

Zwracamy się z prośbą do wszystkich, którzy mogą **pomóc w ratowaniu życia rocznego Łukasza Cecota**. U dziecka stwierdzono nowotwór obu gałek ocznych z niebezpieczeństwem przerzutu do mózgu. Życie i jedno oko Łukasza może uratować jedynie operacja i leczenie w Londynie o łącznym koszcie 70 000 PLN. Rodzice dziecka są nauczycielami w Sosnowcu, ojciec ukończył studia matematyczne na Uniwersytecie Śląskim.

Dary pieniężne prosimy kierować do Stowarzyszenia Rodziców i Przyjaciół Dzieci Niewidomych i Słabowidzących **TECZA**, ul. Kopińska 6/10, 02-321 Warszawa, na hasło „Łukasz Cecot”, na konto: PKO S.A. VI O/Warszawa nr: 12401082-42002075-2700-401112-001.

## SPIS TREŚCI NUMERU 4(311)

Teoria względności <i>Leszek M. Sokółowski</i>	str. 1
Rondeau <i>Jan Baranowski</i>	str. 4
Wijące się pnącza	str. 6
Liczby Euklidesa <i>Witold Bednarek</i>	str. 7
Mała Delta	str. 8
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str.10
Jeszcze o liczbie $\pi$	str.11
Sinusy, iloczyny i sumy <i>Grzegorz Rządkowski</i>	str.12
Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Kwiecień	str.16
Gammalimatias	str.17

**W następnym numerze:**  
Cząstki elementarne

Okładki, ilustracje i rysunki  
techniczne  
*Anna Ludwicka*

Wybór artykułów w języku angielskim  
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 3 zł**

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:  
Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
– wiceprzewodniczący  
Krzysztof Ciesielski  
Jan A. Gaj  
Piotr Goldstein  
Tomasz Hofmokr  
Andrzej Hrynkiewicz  
Wiesław A. Kamiński  
Marta Kicińska-Habior  
Krzysztof Maślanka  
Janusz Matkowski  
Andrzej Mąkowski  
Zdzisław Pogoda  
Michał Różycka  
Konrad Rudnicki  
Grzegorz Sitarski  
Andrzej Woszczyk  
Eligiusz Złotkiewicz  
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
Wiktor Bartol  
Krzysztof Biesaga  
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Anna Ludwicka  
Anna Rudnik  
Witold Sadowski  
Joanna Udalska  
Anna Wojtyra  
Piotr Zalewski

Adres Redakcji:  
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa  
tel. 853-59-61  
BARTOL@MIMUW.EDU.PL  
Skład systemem TeX wykonała Redakcja.  
Wydrukowano  
w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.  
w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 2000 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2000 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na III kwartał 2000 r. wynosi 9 zł.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
- Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>.
- Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.
- Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numerzy archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

# Teoria względności

Leszek M. SOKOŁOWSKI



Transformacja Galileusza od układu  $S$  ze współzrędnymi  $t, \vec{r}$ , do układu  $S'(t', \vec{r}')$  poruszającego się z prędkością  $\vec{V}$  ma postać

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \vec{r} - \vec{V}t + \vec{\alpha}, \\ t' &= t,\end{aligned}$$

gdzie  $\vec{\alpha}$  to wektor przesunięcia początku układu  $S'$  w chwili  $t = 0$ .

Gdy układ  $S'(t', x', y', z')$  porusza się z prędkością  $V$  po osi  $x$  układu  $S(t, x, y, z)$ , to transformacja Lorentza (bez przesunięcia) ma postać

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - Vt), \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right),\end{aligned}$$

$$y' = y, \quad z' = z, \quad \gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2},$$

gdzie  $c = 299\,792\,458$  km/s to prędkość światła w próżni.

W przestrzeni Minkowskiego odległość  $s_{AB}$  zdarzenia  $A$  o współzrędnym  $(t_1, x_1, y_1, z_1)$  od zdarzenia  $B(t_2, x_2, y_2, z_2)$  wynosi

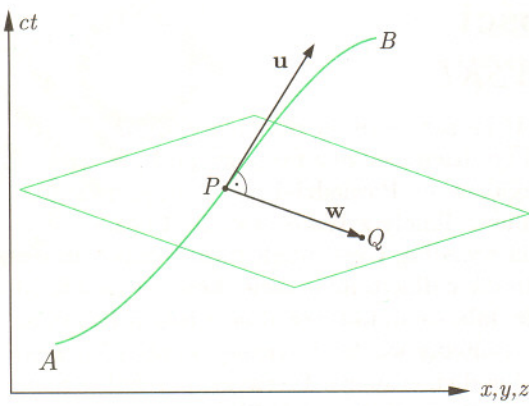
$$s_{AB} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2}.$$

Gdy Einstein przyjechał w 1921 r. po raz pierwszy do Ameryki, już w nowojorskim porcie obskoczyli go dziennikarze z propozycją, by w dwu zdaniach wyłożył istotę teorii względności. Powiedział im: „Dotąd uważano, że gdyby wszystkie ciała materialne zniknęły z Wszechświata, to czas i przestrzeń pozostałyby. Natomiast według teorii względności, czas i przestrzeń zniknęłyby wraz z nimi”. Einstein nie całkiem miał rację, bowiem zasada Macha, na której opierał swój pogląd, nie dała się dotąd uzgodnić z resztą fizyki, za to dobrze zobrazował radykalność przemiany wiedzy fizycznej o czasie i przestrzeni, będącej jego dziełem. Dokonał jej w dwu etapach. Pierwszy, psychologicznie trudniejszy, stanowiła szczególna teoria względności (STW).

Opis wszelkiego ruchu odwołuje się do czasu i przestrzeni. W fizyce, wbrew tradycji kulturowej, traktującej je jako byty odrębne i niezależne, tworzą one jeden obiekt fizyczny – czasoprzestrzeń. Wynika to z zasady względności Galileusza: *w przyrodzie istnieje nie jeden, lecz cała klasa wyróżnionych układów odniesienia, w których opis ruchu jest prosty*. Układy te, zwane inercjalnymi, poruszają się względem siebie, zatem przestrzeń jest sprzężona z czasem. W każdym z nich z osobna przestrzeń jest euklidesowa, a czas – czyli to, co mierzy dobry zegar – płynie równomiernie. Czasoprzestrzeń jest w sensie matematycznym pewną przestrzenią i jej geometrię można odtworzyć z transformacji między układami inercjalnymi. Przestrzeń euklidesową poznajemy po tym, że istnieją w niej kartezjańskie układy współrzędnych i każdy z nich przechodzi w inny obrotem i przesunięciem. Podobnie geometria czasoprzestrzeni wynika z dwu postulatów: zasady względności (istnieją układy inercjalne) i konkretnej postaci transformacji między układami inercjalnymi. Przed Einsteinem sądzono, że możliwy jest tylko jeden rodzaj transformacji, intuicyjnie oczywisty; Einstein stwierdził, że jest więcej możliwości i wyboru trzeba dokonać na podstawie eksperymentu. Gdy wziąć transformację Galileusza, to dostaje się czasoprzestrzeń Galileusza fizyki klasycznej. Czasoprzestrzeń STW dostaniemy, postulując transformację Lorentza. Transformacja ta pojawia się przy założeniu, że w przyrodzie istnieje stała uniwersalna o wymiarze prędkości; na istnienie takiej stałej wskazuje fizyka atomowa. Tradycyjnie stałą tę utożsamia się z prędkością  $c$  światła w próżni, ale światło nie jest tu jedyne, jest ona bowiem prędkością rozchodzenia się wszystkich oddziaływań fundamentalnych.

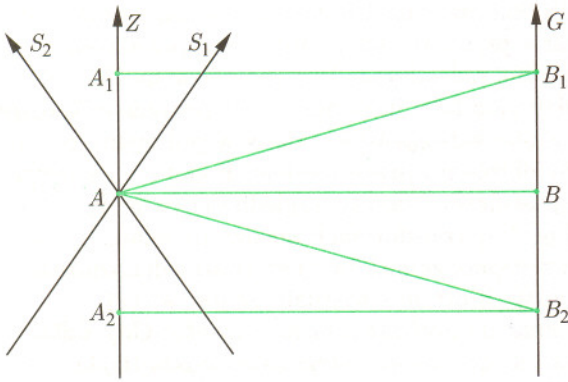
Przestrzeń, w której transformacja między wyróżnionymi układami współrzędnych jest transformacją Lorentza, została wprowadzona w 1908 r. przez Hermanna Minkowskiego i nosi jego imię; jej punkty nazywamy zdarzeniami. Podobnie jak przestrzeń Euklidesa jest ona przestrzenią metryczną: jest w niej określona odległość dowolnych dwu punktów. Jest jednak zasadnicza różnica – w przestrzeni Minkowskiego odległość może być zarówno dodatnią liczbą rzeczywistą, jak i liczbą czysto urojoną (dokładniej: dodatnią liczbą rzeczywistą pomnożoną przez urojoną jednostkę). W czasoprzestrzeni Galileusza tak nie jest – dla dwu zdarzeń „o godzinie 7.00 wsiadam do pociągu w Krakowie” i „o 9.35 wysiadam z pociągu w Warszawie” sens niezmienniczy ma tylko ich odległość czasowa, 9300 s, natomiast odległość przestrzenna zależy od układu odniesienia: w układzie związanym z Ziemią wynosi 292 km, a w układzie pociągu oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu. W przestrzeni Minkowskiego odległość czasoprzestrzenna zdarzeń wynosi 2788140000 km, ich zaś odległości przestrzenne i czasowe zależą od układu odniesienia.

Tradycyjnie od czasów Einsteina wykład STW koncentruje się na konsekwencjach transformacji Lorentza: skróceniu długości, wydłużeniu czasu i innych sprzecznych z intuicją efektach. Nieodmiennie zadziwia to laików, a i fizyków wprawia nieraz w konfuzję. Historycznie było to uzasadnione, lecz teraz jest niecelowe. To tak, jakby w geometrii Euklidesa przywiązywać zbytnią

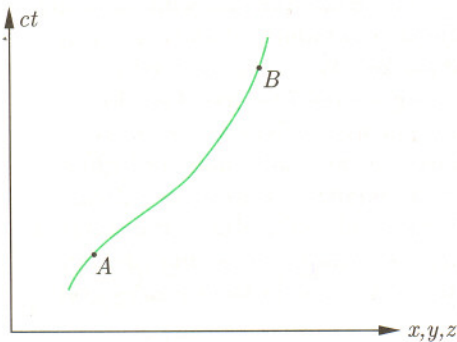


Rys. 1.  $AB$  – linia świata obserwatora poruszającego się ze zmienną prędkością,  $u$  – chwilowa 4-prędkość obserwatora w  $P$ . Równoczesne z  $P$  są wszystkie zdarzenia leżące na 3-płaszczyźnie przechodzącej przez  $P$  i prostopadłej do  $u$ , tzn. dla dowolnego punktu  $Q$  na niej 4-wektor  $w$  łączący  $Q$  z  $P$  jest ortogonalny do  $u$ ,

$$u \cdot w = c^2 t_u t_v - x_u x_v - y_u y_v - z_u z_v = 0.$$

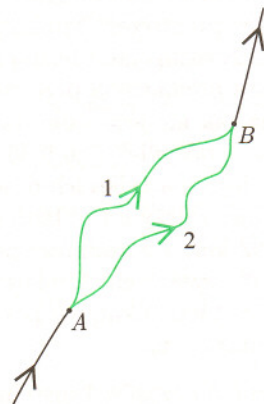


Rys. 2. Relacja równoczesności jest nieprzechodnia. Mamy linie świata:  $Z$  – środka Ziemi,  $G$  – galaktyki spoczywającej względem Ziemi,  $S_1$  – obserwatora idącego na Ziemi w pewnym kierunku,  $S_2$  – obserwatora idącego w przeciwnym kierunku,  $A$  i  $B$  – zdarzenia równoczesne w układzie odniesienia  $Z$ ,  $A$  i  $B_1$  – zdarzenia równoczesne w układzie  $S_1$ ,  $B_1$  i  $A_1$  – zdarzenia równoczesne w układach  $G$  i  $Z$ ,  $A$  i  $B_2$  – zdarzenia równoczesne w układzie  $S_2$ ,  $B_2$  i  $A_2$  – zdarzenia równoczesne w układach  $G$  i  $Z$ ,  $A_1$  może być odległe od  $A_2$  o tysiąc lat!

