorącą wodę do rury, której otwór – zgodnie z naszymi przyzwyczajeniami, bo innych wskazań nie ma – znajduje się nad naszą głową. Od dołu zasysamy powietrze z kropelkami wody. Działa!!! Jeszcze może tylko maska tlenowa na twarz, na wszelki wypadek, żeby się nie zakrztusić.

Uff, już po wszystkim, ubieramy się i idziemy podziwiać błękitny glob Ziemi, po to tu w końcu przyjechaliśmy. Szczęśliwi cieszymy się myślą, że mimo tych wszelkich niebezpieczeństw, jakie na nas czyhały, przynajmniej nie groziło nam poślizgnięcie się na mydle...

Małą Deltę przygotowała Ewa CZUCHRY

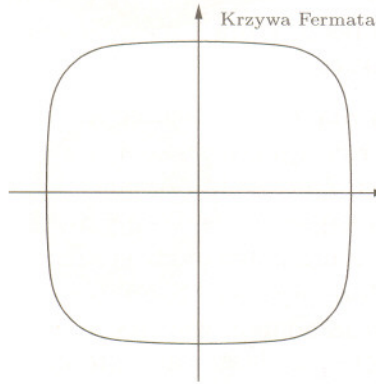


A to Pete Conrad, dowódca Skylabu, w wannie.

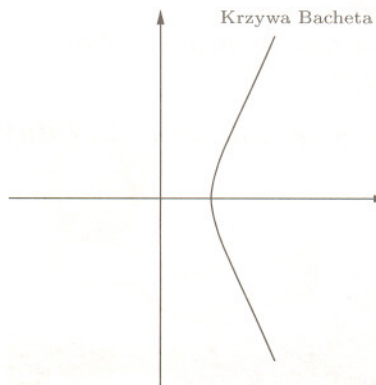
Punkty wymierne na krzywych płaskich

Grzegorz ŁUKASZEWICZ

Rozważać będziemy krzywe na płaszczyźnie określone równaniami postaci $P(x, y) = 0$. Należą do nich, na przykład, prosta $x + y - 1 = 0$, okrąg $x^2 + y^2 - r = 0$ $r > 0$, krzywa Fermata $x^4 + y^4 - 1 = 0$, krzywa Bacheta $y^2 - x^3 + a = 0$, a - całkowite, czy też krzywa wykładnicza $y - e^x = 0$. Interesować nas będą punkty wymierne na tych krzywych, tj. punkty, których obie współrzędne są wymierne. Podstawowe pytania dotyczą istnienia punktów wymiernych na danej krzywej i metod znajdowania takich punktów.



Każdy punkt na prostej $x + y - 1 = 0$ jest albo wymierny, albo ma obie współrzędne niewymierne. Zauważmy w tym miejscu, że nie jest możliwe, żeby cała krzywa składała się z punktów wymiernych, gdyż punktów takich jest po prostu za mało: jedynie przeliczalnie wiele, podczas gdy punktów na krzywej jest tyle, co liczb rzeczywistych, a więc nieprzeliczalnie wiele. Z drugiej strony zbiór punktów wymiernych nie jest znów taki mały: w dowolnym kole znajdziemy przynajmniej jeden punkt wymierny, co oznacza, że zbiór tych punktów jest gęsty na płaszczyźnie. Czy może się więc zdarzyć, że krzywa taki zbiór „ominie” i nie będzie na niej żadnego punktu wymiernego? Wydaje się to mało prawdopodobne, a jednak, nie szukając daleko, na okręgu $x^2 + y^2 - 3 = 0$ nie ma ani jednego punktu wymiernego. Jest tak dlatego, że dla liczb całkowitych względnie pierwszych a i b , wyrażenie $a^2 + b^2$ nie dzieli się przez 3. Fakt, że na krzywych $x^n + y^n - 1 = 0$, $n > 2$, nie ma punktów wymiernych o obu współrzędnych dodatnich, wynika z udowodnionego dopiero w 1994 r. przez A. Wilesa Wielkiego Twierdzenia Fermata. Istotnie: jeśli punkt $(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})$ należy do takiej krzywej, to $(ps)^n + (rq)^n = (qs)^n$ dla liczb całkowitych ps, rq, qs różnych od zera i dodatnich. W szczególnym przypadku, dla $n = 4$, dowód twierdzenia Fermata został podany już w 1747 roku przez L. Eulera, od dawna wiadano więc, że na krzywej $x^4 + y^4 - 1 = 0$ jedynymi punktami wymiernymi są punkty: $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ oraz $(0, 1)$. Można także wykazać, że na krzywej wykładniczej $y - e^x = 0$ jest tylko jeden punkt wymierny: $(0, 1)$. Wynika to z faktu, że dowolna potęga liczby e o wykładniku wymiernym i różnym od zera jest niewymierna.



Zupełnie inaczej przedstawia się sytuacja na okręgu: $x^2 + y^2 - 1 = 0$, na którym znajduje się nieskończenie wiele punktów wymiernych. Jak je znaleźć? Okazuje się, że jest na to prosta i efektywna metoda. Zaczynamy od zauważenia, że np. punkt $(0, 1)$ jest wymierny i należy do rozważanego okręgu. Teraz przez punkt $(0, 1)$ prowadzimy prostą o równaniu $y = mx + 1$, gdzie $m \neq 0$. Prosta ta przetnie nasz okrąg w jeszcze jednym punkcie, którego współrzędne znajdziemy, podstawiając $y = mx + 1$ do równania okręgu. Mamy $x^2 + (mx + 1)^2 = 1$, skąd

$$x((1 + m^2)x + 2m) = 0$$

i dostajemy

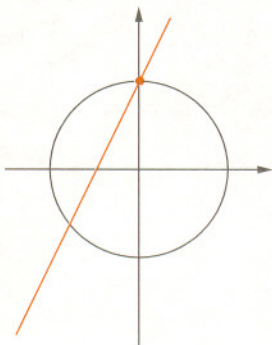
$$x = -\frac{2m}{1 + m^2}, \quad y = mx + 1 = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$$

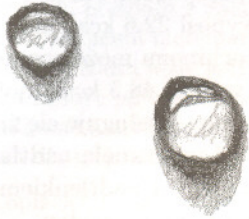
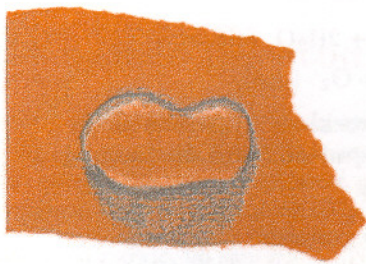
Nietrudno zatem wykazać, że (x, y) jest punktem wymiernym na okręgu jednostkowym wtedy i tylko wtedy, gdy m jest liczbą wymierną. Pozostawiamy to inwencji Czytelnika. Punkt $(0, -1)$ otrzymujemy kładąc $m = \infty$. Ponieważ punkty wymierne znajdujemy w opisanym teraz metodzie za pomocą prostych o nachyleniu wymiernym, więc metoda ta znana jest pod nazwą *metody wymiernych nachyleń*.

