

SPIS TREŚCI NUMERU 7(314)

Prawdopodobieństwo,
 informacja i zasady
 nieoznaczoności
Iwo Białynicki-Birula

Aktualności
 (nie tylko) fizyczne

Hipparcos i paralaksy
Tomasz Kwast

Zadania

Mała Delta

Algorytmy i złożoność
 obliczeniowa
Damian Niwiński

Klub 44

Patrz w niebo

Lipiec

Gammalimatias

W następnym numerze:

Łańcuchy Markowa
 a ryzyko kredytowe

Okładki i ilustracje
Anna Ludwicka

Rysunki techniczne
Marcin Adamski

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://www.mimuw.edu.pl/delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
 Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichoński
 – wiceprzewodniczący
 Krzysztof Ciesielski
 Jan A. Gaj
 Piotr Goldstein
 Tomasz Hofmokl
 Andrzej Hryniewicz
 Wiesław A. Kamiński
 Marta Kicińska-Habior
 Krzysztof Maślanka
 Janusz Matkowski
 Andrzej Mąkowski
 Zdzisław Pogoda
 Michał Różycka
 Konrad Rudnicki
 Grzegorz Sitarski
 Andrzej Woszczyk
 Eligiusz Złotkiewicz
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol
 Krzysztof Biesaga
 Ewa Czuchry
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nac.
 Tomasz Kwast
 Anna Ludwicka
 Anna Rudnik
 Witold Sadowski
 Joanna Udalska
 Anna Wojtyra
 Piotr Zalewski – z-ca red. nac.

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
 tel. 853-59-61
 BARTOL@MIMUW.EDU.PL
 Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.
 Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
 w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2000 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2000 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na IV kwartał 2000 r. wynosi 9 zł.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaką”.
- Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
- Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.
- Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Iwo BIAŁYNICKI-BIRULA

Informacja to jedno z kluczowych pojęć obecnej epoki. Celem tego artykułu jest przedstawienie *zasady nieoznaczoności* – jednej z podstawowych zasad teorii kwantowej – w takiej formie, w której pojęcie informacji będzie odgrywało podstawową rolę. Tradycyjna postać tej zasady, pochodząca od jej odkrywcy Wernera Heisenberga, dana jest wzorem

$$(1) \quad \Delta x \Delta p \geq h.$$

Iloczyn niepewności położenia i niepewności pędu nie może być mniejszy od stałej Plancka. Heisenberg wyraził tę zasadę w następujący sposób: „Im dokładniej określone jest położenie, tym gorzej znany jest pęd i na odwrót”. Wzór przedstawiający zasadę nieoznaczoności stał się znakiem firmowym teorii kwantowej, podobnie jak równanie Einsteina $E = mc^2$ stało się znakiem firmowym teorii względności. W tym artykule pokażę, że bardziej trafne sformułowanie tej zasady można uzyskać, przedstawiając niepewność przy użyciu pojęcia informacji. Przy tej okazji będziemy mogli lepiej poznać istotę informacji i nauczymy się także precyzyjnie mierzyć jej ilość.

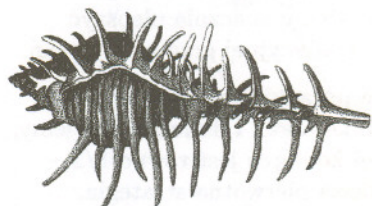
Rozpoczniemy od spostrzeżenia, iż niepewność i informacja to dwie strony tego samego medalu. Uzyskując informację, likwidujemy niepewność i na odwrót – tracąc informację, powiększamy niepewność. Zdobywanie informacji można traktować jako proces podobny do napełniania wodą zbiornika. Napływająca woda (informacja) wypełnia pustą przestrzeń zbiornika (niepewność). Objętość zbiornika można mierzyć ilością wody, którą można w nim zmieścić. Możemy zatem mierzyć niepewność i informację tą samą miarą – posługując się tą samą jednostką. Jednostką informacji jest *bit*. Oczywiście jest to jednostka bardzo mała i dlatego posługujemy się zazwyczaj jednostką 8 razy większą – *bajtem*, która występuje na ogół w dużych porcjach w postaci kilobajtów, megabajtów, gigabajtów i terabajtów. Skąd wzięły się te jednostki i jak wiążą się one z pomiarem ilości informacji? Za datę narodzin współczesnej teorii informacji przyjmujemy rok 1948, w którym amerykański matematyk i inżynier Claude Shannon sformułował matematyczną teorię łączności. W teorii tej podstawową rolę odgrywa sławny wzór Shannona

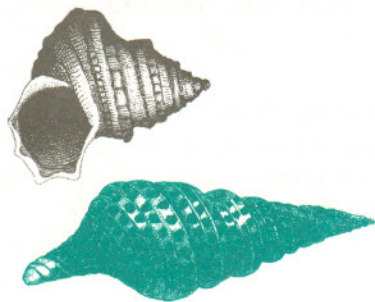
$$(2) \quad H = - \sum p_i \log_2 p_i,$$

w którym liczby p_i oznaczają prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzeń, o których więcej powiem w dalszym ciągu. We wzorze Shannona H oznacza informację wyrażoną w bitach. Ponieważ prawdopodobieństwo jest zawsze liczbą mniejszą od jedności, informacja jest wielkością nieujemną, logarytm dwójkowy liczby mniejszej od 1 jest ujemny.

W celu uzasadnienia swojego wzoru, Shannon posłużył się związkiem między niepewnością i informacją. Wyjaśnimy poniżej znaczenie wzoru Shannona, posługując się znaną wszystkim grą w 20 pytań. Najpierw jednak omówimy kilka podstawowych własności informacji i sposobu jej zapisu. Na to, by informacja uzyskała konkretną treść, założymy, że jest ona zakodowana w ciągu znaków o ustalonej długości. W ogólnym przypadku nie musi to być tekst słowny, może to być przekaz muzyczny albo graficzny. Będziemy zakładać, że ilość informacji zawarta w takim ciągu znaków jest proporcjonalna do jego długości; dwa razy grubsza książka zawiera dwa razy więcej informacji. Posługując się terminologią fizyczną, można powiedzieć, że informacja jest wielkością ekstensywną, proporcjonalną do objętości nośnika, tak jak energia, masa, czy entropia. W dalszych rozważaniach przyjmiemy najprostszy możliwy sposób zapisu, korzystający z alfabetu składającego się jedynie z dwóch znaków: 0 i 1. Jest to zapis bardzo naturalny dla komputera, który w swej istocie rozumie tylko taki alfabet binarny. W języku komputera słowem jest ciąg zer i jedynek o długości N . Liczba N mierzy ową objętość nośnika. Informacja zawarta w słowie jest zatem proporcjonalna do N . Umówimy się, że współczynnik proporcjonalności w tym związku jest równy jedności, to znaczy, że

$$(3) \quad \text{Informacja} _ H = \text{Długość} _ \text{Słowa}.$$





Łatwo obliczyć, że istnieje 2^N różnych słów binarnych o długości N . Między długością słowa i liczbą możliwych słów zachodzi więc związek

$$(4) \quad \text{Długość_Słowa} = \log_2(\text{Liczba_Słów}).$$

Umowa nasza oznacza zatem, że, kładąc we wzorze (3) współczynnik równy jedności, przyjęliśmy jako jednostkę pomiaru informacji jeden bit; liczba liter w binarnym słowie równa się liczbie bitów. Jeżeli wszystkie słowa są równie prawdopodobne, to prawdopodobieństwo p wystąpienia danego słowa wynosi

$$(5) \quad p = 1/\text{Liczba_Słów}.$$

Otrzymujemy zatem wynik, iż informacja zawarta w słowie, dla którego prawdopodobieństwo wystąpienia wynosi p , jest równa

$$(6) \quad H(p) = -\log_2 p.$$

Zilustruję teraz ten wynik na przykładzie gry w 20 pytań. Wykażę, że określona w powyższy sposób miara informacji jest po prostu równa liczbie pytań, które są potrzebne do odgadnięcia słowa. Rozważania te ograniczę na razie tylko do tej uproszczonej sytuacji, gdy wszystkie słowa są równoprawdopodobne. Dla ułatwienia obliczeń ponumeruję wszystkie słowa o długości N kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 2^N i zastosuję następujący sposób opisu procesu zgadywania. Mamy przed sobą 2^N zakrytych komórek. W jednej z nich znajduje się SKARB. Miejsce ukrycia skarbu jest informacją, którą chcemy osiąść. Znalezienie tego skarbu jest oczywiście tym samym, z matematycznego punktu widzenia, co odgadnięcie słowa. Dla zlokalizowania skarbu jako pierwsze zadamy następujące pytanie:

Czy skarb znajduje się w lewej połowie komórek?

Jeżeli odpowiedź na pierwsze pytanie brzmi TAK, to drugie pytanie będzie brzmiało:

Czy skarb znajduje się w pierwszej ćwiartce komórek?

Jeżeli odpowiedź na pierwsze pytanie brzmi NIE, to drugie pytanie będzie brzmiało:

Czy skarb znajduje się w trzeciej ćwiartce komórek?

Kontynuując taką strategię, odgadniemy z pewnością po dokładnie N pytaniach miejsce ukrycia skarbu. Niepewność co do położenia skarbu, istniejąca na początku, zostaje całkowicie zlikwidowana przy użyciu N pytań. Odpowiedź na każde pytanie daje nam 1 bit informacji, zmniejszając także niepewność o 1 bit. Liczba pytań potrzebna do uzyskania pełnej informacji jest równa niepewności, z jaką przystępujemy do gry. Jest ona jednocześnie równa ilości informacji uzyskanej po odgadnięciu miejsca ukrycia,

$$\text{Informacja_H} = \text{Liczba_Pytań}.$$

Proces zgadywania został przedstawiony na rysunku 1 w postaci „drzewa pytań” w prostym przypadku, gdy $N = 2$.

Rzeczywistość jest na ogół jednak bardziej złożona i rzadko do uzyskania informacji możemy skorzystać z tak banalnej strategii. Problem doboru odpowiedniej strategii pojawia się dlatego, że na ogół prawdopodobieństwa występowania różnych konfiguracji nie są jednakowe. Wytlumaczę to na przykładzie zwykłego języka. Gdy, grając w szubienicę, mamy do odgadnięcia słowo zawierające zestaw liter KU_A, to nie wiemy, czy ma to być KULA, KUMA, KUNA, KUPA czy KURA. Jeżeli, natomiast, spotkamy się z zestawem ŚW_T, to wiemy, że szukane słowo to ŚWIT. Dzieje się tak dlatego, iż kombinacja liter KU_A występuje często, zestaw zaś ŚW_T występuje rzadko, prawdopodobieństwo jego wystąpienia jest małe i informacja niesiona przez ten zestaw liter, zgodnie ze wzorem (6), jest duża. Znając prawdopodobieństwa wystąpienia różnych słów, możemy znacznie ulepszyć strategię ich odgadywania. Tak właśnie robimy w tradycyjnej grze w 20 pytań.

Zilustruję tę nową strategię znowu na przykładzie poszukiwania skarbu. Przypuśćmy, że jest on ukryty w jednej z czterech komórek i dodatkowo wiemy, że prawdopodobieństwo znalezienia go w pierwszej komórce jest równe $1/2$, w drugiej $1/4$, w trzeciej i czwartej zaś po $1/8$. Nasza pierwotna strategia, polegająca na przepoławianiu zbioru komórek, pozwoli na znalezienie skarbu



Rys. 1



Rozwiązanie zadania M 922.

Załóżmy, że istnieje punkt S wewnątrz czworokąta $A_1A_2A_3A_4$, który nie należy do żadnego koła. Wtedy jednak każdy z kątów A_iSA_{i+1} byłby ostry i suma tych kątów byłaby mniejsza niż 360° . Sprzeczność.

zawsze po dwóch pytaniach. Nie jest to jednak strategia optymalna, gdyż nie wykorzystujemy w niej informacji o prawdopodobieństwach. Skuteczniejsza jest strategia oparta na następujących pytaniach:

Czy skarb znajduje się w pierwszej komórce?