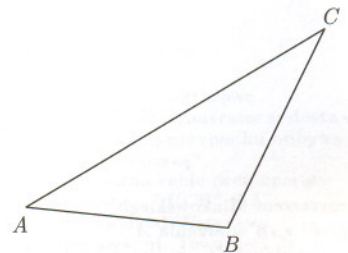


Rys. 3. Czas mierzony przez zegar między  $A$  i  $B$  zależy od jego linii świata i wynosi

$$\frac{1}{c} \int_A^B ds = \frac{1}{c} \int_A^B [c^2(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2]^{1/2}.$$



Rys. 4. Bliźnięta starzeją się niejednakowo, długości ich linii świata między  $A$  i  $B$  są różne,  $s_1(A, B) \neq s_2(A, B)$ .



Rys. 5.  $AB, BC, AC$ , – możliwe linie świata cząstek. Nierówność trójkąta u Euklidesa

$$AB + BC > AC.$$

Odwrócona nierówność trójkąta u Minkowskiego

$$AB + BC < AC.$$

Dla fotonu linia świata ma zawsze długość 0. Jeżeli  $AB$  i  $BC$  to linie świata fotonu, to  $AB + BC = 0$ . Zdarzenie  $C$  leżące w przyszłości  $A$  można zawsze połączyć z  $A$  linią łamaną o długości 0.

wagę do tego, jak przy obrotach zmieniają się współrzędne wierzchołków trójkąta. Skoro niezliczone eksperymenty z fizyki cząstek elementarnych ustaliły bezspornie, że czasoprzestrzeń ma geometrię Minkowskiego, to trzeba od początku konsekwentnie posługiwać się tą geometrią. STW to fizycznie zinterpretowana geometria Minkowskiego. Każde pojęcie STW ma sens geometryczny i każde twierdzenie tej teorii jest twierdzeniem tej geometrii. To, co nie ma jasnej treści geometrycznej (np. „nie istnieją cząstki szybsze od światła”), nie wchodzi do korpusu STW. Kłopoty i nieporozumienia związane z STW biorą się stąd, że przenosimy relacje i konstrukcje z czasoprzestrzeni Galileusza do przestrzeni Minkowskiego. Trzeba rozumować geometrycznie i wszystkie procedury fizyczne przekładać na język tej geometrii. I tak historia cząstki punktowej, czyli zbiór wszystkich zdarzeń jej dotyczących, tworzy w czasoprzestrzeni krzywą, zwaną linią świata cząstki. Wektor styczny do tej linii (zwany 4-wektorem) jest wektorem 4-prędkości cząstki, niezależnym od układu odniesienia. W przestrzeni Minkowskiego, podobnie jak w euklidesowej, mamy iloczyn skalarny 4-wektorów, wyznaczony przez odległość zdarzeń. Einsteińska definicja równoczesności za pomocą sygnałów świetlnych może wydać się arbitralna. Jest ona tylko jedną z kilku technicznych realizacji definicji geometrycznej: dla danego obserwatora równoczesne są te zdarzenia, które łączy z nim 4-wektor prostopadły do jego 4-prędkości (tzn. taki, że ich iloczyn skalarny w sensie Minkowskiego znika). Równoczesność musi być zrelatywizowana do obserwatora (tj. układu odniesienia), bo nie istnieje czas absolutny.

Fizyczny czas mierzony przez idealny zegar ma prosty sens geometryczny – jest to długość jego linii świata. Sławetny paradoks bliźniąt ma więc oczywiste rozwiązanie: dwie różne linie świata łączące dwa zadane zdarzenia mają na ogół różną długość. Ponieważ w przestrzeni Minkowskiego kwadrat odległości może być ujemny, ze wszystkich krzywych łączących dwa punkty linia prosta jest najdłuższa (u Euklidesa jest najkrótsza); wynika to z odwrócenia nierówności trójkąta.



Einstein sformułował STW w 1905 r., trzy lata później Minkowski nadał jej ostateczną postać geometryczną. Jej naturalną dziedziną jest świat cząstek elementarnych, lecz stosuje się nie tylko tam, gdzie prędkości są relatywistyczne. W fizyce kwantowej STW sprawia, że istnieją antycząstki: pozytony, antyneutrino itd., a to jest efekt niezależny od prędkości.

Drugim etapem wielkiej przemiany była ogólna teoria względności (OTW, 1915 r.). Dotąd czasoprzestrzeń uważano za element absolutny przyrody – ustaloną i niezmienną scenę, na której rozgrywa się cała fizyka. Einstein uznał, że scena ta czynnie reaguje na to, co się na niej dzieje: czasoprzestrzeń oddziałuje z materią. Wszelka materia, zależnie od ruchu i własności (gęstość masy, pęd, ciśnienie), zakrzywia czasoprzestrzeń. W przestrzeni Euklidesa jest jedna płaszczyzna i nieskończenie wiele powierzchni zakrzywionych, podobnie jest jedna czasoprzestrzeń płaska (tj. Minkowskiego) i nieskończenie wiele zakrzywionych, odpowiadających różnym formom i ruchom materii. Zależność jest wzajemna: ruch materii wpływa na krzywiznę, krzywizna wpływa na ruch. Relacja STW do OTW jest relacją płaszczyzny do powierzchni zakrzywionej; gładka powierzchnia ma w każdym punkcie płaszczyznę do niej styczną, która ją przybliża wokół punktu styczności. Krzywizna, a ściślej mówiąc odległość zdarzeń w czasoprzestrzeni, jest pewnym polem fizycznym, którego źródłem jest każda materia, tak jak ładunki elektryczne są źródłem pola elektromagnetycznego. Nie jest to nowe, dotąd nieznanne, pole fizyczne. Einstein wykazał, że należy je utożsamić z najbardziej uniwersalnym oddziaływaniem – grawitacją. W OTW nastąpiła całkowita geometryzacja grawitacji.



Rys. 6. Pozioma sprężysta membrana jest w polu ciężenia Ziemi. Toczą się po niej różne kule. Im cięższa kula, tym silniej odkształca membranę. Lekka cząstka nie zakrzywia membrany, stacza się do dołka wytworzonego przez cięższą kulę. Wygląda to, jakby kula przyciągała cząstkę. Krzywizna membrany przejawia się jak przyciąganie ciał na niej.

OTW jest teorią niezmiernie bogatą i jesteśmy daleko od wyczerpania jej możliwości. Trzy klasy czasoprzestrzeni, czyli pól grawitacyjnych, są szczególnie interesujące: modele kosmologiczne (czasoprzestrzenie modelujące geometrię całego Wszechświata), czarne dziury i fale grawitacyjne. Dzięki OTW kosmologia stała się nauką fizyczną. Czarne dziury to osobliwe czasoprzestrzenie powstające w wyniku zapaści grawitacyjnej wypalonych gwiazd; tutaj czas i przestrzeń najjaskrawiej odbiegają od potocznych o nich wyobrażeń. Fale grawitacyjne mają wiele cech wspólnych z falami elektromagnetycznymi, ale i różnią się od nich w wielu aspektach; geometrycznie są one drganiami krzywizny, podobnymi do wibracji membrany bębna. Niestety, bardzo słabo oddziałują one z materią, toteż mimo że przestrzeń wokół nas jest ich pełna, żaden organizm żywy nie ma receptorów fal grawitacyjnych. Od dziesięciu lat wiemy pośrednio o promieniowaniu grawitacyjnym z pulsara podwójnego. Bezpośrednio „zobaczymy” je za dobrych kilka lat.

OTW jest teorią niekwantową. Materia jest kwantowa, więc jej pole grawitacyjne musi mieć cechy kwantowe. Kwantowa grawitacja to kwantowa geometria. Wiele wskazuje na to, że stworzenie kwantowej teorii czasoprzestrzeni jest najtrudniejszym zadaniem w całej historii nauki. Można przypuszczać, że cel ten zostanie osiągnięty głęboko w trzecim tysiącleciu.



**Rozwiązanie zadania M 915.**  
Niech  $A$  będzie dowolnym uczestnikiem kursu. Wystarczy wykazać, że istnieje inny uczestnik  $B$ , którego kolegami są dwaj koledzy uczestnika  $A$  (wtedy  $A$  zaprasza  $B$  i owych dwóch kolegów). Załóżmy, że taki  $B$  nie istnieje. Wtedy każdy z  $m$  kolegów  $A$  ( $m \geq 10$ ) koleguje się z co najmniej 8 uczestnikami (nie licząc  $A$ ), którzy nie kolegują się z  $A$ . Jeśli wszyscy ci uczestnicy byłiby różni, to mielibyśmy co najmniej  $8m \geq 80$  uczestników różnych od  $A$  i nie będących jego kolegami. Wtedy jednak liczba wszystkich uczestników kursu byłaby równa co najmniej  $80 + 10 + 1 = 91$ . Tak więc istnieją dwaj koledzy  $A$ , którzy mają wspólnego kolegę ( $B$ ) różnego od  $A$ .



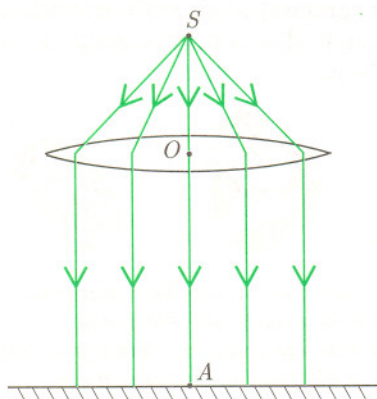
*Ze jaj skorupa jest dziurkowatą, pewnym jest ztąd, że zaraz po zniesieniu, wypróżniają się i być świeżymi przestają. Zapobiegając temu zwykły się dziurki ich tłustą jaką zatykać materyą, oliwą naprzykład. Tą gdy się dobrze zewsząd powleka, chustą je otrzeć należy, ażeby cienka tylko warstwa została powłoki, a to dla tego, ażeby ciśnieniem powietrza, wewnątrz jaja upędzone oliwy krople, gorzkniejąc, jaja nie zepsuły. Chcąc mieć zawsze jak można najświeższe, zaraz po zniesieniu tłustością powlec potrzeba, albo dnia tegoż przynajmniej. Jadłem tym sposobem więcej od roku chowane, i tak je świeżymi i delikatnemi znajdowałem, jak gdyby dziś były zniesione. Żeby je jak można najdłużej dochować, trzeba mieć bacność, żeby zapłodzone nie były, bo w takim razie nad 6. lub 8. tygodni chować się niemoż.*

Osiemnastowieczny przepis na przechowywanie jajek – według M.J. Brissona w książce *Początki Fizyki*, 1797 r.

Wahadło Foucaulta jest corocznie demonstrowane podczas wrześniowego Festiwalu Nauki na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego.



**Rozwiązanie zadania F 522.**  
Źródło znajduje się w ognisku soczewki, a więc oświetlenie w punkcie *A* leżącym pod źródłem jest równe oświetleniu soczewki w punkcie *O* (pomijamy pochłanianie i odbicie światła przez soczewkę).



Ogniskowa soczewki wynosi  $f = (\text{zdolność skupiająca})^{-1} = 1 \text{ m}$ . Stąd mamy, że oświetlenie w punkcie *O* jest równe

$$E_O = \frac{I}{f^2} = 100 \text{ luksów},$$

a więc oświetlenie w punkcie *A* wynosi  $E_A = E_O = 100 \text{ luksów}$ .

Oderwijmy się na chwilę od Ziemi i spojrzymy na jeżdżące samochody z góry. Na rondzie, na przykład na skrzyżowaniu Marszałkowskiej i Alej Jerozolimskich w Warszawie czy na Place de l'Etoile w Paryżu, byle nie było to w Wielkiej Brytanii ani Japonii, samochody poruszają się w stronę przeciwną do wskazówek zegara. To prawo o ruchu drogowym.