Rozważmy teraz krzywą Bacheta $y^2 - x^3 + a = 0$, $a \in \mathbb{Z}$. Jeśli pewien punkt (x, y) , $y \neq 0$, należący do tej krzywej, jest wymierny, to także punkt

$$B = \left(\frac{x^4 + 8ax}{4y^2}, \frac{-x^6 + 20ax^3 + 8ax^2}{8y^3} \right)$$

- miejsce przecięcia naszej krzywej ze styczną do niej w punkcie A - jest punktem wymiernym (Bachet odkrył to w 1621 r.). Jeśli $x, y \neq 0$ i $a \neq 1, -432$,





to przez kolejne iteracje dostajemy nieskończenie wiele punktów wymiernych na krzywej $y^2 - x^3 + a = 0$. Pozostaje pytanie, czy otrzymamy w ten sposób wszystkie punkty wymierne na tej krzywej.

Opisane wyżej metody znajdowania punktów wymiernych miały wspólną cechę: znajomość pewnego punktu wymiernego pozwalała nam wygenerować inne punkty wymierne na tej krzywej. Okazuje się, że metoda wymiernych nachyleń pozwala znaleźć wszystkie punkty wymierne na krzywych (stożkowych) opisanych wielomianami stopnia drugiego o współczynnikach wymiernych.

W przypadku krzywych eliptycznych (tj. krzywych opisanych przez pewne wielomiany trzeciego stopnia), do których należy nasza krzywa Bacheta (dla $a \neq 0$), sytuacja jest następująca. W 1923 roku Mordell udowodnił, że o ile krzywa eliptyczna ma jakiś punkt wymierny, to istnieje skończona liczba punktów wymiernych, z których można otrzymać drogą prostych operacji geometrycznych (kreślenia siecznych i stycznych) wszystkie punkty wymierne na tej krzywej. Przykład krzywej wykładniczej $e^x - y = 0$ pokazuje, że takie metody nie zawsze działają.

Ta przyroda jest niegłupia...

Krzysztof REJMER

Tak śpiewali kiedyś Starsi Panowie w piosence o wiośnie nad Prosną, co zapewne starsi Czytelnicy *Delty* doskonale pamiętają. Jednak w przypadku, o którym mówi ten artykuł, określenie *niegłupia* nie jest najlepsze, wypadaloby raczej powiedzieć – *wyrafinowana*.

To będzie opowieść o żuczkach. A właściwie o żukach lub raczej o jednym gatunku żyjącym w Ameryce Południowej, który jest prawdziwą bestią, choć jego krewni w Europie – mimo że znacznie mniejsi – nie są znowu aż tak wiele gorsi. Oto jak pisze o nich klasyk zoologii – Alfred Brehm:

Rodzaj Brachynus, żyjący gromadnie pod nasłonecznionymi kamieniami, znany jest z tego, że ciecz z gruczołów odwłokowych wyrzucana przez te chrząszcze dla obrony, eksploduje z trzaskiem w powietrzu, tworząc obłoczek gazowy, a sama wydzielina parzy dotkliwie dłonie, zwłaszcza jeśli w grę wchodzi wielkie gatunki tropikalne.

Oznacza to ni mniej ni więcej, że broń biologiczna nie jest wynalazkiem człowieka, choć na usprawiedliwienie żuka bombardiera (angielska nazwa *bombardier beetle*) rzecz trzeba, iż używa jej wyłącznie w celach obronnych. Zresztą nie tylko on – w przyrodzie takich gatunków, na których niejedna żaba i niejeden ptak się sparzyły (czasami dosłownie!), jest znacznie więcej. W przypadku bombardiera potencjalny napastnik musi liczyć się z możliwością zostania opryskanym gorącym, wodnym roztworem chinonu, a więc z niebezpieczeństwem poparzenia i podrażnienia chemicznego, gdyż roztwór chinonu jest żrący. Bombardier potrafi strzelać precyzyjnie we wszystkich kierunkach, powtarzając swój manewr seryjnie, do trzydziestu uderzeń w jednej serii, przy czym czas jednego wyładowania nie przekracza 30 ms.

Oczywiście wiele zwierząt, poczynając od mrówek, przez gąsienice różnych gatunków motyli, pająki, a kończąc na skorpionach i jadowitych wężach, posługuje się bronią chemiczną, ale specjalnością bombardiera, który obronę chemiczną opanował do perfekcji, jest umiejętność zgotowania nieprzyjacielowi prawdziwie gorącego przyjęcia! W jego ciele znajduje się zbiornik z wodnym roztworem zawierającym 25% nadtlenu wodoru H_2O_2 i 10% hydrochinonu. Chinon jest związkiem o pierścieniowej budowie i wzorze $C_6H_4O_2$, natomiast wzór chemiczny hydrochinonu to $C_6H_4(OH)_2$. Związki te znalazły przemysłowe zastosowanie w fotografii oraz w garbarstwie. W trakcie wyładowania część roztworu zostaje zmieszana z enzymami, dzięki którym zachodzą następujące



Rozwiązanie zadania F 530.