Jeżeli odpowiedź na pierwsze pytanie brzmi TAK, to znamy jego miejsce. Jeżeli odpowiedź na pierwsze pytanie brzmi NIE, to drugie pytanie będzie brzmiało:

Czy skarb znajduje się w drugiej komórce?

Jeżeli odpowiedź na drugie pytanie brzmi TAK, to znowu znamy jego miejsce. Jeżeli odpowiedź na drugie pytanie brzmi NIE, to trzecie pytanie będzie brzmiało:

Czy skarb znajduje się w trzeciej komórce?

Po trzecim pytaniu znamy już na pewno położenie skarbu. Drzewo pytań w tym przypadku przedstawione jest na rysunku 2. Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że nowa strategia jest gorsza, bo wymaga trzech, zamiast standardowych dwóch pytań dla czterech komórek. Jeżeli jednak skarb jest w pierwszej komórce, to znajdujemy go już po pierwszym pytaniu. Ten właśnie zysk przeważa nad stratą. Można to potwierdzić, obliczając średnią liczbę pytań, według znanego przepisu

$$\begin{aligned} \text{Średnia_Wartość} = & \text{Prawdopodobieństwo}_1 * \text{Wartość}_1 + \\ & + \text{Prawdopodobieństwo}_2 * \text{Wartość}_2 + \dots \end{aligned}$$

Średnia liczba pytań, obliczona według tego wzoru, dla naszego zadania wynosi

$$\text{Średnia_Liczba_Pytań} = \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{4} * 2 + \frac{1}{8} * 3 + \frac{1}{8} * 3 = \frac{7}{4} < 2.$$

Uzyskaliśmy, dzięki nowej strategii, wynik lepszy od poprzedniego *średnio* o 1/4 pytania. Można prosto wyjaśnić, na czym polegała nasza nowa strategia. Pytania dobieraliśmy w ten sposób, żeby prawdopodobieństwa uzyskania odpowiedzi twierdzącej i przeczącej były takie same. W podanym przykładzie udało się nam to osiągnąć. Przed sformułowaniem ogólnych wniosków rozważymy jeszcze jeden przykład. Tym razem skarb ukryty jest w jednej z sześciu komórek z następującymi prawdopodobieństwami:

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{5}, \quad p_3 = \frac{1}{5}, \quad p_4 = \frac{2}{15}, \quad p_5 = \frac{1}{15}, \quad p_6 = \frac{1}{15}.$$

Tutaj wybór optymalnej strategii nie jest już oczywisty. W ogólnym przypadku możemy jedynie dążyć do tego, by równy podział prawdopodobieństw uzyskać w jak najlepszym przybliżeniu. Jedna z rozsądnych strategii zdefiniowana jest przez drzewo pytań przedstawione na rysunku 3. Średnia liczba pytań wynosi w tym przypadku 37/15. Okazuje się, że nie jest to jeszcze strategia optymalna. Lepszy wynik dostajemy, zadając pytania według przepisu przedstawionego na rysunku 4. Mimo iż wydłużyliśmy listę pytań w niektórych przypadkach aż do czterech, średnia liczba pytań wynosi tylko 36/15 = 2,4.

Ponieważ liczba pytań określała nam ilość informacji, to *średnią* liczbę pytań można utożsamić ze *średnią* informacją. W ten sposób doszliśmy do uzasadnienia wzoru Shannona. Występująca w tym wzorze suma jest po prostu *średnią* informacją, obliczoną w ogólnym przypadku, gdy znane są wszystkie prawdopodobieństwa znalezienia skarbu w *i*-tej komórce. Można dowiedzieć, że niepewność jest największa, gdy wszystkie prawdopodobieństwa są równe i wynosi wtedy $\log_2 N$. Natomiast w przypadku, gdy wiemy, w której komórce znajduje się skarb, niepewność powinna być równa zero. I rzeczywiście, jeżeli wszystkie prawdopodobieństwa p_i , poza jednym z nich, są równe zero, to H jest równe zero, bo logarytm liczby 1 jest równy zero.

Wzór Shannona jest ogromnie ważny w teorii informacji, ponieważ związane jest z nim fundamentalne twierdzenie matematyczne, zwane twierdzeniem o bezsumowym kodowaniu. W naszej interpretacji, polegającej na zadawaniu pytań, głosi ono, że

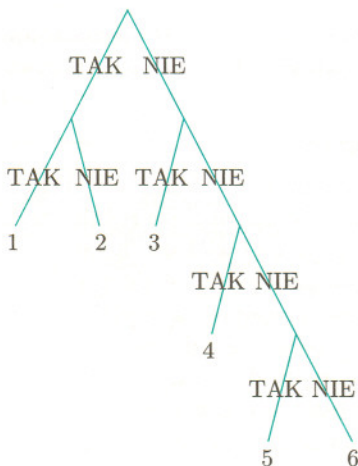
NIE ISTNIEJE STRATEGIA, KTÓRA ŚREDNIO DAJE MNIEJSZĄ LICZBĘ PYTAŃ, NIŻ OKREŚLA TO WZÓR SHANNONA.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Z twierdzenia tego wynika, że nie można już dalej poprawić strategii zgadywania w naszym drugim przykładzie i uzyskać wyniku lepszego niż 36/15. Obliczona ze wzoru Shannona wartość informacji wynosi bowiem w tym przypadku:

$$H = \frac{\log_2(3)}{3} + 2 * \frac{\log_2(5)}{5} + \frac{2 \log_2(15/2)}{15} + 2 * \frac{\log_2(15)}{15} = 2,3656.$$

Gdyby istniała strategia, która daje średnią liczbę pytań 35/15 (z ogólnego wzoru na średnią widać, że w tym przypadku średnie są zawsze wielokrotnościami 1/15), to byłoby to sprzeczne z twierdzeniem o bezszumowym kodowaniu, gdyż $35/15 = 2,3333 < 2,3656$.

Pora teraz na zastosowanie wprowadzonych pojęć do fizyki kwantowej. Dokonując pomiaru nad obiektem fizycznym, postępujemy podobnie, jak przy poszukiwaniu skarbu: dążymy do uzyskania informacji, czyli do usunięcia niepewności. Dla uproszczenia, rozważmy cząstkę poruszającą się tylko w jednym wymiarze, wzdłuż osi x . Podzielmy tę oś na jednakowe ponumerowane komórki o długości dx . Rozmiar komórki możemy uważać za miarę dokładności pomiaru. Im mniejsza komórka, tym dokładniejszy jest pomiar. Oprócz pomiarów położenia będziemy także dokonywali pomiarów pędu cząstki p_x w kierunku osi x . Oś pędu też podzielimy na jednakowe, ponumerowane komórki o długości dp , charakteryzujące dokładność pomiaru pędu. Teoria kwantów pozwala na obliczenie wszystkich prawdopodobieństw znalezienia cząstki w i -tej komórce na osi x i wykrycie jej pędu w j -tej komórce na osi p_x . Na podstawie tych prawdopodobieństw możemy obliczyć niepewność zgodnie ze wzorem Shannona. Otrzymujemy dwa takie wzory: jeden na niepewność położenia H_x , a drugi na niepewność pędu H_p . Nie ma żadnego ograniczenia na wartości tych dwóch wielkości rozważanych z osobna. Każda z tych dwóch miar niepewności może być równa dowolnej rzeczywistej liczbie nieujemnej. Komórek na osi rzeczywistej jest nieskończenie wiele i niepewność może być dowolnie duża. Jeżeli jednak wiemy dokładnie, w której komórce znajduje się cząstka, to niepewność jej położenia redukuje się do zera. Takie same własności ma też niepewność pędu,

$$0 \leq H_x < \infty, \quad 0 \leq H_p < \infty.$$

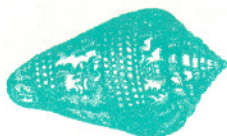
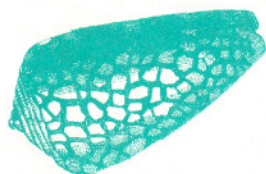
Ograniczenia na niepewności położenia i pędu, wyrażające zasadę nieoznaczoności, pojawiają się przy jednoczesnym rozważaniu niepewności położenia i pędu. Mam tu na myśli taką sytuację, gdy dokonujemy pomiaru zarówno położenia i pędu na cząstce, która jest w tym samym stanie kwantowym, to znaczy została za każdym razem tak samo przygotowana do pomiaru. Może to, na przykład, oznaczać, że użyte do pomiaru cząstki zostały wytworzone w akceleratorze pracującym w trybie ciągłym. Kwantowa zasada nieoznaczoności, wyrażona przez wielkości H_x i H_p , głosi, że suma dla każdego stanu kwantowego musi być większa niż pewna stała C , będąca funkcją iloczynu $dx dp$ wielkości komórek dx i dp charakteryzujących dokładność pomiaru,

$$H_x + H_p > C.$$

Niestety, nie znamy dokładnej zależności tej stałej od $dx dp$. Przed piętnastoma laty udało mi się jedynie wyprowadzić wzór na C , słuszny dla małych wartości $dx dp$, z którego wynika nierówność

$$H_x + H_p > \log_2(eh/2dx dp).$$

We wzorze tym e oznacza podstawę logarytmów naturalnych, h zaś jest stałą Plancka. Z nierówności tej widać, że gdy dokładność pomiaru x i p rośnie, czyli dx i dp maleją, to prawa strona nierówności staje się coraz większa, a zatem suma niepewności położenia i pędu rośnie. Jeżeli cząstka znajdzie się w jednej z komórek na osi x , to co prawda H_x znika, ale nieoznaczoność w pędzie jest co najmniej równa stałej C . Nie można więc jednocześnie zlokalizować cząstki kwantowej w przestrzeni i zredukować niepewności pędu do zera. Nie można nigdy uzyskać jednocześnie pełnej informacji o położeniu cząstki i o jej pędzie. Posługując się pojęciem informacji, można więc nadać nową formę starej zasadzie nieoznaczoności odkrytej przed przeszło siedemdziesięcioma laty przez Wernera Heisenberga.



Rozwiązanie zadania M 923.

Niech s będzie okręgiem o największym promieniu, S – jego środkiem, r – jego promieniem, $A_1 A_2 A_3$ – kolejnymi wierzchołkami leżącymi na s . Załóżmy, że wielokąt nie zawiera się w s . Wtedy istnieje wierzchołek A_k leżący na zewnątrz s . Możemy bez straty ogólności założyć, że A_k leży po tej samej stronie prostej $A_2 S$ co A_3 i k jest najmniejsze z możliwych. Łatwo zauważyć, że promień R okręgu s_1 opisanego na trójkącie $A_2 A_3 A_k$ jest większy niż r , a wierzchołki A_2, A_3, \dots, A_k leżą w s_1 . Jeśli $A_3 A_k$ są kolejnymi wierzchołkami, to otrzymujemy sprzeczność. Załóżmy więc, że nie są kolejne. Rozważmy wszystkie okręgi opisane na trójkątach $A_3 A_l A_k$, $3 < l < k$. Ich promienie są nie mniejsze niż R . Niech ten z nich (s_2), który ma najmniejszy promień, przechodzi przez A_l ($3 < l < k$). Jasne jest, że wszystkie wierzchołki A_3, A_4, \dots, A_k leżą w s_2 . Jeśli $A_3 A_l A_k$ są kolejnymi wierzchołkami, to otrzymaliśmy sprzeczność. Jeśli nie, to powtarzamy powyższą procedurę w odniesieniu do wierzchołków A_3, \dots, A_l itd. Po skończeniu wielu krokach otrzymamy trzy kolejne wierzchołki, dla których okrąg przechodzący przez nie ma promień większy niż r . Sprzeczność.