Z podobnej perspektywy można zaobserwować konsekwencję układu wiatrów – w cyklonie powietrze porusza się na ogół przeciwnie do wskazówek zegara, o ile cyklon ten wystartował na półkuli północnej. Cyklon powstaje, gdy w jakimś miejscu występuje silny lokalny niż baryczny, tam zbiegają się wiatry, niosąc powietrze z okolic mających wyższe ciśnienie. To prawo meteorologiczne Buys-Ballota.

W roku 1850 Jean Bernard Foucault udowodnił, za pomocą słynnego wahadła, że Ziemia się obraca względem własnej osi. Miało ono 67 m długości, wisiało w paryskim Panteonie. W Polsce widziałem podobne w zamkowej wieży we Fromborku, chyba o wiele krótsze, ale wystarczająco długie, by można było obserwować to, na co zwrócił uwagę Foucault. Śledząc je nie dłużej niż kwadrans, zobaczymy, że płaszczyzna wahań obraca się wobec oznaczonych kierunków nieruchomych względem powierzchni Ziemi.

Kąpiące się w wannie dzieci bardzo lubią patrzeć na „lejek”, jaki pojawia się przy wypuszczaniu wody. Jeżeli wyciągniemy korek, nie zaburzając ruchu wody, „lejek” na ogół będzie się obracał w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Doświadczenie jest proste i każdy je może za chwilę powtórzyć. Jednak trzeba zapewnić minimum wiarygodności. Przeciętny zlewozmywak jest z natury niesymetryczny i ukształtowanie blachy może z nadto wpływać na ruch wody. Przeciętą wanną jest wystarczająco symetryczna. A więc nąpuszczamy wodę, wyciągamy korek i patrzymy. Jeśli teraz ręką zamieszamy wodę nad otworem odpływowym w kierunku wskazówek zegara, woda będzie posłuszna i utrzyma ten skręt. Jeśli po wyciągnięciu korka nie będziemy ingerować, kierunek obrotu „lejka” zdecyduje się sam i będzie taki, jak w cyklonie.

Od kilku lat chodząc po mieście, oglądając architekturę, albumy artystyczne, fotografie obiektów naturalnych i sztucznych, chodząc wśród roślin, krzewów, drzew w Warszawie i poza nią, wyszukuję regularności związane z geometrią. Tak przyglądając się również pniom, zaobserwowałem, i to bardzo szybko, dzięki starym bzmom, że jakaś siła skręca rośliny (a spotyka to też najzwyczajwsze kasztanowce). Na innych pniach w mieście trudno to zobaczyć, ale można – nawet w centrum Warszawy. Trzeba jednak uważnie patrzeć. Być może jednym z impulsów do takich obserwacji była wspaniała książka H. Weyla *Symetria*, w której sporo jest interesujących przykładów geometrii w przyrodzie i sztuce. Weyl pisze między innymi, że zwrot skręcenia muszli ślimaka jest uwarunkowany genetycznie, podobnie jak wewnętrzna budowa ciała człowieka, choć od tego bywają odstępstwa. Czasem rodzi się człowiek mający serce po prawej stronie. Weyl wspomina o filotaksji, ale, niestety, nic o skręcaniu drzew.

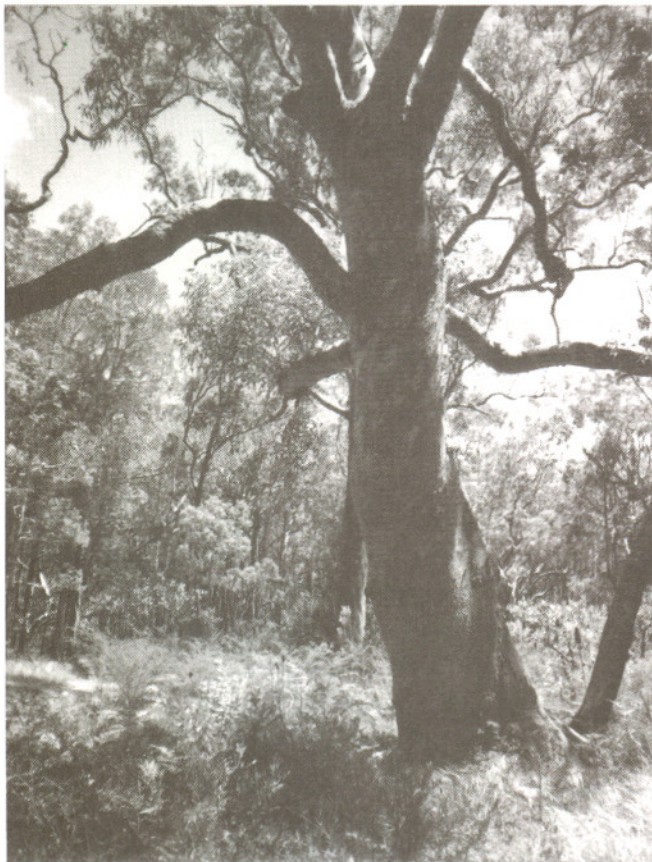
Od początku dziwił mnie kierunek skrętu. Nauczony w szkole o tropizmach, zwłaszcza o fototropizmie, wnioskowałem, że te bzy powinny się skręcać za Słońcem, czyli zgodnie ze wskazówkami zegara, a one tymczasem – na odwrót. Przez parę lat podczas wakacji w Tatrach oglądałem każdą stertę ściętych i odkorowanych pni różnych drzew. Ciągle ten sam kierunek skrętu. Wiedziałem już, że to regularność. Nie spotkałem przeciwnego skrętu (nie twierdzą, że nie istnieje!). Wyjaśnienie odkładałem do spotkania z jakimś dendrologiem.

W *Delcie* nr 1/1998 czytam, że zjawisko, które sam zaobserwowałem, patrząc na pnie w Warszawie, a potwierdziłem będąc w Tatrach, nie zachodzi w Polsce. Nieco mnie to zbulwersowało i każdego spotkanego zameczałem: ktoś to widział w Laponii, a tu w Polsce nie...

Wreszcie spotkałem się z kolegą (też matematykiem), który szepnął – a może to Coriolis... Jeżeli ta hipoteza jest prawdziwa, to – być może – w Laponii skręt pni jest silniejszy. Jak to wygląda w Australii? Czy są jakieś skręty na równiku?



Fotografia wykonana w Polsce (Jan Baranowski, wyżej) i w Australii (Ludwika Amber, niżej).



Siła Coriolisa wynikająca z bezwładności ciała obracającego się wraz z układem działa tylko wtedy, gdy jest „dopuszczona do głosu” przez inne, na ogół większe siły, kiedy gra rolę „języczka u wagi” wobec znoszących się innych sił. Jest na pewno odpowiedzialna za skręt cyklonu, wiru oceanicznego, wahadła Foucaulta, za lejek w wannie, za to, że rzeki naszej półkuli podmywają chętniej lewy brzeg. Czy jest tak ze skrętem drzew? Na pewno nie jest odpowiedzialna za ruch samochodów na rondzie.

Przeciwny skręt niż cyklon ma antycyklon powstający w miejscu, gdzie wystąpił silny wyż baryczny. Tutaj główny kierunek ruchu powietrza jest od środka na zewnątrz i tak samo działa siła Coriolisa. Różnie bywa z trąbami powietrznymi w Ameryce nazywanymi tornado; nie całkiem wiadomo, jak one powstają, mają raczej związek z różnicami temperatur niż ciśnień, niewątpliwie mają charakter bardziej lokalny i krótkotrwały niż cyklony. Podobno trąby na ogół kręcą się zgodnie ze wskazówkami zegara.

Wszystkie wspomniane przeze mnie uznane przykłady ingerencji siły Coriolisa dotyczą mas (powietrza, wody, ciężarka wahadła) poruszających się względem wirującej Ziemi. Drzewa stoją.

Hipoteza z siłą Coriolisa, choć pociągająca, padła.

Indagowani biolodzy obiecywali znaleźć wyjaśnienie, ktoś próbował nawet wytłumaczyć to zjawisko, jednak w swej argumentacji nieco się zapętlił... Nie mam jeszcze zamiaru zostawić biologów w spokoju!

Po pięciu miesiącach natrętnego wypytywania biologów i fizyków umówiłem się na bardzo ważne spotkanie. Do Warszawy przyjechała polska poetka mieszkająca w Australii, Ludwika Amber. Lubi obserwować przyrodę i ją fotografować. Też zauważyła skręcające się pnie. Opowiada, że większość tamtejszych drzew ma cieką łuszczącą się korę, która schodzi z pnia rozszczepiając się na włókna. Tworzy czasem efektowne firany zwisające z gałęzi.

Położyliśmy obok siebie dwa zdjęcia: warszawskiego kasztanowca i drzewa z australijskiego buszu. Skręcone są w tę samą stronę. Nie da się więc podtrzymać żadnej hipotezy wiążącej to zjawisko z ruchem obrotowym Ziemi.

P.S. Nie znam odpowiedzi na pytanie: czy zamieszana w szklance herbata zgodnie ze wskazówkami zegara będzie się krócej poruszać niż herbata zamieszana tak samo, ale przeciwnie do wskazówek zegara?

Inne pytanie: w którą stronę poruszałyby się wskazówki zegara, gdyby ten wynalazek powstał w Australii?

I jeszcze jedno: znalazłem ostatnio w Warszawie kilka drzew o przeciwnym skręcie, ale jestem pewien, że stanowią wyjątki.

wiciokrzew

## Wijące się pnącza

Po przeczytaniu artykułu Jana Baranowskiego zastanowiło mnie, że podobnie jak autor, nie rozmawiałem chyba nigdy z dendrologiem. Wysnułem więc **hipotezę**, że o dendrologa w Warszawie (a tym bardziej na Place de l'Etoile w Paryżu) trudno, ponieważ ludzie ci wolą przebywać w ciszy, wśród rzadkich okazów drzew i krzewów, np. w arboretum w Kórniku bądź w Rogowie, niż w huku i smrodzie wielkich miast. Później jednak, gdy dowiedziałem się, że jedna znajoma mi pani dendrolog na stałe mieszka w Warszawie, zacząłem się obawiać, że moja hipoteza jest zbyt śmiała.

Tak czy owak, trudniej jest natknąć się na dendrologów niż na pisane przez nich książki, które (od czasu restauracji kapitalizmu w naszym kraju) w obfitości znajdują się w niemal każdej księgarni. Nie zauważyłem w tych książkach, będąc ich wiernym czytelnikiem, żadnej wzmianki o prawoskrętności pni drzew, natomiast wśród pnączy wyróżniają one pnącza wijące się (wokół sznurków, prętów, lub jedna łodyga wokół drugiej) i o tym, w którą stronę się wiją, często informują. Szczególnie dotyczy to *Domów w zieleni* Rudiego Baumanna (Arkady, Warszawa, 1991), a tam określony kierunek wicia się przypisany jest każdemu **gatunkowi** tych pnączy. Według tej książki znakomita większość gatunków wiję się w prawo, ale są też takie, które wiją się w lewo. Przedstawiciele czterech gatunków znajdują się na marginesach tego numeru *Delty*. Jak widać, akebia pięciolistkowa (*Akebia quinata*) i kokornak wielkolistny (*Aristolochia macrophylla*) wiją się w prawo, natomiast wiciokrzew pomorski, odmiana późna (*Lonicera periclymenum* var. *serotina*) i cytryniec chiński (*Schisandra chinensis*) wiją się w lewo.

Zaobserwowane przez Jana Baranowskiego skręcanie się pni może być cechą przypadkową, zmieniającą się od drzewa do drzewa – tak można podejrzewać na podstawie zakończenia jego artykułu. Jeśli to prawda, to kierunek skrętu żadnego wyjaśnienia nie wymaga. Może też być tak, że jest to cecha gatunkowa – podobnie jak w przypadku pnączy. Wtedy narzuca się wyjaśnienie **genetyczne**. Szukanie zaś wyjaśnienia fizycznego prowokuje analogię z łapaniem się lewą ręką za prawe ucho, gdy ono swędzi.