Niech h będzie wysokością, na której znajduje się poszukiwany otwór. Przy wypływie z pierwszego otworu cząsteczki wody uzyskują prędkość poziomą równą

$$v = \sqrt{2g \left(H - \frac{1}{3}H \right)} = 2\sqrt{\frac{gH}{3}}.$$

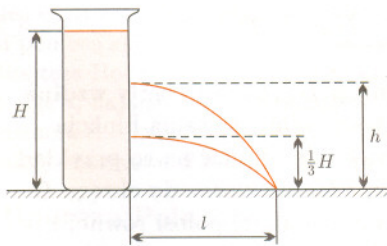
Czas ruchu cząsteczki wody w strumieniu

wynosi $t = \sqrt{\frac{2H}{3g}}$, a zasięg poziomy strumienia

$$s = vt = \frac{2}{3}H\sqrt{2}.$$

Podobnie zasięg drugiego strumienia wynosi

$$s = 2\sqrt{(H-h)h}.$$



Ponieważ zgodnie z warunkiem zadania zasięgi obu strumieni mają być równe, otrzymujemy

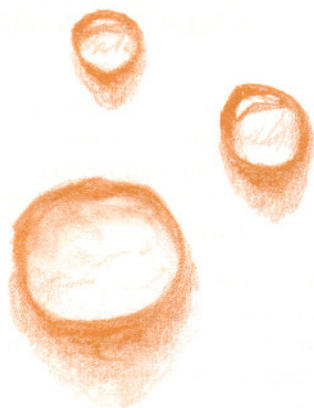
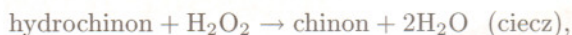
$$\frac{2}{3}H\sqrt{2} = 2\sqrt{(H-h)h},$$

co po odpowiednich przekształceniach daje nam równanie na h

$$h^2 - Hh + \frac{2}{9}H^2 = 0.$$

Rozwiązania tego równania to $h_1 = \frac{1}{3}H$ i $h_2 = \frac{2}{3}H$. Pierwsze rozwiązanie odpowiada danemu strumieniowi, drugie jest szukanym wynikiem.

reakcje:

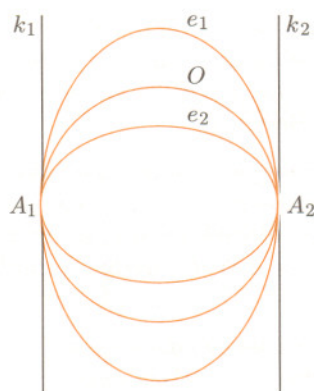


Ściśle mówiąc, enzym jest konieczny jedynie do rozkładu hydrochinonu, bowiem nadtlenek wodoru rozkłada się nader chętnie, o czym wie każdy, kto kiedykolwiek polewał skałczenie wodą utlenioną.

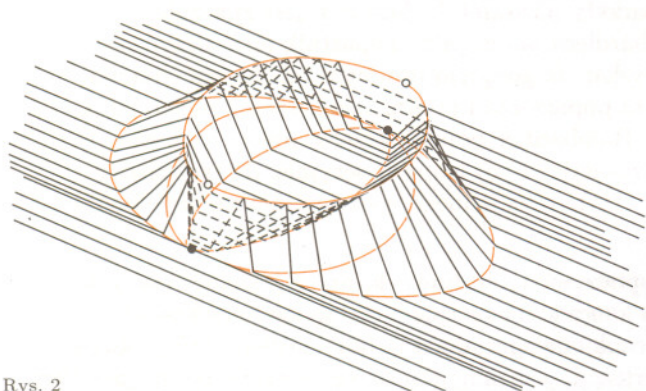
Reakcje rozkładu hydrochinonu i perhydrolu są egzotermiczne, to znaczy przebiegają z wydzielaniem się ciepła. W przypadku perhydrolu wartość ciepła reakcji jest dobrze znana z eksperymentów – wynosi 22,6 kcal/mol (w temperaturze 25°C). W przypadku rozkładu hydrochinonu może zostać znaleziona za pomocą obliczeń elektrochemicznych – wynosi 48,5 kcal/mol (w temperaturze 25°C). Jeden miligram roztworu, którym posługuje się żuk bombardier, zawiera 0,91 mikromola hydrochinonu i 7,4 mikromola nadtlenu wodoru. Jeśli hydrochinon rozkłada się całkowicie w reakcji z nadtlenukiem wodoru, to tego ostatniego pozostaje jeszcze 6,49 mikromola w każdym miligramie, następnie ta pozostałość rozkłada się na tlen i wodę. W pierwszej z reakcji wydziela się ciepło 0,044 cal, a w drugiej 0,146 cal na jeden miligram roztworu – razem 0,19 cal na miligram. Ciepło to zostaje zużyte na ogrzanie roztworu do temperatury wrzenia, a następnie na odparowanie jego części.

Załóżmy dla uproszczenia, że temperatura wrzenia roztworu i jego ciepło właściwe oraz ciepło parowania są takie same jak w przypadku wody (ciepło właściwe wody ma wartość około jednej kalorii na gram). Przyjmując, że temperatura początkowa wynosi 25°C, łatwo obliczyć, iż do „zagotowania” jednego miligrama roztworu potrzeba 0,075 cal. Pozostałe 0,115 cal wystarcza na odparowanie około 19% roztworu (ciepło parowania wody wynosi około 600 cal/g). Z rachunków powyższych wynika, że głównym „dostawcą ciepła” jest reakcja rozkładu perhydrolu (około 77%). Pierwsza z reakcji ma inne zadanie: dostarcza substancji o działaniu drażniącym. Powstający w trakcie rozkładu perhydrolu tlen wywołuje znaczny wzrost ciśnienia, dzięki czemu drażniaco-parzący ładunek może zostać wyrzucony z dużym impetem.

Na zakończenie pozostaje dodać, że, oczywiście, znalazło się kilku fizyków, którzy wykonali serię typowo ludzkich, kalorymetrycznych eksperymentów na żuku bombardierze, mierząc temperaturę sprayu wyrzucanego przez owada, oraz różne inne wielkości, przytwierdziwszy uprzednio biedakowi do ciała termozłącze, a następnie nasyłając na niego jeszcze biedniejsze w tej sytuacji mrówki.



Rys. 1



Rys. 2

Nawet jeśli wykres funkcji $f(x, y)$ jest ciągły wzdłuż dowolnej prostej na płaszczyźnie, to sama funkcja ciągła być nie musi. Nietrudno podać na to przykład. Na rysunku 1 proste k_1 i k_2 są styczne do okręgu O (o promieniu r), elipsy e_1 (o małej półosi równej r) i elipsy e_2 (o dużej półosi równej r) w punktach odpowiednio A_1 i A_2 . Funkcja f niech będzie równa zero na obu elipsach, na zewnątrz dużej i w środku małej. Na okręgu O niech ma wartość 1 (oczywiście poza punktami A_1 i A_2 , w których określona jest już wartość zero). Wykres funkcji uzupełniamy tak, by obrazował go rysunek 2, tzn., by wzdłuż dowolnej prostej, równoległej do k_1 oraz k_2 i zawartej pomiędzy k_1 i k_2 , funkcja miała wykres jak na rysunku 3. Funkcja f nie jest, oczywiście, ciągła (w punktach A_1 i A_2), a jednak jest ciągła wzdłuż dowolnej prostej (dlaczego?).