Optyka w onkologii

Choroby nowotworowe to jedno z najpoważniejszych zagrożeń współczesnego człowieka. Minie jeszcze wiele lat, zanim w pełni nauczymy się rozpoznawać ich uwarunkowanie genetyczne, a jeszcze więcej czasu potrzebne będzie na opracowanie skutecznych i bezpiecznych terapii genowych. Tym bardziej że wcale nie jest pewne, czy skuteczne leczenie lub zapobieganie nowotworom w ogóle jest możliwe.

Jednak nawet wtedy olbrzymie znaczenie będzie miało diagnozowanie tego rodzaju chorób. Zwłaszcza za pomocą metod pozwalających na nieinwazyjne lub prawie nieinwazyjne rozpoznawanie wczesnych zmian nowotworowych.

Od ponad 100 lat fizycy dostarczają w tej dziedzinie nowych pomysłów diagnostycznych i terapeutycznych. Coraz więcej metod opartych jest po prostu na użyciu światła. Jednym z najnowszych osiągnięć w tej dziedzinie jest wykorzystanie tzw. spektroskopii światła rozproszonego do nieinwazyjnego wykrywania wczesnych zmian nowotworowych nabłonka.

Nabłonek wyściela narządy wewnętrzne i jamy ciała. Często stanowi pierwszą obronę przed czynnikami zewnętrznymi. Nowotwory o pochodzeniu nabłonkowym, stanowiące ponad 85% wszystkich nowotworów, rozwijają się zazwyczaj z wczesnego stadium, zwanego dysplazją, czyli nieprawidłową strukturą warstwy nabłonka. Zmiany te są niedostrzegalne gołym okiem. Standardowa metoda diagnostyczna polega na pobraniu wycinka i zbadaniu go pod mikroskopem, gdzie patologia uwidacznia się w postaci zwiększonej liczby komórek o powiększonych jądrach zawierających więcej chromatyny (materiału genetycznego). Ponieważ przy nieinwazyjnym badaniu wczesnego stadium nowotworu (np. za pomocą zwykłego endoskopu) nie widać żadnych zmian, to diagnoza musi opierać się na pobraniu losowej serii wycinków podejrzanego obszaru nabłonka. Po pierwsze nie jest to już całkowicie dla pacjenta obojętne, a po drugie jest zmusne i drogie.

Naukowcy z MIT Laser Biomedical Research Center opracowali metodę pozwalającą na niemal automatyczne wykrywanie tych zmian za pomocą spektroskopii światła rozproszonego. Metoda opiera się na pomiarze średnich rozmiarów jąder i współczynnika załamania, który rośnie wraz z koncentracją chromatyny.

Spektroskopii światła rozproszonego od dawna używano do badania różnorodnych materiałów od układów pojedynczych atomów do złożonych próbek ciała stałego. Tkanka biologiczna jest jeszcze jednym przykładem takiej złożonej próbki. Rozważmy wiązkę światła padającą na warstwę komórek nabłonka. Część światła odbija się od jąder komórkowych, a reszta wnika w tkankę. Światło, które nie zostaje pochłonięte, wydostaje się z powrotem, po raz wtóry rozpraszając się na jądrach komórek nabłonka. Spektrum światła odbitego zawiera więc informację o jądrach komórkowych (będących głównymi centrami rozpraszania) zagłuszaną przez dyfuzyjne tło. Zespół badawczy Michaela Felda opracował dwie metody

usuwania tego tła. Jedna opiera się na modelowaniu matematycznym, a druga na wykorzystaniu światła spolaryzowanego (w procesie dyfuzji światło traci pierwotną polaryzację). Analiza sygnału otrzymanego po odfiltrowaniu tła pozwala na wyznaczenie średniego rozmiaru jąder i ich współczynnika załamania. Okazuje się, że podczas gdy średnica jąder komórkowych zdrowego nabłonka wynosi $4,8 \pm 0,4 \mu\text{m}$, to w tkance patologicznej rośnie do $9,75 \pm 1,5 \mu\text{m}$. Podobnie współczynnik załamania światła wzrasta z $n = 1,035$ do $n = 1,045$. Wizualizacja badanego obszaru nabłonka np. w postaci mapy, na której stopień odchylenia od normalności badanych cech jąder komórkowych przedstawiany jest za pomocą kolorów, pozwala na szybką i pewną diagnozę.

Dzięki zastosowaniu techniki endoskopowej metoda ta jest również nieinwazyjna lub minimalnie inwazyjna. Końcówka zbudowanego przez naukowców prototypu endoskopu ma średnicę zaledwie jednego milimetra. Światło odbierane jest sześcioma światłowodami ułożonymi dookoła jednego światłowodu doprowadzającego wiązkę pierwotną. Technika ta powinna znaleźć praktyczne zastosowanie w najbliższej przyszłości.

Niestety, sama diagnoza nie wystarcza do rozwiązania problemu. W wielu przypadkach jeszcze długo nie będzie można obejść się bez skalpela. A wtedy bardzo istotne jest maksymalne ograniczenie interwencji chirurgicznej. Ma to szczególne znaczenie np. w przypadku usuwania nowotworów mózgu. Marzeniem chirurga byłby skalpel automatycznie pokazujący, czy jeszcze wycinany jest guz nowotworowy, czy już kroi się zdrową tkankę. Science-fiction? Już nie.

Marzenie staje się rzeczywistością dzięki wykorzystaniu mikrowętkowych (ang. microcavity) laserów półprzewodnikowych. Paul Gourley, kierujący zespołem z Sandia National Laboratories, zwierza się: „Ludzie nie wierzyli, że będziemy mogli pompować komórki przez mikrolaser, włączyć je w proces laserowy i otrzymać znaczące wyniki. A jednak możemy wszystkie te rzeczy zrobić. Możemy szybko identyfikować populację komórek o odbiegającej od normy zawartości protein, czyli takich jak komórki nowotworowe, przepuszczając zaledwie kilkaset komórek – miliardową część litra – przez nasze urządzenie” [2]. Prototyp ma rozmiary małej monety i mógłby być umieszczony w rękojeści skalpela. Pochłaniacz zasysałby płyn z nacięcia, pozwalając na monitorowanie charakteru operowanej tkanki, precyzyjnie podpowiadając chirurgowi, gdzie powinien zakończyć interwencję.

Pozostaje jedynie życzyć sobie, abyśmy jednak nigdy nie musieli korzystać z takich niewątpliwie użytecznych zastosowań.

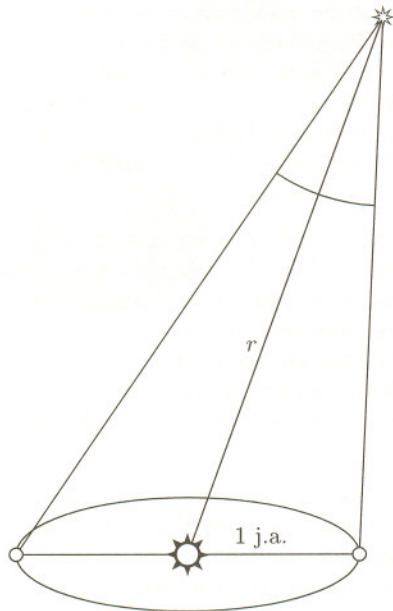
Piotr ZALEWSKI

[1] R. Gurjan, V. Backman, J. VanDam, L.T. Perelman i M.S. Feld *Early Detection of Cancer Using Light Scattering Spectroscopy* referat na konferencji informacyjnej APS, Minneapolis, 23 marca 2000 r.
<http://web.mit.edu/newsoffice/nr/2000/cancer.html>
<http://web.mit.edu/spectroscopy/www/APS.pdf>

[2] SNL News Releases

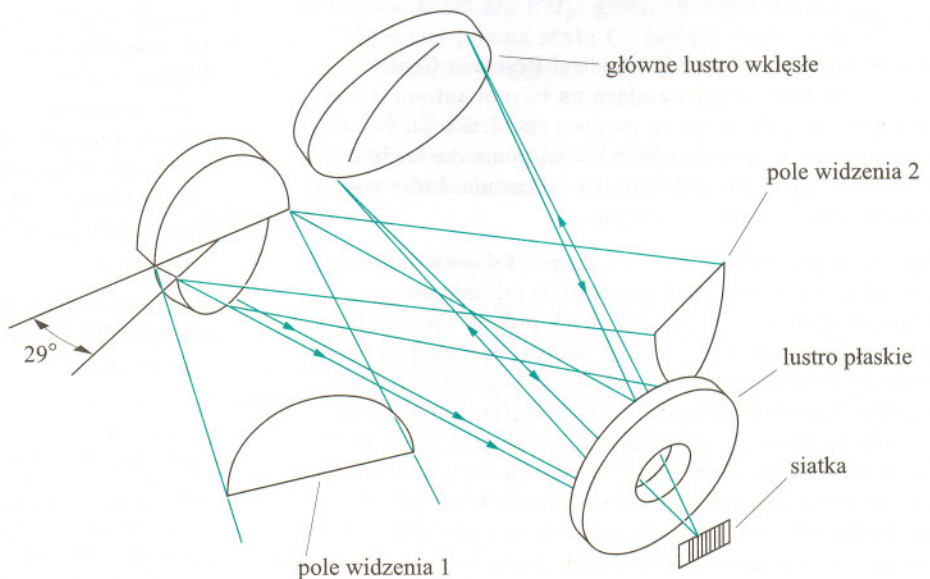
<http://www.sandia.gov/media/NewsRel/NR2000/candetec.htm>

Pomiar paralaksy gwiazdy to najrzetelniejszy sposób wyznaczenia jej odległości. Paralaksą (roczną, inaczej heliocentryczną) gwiazdy nazywa się kąt, pod jakim widziałoby się z niej promień ziemskiej orbity. Wyznaczenie tego kąta dla jakiejś gwiazdy polega w zasadzie na zmierzeniu (na niebie lub na zdjęciach) położenia tej gwiazdy względem gwiazd okolicznych (domyślnie – dalszych) dwa razy w odstępach pół roku. Zapewnia to, że obserwator zobaczy badaną gwiazdę z jej otoczeniem z punktów rozdzielonych odległością 300 mln km. Gwiazda „bliższa” powinna w czasie między obserwacjami lekko się przesunąć, a z pomiaru tego kąтового przesunięcia można już wyznaczyć odległość gwiazdy – jest to zwyczajna zasada dalmierza (rys. 1). Nawiasem mówiąc, niemożność zmierzenia paralaks uważano kiedyś (w czasach przedteleskopowych) za argument przeciw heliocentrycznemu modelowi Układu Słonecznego. W czasach Kopernika nikt (poza nim) nie podejrzewał, że gwiazdy mogą być tak odległe, co okazało się dopiero po zastosowaniu teleskopów, i to wcale nie najmniejszych.



Klasycznymi metodami można bowiem mierzyć paralaksy nie mniejsze od $0''01$ – głównie wskutek obecności atmosfery. Zatem „porządnie”, tzn. bez żadnych dodatkowych założeń, można wyznaczać odległości gwiazd do 100 pc, a jest to niewielki ułamek rozmiarów Galaktyki. Przełomu dokonał amerykański satelita Hipparcos (od *High Precision Parallax Collecting Satellite*) wystrzelony na okołoziemską orbitę 8 VIII 1989. Jego głównym osiągnięciem jest wyznaczenie paralaks 118 000 gwiazd z dokładnością o rząd wielkości lepszą i to mimo że wyposażony był w raczej mały teleskop o średnicy zaledwie 29 cm i ogniskowej 1,40 m. Oto zasada pomiarów. Układ optyczny, przedstawiony na rysunku 2, tworzy w ognisku teleskopu obrazy dwóch obszarów nieba rozdzielonych odległością 58° . Oba obrazy padają na „siatkę dyfrakcyjną” (nie o dyfrakcję tu chodzi, o czym dalej) o rozmiarach prawie jednego cala kwadratowego i mającą 2688 linii. W miarę obrotu satelity (jeden obrót trwa 128 minut) gwiazda widziana w pierwszym (wiodącym) polu widzenia przesuwają się po siatce, przez co sygnał elektryczny dawany przez jej światło ulega modulacji z częstością około 130 Hz (bo obraz gwiazdy przez siatkę wędruje 20 s). Po 20 minutach gwiazda trafia do drugiego pola widzenia, jej obraz znowu pojawia się na siatce, a w pierwszym polu widzenia ukazuje się jakaś inna gwiazda. Kątowa odległość tych gwiazd wynosi w przybliżeniu 58° , ale na podstawie przesunięcia fazowego dawanych przez nie sygnałów (i, oczywiście, dokładnie znanej geometrii układu optycznego teleskopu Hipparcosa) odległość tę można określić z dokładnością do milisekundy łuku! Przez te 20 minut satelita, rzecz jasna, też nie próżnuje, lecz wyznacza wzajemne odległości kolejno

Rys. 1. Zaznaczony tu kąt byłby podwójną paralaksą, gdyby gwiazda leżała w kierunku prostopadłym do płaszczyzny orbity Ziemi. Ale z pomiaru tego kąta i przy znajomości położenia gwiazdy jej paralaksę zawsze można wyznaczyć. Jeżeli paralaksę p wyrazi się w sekundach łuku (jest to zawsze mały kąt), to odległość gwiazdy w parsekach wynosi $r = \frac{1}{p}$.