Wojciech KOPCZYŃSKI

cytryniec

akebia

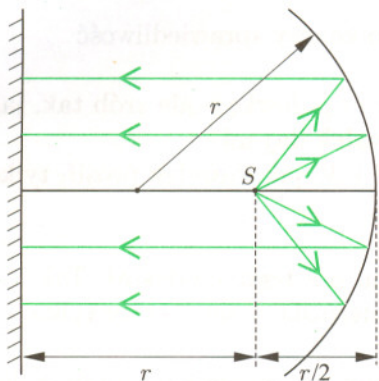
kokornak



### Rozwiązanie zadania F 521.

Oświetlenie powierzchni przez punktowe źródło światła jest odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości tej powierzchni od źródła. Ponieważ ekran znajduje się w odległości  $r$  od źródła światła, a zwierciadło w odległości  $r/2$ , to stosunek oświetlenia ekranu do oświetlenia zwierciadła wynosi

$$\frac{E}{E'} = \frac{(\frac{1}{2}r)^2}{r^2} = \frac{1}{4}$$



Źródło światła leży w ognisku zwierciadła wklęsłego, dlatego po odbiciu promienie będą tworzyły wiązkę równoległą. Padając na ekran, wiązka ta zwiększy jego oświetlenie o  $4E$ , a więc całkowite oświetlenie środka ekranu wyniesie

$$E + 4E = 5E,$$

czyli oświetlenie w tym punkcie zwiększy się pięciokrotnie.

Już Euklides wykazał, że liczb pierwszych (czyli takich liczb naturalnych  $p > 1$ , które dzielą się tylko przez 1 i przez  $p$ ) jest nieskończenie wiele. Jego dowód opierał się na następującym spostrzeżeniu:

Jeśli  $p_1, p_2, \dots, p_n$  są początkowymi liczbami pierwszymi, to każdy dzielnik pierwszy liczby

$$e_n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

jest liczbą pierwszą różną od  $p_1, p_2, \dots, p_n$  (dlaczego?).

Nazwijmy liczby  $e_n$  liczbami Euklidesa. Dla  $n = 1, 2, 3, 4$  i 5 liczby Euklidesa są liczbami pierwszymi (odpowiednio: 3, 7, 31, 211, 2311). Dla  $n = 6, 7, 8, 9, 10$  są to liczby złożone (np.  $e_6 = 59 \cdot 509$ ,  $e_9 = 317 \cdot 703763$ ). Liczba  $e_{11}$  to znów liczba pierwsza. Widzimy zatem, że wśród liczb Euklidesa znajdują się zarówno liczby pierwsze, jak i złożone. W związku z tym nasuwają się następujące pytania:

- Czy wśród liczb Euklidesa znajduje się
- (a) nieskończenie wiele liczb pierwszych?
- (b) nieskończenie wiele liczb złożonych?

Odpowiedzi na te pytania nie są znane, choć podejrzewa się, że są raczej pozytywne. A oto następne pytanie bez znanej odpowiedzi:

Czy każda liczba Euklidesa jest bezkwadratowa, tzn. jest liczbą pierwszą lub iloczynem różnych liczb pierwszych?

Uczestnicy Konkursu Zadaniowego czasopisma *Matematyka* zmagali się z zadaniem:

Czy któraś z liczb Euklidesa jest potęgą liczby naturalnej (o wykładniku naturalnym większym od 1)?

Odpowiedź na to pytanie jest negatywna (*Matematyka* 1/1998, rozwiązanie zadania nr 1406, str. 47 i 48). Wykażemy teraz, że każda liczba Euklidesa  $e_n$  ma nie więcej niż  $n$  dzielników pierwszych. Niech  $q_1, q_2, \dots, q_s$  będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczby  $e_n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ . Oczywiście

$$q_i > p_n \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, s.$$

Mamy

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1 = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_s^{\alpha_s},$$

gdzie  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  są liczbami naturalnymi. Dalej mamy

$$q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_s^{\alpha_s} \geq q_1 q_2 \cdots q_s \geq p_{n+1}^s.$$

Wobec tego

$$(*) \quad p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \geq p_{n+1}^s.$$

Z drugiej strony

$$p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \leq p_n^n + 1 \leq (p_n + 1)^n \leq p_{n+1}^n.$$

Stąd i z (\*) otrzymujemy

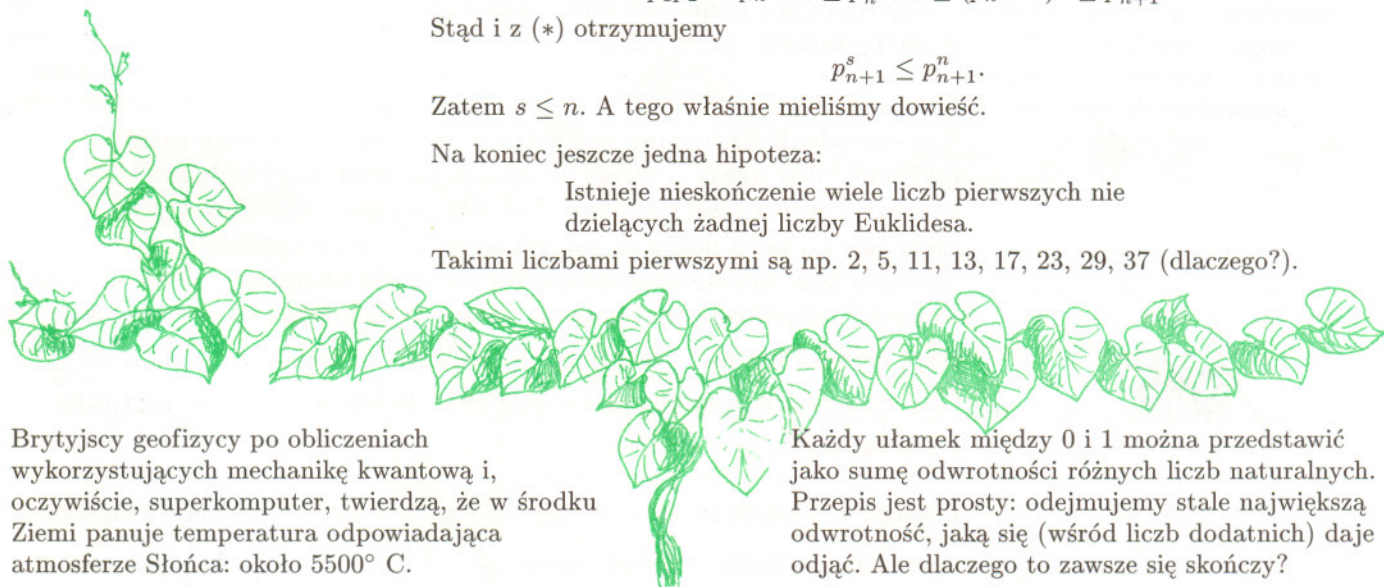
$$p_{n+1}^s \leq p_{n+1}^n.$$

Zatem  $s \leq n$ . A tego właśnie mieliśmy dowieść.

Na koniec jeszcze jedna hipoteza:

Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych nie dzielących żadnej liczby Euklidesa.

Takimi liczbami pierwszymi są np. 2, 5, 11, 13, 17, 23, 29, 37 (dlaczego?).



Brytyjscy geofizycy po obliczeniach wykorzystujących mechanikę kwantową i, oczywiście, superkomputer, twierdzą, że w środku Ziemi panuje temperatura odpowiadająca atmosferze Słońca: około  $5500^\circ \text{C}$ .

Każdy ułamek między 0 i 1 można przedstawić jako sumę odwrotności różnych liczb naturalnych. Przepis jest prosty: odejmujemy stale największą odwrotność, jaką się (wśród liczb dodatnich) dają odjąć. Ale dlaczego to zawsze się skończy?



## Podział czekolady

Mama przyniosła do domu czekoladę i dała chłopcom do podziału. Pawełek porwał czekoladę ze stołu i oświadczył głośno:

– Podzielę ją sprawiedliwie.

Tomek spojrział podejrzliwie na Pawełka; co znaczy sprawiedliwość młodszego brata? A Pawełek kontynuował:

– Masz, Tomku, pół czekolady – i wręczył mu połówkę – ale zrób tak, jak ja, podziel to, co ci daję, na pół i jeden kawałek daj mi.

Tomek widział niesprawiedliwość, ale zrobił tak, jak Pawełek prosił, tylko dodał:

– Ale ty oddaj mi pół tego, co ci teraz daję.

Pawełek dał mu kawałek, a Tomek oddał mu pół tego, co dostał. Tak się dzielili coraz mniejszym kawałkiem, aż nierozdzielone zostały tylko brązowe plamy na palcach.

– Czy dostaliście po równo? – zapytała mama, słysząc wrzawę przy stole kuchennym:

– Jak zwykle, Paweł dostał więcej! – poskarżył się Tomek.

Paweł nie zaprzeczył, ale ze śmiechem krzyknął:

– Dostałem więcej, ale dzieliłem sprawiedliwie, zawsze w ten sam sposób.

– Sposób był ten sam, ale ty, Pawełku, zacząłeś dzielić.

Pawełek przerwał

– Kto pierwszy ten lepszy! A może wcale nie mam więcej?

Tu schował połówkę czekolady, którą miał od początku i dorzucił ze śmiechem:

– A teraz mam mniej.

Mama spojrzała na niego surowo, na co Pawełek zgromadził całą swoją czekoladę i pół dał mamie.

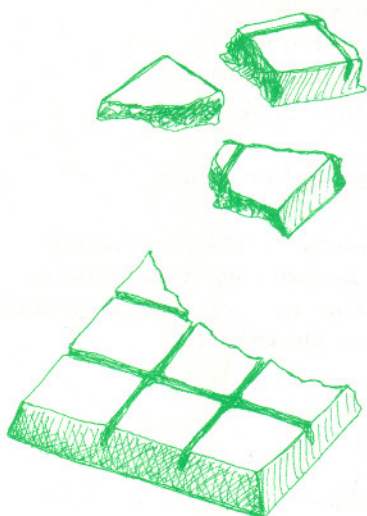
– Czy teraz jest sprawiedliwie? – zapytał.

A co Ty sądzisz, Czytelniku?

### Odpowiedź.

Czy sprawiedliwie, trudno powiedzieć, ale każdy ma trzecią część czekolady. Jak dzieci zauważyły, sposób podziału był ciągle ten sam, tylko że Paweł zaczął dzielenie. Tak więc na początku Paweł podzielił czekoladę na pół i połówkę dał Tomkowi, a pół zostawił sobie i prosił Tomka o kontynuowanie zabawy. Tomek zrobił to samo co Pawełek, tyle że zaczął od połówki czekolady. A zatem Tomek skończy też z połową tego, co ma Pawełek. Tomek ma po podziale  $\frac{1}{3}$  czekolady, a Pawełek  $\frac{2}{3}$ . Gdy Pawełek da mamie pół swojej części, każdy mieć będzie po równo ( $\frac{1}{3}$  czekolady).

**Uwaga 1.** Jeśli przeczytałeś, Czytelniku, artykuł o podziale świątecznej pomarańczy (*Delta* 9/1999), wiesz, że  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{1}{3}$ . A  $\frac{1}{3}$  jest częścią





czokolady, którą dostał w końcu Tomek. Jak rozumieć sumę po lewej stronie równości?

(**Odp.** Kolejne składniki sumy to połówki kawałków, które kolejno dostawał Tomek od Pawełka). Jeśli prześledzimy kolejne kroki zabawy, otrzymamy tożsamości:  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{3}$  – gdy patrzymy oczyma Tomka i  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{2}{3}$  – gdy patrzymy oczyma Pawełka.

**Zadanie.** Jak skończy się zabawa z czekoladą, gdy każdy chłopiec będzie oddawał trzecią część właśnie otrzymanego kawałka?

**Uwaga 2.** (Trochę wyższej matematyki – inspiracja do zagadki). Zeszłej jesieni uczyłem analizy studentów Uniwersytetu George’a Washingtona i dałem im zadanie z książki Kazimierza Kuratowskiego *Wstęp do Analizy*

Niech  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$  i ogólnie  $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$ .  
Znaleźć granicę ciągu  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$

Nawet najlepsi studenci mieli kłopoty z tym problemem. Myślałem więc, jak zilustrować tę granicę bez liczenia. Jest miłym ćwiczeniem pokazanie, że zadanie z podziałem czekolady jest równoważne problemowi Kuratowskiego.