Rys. 3

Co opłaca się studiować?

Stevenowi Weinbergowi przypisywane jest powiedzenie, że aby coś osiągnąć, należy po pierwsze studiować matematykę, po drugie studiować matematykę i wreszcie po trzecie – studiować matematykę.

Łatwo mu mówić, bo sam zdobył Nagrodę Nobla z fizyki (co prawda do podziału z Salamem i Glashowem). Natomiast biednemu matematykowi wiatr w oczy wieje. Za Medalem Fieldsa idzie jedynie sława młodojaka (nie można go zdobyć po ukończeniu 40 lat). Czy opłaca się więc studiować matematykę? Pytanie bardzo na czasie, zwłaszcza dla tych, dla których „już za rok matura”.

Czy się opłaca? To zależy dla kogo. Jeżeli ktoś np. umie naprawdę dobrze kopać piłkę, albo jeszcze lepiej okładać po ... twarzy współzawodników, to może mu się studiowanie matematyki nie opłacać. Ale jeżeli wszystkie jego talenta poszły w logiczne, w abstrakcyjne myślenie, to informujemy, że opłacalność studiowania matematyki istotnie wzrosła z dniem 24 maja 2000 roku. Uczciwie trzeba jednak przyznać, że jest to opłacalność warunkowa. Samo studiowanie nie wystarczy. Trzeba jeszcze czegoś bardzo konkretnego dokonać.

Tego dnia na Spotkaniu Milenijnym odbywającym się w Collège de France w Paryżu, przedstawiciele Clay Mathematics Institute z Massachusetts ogłosili siedem *Millennium Prize Problems*. Nagrodą za rozwiązanie któregośkolwiek z poniższych problemów będzie – oprócz młodojeckiej sławy – okrągły milion dolarów.

Problem *P* versus *NP*

zasadza się w pytaniu, czy dla problemów, dla których istnieje dość szybki algorytm sprawdzający, czy dane rozwiązanie jest poprawne, istnieje też podobnie szybki algorytm znajdujący to rozwiązanie.

Hipoteza Hodge'a

wiąże się z próbą opisaną kształtu skomplikowanych obiektów, jakie spotyka się w matematyce. Podstawowa idea opiera się na przybliżaniu kształtu danego obiektu za pomocą sklejanego klocków o rosnącym wymiarze. Hipoteza Hodge'a głosi, że pewne klocki, zwane cyklami Hodge'a, dają się złożyć z pewnych innych klocków. (Aby zrozumieć, o jakie konstrukcje i o jakie klocki chodzi, należy skorzystać z rady Weinberga).

Hipoteza Poincarègo

ma swoje źródło w prostej obserwacji. Jeśli na pączek mamy nałożoną gumkę recepturkę, to przesuwając ją po powierzchni pączka możemy powolutku, bez rozerwań ściągnąć ją do punktu. Z obwarzankiem nie zawsze się to uda. Poincarè wiedział, że wszystkie dwuwymiarowe powierzchnie, w których każda gumka da się ściągnąć do punktu i które są w jednym kawałku oraz nie mają brzegu, wyglądają tak jak powierzchnia pączka, tzn. dają się bez rozerwań i zlepień przekształcić na sferę. Hipoteza Poincarègo mówi, że trójwymiarowe powierzchnie o wymienionych wyżej cechach wyglądają tak jak trójwymiarowa sfera, czyli powierzchnia czterowymiarowej kuli.

Hipoteza Riemanna

mówi o własności tzw. funkcji ζ Riemanna. Funkcja ta jest uogólnieniem na liczby zespolone funkcji, która każdej liczbie rzeczywistej $s > 1$ przypisuje sumę odwrotności s -tych potęg liczb naturalnych. Hipoteza Riemanna stwierdza, że zera funkcji ζ , które leżą w prawej półpłaszczyźnie, mają część rzeczywistą równą $1/2$.

Udowodnienie matematycznej poprawności teorii Yanga–Millsa

sprowadza się do wykazania, że teoria cząstek elementarnych posługuje się matematyką.

Znalezienie gładkich rozwiązań równania Naviera–Stokesa

opisującego przepływ lepkiej cieczy. Problem to mniej więcej pytanie o to, jak znaleźć prędkość i ciśnienie płynu, gdy znamy – odpowiednio regularne – siły na niego działające.

Hipoteza Bircha i Swinnertona–Dyera

dotyczy rozwiązywania równań w liczbach całkowitych. W ogólnym przypadku nie istnieje uniwersalna metoda pozwalająca stwierdzić, czy dane równanie (o współczynnikach całkowitych) ma rozwiązanie, czy nie. Hipoteza Bircha i Swinnertona–Dyera stwierdza, że w pewnych specjalnych przypadkach da się jednak rozstrzygnąć, czy równanie ma skończenie wiele, czy też nieskończenie wiele rozwiązań.

Powyższe problemy wybrano jako ważne, klasyczne pytania, które pozostają nierozwiązane od wielu lat. Oczywiście nawiązano również do słynnego wystąpienia Davida Hilberta w dniu 8 sierpnia 1900 roku na Drugim Międzynarodowym Kongresie Matematycznym w Paryżu. Hilbert ogłosił w swoim referacie 23 otwarte problemy matematyki, które w ogromnym stopniu wytyczyły rozwój matematyki w XX wieku. Jednym z problemów przedstawionych przez Hilberta była (obecnie na nowo „nominowana”) hipoteza Riemanna, która od ponad stu lat jest powszechnie uważana za jeden z najważniejszych otwartych problemów matematyki.

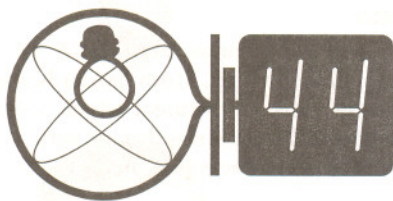
Intencją CMI Millennium Prize Problems nie jest, jak twierdzą fundatorzy, ukierunkowanie matematyki następnego stulecia. Chodzi raczej o zwrócenie uwagi na pewien zbiór pytań, które przez dziesiątki lat pozostają bez rozwiązania, pomimo intensywnych badań.