Rys. 2. Schemat optyczny teleskopu Hipparcosa.



Sporządzony na podstawie obserwacji Hipparcosa Wielki Atlas Nieba można zamówić u pana Piotra Brycha: tel. 022-618 08 13.

obserwowanych gwiazd na podstawie dokładnie znanego tempa własnej rotacji. W miarę jak satelita, zmieniając usytuowanie osi obrotu, omiata coraz to inne pasy nieba, w pamięci odbierającego sygnały komputera powstaje coś w rodzaju sieci triangulacyjnej pokrywającej całe niebo, przy czym długości ogromnej liczby składających się na nią łuków znane są z dokładnością o rząd wielkości lepszą od dokładności jakiegokolwiek paralaksy zmierzonej z powierzchni Ziemi. W rezultacie uzyskany w ten sposób katalog gwiazd Hipparcosa stał się astrometryczną rewelacją.

Nieustannie omiatając niebo, Hipparcos przez kilka lat obiegał wraz z Ziemią Słońce, mierzył więc odległości kątowe gwiazd w parach z różnych punktów przestrzeni i w różnym czasie. Okresowe zmiany tych odległości (z okresem rocznym) to, oczywiście, przejaw ruchu obiegowego Ziemi, stąd paralaksy gwiazd. Zmiany zaś systematyczne to efekt poruszania się gwiazd w przestrzeni, co umożliwia dokładniejsze wyznaczenie ruchów własnych ogromnej liczby gwiazd. Graniczna paralaksa pomiarów Hipparcosa umożliwia sięgnięcie na odległość jednego kiloparseka od Słońca, a to jest znaczącym ułamkiem rozmiarów Galaktyki. Dokonana już na tej podstawie analiza ruchów gwiazd w okolicy Słońca dowodzi, że tajemniczej ciemnej materii jest wokół nas znacznie mniej, niż się dotychczas zdawało. Wyznaczone zostały znacznie dokładniej odległości „wzorcowych” gromad, Plejad i Hiad, co ma ogromne znaczenie dla astrofizyki, bowiem gwiazdy tych gromad umożliwiają kalibrowanie innych metod wyznaczania większych odległości. Niejako przy okazji na podstawie obserwacji Hipparcosa powstał katalog i atlas *Tycho*, zawierający ponad milion gwiazd o jasności 12,2 mag z mniej precyzyjnie wyznaczonymi współrzędnymi. To dopiero początek zbierania owoców z misji Hipparcosa. Tymczasem opracowuje się już projekt następnego satelity zdolnego – podobno – mierzyć paralaksy z dokładnością do dziesięciu mikrosekund łuku...



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 922. Na bokach czworokąta wypukłego jako na średnicach zbudowano cztery koła. Udowodnić, że pokrywają one cały czworokąt.

Rozwiązanie na str. 2

M 923. Dla każdej trójki kolejnych wierzchołków wielokąta wypukłego poprowadzono okrąg przechodzący przez te wierzchołki. Udowodnić, że ten spośród otrzymanych okręgów, który ma największy promień, zawiera cały wielokąt.

Rozwiązanie na str. 4

M 924. Czy istnieje figura wypukła F , którą nie można pokryć półkolem o promieniu 1, a dwoma egzemplarzami F można pokryć koło o promieniu 1?

Rozwiązanie na str. 10

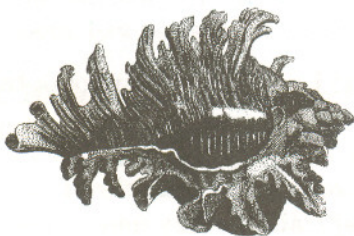
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 527. Płaską powierzchnię soczewki płasko-wypukłej o ogniskowej F pokryto warstwą, odbijającą światło. W odległości d od soczewki od strony powierzchni wypukłej ustawione jest punktowe źródło światła. Wyznaczyć położenie obrazu. Przy jakich wartościach d obraz będzie rzeczywisty, a przy jakich pozorny?

Rozwiązanie na str. 12

F 528. Za pomocą obiektywu, który jest zbudowany z cienkich, ściśle przylegających soczewek, rozpraszającej i skupiającej, rzutujemy na ekran pewien przedmiot. Odległość obiektywu od przedmiotu wynosi $d = 25$ cm, a od obrazu $f = 4$ m. Wyznaczyć ogniskową soczewki rozpraszającej, jeżeli jej zdolność skupiająca jest (co do wartości bezwzględnej) dwa razy większa od zdolności skupiającej soczewki skupiającej.

Rozwiązanie na str. 13





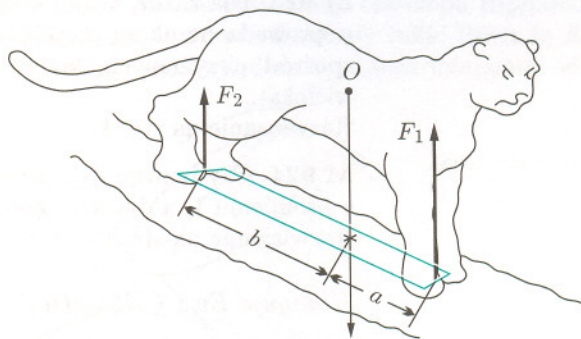
Na czworakach

Patrzyli na panterę, a pantera na nich.

- Ciekawe, dlaczego tak podkuliła nogi – głośno myślał Jasio.
- Pewnie dlatego, żeby było jej wygodnie – spróbowała odpowiedzieć Agatka. – Moja ciocia mówi, że każdy się tak ustawia, żeby mu było wygodnie. Takie jest prawo natury.
- Ale dlaczego akurat tak jest jej wygodnie? Z podkulonymi nogami... Przecież gdyby chodziła po równej ziemi, to by tak nie podkuliła nóg.
- Ale teraz stoi na pochylonej gałęzi. Dlatego stara się przesunąć swój środek ciężkości do tyłu.
- Dlaczego?
- Żeby nie spaść. Jeśli linia łącząca jej środek ciężkości ze środkiem Ziemi nie przejdzie przez czworokąt wyznaczony przez jej łapy, to się przewróci...
- Chyba, że ktoś jej przyklei łapy do gałęzi butaprenem! – wtrąciła Agatka.

Zgodnie zignorowali tę uwagę.

- ...A poza tym zawsze jest wygodniej, kiedy ciężar rozkłada się w miarę równomiernie na cztery łapy.
- No właśnie, a jaki jest ten rozkład ciężaru na łapy?
- To proste. – Jacek z trudem dźwignął się z ławki. W taki upał, jak dzisiaj mógłby spać cały dzień. – Popatrzcie...
- Podniósł z ziemi patyk i narysował na piasku panterę na gałęzi.



Jeśli O to środek ciężkości, F_1 siła nacisku na przednie łapy, a F_2 siła nacisku na tylne łapy, to musi zachodzić równość taka, jak dla ramion wagi

$$F_1 a = F_2 b.$$

Dlatego najlepiej, gdy $a = b$, bo wówczas tylne i przednie łapy unoszą taki sam ciężar.

Przez chwilę zaległa cisza.

- A jak pantera chodzi, to dlaczego się nie przewraca? – zastanowił się Jasio. – Przecież wtedy środek ciężkości jej ciała nie leży nad czworokątem jej stóp, bo... nie ma żadnego czworokąta: jakaś stopa musi



być nad ziemią i na samej ziemi jest co najwyżej trójkąt łap.

– A przecież może być nawet tak, że w jakiejś chwili na ziemi w ogóle nie ma żadnej łapy, bo jak pantera biegnie, to tak skacze! – zauważyła Agatka.

– To prawda. – Jacek zgodził się z siostrą, co zdarzyło mu się chyba pierwszy raz w tym miesiącu. – Podobno galopujący gepard połowę drogi pokonuje „w locie”. I wtedy rzeczywiście nie można mówić o równowadze statycznej.

– O czym?

– O równowadze statycznej. To z grubsza biorąc taka równowaga, która pozwala zwierzęciu zatrzymać się w bezruchu i nie przewrócić się.

– A jak nie ma tej równowagi?

– To jak się zwierzę nagle przestanie ruszać, to się przewróci. Żeby się poruszać w sposób statycznie zrównoważony, pantera musi mieć zawsze na ziemi trzy łapy, a jej środek ciężkości musi w każdej chwili leżeć nad trójkątem łap, które akurat spoczywają na ziemi. Jest to jednak możliwe tylko przy jednej sekwencji ruchów.

– Jak to?

– Tak to. Przebierać łapami może pantera na różne sposoby. Może iść np. „systemem” lewa przednia – prawa przednia – lewa tylna – prawa tylna itd. Takie cykle można ułożyć na 6 różnych sposobów, ale tylko jeden z nich gwarantuje równowagę. – Niemożliwe! Tylko jeden?! – Ale dlaczego tych sposobów jest akurat 6? Jasio z Agatką krzyknęli niemal jednocześnie, a potem rzucili się na kolana i zaczęli chodzić na czterech. Jacek pokręcił głową. Czy oni wszystko muszą sprawdzać empirycznie? Przecież wystarczy narysować romb, a w wierzchołkach cztery łapy pantery i już wszystko widać. Westchnął i odwrócił głowę w stronę zebr. Pantera zeszła z gałęzi i zniknęła w ciemnym otworze. Też nie mogła patrzeć na to, co działo się przed jej klatką.

Małą Deltę przygotowali: Anna BILSKA i Witold SADOWSKI



★ Ziemia przeszła przez warkocz komet: Tebbutta (1861 II) 29–30 czerwca 1861 r. i Halleya (1910 II) 19 maja 1910 r.

★ Kometa 1858 VI Donati była pierwszą, którą sfotografowano. Dokonał tego portrecista Usherwood 27 IX 1858 r. Niestety, zdjęcie to zaginęło. Dopiero zdjęcie komety 1881 III Tebbutt, wykonane przez P.J.C. Janssena 30 VI 1881 r. w Obserwatorium Meudon, zachowało się do naszych czasów. Później odkrywano komety właśnie dzięki fotografii. Pierwszą taką była kometa 1892 V Barnard 3. Odkrył ją Edward Emerson Barnard 12 X 1892 r. w Obserwatorium Licka. Co prawda wcześniej na zdjęciu korony słonecznej, otrzymanym podczas zaćmienia Słońca 17 V 1882 r. w Kenii, również była kometa, lecz po zaćmieniu jej nie odnaleziono.

★ Pierwszą kometą, na którą został skierowany spektroskop, była kometa 1864 III Donati–Toussaint. Jej widmo obserwował Gianbattista Donati 5 VIII 1864 r. we Florencji. Pierwszą zaś, której widmo sfotografowano, była Wielka Kometa 1881 III, odkryta 22 V 1881 r. przez Johna Tebbutta.