**Wskazówka.**  $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n - a_{n+1}}{2}$ , tak więc  $a_n$  jest ilością czekolady w rękach Pawełka po  $n$ -tym podziale (pierwszy podział to moment, gdy Pawełek wziął całą czekoladę).

*Pytanie i odpowiedzi, z pomocą Tomka i Pawełka,  
opracował Józef PRZYTYCKI*

Twierdzenie mówiące, że trójkąt równoramienny ma równe kąty przy podstawie, zostało nazwane *pons asinorum*, czyli (po łacinie) osiły most. Nazwa ta miała informować, iż tylko skończony osioł nie jest w stanie pokonać tego etapu matematycznej edukacji. Wynikałoby z tego, że ten, kto to twierdzenie pojmie, osłem skończonym z całą pewnością nie jest. Narzuca to jednak potrzebę wprowadzenia pojęcia osła nieskończonego.

Jest pięć wielościanów foremnych (platońskich), czyli takich, które mają jednakowe foremne ściany zbiegające się w każdym wierzchołku w tej samej liczbie. W Starożytności wiązano je z żywiołami, a mianowicie czworościan to był ogień, sześciąt – ziemia, ośmiościan – powietrze, dwudziestościan – woda, ostatni zaś odkryty dwunastościan wiązano z duchem bądź – gdy kto był materialistą – z harmonią Wszechświata.

Panowała kiedyś zasada, że nowo odkrywane planetoidy nazywano imionami żeńskimi. Nie dało się tego jednak utrzymać z powodu wielkiej liczby ciągle odkrywanych planetoid. Jednak do dziś nazwy żeńskie nadaje się obiektom na powierzchni Wenus. Jedynym wyjątkiem są Góry Maxwella.

Najbliżej Ziemi, w okresie pisanej historii ludzkości, wybuchła prawdopodobnie supernowa, po której pozostałością jest radiogłowica znana jako Cassiopeia A. Znajduje się w odległości 2760 pc i ma średnicę  $6,5$ , a wybuch nastąpił około roku 1670. Ocena chwili wybuchu jest niepewna, gdyż widział go prawdopodobnie tylko angielski astronom John Flamsteed. Doniósł on o zaobserwowaniu słabej gwiazdy  $6$  mag w miejscu zgodnym z obecnie wyznaczonym centrum eksplozji. Ten niezwykły fakt, że najbliższa supernowa była po prostu niezauważona przez ogół astronomów, przypisuje się wytworzeniu w trakcie wybuchu ogromnych ilości pyłu przesłaniającego całe zjawisko. Sprawa ta jest jednak daleka od pełnego wyjaśnienia.



## Aktualności (nie tylko) fizyczne

Od kilku lat Kosmiczny Teleskop Hubble'a (HST) jest dla astronomów, tak miłośników, jak i zawodowców, ulubionym oknem na Wszechświat. Fantastycznej ostrości zdjęcia są po prostu zachwycające.

Od ponad pół roku HST ma kosmicznego konkurenta. Jest nim **Obserwatorium Promieniowania X Chandra**, które zostało wyniesione w lipcu zeszłego roku na mocno ekscentryczną wokółziemską orbitę. Wyniki uzyskane dzięki temu instrumentowi były mocnym akcentem spotkania Amerykańskiego Towarzystwa Astronomicznego (AAS), które odbyło się w połowie stycznia w Atlancie. Doniesienia oparte są na niezwyklej piękności zdjęciach [1]. Niewtajemniczonym należy się jednak kilka słów wyjaśnienia. Skąd biorą się kolory na zdjęciach wykonanych w zakresie promieniowania X? Różne kolory odpowiadają różnym długościom fali rejestrowanego promieniowania, ale to przyporządkowanie jest umowne. Jest to zresztą powszechna praktyka we współczesnej astronomii, która już dawno wyszła daleko poza obserwacje w świetle widzialnym.

Profesjonalistów przyciąga nie tyle piękno zdjęć, co ich jakość. Podobnie jak w przypadku Hubble'a, Chandra dostarcza materiału obserwacyjnego, który ma się tak do najlepszych wcześniej dostępnych danych jak ostra fotografia w żywych kolorach do wyblakłej i nieostrej odbitki.

Jedną z największych zagadek astronomii rentgenowskiej od jej początku we wczesnych latach sześćdziesiątych jest, a raczej było, promieniowanie dochodzące równomiernie ze wszystkich stron, tzw. tło rentgenowskie. Było, gdyż znakomita zdolność rozdzielcza Chandry pozwoliła przypisać to promieniowanie punktowym źródłom (co oznaczałoby, że nie jest to promieniowanie tła). W dodatku okazało się, że większość z odkrytych w ten sposób obiektów należy do dwóch nieznanymi wcześniej typów.

Pierwszy to tzw. galaktyki zaowalowane. Są one bardzo aktywne w zakresie promieniowania X (co także przypisać je do galaktyk z aktywnym jądrem tzw. AGN), a jednocześnie słabo widoczne w zakresie optycznym.

Drugi to galaktyki ultra-słabe. Ich bardzo słaba widoczność lub nawet jej całkowity brak w zakresie widzialnym mogłyby być spowodowane albo zasłonięciem przez obłoki pyłu, albo przez absorpcję światła przez stosunkowo zimny gaz na bardzo długiej drodze przez Wszechświat. W tym ostatnim przypadku mogłyby to być najbardziej oddalone od Ziemi obiekty jak dotąd zaobserwowane.

Z innych osiągnięć Chandry należy wymienić odkrycie „zimnej” supermasywnej czarnej dziury w jądrze galaktyki Andromedy (M31). Czy coś jest ciepłe, czy zimne, zależy od punktu widzenia. W tym przypadku

mająca masę około 30 milionów Słońc czarna dziura (a dokładniej zasysany przez nią międzygwiazdny materiał) ma temperaturę „zaledwie” kilku milionów stopni. To mało w porównaniu z o rząd wielkości większą typową temperaturą około stu innych silnych źródeł rentgenowskich odkrytych przez Chandrę w tej galaktyce. (Najprawdopodobniej są one układami podwójnymi złożonymi z czarnej dziury lub gwiazdy neutronowej i normalnej gwiazdy.) Zmierzona niska temperatura stanowi kolejną zagadkę jądra galaktyki Andromedy, które nie tylko pod tym względem różni się od przewidywań modeli zgadzających się z danymi obserwacyjnymi dotyczącymi podobnych galaktyk.

Dzięki Chandrze odkryto również źródło promieni X w centrum naszej Galaktyki w pobliżu jasnego radioźródła A\* Koziorożca, które jest uważane za supermasywną czarną dziurę ukrywającą się w jądrze Drogi Mlecznej. I tym razem nie obeszło się bez niespodzianki, gdyż odkryte źródło jest w zakresie rentgenowskim zaskakująco słabe. Świadczy to o niepełnym zrozumieniu aktywnych jąder galaktyk, ale jednocześnie pozwala mieć nadzieję, że takie zaskakujące obserwacje przyczynią się do lepszego ich poznania.

Spśród innych osiągnięć Chandry należałoby wymienić wykrycie pierścienia zawierającego tlen i neon wokół E0102-72, który jest pozostałością po wybuchu supernowej w Małym Obłoku Magellana. Po raz pierwszy w zakresie rentgenowskim uzyskano dokładne informacje dotyczące składu chemicznego pozostałości po wybuchu supernowej, prędkości ich rozchodzenia się i oddziaływania z falą uderzeniową, która pobudza je do świecenia. Pomoże to w zrozumieniu mechanizmu wybuchu supernowych, w których tworzone są ciężkie pierwiastki, niezbędne do naszego istnienia. Okazuje się, że tlenu w odkrytym pierścieniu wystarczyłoby na tysiąc układów słonecznych.

„Oczy” Chandry zwrócono na Mgławicę Oriona, gdzie odkryto najbogatszy zbiór ponad tysiąca źródeł promieniowania rentgenowskiego, pochodzącego od młodych gwiazd. Równie ciekawie wypadła inspekcja galaktyki M82, gdzie obserwowane są intensywne procesy gwiazdotwórcze.

Jak widać z tego krótkiego przeglądu, perspektywy astronomii rentgenowskiej wyglądają bardzo ciekawie. Wszystkich mających dostęp do internetu zachęcam do odwiedzenia stron poświęconych Chandrze [1,2,3]. Można nawet (bezpłatnie) zaprenumerować „Chandra Chronicles” [3]. Dla wygody Czytelników *Delty* niektóre osiągnięcia Chandry opiszemy i zilustrujemy również na naszych stronach [4].

Piotr ZALEWSKI

[1] <http://chandra.nasa.gov>

[2] <http://chandra.harvard.edu/press>

[3] <http://chandra.harvard.edu/chronicle>

[4] <http://info.fuw.edu.pl/HEP/delta/>

$$(1) \quad \pi = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{16^j} \left( \frac{4}{8j+1} - \frac{2}{8j+4} - \frac{1}{8j+5} - \frac{1}{8j+6} \right),$$

znalezionym przez Davida Bailey'a, Jonatana i Petera Borweinów oraz Simona Plouffe'a. Dziś polecamy uwadze Czytelników inny wzór tego typu, mianowicie

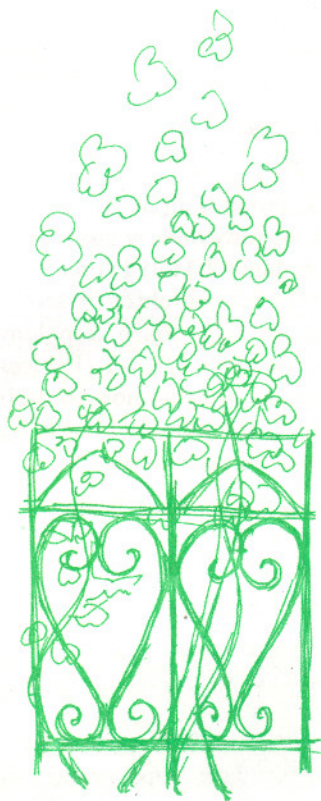
$$(2) \quad \pi = \sum_{j=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{4} \right)^j \left( \frac{2}{4j+1} + \frac{2}{4j+2} + \frac{1}{4j+3} \right).$$

Podobnie jak (1), wzór (2) znaleziono w drodze eksperymentów numerycznych. Aby go udowodnić, należy sobie wyobrazić, jakie szeregi geometryczne trzeba całkować wyraz po wyrazie, aby otrzymać wynik przypominający prawą stronę równości (2). Następnie, odpowiednio dobrawszy przedział całkowania, trzeba dwoma sposobami obliczyć całkę oznaczoną. Za pierwszym razem najpierw sumuje się szeregi, a potem szuka funkcji pierwotnej (co wymaga pewnego samozaparcia lub skorzystania z programu w rodzaju *Mathematiki*) – to daje wynik  $\pi$ .

Za drugim razem całkuje się szeregi wyraz po wyrazie. Wtedy jako wynik powinna wyjść nieskończona suma, która widnieje po prawej stronie. Szczegóły oraz płynąca z ich uzupełnienia satysfakcję, tzn. dobór szeregów i granic całkowania, sprawdzenie rachunków oraz uzasadnienie wszystkich kroków postępowania, pozostawiamy ambitnym i cierpliwym Czytelnikom.

Wzór (2) można wykorzystać do zaprojektowania algorytmu, pozwalającego wyznaczać  $n$ -tą cyfrę rozwinięcia czwórkowego  $\pi$  bez konieczności wyznaczania żadnej cyfry wcześniejszej. Trzeba tylko zauważyć, że prawą stronę wygodnie mnoży się przez potęgę czwórki. Szczegóły znów pozostawiamy Czytelnikom.

P.S.



Kiedy naładowana elektrycznie kula wykonuje drgania sferycznie symetryczne, to nie dochodzi do promieniowania elektromagnetycznego. Gdyby bowiem tak było, to promieniowanie to również byłoby sferycznie symetryczne, natomiast wektory pola elektrycznego i magnetycznego – jako prostopadłe do promienia kuli, tworzyłyby gładkie uczesanie sfery. Jest to jednak niemożliwe wobec znanego twierdzenia.