Ciekawa jest również zwięźle opisana szczegółowa procedura ewentualnego przyznawania nagród (niestety nie w pełni jednoznaczna). Najważniejsze jest to, że rozpatrywane będą tylko takie rozwiązania, które w dwa lata po opublikowaniu w renomowanym czasopiśmie matematycznym o światowym zasięgu będą cieszyć się powszechną akceptacją środowiska matematycznego.

Bez zgody wszystkich wypracowujących decyzję osób żadne szczegóły procesu rozpatrywania rozwiązania nie będą mogły zostać ujawnione przed upływem siedemdziesięciu pięciu lat od zakończenia sprawy. Matematyka jest wieczna.

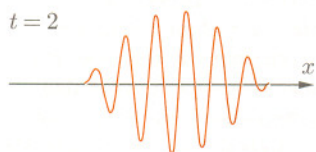
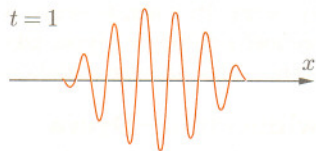
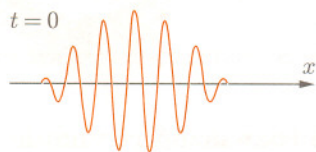
P.Z. i W.S.

Dziękujemy Jackowi Pliszce za zwrócenie uwagi na nowe możliwości zarobkowania matematyków.



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.



Paczka falowa reprezentująca elektron (obraz w kolejnych chwilach).

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/2000

Przypominamy treść zadań:

296. Gęstość masy pewnej planety zależy liniowo (tzn. wg wzoru $\rho = \rho_0 - kr$) od odległości r od jej środka, przy czym na powierzchni planety spada do $1/4$ gęstości maksymalnej. W jakiej odległości od środka natężenie pola grawitacyjnego jest maksymalne?

297. Jak wiadomo, ruch elektronu należy rozpatrywać jako rozprzestrzenianie się fali o długości danej wzorem $\lambda = h/p$. Częstotliwość tej fali z kolei możemy znaleźć ze wzoru $\nu = E/h$ (wzór ten najczęściej bywa podawany w związku z kwantami promieniowania, ale jednak stosuje się także do cząstek mających masę - vide równanie Schrödingera). Dla elektronu swobodnego $E = E_{\text{kin}} = mv^2/2$ (o ile prędkość jest nieduża w porównaniu z prędkością światła), a dalej, mnożąc długość fali przez jej częstotliwość, otrzymamy prędkość $v = \lambda\nu = E/p = v/2$. Gdzie tkwi błąd?

296. Natężenie pola grawitacyjnego jest dane wzorem $g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$, gdzie $M(r)$ jest masą zawartą wewnątrz kuli o promieniu r , czyli $M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r)r^2 dr$. Otrzymujemy

$M(r) = 4\pi r^3(\rho_0/3 - kr/4)$, $g(r) = G \cdot 4\pi r(\rho_0/3 - kr/4)$. Nietrudno przekonać się, że jeśli funkcja $\rho(r)$ osiąga wartość $\rho_0/4$ dla $r = R$ (promień planety), to $g(r)$ osiąga swoją maksymalną wartość dla $r = (8/9)R$.

297. W mechanice kwantowej rozpatruje się elektron jako tzw. paczkę falową, czyli falę o ograniczonych rozmiarach przestrzennych (rys.). Okazuje się, że prędkość przemieszczania się całej paczki (czyli prędkość elektronu) nie jest równa prędkości przemieszczania się maksimum fali; pierwszą z tych prędkości nazywa się prędkością grupową, a drugą - prędkością fazową. Wyprowadzony w treści zadania paradoksalny wzór oznacza w istocie, że prędkość fazowa fali elektronowej jest dwukrotnie mniejsza od jej prędkości grupowej.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/2000

Przypominamy treść zadań:

399. Niech $n > 1$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Ile jest permutacji (x_1, \dots, x_n) zbioru $\{1, \dots, n\}$ o tej własności, że dla każdego $i = 1, \dots, n-1$ różnica $x_i - x_{i+1}$ dzieli się przez i ?

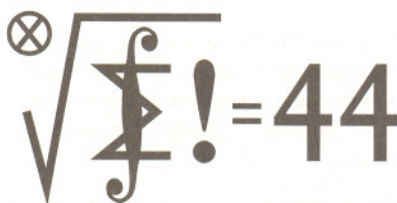
400. Znaleźć wszystkie pary funkcji $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mających ciągle pochodne drugiego rzędu, spełniających równania $(fg)' = f'g'$ oraz $(fg)'' = f''g''$ i takie, że iloczyn fg nie jest funkcją stałą.

399. Jest jasne, że w dowolnej „dobrej” permutacji (x_1, \dots, x_n) zbioru $\{1, \dots, n\}$ ostatnie dwa miejsca muszą być zajęte przez liczby 1 oraz n . Jeśli ostatni wyraz takiej permutacji jest równy n , będziemy ją nazywali permutacją typu α ; gdy ostatni wyraz jest jedynką, będziemy mówili, że permutacja jest typu β .

Jeżeli (x_1, \dots, x_n) jest „dobrą” permutacją typu α (a więc jeżeli $x_n = n, x_{n-1} = 1$), to (x_1, \dots, x_{n-1}) jest „dobrą” permutacją zbioru $\{1, \dots, n-1\}$, typu β .

Jeśli natomiast (x_1, \dots, x_n) jest „dobrą” permutacją typu β ($x_n = 1, x_{n-1} = n$), wówczas $(x_1 - 1, \dots, x_{n-1} - 1)$ jest „dobrą” permutacją zbioru $\{1, \dots, n-1\}$, typu α .

To ustala bijekcję między „dobrymi” permutacjami zbiorów $\{1, \dots, n\}$ oraz $\{1, \dots, n-1\}$. Zatem liczba „dobrych” permutacji jest taka sama dla każdego n . Dla $n = 2$ są dwie takie permutacje. Stąd wniosek, że dla każdego n istnieją dokładnie dwie „dobre” permutacje.



po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 290 (WT=2,91) i 291 (WT=2,16)
z numeru 1/2000

Tomasz Wietecha	- Tarnów	45,36
Jarosław Łazuka	- Warszawa	33,58
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	32,24
Aleksander Surma	- Myszków	31,54
Marek Wójcicki	- Szczecin	28,23
Artur Arciszewski	- Kielce	26,43
Grzegorz Miłoś	- Mielec	24,40

Siódmym z kolei Weteranem Klubu 44 F
został pan Tomasz Wietecha.