★ Astronomek, który stracił życie, poszukując komety był Ernst Friedrich Wilhelm Klinkerfues. Spadł on z platformy obserwacyjnej obserwatorium w Getyndze 28 stycznia 1884 roku. Wcześniej odkrył 6 komet.

★ Najmłodszym odkrywcą komety był amerykański miłośnik astronomii M. Whitacker. 15 czerwca 1968 roku odkrył kometę 1968 V Whitacker–Thomas, jako 16-letni uczeń, gdy po raz trzeci prowadził obserwacje swoim nowym teleskopem.

★ Najstarszym odkrywcą komety był L. Swift. Swą trzynastą kometę 1899 I Swift odkrył mając 79 lat.

★ Najwytrwalszym obserwatorem komet był amerykański astronom George van Biesbroeck. 17 lipca 1967 roku, mając 87 lat, odszukał według efemerydy kometę 1967 IX Finlay. Obserwacjami komet i wyliczaniem ich orbit zajmował się do śmierci w 1974 roku, to jest do dziewięćdziesiątego czwartego roku życia.

Jadwiga BIAŁA

Algorytmy i złożoność obliczeniowa

Damian NIWIŃSKI

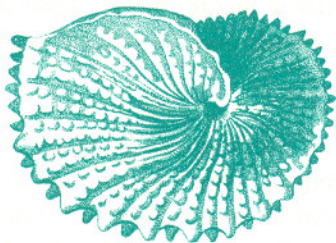
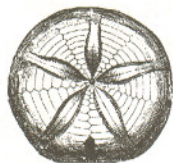
Każdy adept matematyki zna momenty olśnienia rozwiązaniem trudnego problemu. Co to jednak znaczy, że problem był trudny? Zapewne nie bez znaczenia jest wiedza adepta: problem trudny dla ucznia, na przykład obliczenie długości elipsy, może nie być takim dla studenta matematyki, dostrzegającego go jako przypadek szerszego zagadnienia, dla którego zna metodę rozwiązywania. Podobnie, matematyk uzbrojony w teorię grup (a najlepiej także w komputer) może potraktować jako rutynowe kolorowe zagadki Rubika. Metodę rozwiązywania zagadnień matematycznych, jaka da się zastosować w wielu (zwykle nieskończenie wielu) przypadkach, nazywamy *algorytmem*. Algorytmy są, być może, najbardziej widocznym rezultatem działalności matematyków: fizycy, inżynierowie, ekonomiści oczekują od matematyki przede wszystkim metod, które w powtarzalnych sytuacjach pozwolą im obliczać potrzebne wielkości (które, oczywiście, mogą być nie tylko liczbami). Nie trzeba dodawać, że możliwość automatyzacji obliczeń za pomocą komputera niepomniernie zwiększyła zainteresowanie algorytmami.

Czy zawsze, dla sensownie postawionego problemu, można dobrać stosowną metodę algorytmiczną lub choćby mieć nadzieję, że kiedyś taka metoda zostanie znaleziona? Odpowiedź jest negatywna, co zilustrujemy historią tzw. dziesiątego problemu Hilberta.

W 1900 r. David Hilbert przedstawił Międzynarodowemu Kongresowi Matematyków w Paryżu listę 23 najważniejszych zagadnień, jakie, jego zdaniem, wiek dziewiętnasty pozostawił dwudziestemu do rozwiązania. Problem dziesiąty dotyczył znalezienia metody, która dla danego równania diofantycznego (tj. równania algebraicznego z wieloma niewiadomymi, o współczynnikach wymiernych) rozstrzygałaby, czy istnieje rozwiązanie w liczbach całkowitych. Oczywiście, jeśli takie rozwiązanie istnieje, to zawsze w końcu można je znaleźć metodą kolejnych prób; z drugiej strony dla wielu poszczególnych równań istnieją dowody braku całkowitych rozwiązań. Jednak, jak dowiódł w 1970 r. rosyjski matematyk, Jurij Matijasiewicz (wówczas 24-letni), nie istnieje algorytm, który, przyjmując jako daną równanie diofantyczne, odpowiadałby w skończonym czasie na interesujące nas pytanie. Zauważmy, że już samo sformułowanie tego rezultatu wymagało ścisłego określenia pojęcia algorytmu. Czytelnicy III części artykułu W. Marka i J. Mycielskiego (*Delta* 1/2000) pamiętają, że dokonało się to w latach trzydziestych naszego wieku za sprawą logików: Gödla, Turinga, Posta, Churcha i Kleenego; wtedy też opisano pierwsze problemy algorytmicznie nierozstrzygalne, tj. nierozwiązywalne przez żaden algorytm.

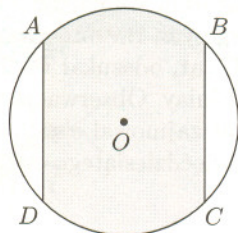
Problemy nierozstrzygalne nie są jakąś rzadką anomalią w świecie matematyki; z grubsza mówiąc, nierozstrzygalność pojawia się zawsze, ilekroć problem jest na tyle ogólny, by można w nim odzwierciedlić – być może poprzez zmyślne zakodowanie – informację o wszystkich potencjalnie możliwych algorytmach. Jednak znakomita liczba zagadnień ważnych praktycznie nie jest aż tak ogólna; na przykład w pewnym zastosowaniu możemy potrzebować jedynie równań diofantycznych o trzech niewiadomych i stopniu co najwyżej pięć.

O ile algorytm rozwiązujący problem istnieje, możliwe jest, jak wiemy, przełożenie go na program komputerowy. Można by więc pomyśleć, że granica między problemami rozstrzygalnymi a nierozstrzygalnymi jest jednocześnie granicą stosowności informatyki: każdy problem rozstrzygalny może być w praktyce rozwiązany przez komputer. Tak jednak nie jest. Może się bowiem okazać, że nasz komputer już dla niewielkich danych potrzebuje takiego czasu (np. setek lat), że oczekiwanie na wynik traci sens. Dzieje się tak w szczególności, kiedy algorytm wymaga przeglądania wszystkich permutacji lub choćby wszystkich podzbiorów jakiegoś zbioru. Nie wnikając w naturę elementarnych operacji algorytmu, możemy łatwo obliczyć, że gdyby nawet czas



Rozwiązanie zadania M 924.

Tak, np. taka jak przedstawiona na rysunku, gdzie czworokąt $ABCD$ jest kwadratem, a promień koła, z którego wycinamy figurę jest równy 1. To, że dwoma egzemplarzami tej figury można pokryć koło o promieniu 1 jest jasne. Dowód tego, że figurą tą nie da się pokryć półkoła o promieniu 1 opiera się na tym, że końce średnicy półkoła musiałyby być pokryte punktami figury, będącymi końcami średnicy koła, z którego wycinamy figurę.



wykonywania takiej operacji był najmniejszym sensownym czasem fizycznym (jeden chronon, 10^{-43} s), to wykonanie kolejno 2^n takich operacji dla $n = 200$ przekroczyłoby czas życia człowieka, a dla $n = 500$ wiek Wszechświata. Zapewne niektóre operacje mogłyby być wykonywane jednocześnie na wielu komputerach, tu jednak prędko napotkamy nieprzekraczalne ograniczenia przestrzeni, w której takie komputery mogłyby się pomieścić (nie wspominając o kosztach).

Rozważmy dla przykładu ważne praktycznie zagadnienie znajdowania w grafie tzw. *cyklu Hamiltona*, tj. pętli, w której każdy wierzchołek występuje dokładnie raz. (Intuicyjnie, jest to najbardziej ekonomiczny sposób obejścia całego grafu.) Oczywiście metoda polegałaby na przeszukiwaniu wszystkich możliwych permutacji zbioru wierzchołków grafu. Z matematycznego punktu widzenia jest to niewątpliwie algorytm, jednak jego praktyczna stosowalność ogranicza się do bardzo małych grafów.

Dla porównania, analogiczne z pozoru pytanie o istnienie tzw. *cyklu Eulera*, tj. pętli, która dokładnie raz odwiedza każdą krawędź grafu, ma dobre rozwiązanie algorytmiczne: Czytelnik słyszał zapewne o twierdzeniu, że cykl Eulera istnieje w grafie wtedy i tylko wtedy, gdy liczba krawędzi wychodząca z każdego wierzchołka jest parzysta, a ten warunek można oczywiście sprawdzić w czasie proporcjonalnym do liczby krawędzi grafu.

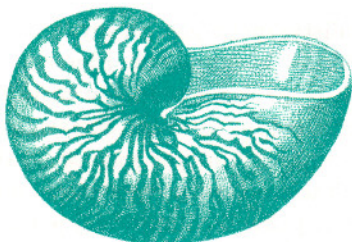
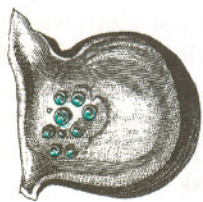
Wspomniane rozwiązanie wymagało jednak odkrycia eleganckiej własności charakteryzującej grafy Eulera. Być może jakaś nieznaną własność grafów Hamiltona pozwoliłaby i tutaj na skonstruowanie sprytnego algorytmu, działającego, powiedzmy, przynajmniej w czasie $O(n^5)$. Być może, jednakże pomimo wysiłków żadna taka własność nie została dotąd znaleziona. Z drugiej strony, co bardzo intrygujące, nie znamy również dowodu, który wykluczyłby istnienie algorytmu rozstrzygającego interesujący nas problem w czasie $O(n)$. Zagadnienie cyklu Hamiltona nie jest odosobnionym przypadkiem; w istocie znane są dziesiątki matematycznie naturalnych i praktycznie ważnych problemów, których stopień trudności obliczeniowej pozostaje nieznanym.

Przedstawiona sytuacja nie powinna nas specjalnie martwić. Jak zwykle w nauce, rzeczywiste trudności są motorem rozwoju. Współczesne studia nad algorytmami rozwijają się w dwóch kierunkach. *Teoria złożoności obliczeniowej* próbuje wyjaśniać, dlaczego niektóre problemy nie poddają się próbom znalezienia dobrych rozwiązań algorytmicznych. *Algorytmika* natomiast, inspirowana potrzebami praktycznymi, nieustrudzenie poszukuje takich rozwiązań, często na drodze rozszerzenia samego pojęcia algorytmu.

Ujmując rzecz pozytywnie, teoria złożoności dąży do określenia *trudności* problemów algorytmicznych i klasyfikuje je ze względu na stopień trudności. Tradycyjnie, problem obliczeniowy uważa się za praktycznie rozwiązywalny, o ile istnieje algorytm, który dla danych rozmiaru n pracuje w czasie proporcjonalnym do n^k , dla pewnej stałej k . Problemy o tej własności tworzą klasę zwykle oznaczaną symbolem P (lub $PTIME$, z ang. *polynomial time*). Wspomnianą w artykule W. Marka i J. Mycielskiego (*Delta* 1/2000) klasę $NPTIME$ (lub NP) można określić poprzez rzutowanie problemów z P , tj. $A \in NP$, o ile $A = \{x : (\exists y) R(x, y) \wedge |y| \leq |x|^k\}$, gdzie R jest relacją w klasie P , k jest stałą, a $|z|$ oznacza rozmiar z . Czytelnik może zauważyć, że problem cyklu Hamiltona jest w NP , gdyż relacja „permutacja π wierzchołków grafu G jest cyklem Hamiltona w G ” jest, oczywiście, sprawdzalna w czasie wielomianowym.