Nadesłał P. Żmijewski.

Wystarczy jedynie 35 mg antymaterii, żeby umieścić *Space Shuttle* na orbicie okołoziemskiej. Sprawdźmy:

$$E = mc^2,$$

$$E = (0,035 \text{ g materii} + 0,035 \text{ g antymaterii})c^2 = 6,3 \cdot 10^{12} \text{ J} = 1,75 \cdot 10^6 \text{ kWh} \approx 1750 \text{ t TNT}.$$

Brzmi to jak z *science fiction*, ale w USA koncepcja statków kosmicznych napędzanych antymaterią jest traktowana jako interesująca możliwość na przyszłość.

### III Ogólnopolski Konkurs na Doświadczenie Pokazowe z Fizyki Kraków, 29–30 września 2000

III Ogólnopolski Konkurs na Pokazowe Doświadczenie z Fizyki organizuje Oddział Krakowski Polskiego Towarzystwa Fizycznego przy współudziale Instytutu Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego oraz Wydziału Fizyki i Techniki Jądrowej Akademii Górniczo-Hutniczej. Konkurs jest kolejną edycją Ogólnopolskiego Konkursu na Pokazowe Doświadczenie z Fizyki, który jest organizowany w Krakowie od 1996 roku. Finał III Konkursu będzie jedną z imprez Jarmarku Fizycznego 2000, który odbędzie się w Krakowie we wrześniu 2000 roku.

Wszystkich zainteresowanych prosimy o nadsyłanie zgłoszeń do dnia 18 czerwca 2000 roku. Zgłoszenia zgodnie z regulaminem, i ewentualne zapytania prosimy kierować pocztą pod adresem: dr Marek Gołąb, Oddział Krakowski PTF, Instytut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków, względnie pocztą elektroniczną [ufmgoLab@kinga.cyf-kr.edu.pl](mailto:ufmgoLab@kinga.cyf-kr.edu.pl)

Bieżące informacje dotyczące konkursu oraz pełny tekst regulaminu dostępne są na stronach WWW: Oddziału Krakowskiego Polskiego Towarzystwa Fizycznego (<http://risc.ftj.agh.edu.pl/~ptf/>) oraz Instytutu Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego (<http://www.if.uj.edu.pl/konkurs/>).

# Sinusy, iloczynny i sumy

Grzegorz RZĄDKOWSKI

Tożsamość

$$(1) \quad \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{2\pi}{2n} \cdot \sin \frac{3\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}},$$

gdzie  $n$  jest dowolną liczbą naturalną większą od 1, pojawia się w wielu podręcznikach i zbiorach zadań. Można ją znaleźć, na przykład, w znakomitym *Zbiorze zadań z algebry* (PWN, Warszawa 1972) (zadanie 2.34.3) Leona Jeśmanowicza i Jerzego Łośia. Chociaż tożsamość (1) ma charakter czysto rzeczywisty, to wszystkie znane jej dowody opierają się na liczbach zespolonych. Paul J. Nahin w swojej książce *An imaginary tale; the story of  $\sqrt{-1}$*  (Princeton University Press, 1998) pisze „... can you even begin to imagine how to derive them without  $\sqrt{-1}$ ? I can't” (str. 72), mając na myśli tożsamość (1) oraz jej odpowiednik, w którym funkcja sinus została zastąpiona przez kosinus.

Spróbujmy zatem znaleźć dowód, w którym nie będą występować liczby zespolone. Weźmy pod uwagę znany wzór ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ )

$$(2) \quad \sin kx = \binom{k}{1} \cos^{k-1} x \sin x - \binom{k}{3} \cos^{k-3} x \sin^3 x + \\ + \binom{k}{5} \cos^{k-5} x \sin^5 x - \dots,$$

w którym suma po prawej stronie jest, oczywiście, skończona. Ostatnim jej wyrazem, z odpowiednim współczynnikiem, jest  $\sin^k x$  dla  $k$  nieparzystego lub  $\cos x \sin^{k-1} x$  dla  $k$  parzystego. Wzoru (2), razem z podobnym wzorem dla  $\cos kx$ , można bez trudu dowieść za pomocą indukcji matematycznej. Załóżmy, że liczba  $k$  jest parzysta,  $k = 2n$ , i przepiszmy jeszcze raz wzór (2), wyciągając przed nawias czynnik  $\sin x \cos x$  występujący w każdym składniku po prawej stronie

$$(3) \quad \sin 2nx = \cos x \sin x \left[ \binom{2n}{1} \cos^{2n-2} x - \binom{2n}{3} \cos^{2n-4} x \sin^2 x + \right. \\ \left. + \binom{2n}{5} \cos^{2n-6} x \sin^4 x - \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{2n-1} \sin^{2n-2} x \right].$$

Rozpatrzmy teraz wyrażenie stojące w nawiasie kwadratowym w powyższym wzorze i podstawmy w tym wyrażeniu  $t = \sin x$ . Otrzymamy następujący wielomian stopnia  $(2n - 2)$

$$(4) \quad \binom{2n}{1} (1 - t^2)^{n-1} - \binom{2n}{3} (1 - t^2)^{n-2} t^2 + \dots + (-1)^{n-1} \binom{2n}{2n-1} t^{2n-2}.$$

Zauważmy, że, patrząc na wzór (3), można łatwo wypisać wszystkie  $(2n - 2)$  pierwiastki tego wielomianu. Czytelnik sprawdzi, że są to liczby

$$\pm \sin \frac{\pi}{2n}, \pm \sin \frac{2\pi}{2n}, \pm \sin \frac{3\pi}{2n}, \dots, \pm \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Współczynnik przy najwyższej potędze  $t^{2n-2}$  wielomianu (4) wynosi

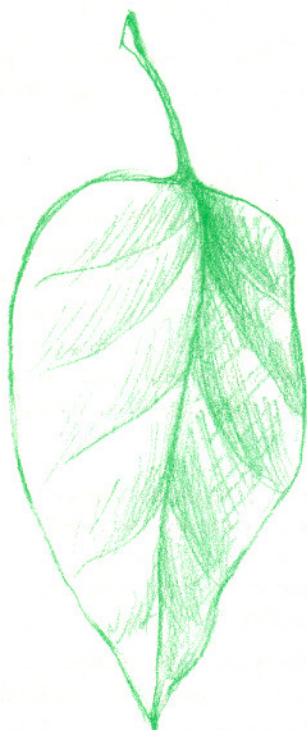
$$(-1)^{n-1} \left( \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \binom{2n}{5} + \dots + \binom{2n}{2n-1} \right) = (-1)^{n-1} 2^{2n-1},$$

a wyraz wolny jest równy  $\binom{2n}{1} = 2n$ .

W takim razie jeden ze wzorów Viéte'a, na iloczyn pierwiastków, daje

$$(5) \quad \sin^2 \frac{\pi}{2n} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{2n} \cdot \sin^2 \frac{3\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{2n}{2^{2n-1}},$$

i tożsamość (1) wynika z pierwiastkowania obu stron powyższej równości.



## Apologia

W zupełnie nieoczekiwany sposób dołączyłem do znanego z  $\Gamma$ -limitiasu oszusta. Otóż w moim artykule z numeru 2/2000 przekonywałem, że za pomocą indeksu można rozróżnić ujście wody od jej źródła. Tymczasem indeks krzywej reaguje zarówno na ujście, jak i źródło w ten sam sposób: wektory prędkości obracają się w tę samą stronę. Okazuje się zatem, że aby widzieć to, czego nie widać, trzeba najpierw widzieć to, co widać, a w szczególności odróżnić stronę lewą od prawej...

Zwróćmy uwagę, że powyższy sposób pozwala na otrzymanie innych ciekawych tożsamości. Obliczmy, na przykład, współczynnik wielomianu (4) stojący przy  $t^2$ . Wynosi on, jak łatwo zauważyć,

$$-\binom{2n}{1}(n-1) - \binom{2n}{3} = -\frac{4}{3}n(n-1)(n+1)$$

i stąd mamy następujący, związany z tym współczynnikiem, wzór Viéte'a

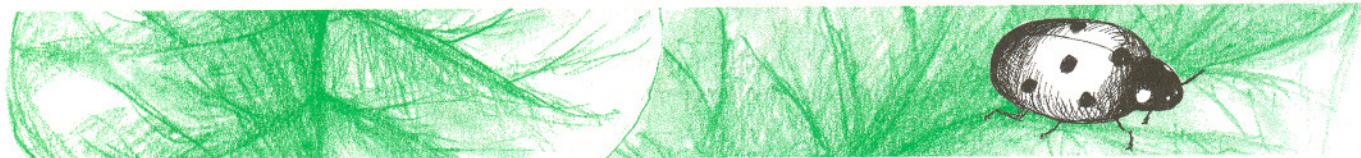
$$(6) \quad \sum_{k=1}^{n-1} \sin^2 \frac{\pi}{2n} \cdot \sin^2 \frac{2\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{\frac{4}{3}n(n-1)(n+1)}{2^{2n-1}},$$

gdzie  $\widehat{\phantom{x}}$  („daszek”) oznacza, że dany czynnik nie występuje w iloczynie.

Dzieląc stronami (6) przez (5), otrzymujemy także

$$W.S. \quad \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{2n}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}} = \frac{\frac{4}{3}n(n-1)(n+1)}{2n} = \frac{2}{3}(n-1)(n+1).$$

Zachęcamy Czytelnika, żeby – po pierwsze – spróbował wypisać pozostałe wzory Viéte'a, a – po drugie – zastanowił się głębiej nad opisaną metodą. Może powstanie z tego ciekawa praca, która weźmie udział w Konkursie Prac Uczniowskich *Delta*?



## Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

**M 913.** W turnieju bierze udział  $(m-1)n+1$  zawodników ( $m \geq 2$ ). Udowodnić, że co najmniej jedno z poniższych zdań jest prawdziwe:

- Można wybrać  $m$  zawodników, spośród których żadni dwaj się nie znają.
- Pewien zawodnik zna co najmniej  $n$  zawodników.

Rozwiązanie na str. 16

**M 914.** Na kongresie kombatantów okazało się, że każdy kombatant ma wśród zgromadzonych co najmniej jednego znajomego, ale żadni dwaj kombatanci, którzy mają równą liczbę znajomych wśród uczestników kongresu, wspólnego znajomego nie mają. Udowodnić, że na kongresie jest kombatant, który ma dokładnie jednego znajomego.

Rozwiązanie na str. 16

**M 915.** Każdy spośród 90 uczestników kursu posługiwania się maską przeciwgazową ma co najmniej 10 kolegów. Udowodnić, że każdy uczestnik kursu może zaprosić na bal maskowy trzech uczestników kursu tak, by wśród czterech zebranych każdy miał nie mniej niż dwóch kolegów.

Rozwiązanie na str. 3

Redaguje Ewa CZUCHRY

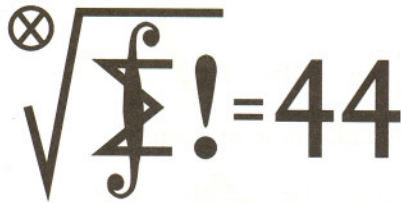
**F 521.** Punktowe źródło światła umieszczone w odległości  $r$  od płaskiego ekranu daje na środku ekranu oświetlenie  $E$ . Jak zmieni się oświetlenie w tym punkcie, jeżeli po drugiej stronie źródła światła w odległości  $r/2$  umieścić zwierciadło wklęsłe o promieniu  $r$ ?

Rozwiązanie na str. 7

**F 522.** Wysoko nad płaszczyzną stołu znajduje się punktowe źródło światła o natężeniu 100 kandel. Jakie będzie oświetlenie w punkcie znajdującym się pod źródłem, jeżeli na drodze promieni umieścimy poziomo soczewkę o zdolności skupiającej równej 1 dioptrii. Źródło znajduje się w ognisku soczewki.