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 391 (WT=2,96) i 392 (WT=1,24)
z numeru 12/1999

Rafał Pikula	- Wrocław	42,57
Jarosław Łazuka	- Warszawa	41,06
Tomasz Wietecha	- Tarnów	39,18
Michał Adamaszek	- Kęty	38,77
Jerzy Witkowski	- Radlin	38,52
Andrzej Józwiak	- Kielce	37,72

400. Niech $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami spełniającymi podane warunki. Mamy więc równania

$$(1) \quad f'g + fg' = f'g'$$

oraz $(f'g')' = ((fg)')' = f''g''$, czyli

$$(2) \quad f''g' + f'g'' = f''g'';$$

wiemy ponadto, że w pewnych punktach pochodna $(fg)'$ (równa iloczynowi $f'g'$) przyjmuje wartości niezerowe.

Niech J będzie dowolnym maksymalnym przedziałem, na którym $f'g' \neq 0$ (czyli *składową spójną* otwartego niepustego zbioru $\{x: f'(x)g'(x) \neq 0\}$). Rozważając równanie (1) na przedziale J , możemy je podzielić stronami przez niezerowy iloczyn $f'g'$, otrzymując zależność $(f/f') + (g/g') = 1$; istnieje zatem funkcja $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ mająca ciągłą pochodną i taka, że

$$(3) \quad \frac{f}{f'} = \frac{1}{2} - h, \quad \frac{g}{g'} = \frac{1}{2} + h \quad \text{na przedziale } J.$$

Różniczkując stronami równania $(\frac{1}{2} - h)f' = f$ oraz $(\frac{1}{2} + h)g' = g$ dostajemy związki $(\frac{1}{2} - h)f'' = (1 + h')f'$, $(\frac{1}{2} + h)g'' = (1 - h')g'$ na przedziale J .

Mnożymy obie strony równania (2) przez $(\frac{1}{2} - h)(\frac{1}{2} + h)$, uwzględniając powyższe związki:

$$(\frac{1}{2} + h)(1 + h')f'g' + (\frac{1}{2} - h)(1 - h')g'f' = (1 + h')(1 - h')f'g' \quad \text{na } J.$$

Po podzieleniu przez $f'g'$ i wymnożeniu wyrażeń w nawiasach otrzymujemy równanie

$$(4) \quad (2h + h') \cdot h' = 0 \quad \text{na przedziale } J.$$

Weźmy pod uwagę zbiór otwarty $U = \{x \in J: h'(x) \neq 0\}$. Jeżeli jest on pusty, to $h = \text{const}$ na przedziale J ; prawe strony wzorów (3) są wielkościami stałymi, ich suma wynosi 1, a żadna z nich nie jest zerem (równość $f/f' \equiv 0$ nie jest możliwa). Możemy więc oznaczyć te stałe przez $1/p$ oraz $1/q$; równania (3) przybierają postać $f' = pf$, $g' = qg$, i wobec tego

$$(5) \quad \begin{cases} f(x) = Ae^{px}, & g(x) = Be^{qx} & \text{dla } x \in J; \\ A, B, p, q - \text{stałe } \neq 0; & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{cases}$$

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy zbiór U jest niepusty. Niech I będzie dowolnym maksymalnym przedziałem zawartym w tym zbiorze (czyli jego spójną składową). Z równania (4) wynika, że na przedziale I zachodzi równość $h' = -2h$, więc

$$(6) \quad h(x) = \frac{1}{2}Ce^{-2x} \quad \text{dla } x \in I$$

(C - stała; czynnik $\frac{1}{2}$ wprowadziliśmy dla wygody dalszych rachunków; $C \neq 0$, bo $h' \neq 0$ na I).

Gdyby któryś z końców przedziału I był liczbą α , należąca do przedziału J , wówczas z ciągłości funkcji h' na J wynikałaby równość $h'(\alpha) = -Ce^{-2\alpha}$; natomiast z maksymalności przedziału I (jako składowej zbioru U) wynikałaby równość $h'(\alpha) = 0$. Sprzeczność dowodzi, że oba końce przedziału I muszą być jednocześnie końcami przedziału J ; to znaczy, że $I = J$, więc wzór (6) jest słuszny dla wszystkich $x \in J$. Równania (3) przybierają postać

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1 - Ce^{-2x}}{2} = \frac{e^{2x} - C}{2e^{2x}}, \quad \frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{e^{2x} + C}{2e^{2x}} \quad \text{dla } x \in J.$$

Przyjmijmy: $\varphi(x) = e^{2x} - C$, $\psi(x) = e^{2x} + C$. Przepisując otrzymane równania jako $f/f' = \varphi/\varphi'$ oraz $g/g' = \psi/\psi'$ wnosimy, że

$$(7) \quad \begin{cases} f(x) = A(e^{2x} - C), & g(x) = B(e^{2x} + C) & \text{dla } x \in J; \\ A, B, C - \text{stałe } \neq 0. \end{cases}$$

Uzyskane w rozważonych przypadkach wzory (5) i (7) przedstawiają funkcje f i g na przedziale J .