Świat problemów obliczeniowych ma swoją strukturę, którą stopniowo poznajemy. Okazuje się, na przykład, iż wiele z pozoru różnych problemów jest w istocie bardzo do siebie podobnych, w tym sensie, że jeden można uznać za tłumaczenie drugiego. Wspomniane wyżej zagadnienie cyklu Hamiltona nie ma na pierwszy rzut oka związku z pytaniem, czy graf można pokolorować trzema kolorami tak, by końce krawędzi miały różne kolory, a to z kolei z pytaniem, czy dana formuła rachunku zdań jest spełniona przy jakimś wartościowaniu zmiennych. A jednak, istnienie szybkiego (wielomianowego) algorytmu dla

Nie znaczy to, że nigdy nie potrafimy dowieść, że jakiś rozstrzygalny problem jest obliczeniowo trudny. Owszem, dla każdej „w miarę porządek” funkcji $f(n)$ (np. dla funkcji n^2 , 2^n , $n!$) potrafimy skonstruować problem nierozwiązywalny przez żaden algorytm w czasie proporcjonalnym do $f(n)$, a zarazem rozwiązywalny przez pewien algorytm pracujący w czasie $(f(n))^2$. Jednakże konstrukcja ta, wzorowana na przekątniowej konstrukcji problemu nierozstrzygalnego, jest dosyć sztuczna i rzuca niewiele światła na zagadnienie złożoności „prawdziwych” problemów obliczeniowych.



któregokolwiek z tych problemów pociągałoby za sobą istnienie analogicznych algorytmów dla pozostałych, a nawet dla wszystkich problemów ze wspomnianej klasy *NP*. Problemy o tej własności nazywa się *zupełnymi* w *NP*. Pojęcie to zostało sformułowane pod koniec lat sześćdziesiątych przez S. Cooke'a i R. Karpa w USA i niezależnie przez L. Levina w ówczesnym ZSRR.

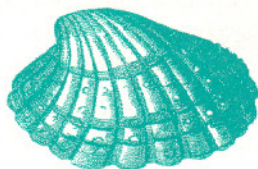
Badanie stopnia pokrewieństwa między problemami i wyróżnianie problemów zupełnych jest jednym z przedmiotów teorii złożoności. Innym ważnym kierunkiem jest porównywanie różnych miar złożoności. Oprócz czasu sensownie jest bowiem badać także rozmiar pamięci operacyjnej komputera, potrzebnej do rozwiązania zadania, a także np. liczbę komputerów (lub procesorów), które mogłyby rozwiązać to zadanie, pracując równolegle, co może (choć nie zawsze musi) znakomicie przyśpieszyć realizację algorytmu. W ostatnich latach, w związku z rozwojem programów interakcyjnych, popularne staje się modelowanie działania komputera jako gry ze środowiskiem; implikuje to nowe miary złożoności, jak liczba rund lub liczba uczestników gry.

Przejdziemy teraz do algorytmiki, która, będąc po części dyscypliną inżynierską, próbuje jakoś radzić sobie z problemami trudnymi obliczeniowo. Jedną z możliwości jest rozwijanie algorytmów heurystycznych, działających szybko choćby w niektórych przypadkach, a także aproksymacyjnych, tj. poszukujących rozwiązań bliskich optymalnym (na przykład, zamiast cyklu Hamiltona zadowolamy się ścieżką odwiedzającą co najmniej 95 % wierzchołków). Nie próbując wyczerpywać ogromnego tematu, wspomniemy tu o kierunkach, które nie rezygnują z walki o rozwiązanie optymalne.

Jak widzieliśmy na przykładzie problemu grafów Hamiltona, „kamieniem filozoficznym” algorytmiki byłby sposób na przeskoczenie konieczności dokonywania wyczerpujących przeszukiwań wszystkich możliwości. Oto kilka pomysłów, jak można by to uzyskać.

W tak zwanych *algorytmach probabilistycznych* przeszukiwanie zostaje zastąpione przez losowy wybór. Ideę takiego algorytmu porównać można do egzaminu, kiedy student losuje, powiedzmy, 5 spośród ogłoszonych wcześniej 100 pytań (zamiast odpowiadać na wszystkie 100). Jeśli wszystkie odpowiedzi będą dobre, egzaminator przyjmuje z dużym stopniem pewności, że student zna cały materiał – pewność ta w istotny sposób opiera się na fakcie, że student nie mógł przewidzieć wybranych losowo numerów pytań. Przełomowe znaczenie w algorytmice miał zaproponowany w 1976 r. przez M.O. Rabina (korzystający z idei G. Millera) probabilistyczny algorytm rozstrzygający, czy dana liczba n jest pierwsza czy złożona w czasie proporcjonalnym do $(\log n)^3$. W teście tym poszukuje się drogą losowania – nie ewentualnych dzielników liczby n , bo te mogą być rzadkie, ale – subtelnych, a zarazem dość licznych „świadczeń złożoności”. Chodzi tu o liczby x spełniające alternatywę: x jest nietrywialnym pierwiastkiem z jedności mod n lub też $x^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$ (kiedy n jest liczbą pierwszą, wiemy z tzw. małego twierdzenia Fermata, że nie ma takich x). Algorytm Millera–Rabina może co prawda z niewielkim prawdopodobieństwem nie wykryć żadnego świadectwa złożoności liczby złożonej i tym samym uznać ją za pierwszą, mimo to jednak, z uwagi na szybki czas i brak konkurencji, używa się go w praktyce do generowania wielkich liczb pierwszych, jakie wykorzystywane są następnie w systemie kryptograficznym RSA. Tak więc w algorytmach probabilistycznych poświęcamy nieco pewności na rzecz szybkości.

Radykalnym rozwinięciem idei algorytmu probabilistycznego jest głośny ostatnio pomysł wykorzystania w obliczeniach efektów kwantowych. Element losowości pojawia się tu w momencie *pomiaru*, kiedy to stan kwantowy zostaje zaobserwowany jako klasyczny i informacja zawarta w tym ostatnim uznawana jest za wynik obliczenia. Zanim jednak nastąpi pomiar, komputer zachowuje się zgodnie z prawami mechaniki kwantowej. W rezultacie, układ n rejestrów, który w klasycznym komputerze przyjmować może w danej chwili co najwyżej jeden z 2^n możliwych ciągów n bitów, powiedzmy $w \in \{0, 1\}^n$, w komputerze



Rozwiązanie zadania F 527.

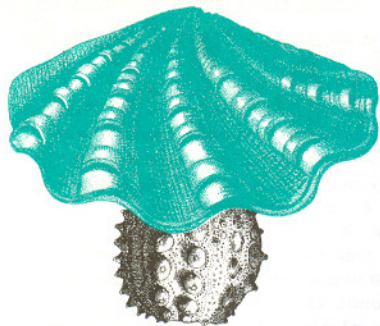
Jeżeli płaska powierzchnia soczewki płasko-wypukłej jest pokryta warstwą odbijającą światło, to jest ona równoważna soczewce dwuwypukłej o ogniskowej $\frac{1}{2}F$. Wtedy, stosując wzór na zdolność skupiającą soczewki

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{2}{F},$$

otrzymujemy

$$f = \frac{dF}{2d - F}.$$

Obraz źródła znajduje się z tej samej strony co przedmiot i jest rzeczywisty dla $d > \frac{F}{2}$.



Peter W. Shor na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Berlinie (1998) otrzymał nagrodę Nevannliny.

kwantowym może w pewnym sensie przyjąć je wszystkie jednocześnie (na przykład, w stanie kwantowym $\frac{1}{(\sqrt{2})^n} \sum_{w \in \{0,1\}^n} |w\rangle$). Wyczerpujące

przeszukiwanie może więc zostać zastąpione wygenerowaniem stanu kwantowego obejmującego naraz wszystkie możliwości.

Najbardziej, jak dotąd, spektakularnym sukcesem poszukiwań w tym kierunku jest zaproponowany przez P. Shora kwantowy algorytm rozkładu liczby całkowitej na czynniki pierwsze. Najlepszy znany „klasyczny” algorytm rozwiązuje to zagadnienie w czasie wykładniczym ze względu na rozmiar przedstawienia binarnego liczby n , choć z drugiej strony, faktoryzacja nie ma charakteru problemu NP -zupełnego. Kwantowy algorytm Shora działa w czasie wielomianowym (dokładnie, $C \cdot (\log n)^2 \cdot (\log \log n) \cdot (\log \log \log n)$). Warto wspomnieć, że możliwość szybkiej faktoryzacji dużych liczb wywołałaby spore zamieszanie, gdyż powszechnie stosowany algorytm szyfrowania RSA opiera się na hipotezie trudności tego problemu. Trzeba jednak pamiętać, że głęboki matematycznie algorytm Shora istnieje na razie jedynie na papierze, a komputery kwantowe (w odróżnieniu od kwantowej kryptografii) wydają się jeszcze dalekie od fizycznej realizacji.

Fizycznie zrealizowany został natomiast pomysł Adlemana, by do obliczeń wykorzystać reakcje biologiczne, a konkretnie zjawisko łączenia się komplementarnych odcinków DNA w słynną podwójną helisę. Jako zadanie obliczeniowe wybrano znany nam już problem cyklu Hamiltona. W wyniku siedmiodniowego eksperymentu pojawiło się rozwiązanie. Co prawda testowany graf był niewielki, a wspomniane rozwiązanie jest dostrzegane przez człowieka w ciągu kilkudziesięciu sekund, jednak zastosowana tu technika może dla dużych grafów okazać się szybsza niż komputer cyfrowy. Pamiętajmy, że możliwość szybkiego rozwiązywania, choćby dziwaczną techniką, zagadnienia cyklu Hamiltona oznacza szybki algorytm dla dowolnego problemu klasy NP (tłumaczenie takiego problemu na problem cyklu Hamiltona mogłoby odbywać się za pomocą komputera tradycyjnego). W odróżnieniu od wyrafinowanego algorytmu Shora, idea testu Adlemana jest prosta. Wierzchołki i krawędzie badanego grafu reprezentowane są przez losowo wybrane odcinki DNA w taki sposób, by wskutek komplementarności odpowiednich fragmentów, powstające w wyniku łączenia podwójne helisy reprezentowały ścieżki w grafie (nie tylko, oczywiście, ścieżki Hamiltona). Kluczowym momentem jest tu możliwość wygenerowania wszystkich lub niemal wszystkich ścieżek „w jednej chwili” (w ciągu kilku sekund); operacja taka jest, jak wiemy, praktycznie niewykonalna na klasycznym komputerze. Faza eliminacji „złych kandydatów”, tak by w końcu pozostało jedynie poprawne rozwiązanie (tj. helisy reprezentujące ścieżki Hamiltona), wykorzystywała pomysłowo kilka różnych reakcji biologicznych i to ona była odpowiedzialna za stosunkowo długi czas. Eksperyment Adlemana otwiera nową drogę w informatyce: być może, zamiast konstruować wciąż nowe komputery wystarczy umiejętnie interpretować procesy przetwarzania informacji, jakich pełen jest świat, zwłaszcza świat materii żywej.



Rozwiązanie zadania F 528.

Zdolność skupiająca obiektywu jest równa sumie zdolności optycznych soczewki skupiającej i rozpraszającej $D_o = D_s - D_r$. Zdolność skupiająca obiektywu jest wyrażona wzorem

$$D_o = \frac{1}{F_o} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{d+f}{df},$$

gdzie: F_o – ogniskowa obiektywu,
 d – odległość od obiektywu do przedmiotu,
 f – odległość od obiektywu do obrazu.