Rozwiązanie na str. 4





Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 2000

**Skrót regulaminu**

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotnie członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

**Zadania z matematyki nr 399, 400**

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**399.** Niech  $n > 1$  będzie ustaloną liczbą naturalną. Ile jest permutacji  $(x_1, \dots, x_n)$  zbioru  $\{1, \dots, n\}$  o tej własności, że dla każdego  $i = 1, \dots, n-1$  różnica  $x_i - x_{i+1}$  dzieli się przez  $i$ ?

**400.** Pochodna iloczynu jest równa iloczynowi pochodnych – pomyślał uczeń i zastosował „wzór”  $(fg)' = f'g'$ , uzyskując

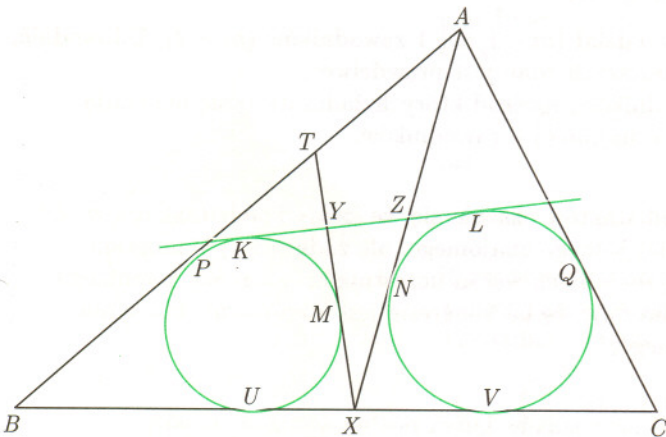
wszelako prawidłowy wynik. Z pochodnymi drugiego rzędu musi być tak samo:  $(fg)'' = f''g''$ ; i znów dobry wynik! Co to za funkcje? Znaleźć wszystkie pary funkcji  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mających ciągłe pochodne drugiego rzędu, spełniających te dwa równania i takich, że ich iloczyn nie jest funkcją stałą. Zadanie 400 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą zgłosił pan Krystian Bartniczek z Würselen.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1999**

Przypominamy treść zadań:

**391.** Okrąg wpisany w trójkąt  $ABC$  jest styczny do boku  $AB$  w punkcie  $T$ . Niech  $X$  będzie dowolnym punktem na boku  $BC$  (różnym od  $B$  i  $C$ ). Udowodnić, że okręgi wpisane w trójkąty  $BXT$ ,  $TXA$ ,  $AXC$  mają wspólną prostą styczną.

**392.** Dane są liczby całkowite  $x, y, z$  o tej własności, że liczba  $x^{666} + y^{666} - z^{666}$  dzieli się przez 1999. Dowiść, że co najmniej jedna z liczb  $x, y$  dzieli się przez 1999.



**391.** Prowadzimy prostą nie mającą punktów wspólnych z odcinkiem  $BC$ , styczną do okręgów wpisanych w trójkąty  $BXT$  i  $AXC$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $L$ . Punkty styczności pierwszego z tych okręgów z prostymi  $XT, TB, BX$  oznaczmy odpowiednio przez  $M, P, U$ . Punkty styczności drugiego z tych okręgów z prostymi  $AX, CA, XC$  oznaczmy odpowiednio przez  $N, Q, V$ . Prosta  $KL$  przecina odcinek  $TX$  w punkcie  $Y$ , a odcinek  $AX$  w punkcie  $Z$ . Ponieważ  $T$  jest punktem styczności boku  $AB$  trójkąta  $ABC$  z okręgiem wpisanym w ten trójkąt, zatem

$$(*) \quad 2 \cdot |AT| = |AB| + |AC| - |BC|.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} |AB| &= |AT| + |TP| + |PB| = |AT| + |TM| + |BU|, \\ |AC| &= |AQ| + |QC| = |AN| + |CV|, \\ |BC| &= |BU| + |UV| + |VC| = |BU| + |KL| + |CV|. \end{aligned}$$

Podstawiamy te równości do wzoru (\*) i po redukcji otrzymujemy

$$|AT| = |TM| + |AN| - |KL|.$$

Skoro zaś  $|TM| = |TY| + |KY|$ ,  $|AN| = |AZ| + |ZL|$ , zatem ostatecznie

$$|AT| = |TY| + |AZ| + |KY| + |ZL| - |KL| = |TY| + |AZ| - |YZ|.$$

Stąd wynika, że w czworokąt  $ATYZ$  można wpisać okrąg, i mamy tezę zadania.

**392.** Przyjmijmy  $n = 666$ . Liczba  $3n + 1 = 1999$  jest pierwsza. Wszystkie kongruencje w tym rozwiązaniu są brane (mod 1999). Daną w założeniu zależność  $x^n + y^n \equiv z^n$  podnosimy stronami do trzeciej potęgi:

$$x^{3n} + 3x^n y^n (x^n + y^n) + y^{3n} \equiv z^{3n}.$$

Sumę  $x^n + y^n$  zastępujemy przez  $z^n$ :

$$x^{3n} + 3(xyz)^n + y^{3n} \equiv z^{3n}.$$

Przypuśćmy, że  $x \not\equiv 0$  oraz  $y \not\equiv 0$ ; wówczas  $x^{3n} \equiv 1$  oraz  $y^{3n} \equiv 1$  (na podstawie małego twierdzenia Fermata),

i otrzymujemy

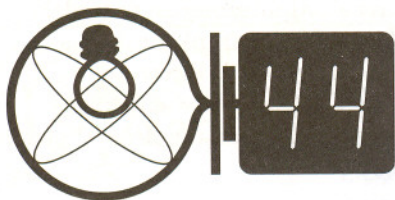
$$2 + 3(xyz)^n \equiv z^{3n}.$$

Widać stąd, że także  $z \not\equiv 0$ , a więc  $z^{3n} \equiv 1$ . Dostajemy kongruencję  $3(xyz)^n \equiv -1$ ; podnosimy ją stronami do trzeciej potęgi:

$$27(xyz)^{3n} \equiv -1,$$

i mamy sprzeczność, skoro  $x^{3n} \equiv y^{3n} \equiv z^{3n} \equiv 1$ .

Uczynione przypuszczenie musiało być fałszywe. Tak więc  $x \equiv 0$  lub  $y \equiv 0$ .



## Zadania z fizyki nr 296, 297

Redaguje Jerzy B. BROJAN

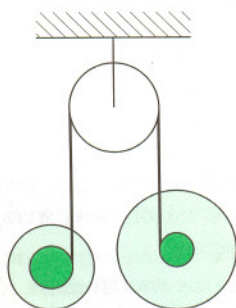
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2000

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 284 (WT=1,30) i 285 (WT=3,10)  
z numeru 10/1999

Tomasz Wietecha	- Tarnów	37,76
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	31,95
Aleksander Surma	- Myszków	28,70
Artur Arciszewski	- Kielce	24,70
Jarosław Łazuka	- Warszawa	22,73
Marek Wójcicki	- Szczecin	19,25
Tomasz Rudny	- Warszawa	17,17



Rys. 1

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1999

Przypominamy treść zadań:

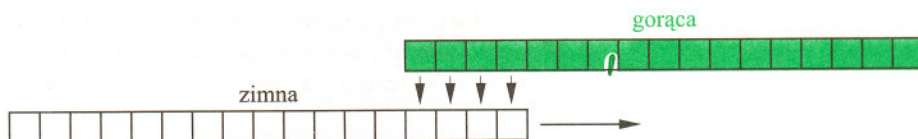
**288.** Zabawka „jojo” składa się z dwóch jednorodnych walców o promieniu  $R_1$  i łącznej masie  $m_1$ , połączonych ośką – walcem o promieniu  $r_1$  i bardzo małej masie. Dla drugiej takiej zabawki analogiczne parametry są równe  $R_2$ ,  $m_2$  i  $r_2$ . Na ośkach nawinięto końce długiej nici, którą przełożono przez blok (rys. 1), po czym oba „joja” puszczono. Jeśli masę bloku i tarcie w jego osi można pominąć, to jaki związek muszą spełniać wymienione parametry, aby „joja” spadły z tej samej wysokości w ciągu tego samego czasu?

**289.** Mamy dwa kilogramy wody  $A$  o temperaturze  $0^\circ\text{C}$  i jeden kilogram wody  $B$  o temperaturze  $100^\circ\text{C}$ . Jaka jest maksymalna temperatura, do której możemy ogrzać wodę  $A$ , korzystając z ciepła dostarczonego przez wodę  $B$ ? Rozważyc dwa warianty zadania:

a) Możemy dzielić każdą wodę na dowolną liczbę części, wlewać do naczyń umożliwiających wymianę ciepła (bez mieszania) i ponawiać te czynności dowolną ilość razy. Na końcu należy zlać całą wodę  $A$  do jednego naczynia – temperatura po jej wyrównaniu jest wielkością szukaną.

b) Oprócz czynności wymienionych wyżej możemy użyć silnika cieplnego korzystającego z wody gorącej jako grzejnika, a z zimnej jako chłodnicy. Pracę tego silnika można zmagazynować i zużytkować w dowolny sposób, np. do napędu chłodziarki oziębiającej jedną wodę, a ogrzewającej inną.

Ciepło właściwe wody uznajemy za stałe.



Rys. 2

**288.** Oznaczmy siłę napięcia nici przez  $N$ , a przyspieszenie obu zabawek (z założenia jednakowe) przez  $a$ . Równania ruchu postępowego mają postać

$$m_1 a = m_1 g - N, \quad m_2 a = m_2 g - N,$$

a stąd

$$m_1(g - a) = m_2(g - a).$$

Po odrzuceniu rozwiązania  $a = g$  (obrót walców wymaga, aby siła napięcia nici była różna od zera) otrzymujemy wynik  $m_1 = m_2$ . Promienie walców nie mają – jak widać – żadnego znaczenia.

**289.** a) Podzielmy obie partie wody na  $n$  jednakowych części i przeprowadźmy wymianę ciepła na zasadzie przeciwprądu (rys. 2). Wyniki eksperymentu komputerowego są następujące: dla dużych  $n$  cała woda  $B$  oziębi się do temperatury bardzo bliskiej  $0^\circ\text{C}$ , natomiast temperatura kolejnych części wody  $A$  będzie różna – pierwsza połowa ogrzeje się do temperatury bliskiej  $100^\circ\text{C}$ , a druga pozostanie w temperaturze bliskiej  $0^\circ\text{C}$  (im większe  $n$ , tym mniej wody będzie

miało temperaturę pośrednią). Zatem po wyrównaniu temperatura wody  $A$  będzie bliska  $50^\circ\text{C}$ .

b) Podczas działania idealnego silnika cieplnego (a także idealnej chłodziarki) spełnione jest równanie

$$\frac{dQ_1}{T_1} = -\frac{dQ_2}{T_2},$$

gdzie  $dQ_1$  i  $dQ_2$  są ciepłami oddanymi grzejnikowi i chłodnicy, a  $T_1$  i  $T_2$  – ich temperaturami. Podstawiając  $dQ_1 = m_1 c dT_1$ ,  $dQ_2 = m_2 c dT_2$  i całkując, otrzymujemy  $m_1 \ln T_1 + m_2 \ln T_2 = \text{const}$ , czyli w naszym przypadku

$$2 \ln 273 + \ln 373 = 2 \ln T_A + \ln T_B,$$

gdzie  $T_A$  i  $T_B$  są końcowymi temperaturami wody  $A$  i  $B$ . Ponadto z zasady zachowania energii mamy

$$2 \cdot 273 + 373 = 2T_A + T_B.$$

Oprócz fizycznie nieistotnego rozwiązania  $T_A = 273$  K,  $T_B = 373$  K istnieje drugie:  $T_A = 337,4$  K,  $T_B = 244,2$  K. W skali Celsjusza otrzymaliśmy więc temperaturę wody  $A$  równą  $64,4^\circ\text{C}$ .



Trzecie prawo Keplera w wersji uogólnionej to chyba najpotężniejsze narzędzie do wyznaczania mas wszelkich obiektów niebieskich – pod warunkiem że ma się do czynienia z parą obiektów połączonych siłami grawitacji. Prawo to – jak zapewne wiemy – głosi, że okres obieganania się tych ciał  $T$  i wielka pólóś względnej orbity  $a$  (w przypadku orbity kołowej jest to po prostu odległość ciał) spełniają zależność

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m)},$$

gdzie  $M$  i  $m$  to masy ciał, a  $G$  jest stałą grawitacji. U odległych układów podwójnych gwiazd nie da się wprawdzie wyznaczyć rozmiarów orbity  $a$ , ale często daje się mierzyć względne prędkości składników (na podstawie obserwacji widm i ich przesunięć dopplerowskich), a stąd w końcu sumę ich mas też da się określić. I nie jest tu ważne, czym są te składniki. Mogą to być zarówno planeta i satelita (nawet sztuczny), jak i dwie galaktyki.

Tu dociekliwy Czytelnik może jednak zacząć zastanawiać się nad uniwersalnością trzeciego prawa Keplera. Bo przecież prawo to wynika z mechaniki klasycznej, tymczasem w Kosmosie mamy mnóstwo obiektów, których własności można rozsądnie badać tylko na gruncie teorii względności. No właśnie! Jeżeli np. dwie gwiazdy neutronowe obieгают się w dużej odległości, to ich ruchem w doskonałym przybliżeniu rządzi mechanika klasyczna, ale blisko każdej z nich do głosu dochodzi mechanika relatywistyczna. Otóż w grudniu 1995 r. rozpoczął pracę rentgenowski satelita RXTE (*Rossi X-ray Timing Explorer*), który wykrył szereg źródeł promieniowania X, którego natężenie oscylowało z częstością rzędu 1000 razy na sekundę. Częstość ta narastała przez jakiś czas w miarę wzrostu natężenia promieniowania, po czym całe zjawisko gwałtownie zniknęło.

Grupa astronomów z Chicago doszła do wniosku, że oscylacje promieniowania rentgenowskiego są spowodowane przez bardzo gorące zgęszczenia gazu wirujące wokół gwiazdy neutronowej wraz z całym dyskiem akrecyjnym. Częstość oscylacji narasta, gdyż gaz w dysku opada spiralnie na gwiazdę neutronową, a bliżej gwiazdy obieg materii trwa krócej. Wreszcie jednak gaz osiąga najniższą dopuszczalną orbitę (której istnienie przy gwieżdźcie neutronowej wynika właśnie z teorii względności), i dlatego zjawisko musi zniknąć, a maksymalna częstość oscylacji promieniowania rentgenowskiego określa wtedy masę gwiazdy neutronowej. Tak więc prawa Keplera, w każdym razie w uogólnionej wersji relatywistycznej, są rzeczywiście uniwersalne. Całe szczęście!

Tomasz KWAST



**Rozwiązanie zadania M 913.**

Indukcja ze względu na  $m$ .  
Dla  $m = 2$  teza zadania jest oczywista. Załóżmy teraz, że jest ona prawdziwa dla  $m - 1$ ; dowiedzimy jej dla  $m$ . Wybierzmy jednego uczestnika turnieju, w którym każdy spośród  $(m - 1)n + 1$  zawodników zna co najwyżej  $n - 1$  zawodników. Uczestnik ten nie zna co najmniej  $(m - 1)n - (n - 1) = (m - 2)n + 1$  zawodników. Z założenia indukcyjnego znajdzie się wśród nich  $m - 1$  uczestników, którzy nie znają się parami. Wraz z początkowo wybranym zawodnikiem tworzą oni  $m$ -elementowy zbiór zawodników, którzy nie znają się parami.

**Kwiecień**



**Rozwiązanie zadania M 914.**

Niech  $A$  będzie kombatantem, który ma maksymalną liczbę  $n$  znajomych na kongresie. Jeśli żaden z  $n$  znajomych  $A$  nie ma dokładnie jednego znajomego, to liczba znajomych każdego z nich jest jedną z  $n - 1$  liczb:  $2, 3, \dots, n$ . Tak więc co najmniej dwóch z nich ma równą liczbę znajomych. Ale jest to sprzeczne z posiadaniem wspólnego znajomego  $A$ . Tak więc jeden ze znajomych  $A$  ma dokładnie jednego znajomego.

Od kwietnia do czerwca możemy wieczorami oglądać w całości najdłuższy gwiazdozbiór nieba, mianowicie Hydrę. Jego postaci na niebie bardziej chyba odpowiada dawniejsza jego nazwa – Wąż Wodny. Nawiasem mówiąc, na południowym niebie znajduje się gwiazdozbiór zwany dawniej Małym Wężem Wodnym, a obecnie po prostu Wężem Wodnym. Tak czy inaczej głowa Hydry znajduje się zaraz na południe od Raka, a koniec ogona na południe od Panny. Gwiazdozbiór nie zawiera szczególnie jasnych gwiazd, przez co niełatwo go zlokalizować, a dodatkową trudność sprawia fakt, że widoczny jest nisko nad horyzontem. Zawiera za to kilka różnorodnych obiektów dostrzegalnych przez niewielką lunetę. Na południowy zachód od głowy leży otwarta gromada gwiazd M 48, w obszarze „tułowia” mgławica planetarna NGC 3242, a w części „ogonowej” gromada kulista M 68 (NGC 4590) i galaktyka spiralna M 83 (NGC 5236).

Wenus jest w Rybach, wschodzi tuż przed Słońcem, ginie więc w jego blasku. Podobnie jest z Marsem, Jowiszem i Saturnem – planety te są wszystkie w Baranie i zachodzą tuż po Słońcu. Niebo jest więc praktycznie pozbawione jasnych planet. Dość rzadkie to zjawisko. Nów Księżyca wypada 4 IV, a pełnia 18 IV. W kwietniu Księżyc nie zakrywa żadnej jasnej gwiazdy, jego zbliżenia do nich są więc mało efektowne.

T.K.

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (21')

*Wyjaśnienie oszustwa (21):* Nie jest prawdą, że z kongruencji  $a^2 \equiv 1 \pmod{n}$  wynika  $a \equiv \pm 1 \pmod{n}$ .

Z podzielności  $n|a^2 - 1$ , czyli  $n|(a+1)(a-1)$ , nie wynika wcale, że musi zachodzić jedna z podzielności  $n|a+1$  lub  $n|a-1$ . Takie wynikanie zachodzi wtedy, gdy  $n$  jest liczbą pierwszą lub potęgą nieparzystej liczby pierwszej, nie jest jednak prawdziwe w ogólnym przypadku.

Przyjmijmy  $n = 21$  i prześledźmy dowód twierdzenia. Wówczas  $r = 6$ , gdyż  $2^6 \equiv 1 \pmod{21}$ , ale nie jest prawdą, że  $2^3 \equiv \pm 1 \pmod{21}$ . Zatem podane twierdzenie jest fałszywe dla  $n = 21$ .

JWR

## GRY (12)

Podstawowym dla rozwijanej przez nas teorii gier jest następujący fakt, który przytoczymy bez dowodu:

Każda gra jest równoważna jednej z gier  $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ , tzn. pewnej grze *Nim* złożonej z jednego stosu.

Oznacza to, że każdej grze możemy przypisać liczbę całkowitą nieujemną (zwaną liczbą Grundy'ego gry), która *pamięta* wszystkie istotne dla nas informacje o danej grze. Przy tym podkreślić należy, że gry  $0, 1, 2, 3, 4, \dots$  są parami nierównoważne. Tak więc badanie równoważności gier sprowadza się do porównywania ich liczb Grundy'ego. Liczbę Grundy'ego gry  $G$  oznaczają będziemy przez  $g(G)$ . Oczywiście dla gier  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$  zachodzi równość  $g(k) = k$ .

Gry o liczbie Grundy'ego  $0$  są grami, w których strategię wygrywającą ma drugi gracz (tzn. ten, który gry nie rozpoczyna), natomiast gracz rozpoczynający może wygrać każdą grę o liczbie Grundy'ego różnej od  $0$ . W każdej grze strategia wygrywająca polega na podawaniu przeciwnikowi pozycji, których liczba Grundy'ego jest równa  $0$ .

Istnieje prosta procedura określania liczby Grundy'ego danej gry na podstawie znajomości liczb Grundy'ego jej opcji (tzn. gier będących pozycjami, do których można przejść w pierwszym ruchu). Jeśli  $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ , to  $g(G)$  jest najmniejszą liczbą całkowitą nieujemną, która **nie występuje** wśród liczb  $g(G_1), g(G_2), \dots, g(G_n)$ .

Do tego dodać należy sposób obliczania liczby Grundy'ego sumy gier:  $g(G \oplus H) = g(G) +_2 g(H)$ .

Masz już pewnie dosyć tego suchego wykładu o grach, Drogi Czytelniku, prześledźmy więc, jak cała ta teoria działa w przypadku konkretnej gry, którą nazwiemy RÓŻNE STOSY. Na czym polega ta gra? Na początku gry jest jeden stos złożony z pewnej liczby bierek. Jak zwykle dwaj gracze wykonują na przemian ruchy. Ruch polega na wybraniu dowolnego stosu i rozdzieleniu go na dwa niepuste stosy różnej liczości. Zgodnie z ogólnie przyjętą przez nas zasadą, że brak możliwości wykonania ruchu oznacza przegraną, gra kończy się w momencie, gdy jeden z graczy otrzyma od przeciwnika pozycję złożoną tylko ze stosów jedno- i dwubierkowych.

Niech  $r(n)$  oznacza liczbę Grundy'ego gry RÓŻNE STOSY rozpoczynającej się od jednego stosu złożonego z  $n$  bierek.

Spróbujmy obliczyć wartości  $r(n)$  dla początkowych liczb naturalnych  $n$ .

Dla  $n < 3$  mamy jeden stos złożony z jednej lub dwóch bierek. Nie można go podzielić na dwa różne stosy, więc nie istnieje legalny ruch w tej grze, zatem  $r(1) = r(2) = 0$ . Gracz, który ma grę rozpoczynać, przegrywa od razu.

$n = 3$ . Jest tylko jeden legalny ruch: podział stosu na dwa stosy mające odpowiednio jedną i dwie bierki. Liczba Grundy'ego pozycji złożonej z dwóch stosów o licznosciach  $1$  i  $2$  wynosi  $r(1) +_2 r(2) = 0 +_2 0 = 0$ . Zbiór liczb Grundy'ego opcji gracza rozpoczynającego jest więc jednoelementowy:  $\{0\}$ . Przy tym  $r(3)$  jest najmniejszą liczbą nieujemną, która nie występuje w tym zbiorze, zatem  $r(3) = 1$ .

Dla  $n = 4$  jedyny legalny ruch prowadzi do pozycji złożonej ze stosów o licznosciach  $1$  i  $3$ . Ponieważ  $r(1) +_2 r(3) = 0 +_2 1 = 1$ , więc  $r(4) = 0$ .

Przy  $n = 5$  są już dwa legalne ruchy, a mianowicie podział na stosy  $1$  i  $4$  (z liczbą Grundy'ego  $r(1) +_2 r(4) = 0$ ) oraz podział na stosy  $2$  i  $3$  (z liczbą Grundy'ego  $1$ ). Tak więc  $r(5) = 2$ .

W podobny sposób można stwierdzić, że  $r(6) = 1, r(7) = 0, r(8) = 2, r(9) = 1$  oraz  $r(10) = 0$ .

Dla przykładu prześledźmy przypadek  $n = 8$ . Możliwe są trzy ruchy rozpoczynające grę, prowadzące do pozycji

1 i 7	0
2 i 6	1
3 i 5	3

z liczbami Grundy'ego podanymi obok liczości stosów. Liczba  $2$  jest najmniejszą liczbą, która nie występuje wśród liczb  $0, 1$  i  $3$ .

I na koniec zadanie dla Czytelników. Siadasz do gry RÓŻNE STOSY z mało doświadczonym przeciwnikiem, więc dajesz mu fory w postaci pierwszego ruchu. Przeliczasz bierki w stosie, jest ich  $37$ . Niedobrze, myślisz, przeciwnik ma aż  $5$  dobrych posunięć w pierwszym ruchu (**jakich?**). Oddychasz z ulgą, gdy przeciwnik dzieli wyjściowy stos na stosy o licznosciach  $17$  i  $20$ . Teraz wygraną masz w kieszeni. Jaki jest Twój ruch?

Odpowiedź za miesiąc.

JWR