Przypuśćmy, że przedział J nie wypełnia całego zbioru \mathbf{R} , a więc któryś z jego końców jest liczbą rzeczywistą β . Powtarzamy wcześniejsze rozumowanie: z ciągłości funkcji f' i g' wynika, że

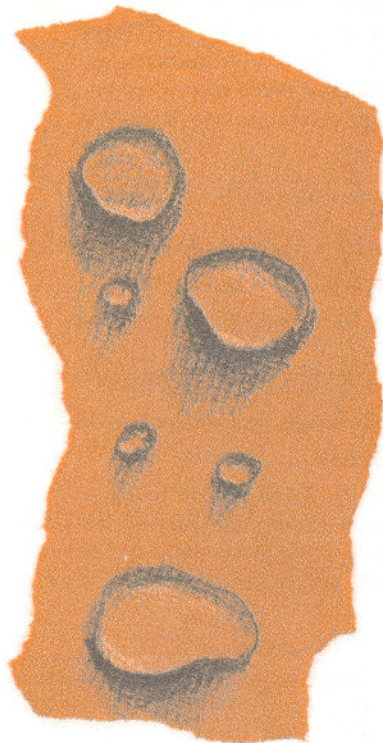
$$f'(\beta)g'(\beta) = \begin{cases} pqABe^{(p+q)\beta} & \text{dla } f, g \text{ danych wzorami (5),} \\ 4ABe^{4\beta} & \text{dla } f, g \text{ danych wzorami (7);} \end{cases}$$

jest to wartość niezerowa. Natomiast z maksymalności przedziału J jako składowej zbioru $\{x: f'(x)g'(x) \neq 0\}$ wynika, że $f'(\beta)g'(\beta) = 0$. Sprzeczność dowodzi, że $J = \mathbf{R}$. Tak więc wzory (5) oraz (7) - teraz już dla $x \in \mathbf{R}$ - przedstawiają wszystkie pary funkcji, o jakie chodzi. Łatwo sprawdzić, że każda taka para f, g istotnie ma wymagane własności.



Rozwiązanie zadania M 927.

Niech K, L, M, N będą środkami krawędzi AB, BC, CD, DA odpowiednio. Czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem, którego pary boków są równoległe do krawędzi AC i BD . Równość $KM = LN$ jest równoważna temu, że $KLMN$ jest prostokątem, a to z kolei jest równoważne prostopadłości krawędzi BD i AC . Stąd i z zadania 925 wynika teza.



Wspominaliśmy przy różnych okazjach (ostatnio PWN *Delta* 6/1999), jak skutecznym narzędziem do wyznaczania mas obiektów niebieskich jest trzecie prawo Keplera. Inaczej mówiąc, masę obiektu centralnego, np. planety, łatwo jest wyznaczyć, jeżeli tylko planeta ma satelitę, wszystko jedno czy naturalnego, czy sztucznego. Niestety, jest też prawdą, że jeżeli planeta nie ma satelity, to nie da się wyznaczyć jej masy. Dlatego masy Merkurego i Wenus były znane jedynie w przybliżeniu, dopóki koło tych planet nie przeleciały sondy kosmiczne. To na podstawie ich ruchu masy planet zostały obliczone z wysoką dokładnością i to bez uciekania się do jakichkolwiek pomocniczych założeń.

Dobrze by było, gdyby tę samą metodę dało się zastosować do wyznaczania mas galaktyk. Wiadomo wszak, że duże galaktyki mają często satelity w postaci mniejszych galaktyk lub gromad kulistych. Dla samych gromad kulistych takimi satelitami mogą być ich własne gwiazdy poruszające się na peryferiach gromad. Niestety, już ruch gwiazdy względem gromady, a tym bardziej jednej galaktyki względem drugiej, zachodzi tak powoli, że nie ma mowy o wyznaczeniu wszystkich jego składowych. U takich satelitów można mierzyć tylko prędkość radialną, tzn. składową wzdłuż promienia widzenia. Pomiar prędkości radialnej jednego satelity nadal nic nie daje. Jeżeli jednak takich satelitów jest wiele, to przy założeniu, że ich ruchy są przypadkowe, można na podstawie prędkości radialnych oszacować prędkości całkowite, a to za pośrednictwem prawa Keplera umożliwi oszacowanie masy ciała centralnego.

Procedurę taką przeprowadzono niedawno dla galaktyki NGC 5084. Grupa kanadyjskich astronomów zmierzyła prędkości radialne ośmiu małych galaktyk podejrzewanych o to, że są jej satelitami. Galaktyka NGC 5084 okazała się gigantem o masie sięgającej 10^{13} mas Słońca. Pamiętajmy, że nasza Galaktyka ma masę szacowaną na zaledwie 2×10^{11} mas Słońca, a jest przeciętną galaktyką spiralną. Przypuszcza się, że tak wielka masa NGC 5084 to skutek jej żarłoczości, czyli tzw. galaktycznego kanibalizmu. Widocznie w przeszłości wchłonęła ona większość swoich mniejszych towarzyszek, co – jak się wydaje – jest w świecie galaktyk zjawiskiem dość częstym. Argumentem za tym byłby fakt, że niemal wszystkie z tych ośmiu jej towarzyszek obiegają ją w kierunku przeciwnym do kierunku rotacji giganta. A symulacje numeryczne sugerują, że obiekty obiegające taką galaktykę „wstecz” są odporniejsze na pożarcie. Nawiasem mówiąc, nasza Galaktyka, choć taka niepozorna, akurat zjada pewną karłowatą galaktykę położoną w Strzelcu.

Tomasz KWAST

Sierpień



Rozwiązanie zadania F 529.

Ruch cząsteczek wody rozpatrujemy jak ruch ciała wyrzuconego ukośnie pod kątem α do poziomu. Dla poziomego zasięgu wody mamy

$$s = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g},$$

a stąd

$$v = \sqrt{\frac{sg}{\sin 2\alpha}}.$$

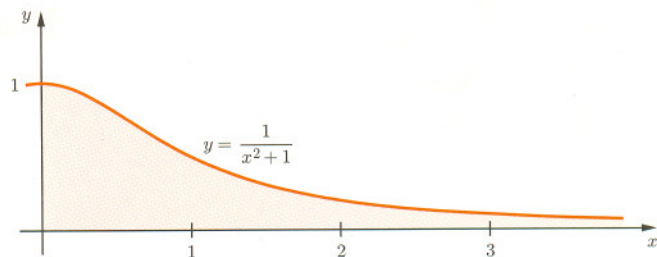
Objętość wody wylewanej w ciągu 1 minuty wynosi więc

$$V = Svt = St\sqrt{\frac{sg}{\sin 2\alpha}} \approx 0,069 \text{ m}^3.$$

Cefeusz jest gwiazdozbiorem okółbiegunowym i widać go w każdej porze roku, w sierpniowe noce jest jednak najwyżej na niebie. Jego jasna gwiazda, delta, jest pewnego rodzaju gwiazdą wzorcową, od niej bowiem pochodzi nazwa całego typu gwiazd zmiennych pulsujących, cefeid. Jej zmienność odkryli w 1784 r. dwaj angielscy astronomowie E. Pigott i J. Goodricke. Dużo później stwierdzono, że u tego typu gwiazd jasność (absolutna) zależy od okresu zmian jasności. Cefeidy są gwiazdami tak jasnymi, że widać je nawet w innych galaktykach, dzięki czemu umożliwiają wyznaczanie odległości swoich macierzystych galaktyk. Pomiar odstępu czasu między kolejnymi minimami lub maksimami jasności (bez precyzyjnego wyznaczania samej jasności) wystarcza do określenia jej jasności absolutnej, a wtedy pomiar jasności widomej daje już odległość gwiazdy, a więc i galaktyki. Przez cały rok widzimy też inną cefeidę, mianowicie Gwiazdę Polarną, ale jej jasność zmienia się w tak małym zakresie, że bez przyrządów nie da się tego dostrzec.