Zgodnie z warunkiem zadania $D_s = \frac{D_r}{2}$

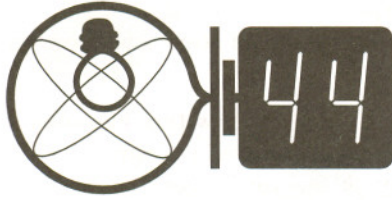
i stąd $D_o = \frac{D_r}{2} - D_r = -\frac{1}{2}D_r$, czyli

$D_r = -2D_o$. Ostatecznie ogniskowa soczewki rozpraszającej jest równa

$$F_r = \frac{1}{D_r} = -\frac{1}{2D_o} = -\frac{df}{2(d+f)} \approx -12 \text{ cm.}$$

Wskazówki do dalszej lektury

Kompendium współczesnej wiedzy o algorytmach, podanej w atrakcyjny i przystępny sposób znajdzie Czytelnik w dostępnej w polskim przekładzie książce Th.C. Cormena, Ch.E. Leisersona i R.L. Rivesta *Wprowadzenie do algorytmów*, WNT 1997. Podstawy teorii złożoności wyłożone są w klasycznym podręczniku J.E. Hopcrofta i J.D. Ullmana *Wprowadzenie do teorii automatów, języków i obliczeń*, PWN, Warszawa 1994. Szeroką perspektywę problemów i kierunków badawczych tej teorii zakreśla monografia Ch.H. Papadimitriou *Computational complexity*, Addison-Wesley, 1995. Czytelnik, zainteresowany dziesiątym problemem Hilberta, może sięgnąć po książkę samego J. Matijasiewicza, *Dziesiątą problemę Hilberta*, Nauka Publishers, 1993 (przekład angielski: Yuri V. Matiyasevich, *Hilbert's Tenth Problem*, The MIT Press, 1993). Twierdzenie to przedstawione jest także w akademickim podręczniku Z. Adamowicz i P. Zbierskiego *Logika matematyczna*. PWN, Warszawa 1991. Eksperyment Adlemana przedstawiony jest przez samego autora w miesięczniku *Świat nauki*, nr 10 (86), październik 1998. Wreszcie, ciekawe spojrzenie na granice komputerowej obliczalności przedstawia R. Penrose w książkach *Nowy umysł cesarza*, PWN, Warszawa 1995 i *Makroświat, mikroświat i ludzki umysł*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1997.



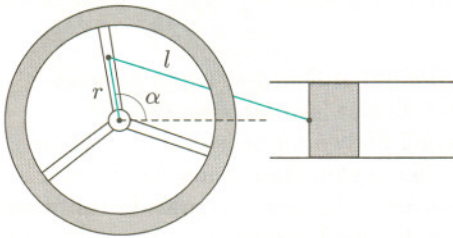
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2000

Przypominamy treść zadań:



294. Ciało o masie m („tłok”) może się poruszać wzdłuż linii prostej i jest połączone przegubowo za pośrednictwem nieważkiego pręta l z kołem zamachowym o momencie bezwładności I (rys.). Dane są: długość pręta l oraz odległość r punktu jego zamocowania na kole zamachowym od osi tego koła. „Tłok” i koło poruszają się bez tarcia. Jeśli maksymalna prędkość kątowna koła jest równa ω_1 , to ile wynosi jego minimalna prędkość kątowna ω_2 ? Obliczenia wykonać dla $l = 2r$.

295. Mikroskop tworzy obraz powiększony 300-krotnie w odległości dobrego widzenia (25 cm) od oka obserwatora. Jaka powinna być dokładność ustawienia mikroskopu względem przedmiotu, jeśli odległość obrazu od oka ma nie różnić się od podanej wartości 25 cm więcej niż o 5 cm?

294. Odległość „tłoka” od osi koła jest dana wzorem

$$x = r \cos \alpha + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha},$$

gdzie α jest kątem obrotu koła (rys.). Różniczkując wyrazimy prędkość v „tłoka” przez prędkość kątową koła $\omega = d\alpha/dt$:

$$v = -\omega r \left(\sin \alpha + \frac{r \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} \right).$$

Oznaczmy wyrażenie w nawiasie przez $f(\alpha)$; oprócz kąta α funkcja ta zależy także od stosunku l/r . Zgodnie z zasadą zachowania energii wielkość $I\omega^2 + mv^2 = \omega^2 [I + mr^2 f^2(\alpha)]$ pozostaje stała w czasie ruchu układu, a ponieważ minimalną wartością funkcji f jest 0 (dla $\alpha = 0$), więc

$$\omega_{\max}^2 I = \omega_{\min}^2 (I + mr^2 f_{\max}^2).$$

Wartość f_{\max} można wyznaczyć prawdopodobnie tylko numerycznie – dla $l/r = 2$ wynosi ona $f_{\max} = 1,123$. Podstawiając ją do powyższego równania, otrzymujemy rozwiązanie.

295. Różniczkując równanie soczewkowe $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$,

otrzymujemy $\left| \frac{dx}{x^2} \right| = \left| \frac{dy}{y^2} \right|$, czyli iloraz dy/dx (stosunek przesunięcia obrazu do przesunięcia przedmiotu) jest równy kwadratowi powiększenia p soczewki. Tak jest zarówno dla obiektywu (1), jak i dla okularu (2):

$$\left| \frac{dy_1}{dx_1} \right| = p_1^2, \quad \left| \frac{dy_2}{dx_2} \right| = p_2^2.$$

Ponieważ przedmiotem dla okularu jest obraz wytworzony przez obiektyw, więc $|dy_1| = |dx_2|$, a stąd

$$\left| \frac{dy_2}{dx_1} \right| = (p_1 p_2)^2,$$

gdzie $p_1 p_2$ jest danym całkowitym powiększeniem. Jeśli przyjmiemy, że przesunięcia są dostatecznie małe, aby słuszne były obliczenia oparte na rachunku różniczkowym, to kładąc $|dy_2| = 5$ cm, otrzymujemy $|dx_1| \approx 0,6$ m.



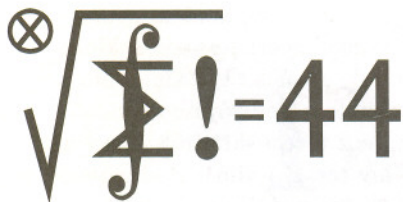
★ Miesiąc gwiazdowy (czas obiegu Księżyca wokół Ziemi) wynosi $G = 27,321\,661$ dni, a miesiąc synodyczny (odstęp czasu między kolejnymi np. nowiami) $S = 29,530\,589$ dni. Czy te liczby są nam przez przyrodę dane przypadkowo? Otóż są one zależne. Mianowicie $360^\circ/G$ to prędkość kątowna Księżyca w układzie inercjalnym, $360^\circ/S$ to jego prędkość w układzie obracającym się w takim tempie, w jakim Słońce (pozornie) obiega Ziemię w ciągu roku gwiazdowego, a więc z prędkością $360^\circ/R$, gdzie $R = 365,256\,362$ dni. A prędkości kątowe też się dodają i odejmują, dlatego

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{G} - \frac{1}{R}.$$

Sprawdź!

★ Liczby bliźniacze to liczby pierwsze różniące się o 2. W 1998 roku rekordowo wielką taką parę tworzyły $242\,206\,083 \cdot 2^{38\,880} \pm 1$. Do dziś nie wiadomo, czy istnieją największe liczby bliźniacze, czy też jest takich par nieskończenie wiele. Nietrudno natomiast przekonać się, że „trojczków” wśród liczb pierwszych (czyli takich trzech, które kolejno różnią się o 2) jest skończenie wiele, a dokładniej 1. Dlatego trojczkami nazywa się trójki liczb postaci $p, p + 2, p + 6$ oraz postaci $p, p + 4, p + 6$; proszę wskazać kilka przykładów.

★ Każda liczba całkowita nieujemna może być liczbą osi symetrii figury płaskiej. Dla figur przestrzennych liczbami ich osi mogą być tylko 0, nieskończoność i liczby nieparzyste.



Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2000

Przypominamy treść zadań:

397. Wielomian $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wartości dodatnie dla wszystkich $x \geq 0$. Udowodnić, że dla pewnej liczby naturalnej n wielomian $Q(x) = (1+x)^n P(x)$ ma wszystkie współczynniki nieujemne.

398. Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ wyznaczyć największą liczbę całkowitą, nie przekraczającą $\frac{1}{\sqrt[n]{e}-1}$.

397. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $P(x)$ jest trójmianem kwadratowym bez pierwiastków rzeczywistych: $P(x) = x^2 - px + q$, $p^2 < 4q$. Dla każdej liczby naturalnej n mamy wówczas

$$(1+x)^n P(x) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \right) (x^2 - px + q) = \sum_{k=0}^{n+2} c(n,k) x^k,$$

gdzie

$$c(n,k) = \binom{n}{k-2} - p \binom{n}{k-1} + q \binom{n}{k}$$

(przyjmujemy $\binom{n}{j} = 0$ dla $j < 0$ oraz dla $j > n$). Wykażemy, że dla dostatecznie dużych n współczynniki $c(n,k)$ ($k = 0, 1, \dots, n+2$) są nieujemne.

Dla $k = 0, k = 1, k = n+1, k = n+2$ wyrażenie $c(n,k)$ przyjmuje odpowiednio wartości $q, qn-p, n-p, 1$; są to liczby nieujemne dla dużych n . Gdy zaś $k = 2, 3, \dots, n$, wówczas

$$(1) \quad c(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k+2)!} \cdot [Ak^2 - (Bn+C)k + q(n^2 + 3n + 2)],$$

gdzie $A = 1 + p + q$, $B = p + 2q$, $C = 1 + 2p + 3q$. Przekształcamy wyrażenie w nawiasie kwadratowym do postaci

$$(2) \quad A \left(k - \frac{Bn+C}{2A} \right)^2 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma,$$

gdzie

$$\alpha = q - \frac{B^2}{4A}, \quad \beta = 3q - \frac{2BC}{4A}, \quad \gamma = 2q - \frac{C^2}{4A}.$$

Liczby $A = 1 + p + q = P(-1)$ oraz $\alpha = (4q - p^2)/4A$ są dodatnie. Jeśli zatem n jest dostatecznie dużą liczbą naturalną, to wartość wyrażenia (2) (więc i (1)) jest dodatnia dla $k = 2, 3, \dots, n$. To dowodzi tezy w rozważanym przypadku ($P(x) = x^2 - px + q$).

W przypadku ogólnym rozkładamy wielomian P na iloczyn czynników stopnia nie większego niż 2. Czynniki liniowe mają współczynniki dodatnie (bo wszystkie pierwiastki rzeczywiste wielomianu P są ujemne). Natomiast każdy czynnik będący nierozkładalnym trójmianem kwadratowym można pomnożyć przez pewien czynnik postaci $(1+x)^m$, otrzymując – na mocy rozważonego wcześniej przypadku – wielomian o współczynnikach nieujemnych. Zatem mnożąc wielomian P przez iloczyn wszystkich tych czynników $(1+x)^m$ (odpowiadających wszystkim kwadratowym czynnikom rozkładu P) otrzymujemy iloczyn wielomianów o współczynnikach nieujemnych. Taki iloczyn też jest oczywiście wielomianem o współczynnikach nieujemnych; jest to szukany wielomian Q . Stąd teza zadania w przypadku ogólnym.

398. Ciągi o wyrazach $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ oraz $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ są zbieżne do wspólnej granicy e . Wiadomo, że pierwszy z nich jest rosnący, a drugi malejący. Zatem dla $n \geq 2$ zachodzi nierówność $a_n < e < b_{n-1}$, czyli

$$1 + \frac{1}{n} < \sqrt[n]{e} < 1 + \frac{1}{n-1};$$

lub równoważnie:

$$n-1 < \frac{1}{\sqrt[n]{e}-1} < n.$$

To znaczy, że dla $n \geq 2$ największa liczba całkowita, nie przekraczająca odwrotności różnicy $\sqrt[n]{e}-1$, jest równa $n-1$ (wynik prawidłowy także dla $n=1$).

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 389 (WT=2,37) i 390 (WT=1,91)
z numeru 11/1999

Andrzej Daniluk	- Kraków	45,55
Rafał Pikula	- Wrocław	41,33
Jarosław Łazuka	- Warszawa	39,82
Tomasz Wietecha	- Tarnów	37,94
Michał Adamaszek	- Kęty	37,78
Jerzy Witkowski	- Radlin	34,62

Pan Daniluk zostaje dziewięćdziesiątym
członkiem **Klubu 44 M**.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 288 (WT=2,46) i 289 (WT=3,91)
z numeru 12/1999

Tomasz Wietecha	- Tarnów	43,32
Aleksander Surma	- Myszków	31,25
Jarosław Łazuka	- Warszawa	28,51
Artur Arciszewski	- Kielce	26,43
Marek Wójcicki	- Szczecin	24,61
Grzegorz Miłoś	- Mielec	21,95
Tomasz Rudny	- Warszawa	20,86



Nie istnieją dotychczas żadne przesłanki przemawiające za istnieniem życia poza Ziemią, każdy jednak przyzna, że jeżeli już szukać życia pozaziemskiego, to przede wszystkim w pobliżu gwiazd podobnych do Słońca. Tak się akurat składa, że najbliższa gwiazda, α Centaura, jest układem podwójnym gwiazd właśnie podobnych do Słońca (nawet potrójnym, lecz trzeci składnik, Proxima, jest bardzo słabym czerwonym karłem i nie mówmy teraz o nim). Podwójność komplikuje sprawę, ponieważ uważa się, że życie może istnieć na planecie, jeżeli obiega ona swoją gwiazdę po trwałej, niemal kołowej orbicie, a to w naturalny sposób może zapewnić gwiazda pojedyncza. Gwiazd podwójnych jest jednak w Galaktyce w przybliżeniu połowa, nie można więc ich obecności ignorować. Nic więc dziwnego, że badacze interesują się również szansami istnienia układów planetarnych przy gwiazdach podwójnych. Chociaż więc nie odkryto żadnych planet przy α Centaura (niektórzy zapewne pamiętają, że co innego pisał przed laty Stanisław Lem w *Obłoku Magellana*), warto przedyskutować, jakie planety mogą w takim układzie gwiazd istnieć.

Jest to zresztą dość podstawowe zagadnienie z mechaniki nieba, aczkolwiek odpowiedź na postawione tu pytanie łatwo jest uzyskać dla układu gwiazd obiegających się po orbitach kołowych. Składniki α Centaura obiegają się jednak po orbitach silnie wydłużonych, odległość gwiazd zmienia się w granicach od 11 do 36 j.a. i zachowanie się orbit hipotetycznych planet trzeba śledzić numerycznie. W wyniku obliczeń przeprowadzonych niedawno przez dwóch kanadyjskich astronomów okazało się, że trwałe orbity mogłyby mieć planety obiegające każdą z gwiazd w odległości nie większej od 3 j.a. Orbita obszerniejsza podlegałaby już zbyt silnym zaburzeniom ze strony drugiej gwiazdy. Odporniejsze na takie zaburzenia są orbity, na których planety krążyłyby w kierunku przeciwnym do kierunku obiegu gwiazd (tzw. orbity wsteczne) i one mogłyby mieć promień do 4 j.a. Znacznie za to czulsze na zaburzenia byłyby orbity o płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny wzajemnych orbit gwiazd – musiałyby być ciaśniejsze od orbity Merkurego. Wreszcie są do pomyslenia obszerne orbity ogarniające obie gwiazdy α Centaura. Trwałymi byłyby te, których promień przekraczałby 70 j.a.

Całe te rozważania są – jak to się mówi – akademickie, ale nie do końca. Rozmiary orbit określają bowiem częstości, jakich można by oczekiwać w prędkościach radialnych gwiazd. A pomiary tych prędkości (dzięki zjawisku Dopplera) są obecnie potężnym narzędziem do poszukiwania pozasłonecznych planet.

Tomasz KWAST

Lipiec

Końca świata jakoś nie było, oddychamy z ulgą i z nową ciekawością możemy patrzeć w niebo. Letnie niebo znowu z północy na południe przecina wieczorem Droga Mleczna, którą można wtedy zobaczyć w całej okazałości, gdyż na ogół choć na trochę wyjeżdżamy z miast w obszar czystszy powietrza. Prawie w zenicie widzimy Koronę Północną, Herkulesa i Lutnię, a trochę ku północy Smoka. Jego najjaśniejsza gwiazda, Thuban, była gwiazdą biegunową w czasach, gdy w Egipcie powstawały piramidy. To „zaczacanie się” osi ziemskiej (precesja) jest spowodowane oddziaływaniem ze strony Księżyca i Słońca na Ziemię, przy czym oddziaływanie to ujawnia się tylko dlatego, że Ziemia jest lekko spłaszczona. W rezultacie biegun nieba, tzn. punkt, w którym oś ziemską przebija sferę niebieską, w czasie około 26 000 lat obiega wokół bieguna ekliptyki, który też leży w Smoku.

Jak już wspomnieliśmy miesiąc temu, 1 VII zachodzi złączenie Marsa ze Słońcem kończące bogatą serię złączeń jasných planet. Co za tym idzie, Marsa jeszcze z miesiąc nie będzie widać. Widać natomiast, choć z trudem, Wenus, tuż po zachodzie Słońca, a Jowisza i Saturna już na długo przed jego wschodem; obie planety są w Byku. 1 VII jest też nów Księżyca, pełnia 16 VII i drugi nów 31 VII. We wszystkich tych trzech dniach są zaćmienia, ale nic sobie po nich nie obiecujemy, w pierwszym nowiu nastąpi bowiem częściowe zaćmienie Słońca, jednak widoczne po drugiej stronie Ziemi, głównie z południowego Pacyfiku. W czasie pełni będzie całkowite zaćmienie Księżyca, u nas będzie jednak wtedy środek dnia, a więc Księżyca nie będzie widać. Wreszcie w drugim nowiu będzie następne częściowe zaćmienie Słońca, widoczne jednak tylko w strefie arktycznej. W lipcu Księżyc nie zakryje żadnej jasnej gwiazdy.

T.K.

O liczbie π (1)

Z okazji Γ -limatiasu numer $[10\pi] = [\pi^3]$ zamieszczonego w *Delcie* $[100\pi]$ małe co nieco o liczbie π .

Raz w maju, w drugą niedzielę,
Pi liczył cyfry pan Felek.
Pomnożył, wysumował,
Cyferki zanotał,
Ale ma ich niewiele.

Wierszyki pozwalające zapamiętać początkowe cyfry rozwinięcia liczby π najłatwiej pisać, gdy używa się układu dziesiętkowego. W takich wierszykach cyfry liczby π są reprezentowane przez liczby liter w kolejnych wyrazach,

8	3
9	10
10	32
11	5
12	5
13	5
14	19
15	16
16	13

choć pewien problem pojawia się z zerem. Jednak w układzie dziesiętkowym zero pojawia się w rozwinięciu π dopiero na 32-gim miejscu po przecinku. W układach o podstawie mniejszej niż 8 jest wprost fatalnie – zero pojawia się już na pierwszym miejscu po przecinku. Dalej jest lepiej, ale układ dziesiętkowy jest bezkonkurencyjny wśród układów o podstawie nie przekraczającej 16.

Liczba π w układzie dwójkowym

Liczba π zapisana w układzie dwójkowym ma przed przecinkiem dwie jedyńki, ale po przecinku zdecydowanie woli zera. Jak zmierzyć te preferencje? Najodpowiedniejsza

n	$d(n)$
16	0
18	0
19	-1
20	0
21	-1
22	0
23	-1
24	0
25	-1
26	0

wyda się funkcja $d(n) = z(n) - j(n)$, gdzie $z(n)$ jest liczbą zer wśród początkowych n cyfr po przecinku rozwinięcia dwójkowego liczby π , a $j(n)$ jest liczbą jedynek. Jeśli d jest dodatnia, to znaczy, że zer jest więcej niż jedynek.

Obliczając wartości $d(n)$ dla początkowych liczb naturalnych n stwierdzamy, że z nielicznymi wyjątkami przedstawionymi obok przyjmuje ona wartości dodatnie.

Sprawdzając początkowych 100 cyfr stwierdzamy, że aż 60 z nich to zera. 60% zer wśród 100 cyfr to dużo. Mamy przy tym $d(100) = 20$.

Oczekiwać należy, że odsetek zer będzie zbliżać się do 50 wraz ze wzrostem liczby cyfr, którym się przyglądamy. Bierzemy więc 200 cyfr. Zer jest 61%. Przy tym $d(200) = 44$, więc d oddala się od zera. Przy 300 cyfrach odsetek zer spada wprawdzie do 58,33%, ale $d(300) = 50$.

Po osiągnięciu rekordowej wartości $d(310) = 58$ następuje spadek do $d(782) = 6$. Odsetek zer jest wtedy na poziomie 50,38%.

I to by było na tyle, można powiedzieć. Liczby zer i jedynek prawie się wyrównały, przedstawienie skończone. No to jeszcze zostaliśmy na chwilę i zobaczmy jak d spada poniżej zera.

Bierzemy 1000 cyfr. Stwierdzamy, że $d(1000) = 24$, co oznacza 51,2% zer.

Idziemy do 2000 cyfr. Po drodze spotykamy najmniejsze wartości $d(1143) = d(1149) = d(1181) = 9$, by skończyć na rekordowym $d(2000) = 68$, które oznacza 51,7% zer. Widać, że jednak π lubi te zera, oj lubi.

Wędrujemy dalej aż do 3000 cyfr. Stwierdzamy, że $d(3000) = 92$, co daje 51,53% zer. Po drodze stwierdzamy, że d nie spada poniżej 43 i odnotowujemy rekord $d(2979) = d(2987) = 99$.

Dojście do 4000 cyfr niewiele zmienia. Mamy bowiem $d(4000) = 102$, co świadczy o 51,275% zer. Po drodze odsetek zer nie spada nigdy poniżej 51,13%, a d poniżej 85. Rekordowa wartość d wynosząca 110 przyjmowana jest sześciokrotnie.

Przeglądamy piąty tysiąc cyfr. Nowy rekord $d(4083) = 115$ z odsetkiem zer powyżej 51,4%, a potem spadek do $d(5000) = 82$ z 50,82% zer. Po drodze minimum $d(4946) = 70$.

Ale wszystko ma swój koniec. Znajdujemy bowiem $d(6374) = 0$ oraz $d(6375) = -1$. A potem $d(6628) = -18$.

Przeglądając 100 000 cyfr stwierdzamy, że rekord $d(4083) = 115$ nie zostaje pobity, podczas gdy $d(85\ 915) = -405$. Przy tym $d(58\ 734) = 0$ jest ostatnią nieujemną wartością.

Najgorsze przybliżenia liczby π (2)

Logarytm. Wykorzystujemy rozwinięcie zespolonej funkcji logarymicznej w szereg potęgowy:

$$(3.14) \quad \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \cdot (-1)^{n+1}}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

Powyższy wzór jest prawdziwy dla wszystkich liczb zespolonych $z \neq 1$ takich, że $|z| \leq 1$.

Czytelnikowi niezaznajomionemu z teorią funkcji zespolonych w zupełności wystarczy ogólna znajomość liczb zespolonych oraz wzór

$$\log z = \ln |z| + \text{Arg } z \cdot i,$$

gdzie $\text{Arg } z$ jest argumentem liczby zespolonej z .

Kładąc $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ we wzorze (3.14) otrzymujemy

$$\log(1+z) = \log\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}i,$$

skąd

$$\pi = 3i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n \cdot (-1)^n}{n} = 3i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n}{n}.$$

Liczba π (rzeczywista!) jest wyrażona za pomocą szeregu o wyrazach zespolonych.

Uwzględnienie 10 wyrazów powyższego szeregu daje przybliżenie

$$\pi \approx \frac{1023\sqrt{3}}{560} - \frac{473i}{1680} \approx 3,16409 - 0,28155i.$$

Część rzeczywista liczby π jest przybliżona nie najgorzej, błąd jest mniejszy od 0,03. Trochę pozostawia do życzenia przybliżenie części urojonej.

Przy uwzględnieniu 1000 wyrazów otrzymujemy przybliżenie $\pi \approx 3,1415952 - 0,0029985i$ zgodne z dokładną wartością π do piątego miejsca po przecinku. Ale tylko w zakresie części rzeczywistej, bo urojona część liczby π różni się już na trzecim miejscu. Dodanie 1001-szego wyrazu poprawia przybliżenie części urojonej, ale część rzeczywista jest o wiele mniej imponująca, gdyż dostajemy $\pi \approx 3,138999768 - 0,001499994i$.

JWR