Wenus jest w Lwie i z trudem widać ją po zachodzie Słońca. Mars jest w Raku i jeszcze trudniej widać go tuż przed wschodem Słońca. Jowisz i Saturn są w Byku i planety te widać w drugiej połowie nocy. Pełnia Księżycza wypada 15 VIII, nów 29 VIII. Księżyc zakryje Marsa 28 VIII, ale zjawisko to będzie widoczne tylko ze Skandynawii i obszarów arktycznych.

T.K.



Rys. 1

Najgorsze przybliżenia liczby π (3)

Całka. Wychodzimy od wzoru $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$, który

geometrycznie oznacza tyle, że pole pod wykresem funkcji określonej wzorem $\frac{1}{x^2+1}$ dla x rzeczywistych dodatnich jest równe $\frac{\pi}{2}$ (rys. 1).

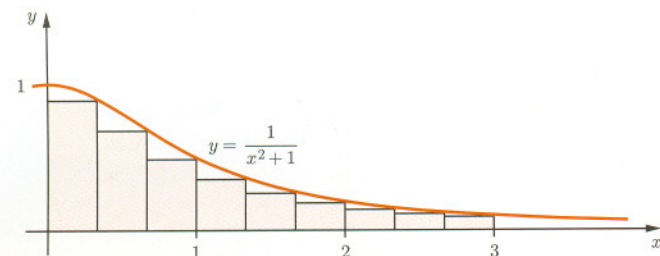
Korzystając z tego, że dla dowolnej funkcji ciągłej $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, dla której całka $\int_0^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna, zachodzi równość

$$(3.141) \quad \int_0^{\infty} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n^2-1}{n}\right) + f\left(\frac{n^2}{n}\right) \right),$$

otrzymujemy

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left(\frac{n^2}{n^2+1} + \frac{n^2}{n^2+4} + \frac{n^2}{n^2+9} + \dots + \frac{n^2}{n^2+(n^2-1)^2} + \frac{n^2}{n^2+n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+4} + \frac{1}{n^2+9} + \dots + \frac{1}{n^2+(n^2-1)^2} + \frac{1}{n^2+n^4} \right).$$

Sens geometryczny wzoru (3.141) przedstawiony jest w przypadku $n = 3$ na rysunku 2.



Rys. 2

Dla $n = 5$ powyższa suma ma 25 składników i daje przybliżenie będące ułamkiem o 39-cyfrowym liczniku i mianowniku. Jest ono jednak dalekie od doskonałości: $\pi \approx 2,55439525$.

Przy $n = 7$ licznik ma 75 cyfr, a mianownik 74. Przybliżenie $\pi \approx 2,7177795$ bardziej przypomina e niż π .

Biorąc $n = 10$ i sumując 100 wyrazów, otrzymujemy iloraz 181-cyfrowych liczb dający $\pi \approx 2,84324218$.

Trójkę przekraczamy dla $n = 22$, kiedy to otrzymujemy $\pi \approx 3,0053852$. Licznik i mianownik ułamka, który wówczas otrzymujemy, mają po 1118 cyfr.

Przy $n = 100$ mamy $\pi \approx 3,111594$, przy $n = 200$ wzór daje $\pi \approx 3,1265928$, natomiast dla $n = 300$ po wysumowaniu 90000 ułamków otrzymujemy $\pi \approx 3,1315927$. Ostatnie przybliżenie daje aż sześć dobrych cyfr po przecinku. Sześć z pierwszych siedmiu, dodajmy, bo druga cyfra jest błędna, choć pięć następnych jest poprawnych.

JWR

GRY (15)

Analiza wartości liczb Grundy'ego $r_6(n)$ zamieszczonych w tabeli poniżej pokazuje, że nasz przeciwnik, który zaczyna grę, ma pozycję wygrywającą. Jego jedynym ruchem wygrywającym jest podział wyjściowego stosu na stosy mające 17 i 20 bierek. Jeżeli, jak poprzednio, przeciwnik zacznie od takiego właśnie ruchu, pozostanie nam liczyć na błąd przeciwnika w dalszej fazie gry.

n	$r(n)$	$r_6(n)$
1	0	0
2	0	0
3	1	1
4	0	0
5	2	2
6	1	—
7	0	0
8	2	1
9	1	3
10	0	0

n	$r(n)$	$r_6(n)$
11	2	1
12	1	3
13	3	0
14	2	2
15	1	3
16	3	0
17	2	4
18	4	3
19	3	2
20	0	4

n	$r(n)$	$r_6(n)$
21	4	3
22	3	0
23	0	4
24	4	3
25	3	0
26	0	4
27	4	5
28	1	0
29	2	3
30	-3	5

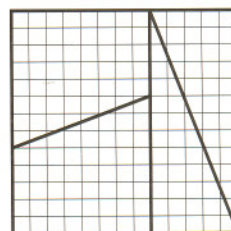
n	$r(n)$	$r_6(n)$
31	1	0
32	2	3
33	4	5
34	1	0
35	2	3
36	4	5
37	1	4
38	2	3
39	4	5
40	1	4

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (22)

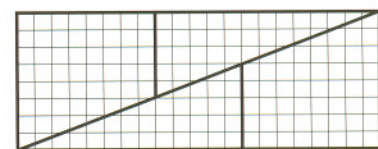
Kwadrat o boku 13 można podzielić na cztery części jak na rysunku 3. Z tych części można złożyć prostokąt o bokach 8 i 21 (rys. 4).

Jak to możliwe, że pole kwadratu jest równe 169, podczas gdy prostokąt ma pole 168?

JWR



Rys. 3



Rys. 4

Korespondencję do Γ -limatiastu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl