

Angielski słoneczny zegar pierścieniowy z XVIII w.

## SPIS TREŚCI NUMERU 3(310)

Podstawy matematyki w wieku XX (4) <i>Wiktor Marek, Jan Mycielski</i>	str. 1
Zegary słoneczne <i>Przemysław Olbratowski</i>	str. 1
Zadania	str. 5
O liczbie podziałów wielokąta wypukłego na równoległoboki <i>Jakub Onufry Wojtaszczyk</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str.10
Co ma wspólnego tożsamość Jacobiego z przecinaniem się wysokości trójkąta? <i>Henryk Żołądek</i>	str.11
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Marzec	str.16
Gammalimatias	str.17

### W następnym numerze:

Teoria względności

Okładki, ilustracje i rysunki techniczne  
*Anna Ludwicka*

Wybór artykułów w języku angielskim  
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

#### Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
 Bogdan Cichocki  
 – wiceprzewodniczący  
 Krzysztof Ciesielski  
 Jan A. Gaj  
 Piotr Goldstein  
 Tomasz Hofmokl  
 Andrzej Hryniewicz  
 Wiesław A. Kamiński  
 Marta Kicińska-Habior  
 Krzysztof Maślanka  
 Janusz Matkowski  
 Andrzej Mąkowski  
 Zdzisław Pogoda  
 Michał Różyczka  
 Konrad Rudnicki  
 Grzegorz Sitarski  
 Andrzej Woszczyk  
 Eligiusz Złotkiewicz  
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

#### Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol  
 Krzysztof Biesaga  
 Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.  
 Krystyna Kordos – sekr. red.  
 Marek Kordos – red. nac.  
 Tomasz Kwast  
 Anna Ludwicka  
 Anna Rudnik  
 Witold Sadowski  
 Joanna Udalska  
 Anna Wojtyra  
 Piotr Zalewski

#### Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa  
 tel. 853-59-61.  
 BARTOL@MIMUW.EDU.PL  
 Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.  
 Wydrukowano  
 w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.  
 w Warszawie, ul. Mińska 65.

#### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)  
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2000 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2000 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

#### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na III kwartał 2000 r. wynosi 9 zł.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
- Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>.
- Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę
 

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.
- Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

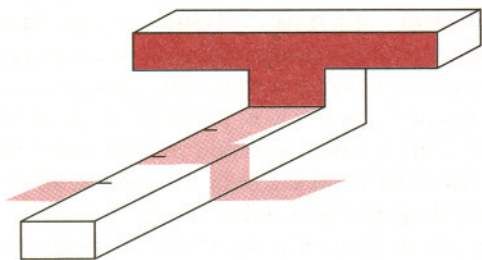
Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

# Zegary słoneczne

Przemysław OLBRATOWSKI

W najdawniejszych czasach ludzie określali pory roku i dnia obserwując ruchy gwiazd, Księżyca, a przede wszystkim dzienną wędrówkę Słońca. Z czasem zaczęto wznosić specjalne budowle ułatwiające te obserwacje. W trzecim tysiącleciu p.n.e. w Egipcie, Babilonii, Chinach i Indiach pojawiły się gnomony, czyli różnego rodzaju pionowe słupy lub obeliski, których cień pozwalał na dokładniejsze określenie położenia Słońca na niebie. W północnej Europie często spotykało się natomiast kamienne kręgi spełniające rolę kalendarza – jeżeli stanęło się w ich środku, to można było określić porę roku na podstawie tego, zza którego głązu weszło lub za który zaszło Słońce. Najslawniejszą tego typu konstrukcją jest Stonehenge w Anglii, zbudowany prawdopodobnie około 1840 roku p.n.e.

Zgodzimy się chyba ze stwierdzeniem, że porę dnia łatwiej jest określić na podstawie długości cienia niż jego kierunku, zwłaszcza jeżeli jest się w nieznanym terenie i nie ma do dyspozycji kompasu. Zapewne dlatego jako pierwsze pojawiły się tzw. zegary cieniowe, mające podziałkę, z której porę dnia odczytywało się z długości cienia. Wynaleziono je w Egipcie około roku 2000 p.n.e., a funkcjonowały także w wersji przenośnej – np. do użytku podczas bitew.



Rys. 1. Schemat egipskiego zegara cieniowego.

Najstarsze zegary, w których wykorzystano kierunek cienia, pochodzą również z Egiptu, z około 800 roku p.n.e. Od tamtego czasu stały się podstawowym, wzorcowym przyrządem do odmierzenia czasu. Rozpowszechnienie zegarów słonecznych było większe, niż nam się na ogół wydaje – np. w Średniowieczu na mocy dekretu papieskiego umieszczano je na wieżach wszystkich kościołów, aby wierni mogli punktualnie przybyć na nabożeństwo. Wersje kieszonkowe były używane – szczególnie podczas podróży – aż do końca XIX w., ponieważ do tego czasu były znacznie tańsze od zegarków mechanicznych.

Deklinacja Słońca, czyli kąt  $\delta$  pomiędzy promieniem słonecznym a płaszczyzną równika Ziemi, zależy od pory roku i przyjmuje wartości od  $-23^{\circ}27'$  podczas przesilenia zimowego do  $+23^{\circ}27'$  podczas przesilenia letniego. Wartości ujemne oznaczają, że Słońce znajduje się na południe od płaszczyzny równika, a dodatnie – że na północ. W dniach obu równonocy deklinacja jest równa  $0^{\circ}$ . Fakty te są prostą konsekwencją tego, że płaszczyzna równika jest nachylona do płaszczyzny ekliptyki (czyli płaszczyzny, po której Ziemia obiega Słońce) właśnie pod kątem  $\varepsilon = 23^{\circ}27'$ . Łatwe rozważania geometryczne pozwalają przekonać się, że zależność deklinacji  $\delta$  od dnia roku dana jest wzorem:  $\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \nu$ , gdzie  $\nu$  jest kątem, który Ziemia przebiegła wokół Słońca od równonocy wiosennej.

## Podstawy matematyki w wieku XX

### 4. Polacy; podsumowanie

Wiktor MAREK,  
Jan MYCIELSKI

Poprzednie części artykułu ukazały się w *Deltach*: 9/1999, 11/1999 i 1/2000.

Spójrzmy teraz na rolę Polski w rozwoju dwudziestowiecznych podstaw matematyki. Odzyskanie niepodległości Polski w roku 1918 zbiegło się ze znacznym ożywieniem badań naukowych. Wydawane w Polsce „Fundamenta Mathematicae” (których pierwszy tom ukazał się w roku 1920) skoncentrowały się na tematyce szeroko pojętych podstaw matematyki. Profil „Fundamentów” był i jest szerszy niż tylko logika i teoria mnogości – bardzo silnie reprezentowana jest tam topologia, o której tu nic nie piszemy. Niemniej jednak od samego początku „Fundamenta” publikowały wiele zasadniczych prac w dziedzinie podstaw matematyki.

Do „wielkich nazwisk” podstaw matematyki w Polsce między wojnami należą: Kuratowski, Sierpiński, a zwłaszcza Tarski. Wyniki tych badaczy znajdują się dziś w podręcznikach logiki i teorii mnogości. Lista ważniejszych wyników zarówno ich, jak i ich współpracowników, jest długa i trudno byłoby adekwatnie przedstawić wszystkie. Z konieczności wspomnimy tylko najważniejsze kierunki. Podstawy w Polsce między wojnami uprawiane były głównie w Warszawie i we Lwowie. Badania w dziedzinie „czystej” teorii mnogości prowadzili Sierpiński i Tarski, w dziedzinie „dużych” liczb kardynalnych Sierpiński, Tarski i Ulam (stąd właśnie wzięły się liczby mierzalne wspomniane poprzednio).

Ulepszając wcześniejsze twierdzenie Hausdorffa, w 1924 r. Banach i Tarski pokazali, jak można rozłożyć kulę na skończoną liczbę odpowiednich części i z tych samych części złożyć dwie kule, obie tej samej wielkości, co wyjściowa kula.

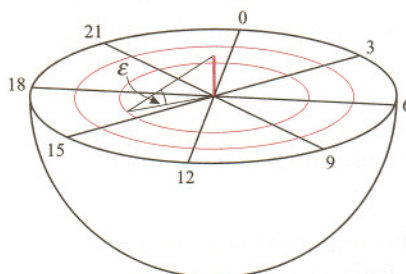
Oczywiście, części takie nie mogą być mierzalne (no bo wtedy już łatwo wykazać, że  $1 = 2$ ). Istnienie takiego rozkładu wymaga założenia aksjomatu wyboru.

Powojenne badania determinacji (Steinhaus i Mycielski) dały bogatą teorię zbiorów bez tego paradoksu. W teorii tej wszystkie zbiory są mierzalne.

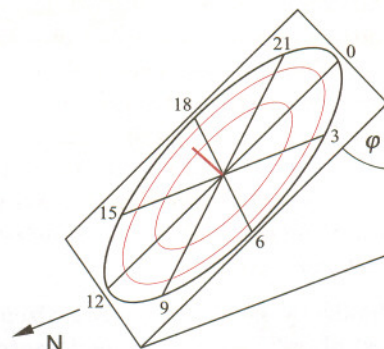
Tarski wprowadził definicję spełniania i wykazał jego podstawowe własności. Był to prawdziwy początek teorii modeli. Tarski wykazał też twierdzenie o niedefiniowalności pojęcia prawdy, udowodnił wiele twierdzeń o liczbach kardynalnych oraz twierdzenie o rozstrzygalności geometrii elementarnej. Badano też problemy związane z aksjomatem wyboru (Tarski, Lindenbaum i Mostowski), deskryptywną teorię mnogości (Kuratowski, Sierpiński, Tarski i inni) i teorię „części i całości” (Leśniewski, Tarski). We wszystkich tych dziedzinach znaczące były wyniki Alfreda Tarskiego. Jego wszechstronne zainteresowania i mnogość twierdzeń doprowadziły do rozkwitu podstaw w Polsce w latach międzywojennych.

W czasie drugiej wojny światowej zginęło wielu polskich matematyków, w szczególności logicy Lindenbaum i Wajsberg, a inni rozproszyli się po świecie. Tarski znalazł pracę w Uniwersytecie Stanu Kalifornia w Berkeley. Szczęściem, w Polsce pojawiła się nowa generacja badaczy podstaw, a jako uboczny wynik rządów komunistycznych uległa też zmianie organizacja nauki, stwarzając wiele nowych miejsc, gdzie matematyka (w tym podstawy) mogła być uprawiana. Na okres powojenny przypadł rozkwit twórczości Andrzeja Mostowskiego. Do swojej śmierci w r. 1975 odgrywał on wielką rolę w badaniach podstaw matematyki w Warszawie. Grupa jego uczniów (Ehrenfeucht, Grzegorzczak, Marek, Rasiowa i Sikorski), a także matematycy wrocławscy (w tym Łoś, Mycielski, Pacholski, Ryll-Nardzewski i Węglorz) wznowili i rozwinęli badania podstaw. W Warszawie uzyskano znaczące wyniki w teorii rekursji, zupełności arytmetyki, teorii mnogości, logikach nieklasycznych i innych dziedzinach. Kiedy w r. 1950 Tarski zaproponował program badań teorii modeli, Mostowski i jego współpracownicy (szczególnie Ehrenfeucht) odegrali w nim dużą rolę, np. znaleźli tzw. metodę elementów nieodróżnialnych. Łoś (który pracował we Wrocławiu, a później w Toruniu i w Warszawie) wprowadził fundamentalną konstrukcję ultraprodktu, a także pojęcie „kategoryczności w mocy”, jedno z podstawowych narzędzi teorii modeli.

Wyobraźmy sobie, że Ziemię przecięto na pół, usunięto półkulę północną i na środku postawiono pionowo wskazówkę, czyli słupek o pewnej wysokości – sytuację taką przedstawia rysunek 2. Ponieważ Ziemia obraca się dookoła własnej osi z prędkością  $15^\circ$  na godzinę, więc cień wskazówki będzie się przesuwal po płaszczyźnie równika z tą samą prędkością. Jeżeli zatem na przeciętej Ziemi narysujemy proste rozbiegające się od wskazówki w odstępach kątowych co  $15^\circ$ , to z tak uzyskanej skali będzie można odczytać godzinę.



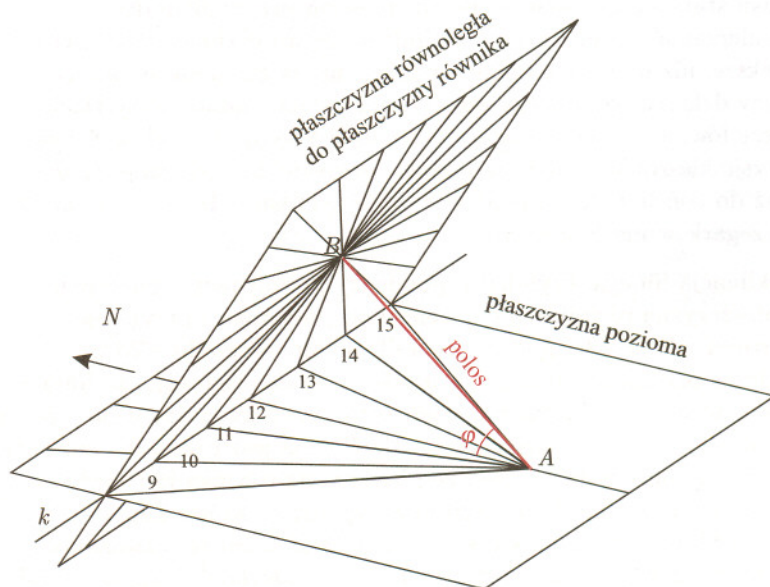
Rys. 2. Zegar słoneczny utworzony z Ziemi przeciętej wzdłuż płaszczyzny równika (długość cienia jak w pierwszym dniu lata).



Rys. 3. Sposób ustawienia zegara równikowego. Kąt  $\varphi$  oznacza szerokość geograficzną.

Linia odpowiadająca godzinie 0 powinna być poprowadzona w kierunku południka, dla którego chcemy wyskalować zegar. Znając dla danego dnia deklinację  $\delta$  oraz wysokość  $h$  wskazówki, można obliczyć długość cienia:  $l = h \operatorname{ctg} \delta$ . Rysując okręgi o promieniach równych długości cienia dla poszczególnych dat, otrzymujemy skalę, z której można odczytać dzień roku. Skonstruowaliśmy więc zegar z datownikiem! Oczywiście w praktyce zamiast przecinania Ziemi należy użyć np. płaskiej deseczki umieszczonej równolegle do płaszczyzny równika ze wskazówką równoległą do osi Ziemi. Taką pozycję uzyskujemy, ustawiając tarczę zgodnie z rysunkiem 3. Zwróćmy uwagę, że na półkuli południowej deseczka powinna być pochylona w przeciwną stronę.

Dotychczas opisaliśmy tzw. zegar równikowy. Zastanówmy się, jak będzie wyglądać skala na tarczy umieszczonej poziomo. W tarczę tę wbijemy nie pionowy gnomon, ale wskazówkę pochyloną tak, aby

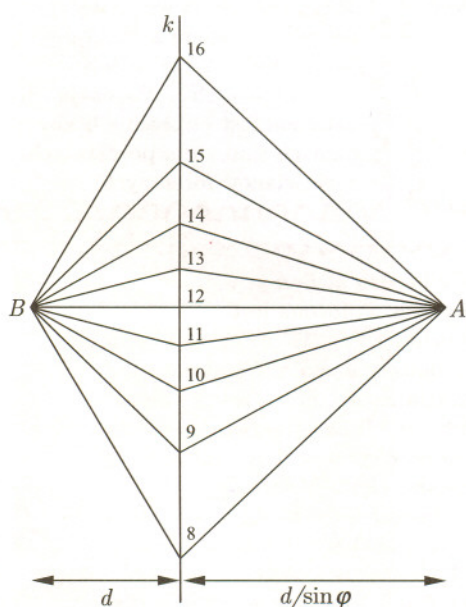


Rys. 4. Zasada konstrukcji podziałki godzinowej zegara poziomego; polos (odcinek  $AB$ ) jest równoległy do osi Ziemi.

była równoległa do osi Ziemi – podobnie jak w zegarze równikowym. Taka skośna wskazówka nazywa się polosem – odpowiednia ilustracja znajduje się na rysunku 4. Oprócz płaszczyzny tarczy narysowano tam płaszczyznę przechodzącą przez koniec polosu i prostopadłą do niego, czyli równoległą do płaszczyzny równika. Jest na niej naniesiona znana nam już podziałka godzinowa zegara równikowego w postaci prostych co  $15^\circ$ . Proste te przecinają tarczę poziomą w oznaczonych numerami godzin punktach układających się na prostej  $k$  będącej przecięciem obu płaszczyzn. Chwila zastanowienia prowadzi do wniosku, że cień polosu odpowiadający np. godzinie 14 leży na prostej łączącej podstawę polosu  $A$  z punktem 14 – linia ta jest bowiem przecięciem płaszczyzny tarczy z płaszczyzną zawierającą polos i kierunek „do Słońca” o tej godzinie.

Taki obraz nasuwa pomysł następującej konstrukcji pokazanej na rysunku 5. Prowadzimy na płaszczyźnie prostą  $k$ . W pewnej odległości  $d$  umieszczamy punkt  $B$ , a po drugiej stronie, w odległości  $d/\sin\varphi$  – punkt  $A$  w taki sposób, aby punkty te leżały na prostopadłej do  $k$ . Z  $B$  prowadzimy proste co  $15^\circ$  tak, by jedna z nich była prostopadła do  $k$ . Ich przecięcia z  $k$  oznaczamy numerami, jak na rysunku. Następnie kreślimy proste przechodzące przez punkt  $A$  oraz punkty oznaczone numerami – stanowią one tarczę poziomego zegara słonecznego. Polos należy wbić w punkcie  $A$  i pochylić w kierunku punktu  $B$ . Dlaczego tak jest? Jeżeli zagniemy płaszczyznę wzdłuż prostej  $k$  i przechylimy lewą część do góry, to punkt  $B$  oprze się o koniec polosu i uzyskamy sytuację z rysunku 4. Tarczę zegara poziomego można więc wykreślić, używając niemalże samej linijki bez podziałki i cyrkla, raz tylko wykorzystując kątomierz – przy wyznaczaniu odległości  $d/\sin\varphi$ .

Wykreślenie podziałki datownika jest już nieco trudniejsze. Nie będziemy tego opisywać ufając, że zainteresowani Czytelnicy, znając wzór na deklinację Słońca, sami będą w stanie rozwiązać ten problem. Wyobraźmy sobie, że na rysunku 4 płaszczyzna równoległa do płaszczyzny równika została poprowadzona nie przez koniec polosu  $B$ , ale przez jego podstawę  $A$ , i że narysowano na niej okręgi podziałki datowej zegara równikowego. Podziałką datową zegara



Rys. 5. Metoda wykreślenia tarczy zegara poziomego.

poziomego będą rzuty środkowe tych okręgów na poziomą tarczę z końca polosu  $B$ . Jest faktem znanym z geometrii, że rzuty środkowe okręgów na płaszczyznę mogą być hiperbolami, parabolami, elipsami, okręgami lub prostymi. W naszych szerokościach geograficznych otrzymamy hiperbole oraz prostą dla równonocy. Kompletna tarcza wykreślona dla szerokości Warszawy ( $\varphi = 52^\circ 15'$ ) jest pokazana na okładce. Przeciwprostokątna zaznaczonego trójkąta jest polosem. Trójkąt należy „postawić”, aby polos mógł pełnić swoją funkcję.

Prace Cohena spowodowały, że wielu uczniów Mostowskiego zajęło się modelami teorii mnogości i jej fragmentów. To z kolei doprowadziło do uogólnień pojęcia kwantyfikatora, a także do badań fragmentów arytmetyki (istotnych w podstawach informatyki). Istotne też były wyniki Szemielew, w tym dowód rozstrzygalności teorii grup abelowych i wiele rezultatów w podstawach geometrii. Rasiowa i Sikorski rozwijali algebraiczne podejście do logiki. Dalsze badania Rasiowej ewoluowały w kierunku podstaw informatyki, prowadząc do nowych zastosowań podstaw.

We Wrocławiu działali: Łoś, Ryll-Nardzewski i Słupecki, którzy uzyskali ważne wyniki w teorii modeli (wspomniane wyżej) oraz w aksjomatyzacji arytmetyki. Tam też, w roku 1961 Mycielski i Steinhaus sformułowali aksjomat determinacji. Teoria determinacji należy nadal do bardzo żywych tematów teorii mnogości.

I dzisiaj badania podstaw kontynuowane są w Polsce, przede wszystkim w Uniwersytecie Warszawskim, Uniwersytecie Wrocławskim i Instytucie Matematycznym PAN, a także w innych ośrodkach. Można oczekiwać, że i dalej będą prowadzone.

Czas na podsumowanie. Spytajmy więc, jakie są największe osiągnięcia podstaw matematyki w dwudziestym wieku? Wskażemy tu trzy, naszym zdaniem, najważniejsze.

- Został zbudowany ścisły język dla matematyki. Możemy więc dziś powiedzieć, czym są zdania matematyczne oraz co to jest dowód, czyli wyprowadzenie zdania z jakiegoś zbioru aksjomatów. Twierdzenie Gödla o zupełności dla logiki pierwszego rzędu pokazuje adekwatność tego pojęcia dowodu względem sprecyzowanej przez Tarskiego semantyki opartej na pojęciu struktury relacyjnej (modelu). Matematycy dawniejszych wieków odwoływali się do intuicji logicznej, która dopiero w XX wieku została w pełni opisana i wyjaśniona.
- Została zbudowana aksjomatyczna teoria mnogości oparta na jednym pojęciu pierwotnym: należeniu elementu do zbioru. Dzisiejsza matematyka jest ugruntowana na tej teorii. Jej aksjomaty są tak proste, że można je zmieścić na jednej stronie. Niemniej teoria mnogości Zermelo–Fraenkla (ZFC) nie rozstrzyga wielu pytań z zakresu arytmetyki liczb

naturalnych lub podstaw analizy matematycznej. Nadal trwa rozbudowa teorii ZFC za pomocą nowych mocnych aksjomatów.

- Została zbudowana teoria funkcji obliczalnych i algorytmów. Mamy jasne rozróżnienie między ogólnym pojęciem funkcji a jego podklasą funkcji obliczalnych (o argumentach i wartościach naturalnych lub rzeczywistych). Znikło dawne pomieszanie między ogólnym pojęciem funkcji i bardziej specjalnym pojęciem funkcji obliczalnych. Badane są też bardziej konkretne pojęcia (na przykład klasy PTIME i NPTIME).

Zatem podstawy matematyki uległy wielkiemu rozwojowi w XX wieku, pomimo tego, że naturalna hipoteza, iż podstawowe teorie matematyczne (PA, ZFC) są zupełne, została obalona przez Gödla. Stwierdzenie Hilberta, że „Musimy wiedzieć, będziemy wiedzieć” okazało się zbyt śmiałe – matematyka jest bogatsza i mniej uchwytna, niż sądzono. A jednak uzyskano odpowiedź na podstawowe pytania XIX wieku i odpowiedzi te okazały się zaskakujące i piękne. Nasuwa się pytanie, czy podstawy matematyki (i informatyki) za sto lat będą nadal oparte na pojęciach, na których były oparte w wieku dwudziestym? Zaryzykujemy twierdzenie, że uniwersum zbiorów z relacją należenia pozostanie fundamentalną strukturą, na której opierać się będzie cała matematyka.

Na zakończenie sformułujemy trzy otwarte problemy podstaw matematyki, które wydają się nam szczególnie ważne.

- *Rozwinąć efektywne metody automatycznego budowania dowodów hipotez matematycznych, a przynajmniej takich, które mają proste dowody!*

Istnieją już interesujące metody tego rodzaju (zajmuje się tym dziedzina nazywana „automatyczne dowodzenie twierzeń”), ale te metody ani nie umieją budować większości dowodów, które matematykom wydają się łatwe, ani dowody, które te metody budują, matematykom nie wydają się łatwe. Poza tym dotychczasowe metody nie są dynamiczne w tym sensie, że nie umieją posługiwać się wiedzą matematyczną, którą można by im dostarczać. Mamy nadzieję, iż postępy sztucznej inteligencji w XXI wieku doprowadzą do znalezienia efektywnych, dynamicznych, metod dowodzenia hipotez matematycznych.

Mówiąc o zegarach słonecznych, spotykamy się z czterema wielkościami – są to: szerokość geograficzna, kierunek północ-południe, data i godzina. Dotychczas zajmowaliśmy się wyznaczaniem daty i godziny, gdy dana była szerokość geograficzna oraz kierunek północ-południe. Za pomocą odpowiednio skonstruowanych zegarów można wyznaczyć dowolne dwie spośród tych wielkości, znając dwie pozostałe. Podczas górskiej wycieczki może się zdarzyć, że znamy szerokość i datę, a nie wiemy, gdzie jest północ i która godzina. Informacje te możemy uzyskać np. za pomocą zegara równikowego – takiego, jak na rysunku 3. Kąt pochylenia tarczy jest ustalony. Stawiamy zegar na poziomej powierzchni i tak obracamy całość, aby koniec cienia znalazł się na okręgu odpowiadającym właściwej dacie. Z podziałki godzinowej odczytujemy wtedy godzinę, a ustawienie zegara wskazuje północ. Okazuje się, że taki słoneczny kompas jest lepszy od kompasu magnetycznego. Czytelnicy nie będą zapewne mieli problemu z wyjaśnieniem, jak to samo zrobić za pomocą zegara poziomego.

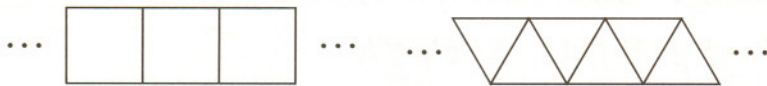
W przeszłości budowano wiele typów zegarów o różnych tarczach – płaskich, walcowych, kulistych wklęsłych i wypukłych. Do ciekawszych należały tzw. zegary magnetyczne, które należało tak obrócić, aby cień padł w ściśle określone miejsce, a wtedy godzinę pokazywała igła dołączonego kompasu. Konstruowano też zegary księżycowe – do użytku w nocy. Wiele ciekawych egzemplarzy można dziś zobaczyć w muzeum im. Przypkowskich w Jędrzejowie koło Kielc. Znajduje się tam trzecia co do wielkości kolekcja na świecie. Różne zegary są też pokazywane na Wydziale Fizyki UW, podczas Festiwalu Nauki we wrześniu każdego roku. Osoby zainteresowane zapraszamy na stronę internetową <http://zfjavs.fuw.edu.pl/~polbrat>, gdzie można obejrzeć zabytkowe zegary z całego świata oraz zegary słoneczne cyfrowe, pokazujące godzinę jak na wyświetlaczu elektronicznego zegarka! Na tej stronie znajduje się też program wykreślający pełną tarczę zegara poziomego dla dowolnych współrzędnych geograficznych.

W dowolnym wielościanie wypukłym suma liczby ścian trójkątnych i liczby wierzchołków trójściennych jest równa co najmniej 8. Tę najmniejszą sumę osiągają np. ośmiościan foremny ( $8 + 0$ ), czworościan ( $4 + 4$ ) i sześcian ( $0 + 8$ ). A czy są jeszcze inni minimaliści?

Sześcian ma 11 różnych siatek (umawiamy się, że nie rozcinamy ścian, i że każda ściana łączy się całym bokiem z co najmniej jedną inną). A czworościan foremny ma ich 2. Pouczającym zajęciem jest obliczenie liczby różnych siatek dla pozostałych wielościanów foremnych.

Supernowa 1984 E jest jedną z bardzo nielicznych, które obserwowano przed eksplozją. Położona jest w galaktyce NGC 3169 i wybuchła 1 IV 1984 r. W jej widmie znaleziono linie wodorowe nie biorące udziału w wybuchu, co dowodzi, że wokół gwiazdy mogła istnieć już wcześniej otoczka wodorowa. Otóż w galaktyce tej w 1981 r. obserwowano punktowy obiekt z emisyjnymi liniami wodorowymi w tym właśnie miejscu, gdzie potem wybuchła supernowa, nie było natomiast tego obiektu na zdjęciach z 1961 r. Oznacza to, że otoczka wodorowa mogła powstać w ciągu kilku lat przed wybuchem w wyniku silnego wiatru gwiazdowego. Obserwacje robione po wybuchu nie znalazły już śladu otoczki. Biorąc pod uwagę, że 6 V 1984 r. już jej nie było i znając z obserwacji prędkość ekspandujących produktów wybuchu, ocenia się, że główna masa otoczki znajdowała się w odległości 200 j.a. od gwiazdy.

Dwa  $n$ -kąty foremne położone w równoległych płaszczyznach połączone są paskiem kwadratów lub trójkątów równobocznych:



W pierwszym przypadku ograniczoną w ten sposób bryłę nazywa się archimedesowym graniastosłupem, w drugim zaś antygraniastosłupem. Graniastosłup taki jest wyższy od antygraniastosłupa o tej samej krawędzi, ten drugi jest jednak jakby szerszy. A który ma większą objętość? Dla  $n = 3$  przy krawędzi 1 mamy dla graniastosłupa  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ , dla antygraniastosłupa zaś  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ , czyli więcej. Czy jednak każdy  $n$ -graniastosłup ma mniejszą objętość od  $n$ -antygraniastosłupa o tej samej krawędzi? Polecamy badania.

Wielościan nie może mieć 1, 2, 3, 4 ani 5 krawędzi. 6 krawędzi może mieć (czworościan), ale 7 nie. Wszystkie większe liczby całkowite są liczbami krawędzi odpowiednich wielościanów.

Nawet gdyby się okazało, że nasza przestrzeń jest w każdym niewielkim swoim kawałku euklidesowa, to i tak mogłaby mieć – jako całość – aż 18 różnych postaci.

Hugo Steinhaus mówił: – *Moim zdaniem każdy matematyk powinien znać teorię Galois. Dlatego – dodawał – ja nie jestem matematykiem.*

– Czy wszystkie zbiory liczb rzeczywistych, należące do klasy OD lub nawet do klasy OD[ $\mathbb{R}$ ] (patrz Delta 11/1999), są zdeterminowane w sensie Mycielskiego–Steinhausa?

Jest to hipoteza podobna do hipotezy continuum w tym sensie, że jest ona niezależna od aksjomatów ZFC plus wszystkie znane aksjomaty istnienia dużych liczb kardynalnych i jest także niesprzeczna z teorią ZFC przy założeniu istnienia dużych liczb kardynalnych.

– Czy PTIME  $\neq$  NPTIME lub choćby PTIME  $\neq$  PSPACE?

Pytania te i podobne dominują współczesną informatykę teoretyczną i pierwsze z nich można rozumieć jako problem trudności pytań typu: „czy istnieje dowód danej hipotezy nie przekraczający danej długości”. Na razie problem ten opiera się wysiłkom wielu informatyków, logików i matematyków.



## Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

**M 910.** Czy na płaszczyźnie można umieścić skończoną liczbę parabol, tak by ich wnętrza pokryły całą płaszczyznę? (Wnętrzem paraboli nazywamy wypukłą figurę, której brzegiem jest ta parabola).

Rozwiązanie na str. 7

**M 911.** Dwie parabole o prostopadłych osiach przecinają się w czterech punktach. Udowodnić, że punkty te leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie na str. 12

**M 912.** Dwie parabole o równoległych osiach przecinają się w punktach  $A_0$  i  $B_0$ . Na pierwszej z nich wybrano punkty  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ , na drugiej punkty  $B_1, B_2, \dots, B_{2n}$  tak, że  $A_0A_1 \parallel B_0B_1, A_1A_2 \parallel B_1B_2, \dots, A_{2n-1}A_{2n} \parallel B_{2n-1}B_{2n}$ . Udowodnić, że  $A_{2n}B_0 \parallel B_{2n}A_0$ .

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Ewa CZUCHRY

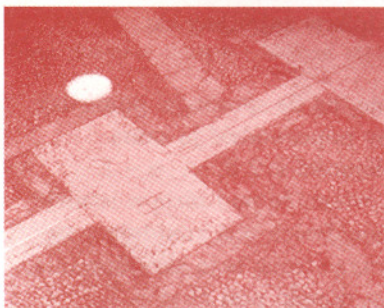
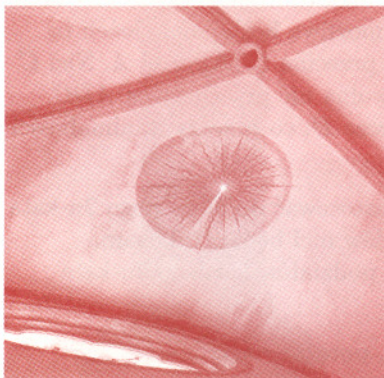
**F 519.** Zapomniano wyłączyć czajnik elektryczny z 500 cm<sup>3</sup> wody o temperaturze początkowej 16°C. Opór spirali grzałki czajnika wynosi 16  $\Omega$ . Po jakim czasie od chwili włączenia czajnika cała woda wygotuje się?

Napięcie w sieci wynosi 220 V, współczynnik sprawności czajnika 60 % (dla uproszczenia przyjmujemy, że sprawność jest stała). Ciepło właściwe wody  $c = 4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ , ciepło parowania wody  $r = 2,255 \cdot 10^6 \text{ J}/\text{kg}$ .

Rozwiązanie na str. 6

**F 520.** Równoległe do oporu  $R = 9 \Omega$  podłączonego do baterii włączono nieznaną opór  $R_x$ . Okazało się, że moc wydzielona na zewnętrznej części obwodu nie zmieniła się. Wyznaczyć wielkość oporu  $R_x$ . Opór wewnętrzny źródła wynosi  $r = 1 \Omega$ .

Rozwiązanie na str. 14



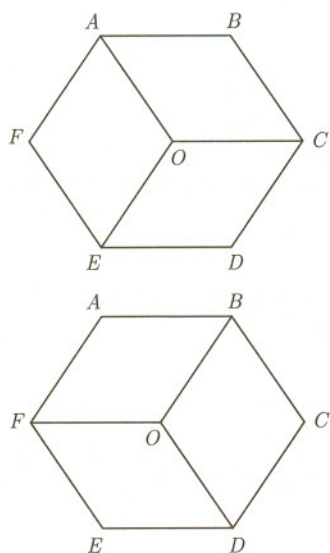
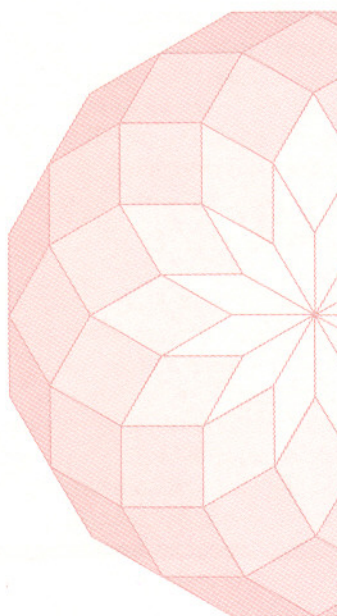
Zegar słoneczny typu camera obscura, kościół św. Petroniusza w Bolonii, 1655.

# O liczbie podziałów wielokąta wypukłego na równoległoboki

Jakub Onufry WOJTASZCZYK

Łatwo dowieść, że dowolny parzystokąt foremny można podzielić na romby o bokach tej samej długości co boki parzystokąta. Na ile sposobów da się to zrobić? Jasne jest, że dla kwadratu sposób jest tylko jeden, dla sześciokąta – dwa (rysunek). Dla ośmiokąta sposobów podziału jest osiem, dla dziesięciokąta – sześćdziesiąt dwa. Tempo wzrostu tych liczb zniechęca do bezpośredniego rozwiązywania problemu dla dwunastokąta (908 sposobów). Pojawia się zatem problem oszacowania rozważanych liczb, a także określenia ich własności.

Kluczem do rozwiązywania tego zagadnienia okazało się wymyślone przez Piotra Przytyckiego tzw. przedstawienie przez nici. Udowadniamy mianowicie, że w każdym podziale wielokąta występują ciągi rombów biegnące od dowolnego boku wielokąta do boku przeciwległego, złożone z rombów o jednej parze boków równoległej do tegoż boku wielokąta (na rysunku dla boku  $AB$  są to  $ABCO$  i  $COED$ ). Łączymy te boki krzywą, którą nazywać będziemy nicią. Postępując tak dla każdej równoległej pary boków wielokąta, otrzymamy układ nici. Otóż da się udowodnić, że dowolny układ takich krzywych skończonych otwartych, że żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie, każde dwie przecinają się raz i tylko raz, oraz każdy koniec krzywej wychodzi poza pole objęte innymi krzywymi, jest układem nici, oraz że każdy układ nici spełnia podane wyżej trzy warunki. Umówmy się, że układy nici będziemy uważać za różne tylko wtedy, gdy różnią się kolejnością przecinania nici. Wówczas różne układy nici odpowiadają różnym podziałom wielokąta i zamiast liczyć podziały możemy liczyć układy nici.



W dowodzie tego wykorzystuję przydatny później i ciekawy sam w sobie lemat mówiący, że jeżeli w układzie nici pod daną nicią  $A$  jest chociaż jedno przecięcie dwóch innych nici, to istnieją takie nici  $B$  i  $C$ , że pola ograniczone przez nici  $A$ ,  $B$  i  $C$  nie przecinają żadne inne nici. Dowód przebiega następująco: weźmy takie nici  $B$  i  $C$  przecinające się pod  $A$ , że nici  $B$  nie przecina między  $A$  i  $C$  żadną nić. (Żeby znaleźć takie pole, wystarczy wziąć dowolną nić  $B$  przecinaną pod  $A$  oraz nić  $C$  przecinającą  $B$  najbliżej  $A$ .) Ponadto niech będą to nici takie, że pole  $ABC$  przecinane jest przez najmniejszą możliwą liczbę nici. Jeżeli ta liczba nie jest zerem, to rozpatruję nić  $D$ , która przecina  $C$  najbliżej  $A$ . Nici  $C$  między  $A$  i  $D$  nie przecina więc żadna nić, a dowolna nić przecinająca  $ADC$  przecina też  $ABC$ , poza tym  $ABC$  przecina jeszcze  $D$ , co przeczy minimalności  $ABC$ , więc  $ABC$  nie może przecinać żadna nić.

Łatwo spostrzec, że tę samą technikę możemy zastosować do dowolnego  $2n$ -kąta środkowosymetrycznego. Otrzymany zbiór układów nici będzie taki sam, jak dla  $2n$ -kąta foremnego, co oznacza, iż liczba podziałów każdego  $2n$ -kąta środkowosymetrycznego jest taka sama.

Jak widać, uzyskaliśmy dzięki pojęciu nici nowe, potężne narzędzie pracy. Za jego pomocą możemy osiągnąć z dużą łatwością dosyć dobre oszacowanie dolne oraz dosyć kiepskie oszacowanie górne. Najpierw zajmijmy się oszacowaniem dolnym.

Weźmy dowolny układ  $n - 1$  nici. Zastanówmy się, na ile sposobów pomiędzy nićmi  $1$  i  $n - 1$  możemy dodać nową nić. Możemy poprowadzić ją samą górami, tj. tak żeby pozostałe nici przecinała w kolejności  $1, 2, 3, \dots, n - 1$ . Korzystając ze wspomnianego wcześniej lematu, wiem, że pod nicią  $n$  istnieją pola nie przecinane żadną nicią, czyli skrzyżowanie dwóch nici znajdujące się bezpośrednio pod  $n$ . Przelóżmy więc nić  $n$  na drugą stronę tego skrzyżowania, by otrzymać nowy układ. Procedurę powtarzamy, dopóki pod nicią  $n$  nie skończą się skrzyżowania, czyli  $\binom{n}{2} + 1$  razy. Taką operację możemy przeprowadzić dla każdego układu  $n - 1$  nici, za każdym razem otrzymując



**Rozwiązanie zadania F 519.**  
Energia prądu elektrycznego jest zużywana na ogrzanie wody i na zamianę jej w parę, czyli:

$$\eta Pt = cm(t_2 - t_1) + rm,$$

gdzie  $m = \rho V$  – masa wody w czajniku. Moc prądu  $P = U^2/R$ . Stąd otrzymujemy

$$t = \frac{\rho V [c(t_2 - t_1) + r]}{U^2 \eta} R \approx 12 \text{ minut.}$$



### Rozwiązanie zadania M 910.

Nie można. Dla skończonego zbioru parabol rozważmy dowolną prostą nie równoległą do żadnej z osi parabol. Przecięcie tej prostej z wnętrzem każdej z parabol jest skończonym odcinkiem. Dla dowolnej paraboli istnieje bowiem układ współrzędnych, w którym ma ona równanie  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ). Równanie rozważanej prostej ma w nim postać  $y = kx + l$ . Punkt  $(x, y)$ , należący do przecięcia wnętrza paraboli i prostej, spełnia nierówność  $kx + l > ax^2$ , której zbiór rozwiązań jest albo pusty, albo jest odcinkiem  $(x_1, x_2)$ , gdzie  $x_1, x_2$  są pierwiastkami wielomianu  $ax^2 - kx - l$ . Tak więc na rozważanej prostej istnieją punkty nie należące do wnętrza żadnej paraboli z danego skończonego zbioru.



Zegar słoneczny słupkowy, Niemcy, 1611.

$\binom{n}{2} + 1$  różnych układów. Wobec tego układów  $n$  nici jest przynajmniej  $\binom{n}{2} + 1$  razy więcej niż układów  $n - 1$  nici. To daje możliwość prostego rekurencyjnego oszacowania z dołu liczby podziałów.

Szacowanie z góry osiąga się następująco. W danym układzie  $n$  nici bierzemy wszystkie  $\binom{n}{3}$  trójki nici. Porządkujemy każdą z nich i przypisujemy jej liczbę 0, jeżeli druga i trzecia nić przecinają się nad pierwszą, oraz liczbę 1, jeżeli jest przeciwnie. Przyporządkowaliśmy więc każdemu układowi  $n$  nici  $\binom{n}{3}$  elementowy ciąg zero-jedynkowy. Łatwo udowodnić, że różnym układom przyporządkujemy różne ciągi. Skoro takich ciągów jest  $2^{\binom{n}{3}}$ , to układów  $n$  nici nie może być więcej.

Widać dużą rozbieżność między górnym i dolnym szacowaniem. Dość skomplikowanymi technikami jestem w stanie górne szacowanie poprawić do rzędu  $n^{\binom{n}{2}/2}$  (na przytoczenie dowodu stanowczo nie mam miejsca), ale sukces jest niewielki, rozbieżność nadal pozostaje olbrzymia.

O własnościach liczb podziałów, które udowodniłem, tylko wspomnę, nie przytaczając nawet dowodu. Po pierwsze, liczba podziałów dzieli się przez 2 w potęgę nie mniejszą niż ta, w której 2 dzieli liczbę boków wielokąta. Po drugie, jeżeli połowa liczby boków jest pierwsza, to liczba podziałów przy dzieleniu przez liczbę boków daje resztę dwa.

Na zakończenie podam dla zainteresowanych parę zadań i problemów (różnica jest taka, że zadanie umiem rozwiązać, a problem wręcz przeciwnie):

- Z1) Udowodnić, że w dowolnym podziale 6000-kąta foremnego istnieje przynajmniej 2000 punktów, w których stykają się dokładnie trzy romby.
  - Z2) Udowodnić, że każdy układ nici spełnia podane w artykule trzy warunki.
  - Z3) Udowodnić, że spośród wielokątów wypukłych tylko wielokąt środkowosymetryczny są podzielne na skończoną liczbę równoległoboków.
- (Zadania Z1 i Z3 są inspirowane zadaniami z obozu Olimpiady Matematycznej, Zwardoń 98.)
- P1) Udowodnić, że liczba podziałów  $2n$ -kąta jest mniejsza lub równa  $2^{\binom{n}{2}}$  albo obalić tę tezę (acz głęboko wierzę, że jest prawdziwa).
  - P2) Znaleźć jakiegokolwiek inne własności szczególne liczb podziałów.

Jeśli ktokolwiek chciałby podzielić się ze mną swymi przemyśleniami dotyczącymi tej tematyki (szczególnie interesuje mnie rozwiązanie problemu P1) bądź też chciałby poznać pełne dowody faktów przytoczonych w pracy, zapraszam do skontaktowania się ze mną za pośrednictwem Redakcji *Delty* lub poprzez e-mail: [jw189208@zodiac.mimuw.edu.pl](mailto:jw189208@zodiac.mimuw.edu.pl).



### Rozwiązanie zadania M 912.

Wybermy układ współrzędnych tak, by równania paraboli miały w nim postać

$$y = px^2 + qx + r \quad \text{i} \quad y = p'x^2 + q'x + r'.$$

Niech odcięte punktów  $A_i$  i  $B_i$  będą równe odpowiednio  $a_i$  i  $b_i$ . Tangens kąta nachylenia prostej  $A_i A_j$  jest równy

$$\frac{(pa_i^2 + qa_i + r) - (pa_j^2 + qa_j + r)}{a_i - a_j} = p(a_i + a_j) + q,$$

a prostej  $B_i B_j$  analogicznie  $p'(b_i + b_j) + q'$ . Z warunków zadania wynika, że dla każdego  $0 \leq i \leq 2n - 1$  zachodzi równość

$$(i) \quad p(a_i + a_{i+1}) + q = p'(b_i + b_{i+1}) + q'.$$

Ponieważ odcinek  $A_0 B_0$  jest wspólną cięciwą obu parabol, więc

$$(*) \quad p(a_0 + b_0) + q = p'(a_0 + b_0) + q'.$$

Mnożąc stronami przez  $-1$  równania (1), (3), ...,  $(2n - 1)$  i dodając je stronami do równań (\*), (2), (4), ...,  $(2n)$ , otrzymamy

$$p(a_{2n} + b_0) + q = p'(b_{2n} + a_0) + q',$$

co oznacza, że  $A_{2n} B_0 \parallel B_{2n} A_0$ .

Łatwo jest podzielić taką figurę na dwie lub na trzy jednakowe części. Jak podzielić ją na cztery jednakowe?





## Balonik na zakręcie

Aspirant Sieczko wracał z pracy rozdrażniony. Padający od wczoraj śnieg właśnie zamieniał się w deszcz. Z zatłoczonego tramwaju aspirant wysiadł prosto w szarą bryłę zalegającą na chodniku, po to tylko, żeby przejeżdżający Filtrową samochód mógł go ochlapać błotem. Policjant odruchowo zapamiętał numer, kolor i markę pojazdu, ale zaraz machnął ręką i powędrował w kierunku domu. Ta głupia sprawa nie dawała mu spokoju.

– Przecież nic się nikomu nie stało – powiedział do siebie – po co ja się tym przejmuję?

To go właśnie najbardziej irytowało. Najgłupszej sprawy nie potrafił zamknąć nie rozwiązanej. Po raz kolejny przypominał sobie raport posterunkowego Wicka. Rozdrażnienie powoli zamieniało się w roztargnienie. Wszedł aż na strych, zawrócił, zszedł na podest ostatniego piętra i otworzył drzwi.

– Tato, to ty? – głos córki dobiegał z głębi mieszkania.

– Tak, ja. Jesteś sama?

– Mama poszła z Juniorem na urodziny. Obiad jeszcze gorący. Weźmiesz sobie?

– Weźmiesz, weźmiesz.

– Nie znalazłeś? – zapytała z troską, gdy po dłuższej chwili pojawiła się w kuchni.

– Czheegho? – odparł, parząc sobie język kapuśniakiem.

– Nie wiem, ale zawsze jak nie znajdziesz, to jesteś burkliwy.

– Na jutro mam napisać raport w sprawie Wicka.

– A co on przeskrobał?

– On w zasadzie nic. Podał na kolegium Ambrożego P., który ponoć obraził funkcjonariusza.

– To znaczy posterunkowego Wicka?

– Tak. Ta sprawa nie daje mi spokoju. Facet w środku nocy nie wyrobił się na zakręcie przy Spacerowej, urywając sobie zawieszenie na krawężniku.

– Czy komuś coś się stało?

– Na szczęście nie, ale kierowca doznał szoku i naszemu posterunkowemu, który akurat się tam napatoczył, zaczął opowiadać jakieś niestworzone historie.

– Co na przykład?

– Posterunkowy zastał go, jak obchodził w koło rozbity samochód. Na pytanie o dokumenty odpowiedział, że w środku jest zakłęty balon, który się na niego rzucił. Wicek zajrzał do środka i rzeczywiście znalazł balon w kształcie jakiejś maski przywiązany do torby leżącej przed siedzeniem pasażera.

– Czy on aby nie był tego no i ... antycypował?

– Nawet Wickowi to przyszło do głowy, ale jak mu kazał dmuchać, to dopiero się zaczęło. Facet drżącymi rękami zamiast alkoholometru wziął ten nieszczęsny balon i zamiast dmuchać zaczerpnął z niego powietrza i zaczął udawać kaczoza Donalda.

– Chodził w kucki i seplenił?

– Nie, zaczął cieniutkim głosikiem krzyczeć, że został zaczarowany, i że Wicek jest z nimi w znowie.

– I co?

– Wicek się zdenerwował i go zwinął. Na komendzie okazało się, że rzeczywiście jest trzeźwy. Uspokoił się, powiedział, że wracał z jakiejś zabawy karnawałowej, i że nie pił, bo jest abstynentem.

– A z zawodu?

– Dyrektor marketingu w jakimś banku. I tylko upierał się, że ten balon się na niego rzucił, i że żadnego kaczoza nie udawał.

– Kaczoza to on faktycznie nie udawał, tylko nałykał się helu – stwierdziła Sieczkówna – a i z balonem może być prawda.

– Jakiego helu? – przerwał córce ojciec.

– Tego, co był w balonie. Facet musiał być naprawdę w szoku, jeżeli wziął się za dmuchanie nadmuchanego balonu. Zaczerpnął z niego helu, w którym prędkość dźwięku jest dużo większa niż w powietrzu, więc mówi się cieniutkim głosikiem.

Aspirant Siczko spojrział z podziwem na swoją latorośl, ale po chwili uśmiechnął się z politowaniem.

– Mądra jesteś, córuś, ale nie za bardzo. Ten heł musiałby sięgać aż do wickowego ucha, żeby zmienić barwę głosu.

– Jesteś pewien? – zapytała niespieszona – a od czego zależy wysokość głosu?

– Od częstości drgań fali stojącej? Czy to może tylko we flectie?

– Nie, tu w zasadzie też. A ta częstość to ...

– Długość fali przez prędkość?

– No nieźle, jeszcze coś pamiętasz – pochwaliła córka ojca, który uśmiechnął się zadowolony – tylko że na odwrót – dodała kąśliwie i po chwili ciągnęła dalej. – A ponieważ długość fali stojącej jest zdeterminowana kształtem „narządu mowy”, to wzrost prędkości dźwięku w jego wnętrzu podnosi częstość, która już nie zmienia się przy przejściu z jednego ośrodka do drugiego.

– Ty chyba masz rację, dziecino – aspirant pokręcił głową po zastanowieniu. – To wygłupianie się zupełnie mi do tego dyrektora nie pasowało. Ale co z tym napastliwym balonem?

– Siła odśrodkowa.

– Ale to nie było na zakręcie w ...

– W prawo, tylko w lewo – wtrąciła mała.

– A ty skąd wiesz? Już to mówiłem?

– Nie, ale jakby to był zakręt w prawo, to nikt by się nie dziwił, że coś się pcha na kierowcę, czyli na zewnątrz zakrętu. Musiał to być więc zakręt w lewo, a balon pchał się do środka, jak zresztą każdy przywoity balon napełniony gazem lżejszym od powietrza.

– Mnie też coś takiego chodziło po głowie, ale to nieprawda i nie pytaj dlaczego ... zrobiliśmy wizję lokalną.

– Pojechaliście z balonem na Spacerową?

– No nie, wiesz przecież, że u nas krucho z pieniędzmi i trochę głupio byłoby to uzasadniać. Zrobiliśmy ją lokalnie.

– To znaczy gdzie?

– Na komendzie. Wysłałem Wicka po balon, a następnie kazałem mu z nim biegać dookoła biurka.

– W którą stronę?

– W obie.

– A balon był z hełem?

– Nie wiem, ale sprawdzaliśmy dwa. Taki normalny, dmuchany i taki wcześniej napełniony, co leciał do góry.

– No i co?

– Ano nic. Oba ciągnęły się za Wickiem, jeden u góry, a drugi u dołu. Żaden się na Wicka nie rzucił.

– Wybacz, tato, ale taka wizja to gorzej niż telewizja – wykrztusiła po opanowaniu ataku śmiechu. – Nie wzięliście pod uwagę oporu powietrza – dodała już spokojniej.

– Czy chcesz mi powiedzieć, że u tego faceta nie było w samochodzie powietrza?

– Nie, ale całe powietrze poruszało się razem z samochodem. A wtedy sznurek balonu pokazuje lokalny pion, czyli wypadkową siły ciężkości i sił bezwładności objawiających się w nieinercyjnym układzie odniesienia związanym z samochodem.

– Ale pion, czyli ciężarek na sznurku będzie przecież odchyłał się na zewnątrz, a nie do środka?

– No tak, ale to przecież to samo. Wyobraź sobie, że do balonika przywiązujesz ciężarek o takiej masie, że całość ani nie spada, ani się nie wznosi. Na zakręcie ciężarek będzie wychylał się na zewnątrz, więc połączony z nim prostym sznurkiem balonik. . .

– Do środka?

– No właśnie. Jeżeli teraz chwycisz sznurek gdzieś pomiędzy ciężarkiem i balonikiem, to nic się nie zmieni, górna część, czyli umocowany balonik nadal będzie odchyłał się do środka.

– Jakoś nie chce mi się wierzyć.

– No to zrobimy prawdziwą wizję lokalną. Weźmiemy balonik, który został mi z sobotniej zabawy, wsiądziemy w tramwaj i już na zakręcie w Nowowiejską zobaczysz to na własne oczy.

– Ale to jest zakręt w prawo.

– No to co? Ważne, że balonik będzie się odchyłał do środka. Zresztą później jest zakręt w lewo na placu Zbawiciela.

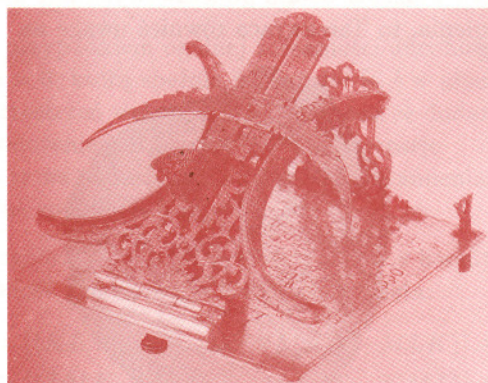
– Ale po co jechać tak daleko?

– Przecież obiecałeś mi, że w tym tygodniu pójdziemy do teatru?

– Gdzie diabeł nie może. . . a niech tam, należy ci się!

*Małą Deltę przygotował Piotr ZALEWSKI*

*Wszelkie podobieństwo opisaney historii i osób w niej występujących do czegokolwiek lub kogokolwiek jest przypadkowe.*



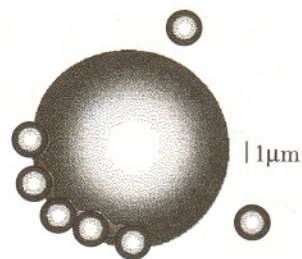
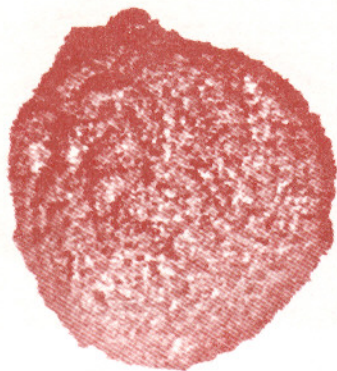
Zegar słoneczny równikowy, Niemcy, 1725.

## Aktualności (nie tylko) fizyczne

**Nadprzewodzące kulki** to nowe zjawisko fizyczne zaobserwowane przez fizyków z Southern Illinois University. Rongjia Tao (rtao@physics.siu.edu) i jego koledzy chcieli zbadać ruch mikronowej wielkości drobin wykonanych z wysokotemperaturowego nadprzewodnika (np. Br-Sr-Ca-Cu-O) pod wpływem pola elektrycznego [1]. Drobiny tworzyły zawieszinę w ciekłym azocie, w którym zanurzono dwie płaskie elektrody, do których przyłożono napięcie. Metalowe drobin w takiej sytuacji odbijałyby się pomiędzy elektrodami lub starałyby się ułożyć wzdłuż linii pola elektrycznego wyznaczającego kierunek w przestrzeni. Nadprzewodzące drobin zupełnie zignorowały tę możliwość i ku wielkiemu zaskoczeniu badaczy utworzyły kulkę. Kulka ta, o średnicy około 0,25  $\mu\text{m}$  (mikrofotografia na dole), zawierająca ponad milion drobin, utworzyła się szybko i była całkiem mocna, wytrzymując wielokrotne zderzenia z elektrodami.

Co wiąże tę kulkę wbrew jednorodnemu polu elektrycznemu? Tao i jego współpracownik, Philip Anderson, teoretyk z Princeton, stwierdzili, że jest to nowy efekt związany z nadprzewodnictwem (te same drobin powyżej temperatury krytycznej nie tworzą kulki, tylko układają się w łańcuchy wzdłuż kierunku pola). Widocznie energia powierzchniowa zbioru drobin zmniejsza się przez ich samozgrupowanie się w kulkę. Ta wcześniej nieznaną formę energii powierzchniowej jest związana z nabytym przez drobin ładunkiem powierzchniowym i oddziaływaniem między warstwami nadprzewodnika wysokotemperaturowego. Granularne własności drobin mogą również grać pewną rolę w procesie formowania się kulki i w tworzeniu jej wewnętrznej struktury. Jest to jednak trudne do stwierdzenia, gdyż oddziaływania między drobinami (cierne rozpraszanie energii znamienne dla materiałów sypkich) jest łagodzone przez ciekły azot niezbędny w eksperymencie dla zneutralizowania grawitacji. Sposobem obejścia tej konieczności byłoby przeprowadzenie doświadczenia w warunkach mikrogravitacji.

Choć oryginalność zaobserwowanego zjawiska z punktu widzenia badań podstawowych jest nie do przecenienia, to Tao zwraca również uwagę na



możliwe zastosowania w dziedzinie cienkich błon nadprzewodzących i nadzwyczajnych sposobów zwilżania.

Doświadczenia pokazały, że **dwuwymiarowe kryształy koloidalne w czasie powstawania pozornie ignorują prawo Coulomba**. Kryształ koloidalny to regularne ułożenie drobin utrzymujących się w cieczy. Trójwymiarowe przykłady są znane od dawna. Ostatnio uzyskano swobodne (w dwóch wymiarach) dwuwymiarowe „kryształity” koloidalnych drobin, uwięzione (w trzecim wymiarze) w dwuwarstwowych błonach podobnych do błon komórkowych. Może to prowadzić do ciekawych zastosowań w dziedzinie produkcji sztucznych biomateriałów i przemysłowej katalizie.

W numerze *Science* z 17 grudnia 1999 roku wydrukowano artykuł [2], w którym opisywane jest doświadczenie polegające na tworzeniu takich kryształitów poprzez dodawanie ujemnie naładowanych kropelek lateksowych do dodatnio naładowanych pęcherzyków z błony mydlanej pływających po wodzie.

Zgodnie z oczekiwaniami kropelki początkowo chętnie przywierały do pęcherzyków. Jednakże ku zdziwieniu naukowców w wielu przypadkach kropelki tworzyły trawki pływające po błonie pęcherzyka, a wolna część błony odpychała pozostałe kropelki, chociaż były one przeciwnie do niej naładowane (rycina u góry).

Uczeni argumentują, że to paradoksalne zachowanie jest spowodowane migracją ujemnych jonów schwytych przez część membrany położoną naprzeciwko trawki utworzonej z kropelek lateksu.

Z upływem czasu plastyczne trawki zestały się w sztywne, płaskie kryształity, prawie idealne dwuwymiarowe struktury o wymiarach rzędu kilkudziesięciu mikronów.

*Philip F. SCHEWE i Ben STEIN*

*Physics News Update*

The American Institute of Physics Bulletin of Physics News  
Nr 464 z 27 grudnia 1999 roku

*tłum. PZ*

- [1] *Formation of High Temperature Superconducting Balls*, R. Tao, X. Zhang, X. Tang i P.W. Anderson, *Phys. Rev. Lett.* **26** (1999) 5575, 27 grudnia 1999 roku
- [2] *Electrostatic Repulsion of Positively Charged Vesicles and Negatively Charged Objects*, H. Aranda-Espinoza, Y. Chen, N. Dan, T.C. Lubensky, P. Nelson, L. Ramos i D.A. Weitz, *Science*, 17 grudnia 1999 roku

# Co ma wspólnego tożsamość Jacobiego z przecinaniem się wysokości trójkąta?

Henryk ŻOŁĄDEK

## 1. Zadanie Arnolda

V.I. Arnold w swoim artykule o nauczaniu matematyki napisał takie zdanie:

*Tożsamość Jacobiego (powodująca, że wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie) – to fakt doświadczalny, tak samo jak to, że Ziemia jest okrągła (tzn. homeomorficzna z kulą).*

Stanowiło ono pewne (świadome) wyzwanie autora dla innych matematyków. W Warszawie niektórzy o nim dyskutowali. Ja sam usiłowałem zadanie powiązania tożsamości Jacobiego z wysokościami trójkąta rozpropagować. Niestety, nie usłyszałem do tej pory zadowalającego objaśnienia tego związku. Pozwolę sobie zatem zaprezentować własne rozwiązanie; myślę, że Arnold takie właśnie miał na myśli.

## 2. Podwójny iloczyn wektorowy

Przypomnijmy, że iloczyn wektorowy  $\vec{u} \times \vec{v}$  w przestrzeni trójwymiarowej jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ . Jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$ , a zwrot jest zgodny z regułą śruby prawoskrętnej: kręcąc  $\vec{u}$  w kierunku  $\vec{v}$ , posuwamy się wzdłuż  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

Bezpośrednio z definicji iloczynu wektorowego wynika, że wektor  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$  leży w płaszczyźnie  $\Sigma$  wyznaczonej przez  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  i jest prostopadły do  $\vec{w}$  (patrz rysunek 1). Gdy  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  są równoległe lub  $\vec{w} \perp \Sigma$ , to  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = 0$ .

Przykład: siła odśrodkowa działająca na punkt materialny o masie  $m$ , który leży w ciele sztywnym zaczepionym w punkcie  $O$  i obracającym się ze stałą prędkością kątową  $\vec{\Omega}$ , wynosi  $m(\vec{\Omega} \times \vec{Q}) \times \vec{\Omega}$ , gdzie  $\vec{Q}$  jest wektorem położenia punktu materialnego względem  $O$  (patrz rysunek 2).

**Tożsamość Jacobiego**, która ma zastosowanie w zagadnieniu wysokości trójkąta, to następująca relacja spełniana przez iloczyn wektorowy

$$(*) \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v} = 0$$

lub krócej:  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + \text{cykliczna permutacja} = 0$ . Proponujemy, aby Czytelnik sprawdził ją samodzielnie na jakimś przykładzie (biorąc np.

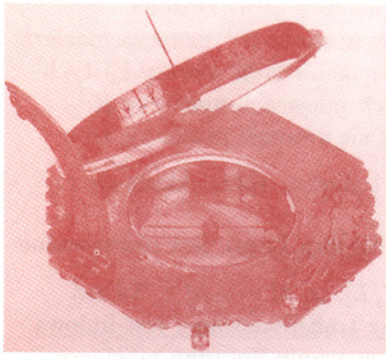
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ w różnych kombinacjach.}$$

## 3. Algebry Liego

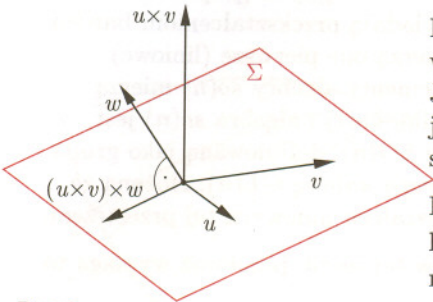
Tożsamość  $(*)$  jest szczególnym przypadkiem ogólnej tożsamości Jacobiego:  $[[a, b], c] + \text{cykliczna permutacja} = 0$ , którą spełnia komutator  $[\cdot, \cdot]$  w algebrze Liego. Algebra Liego  $\mathcal{A}$  jest to przestrzeń wektorowa wyposażona w dodatkową (poza dodawaniem wektorów i mnożeniem ich przez skalary) operację  $(a, b) \mapsto [a, b]$  (która jest liniowa ze względu na  $a$  i na  $b$  z osobna, zmienia znak przy zamianie kolejności  $a$  i  $b$  oraz spełnia tożsamość Jacobiego).

Przykładem algebry Liego jest algebra  $\mathcal{A} = gl(n)$  macierzy  $n \times n$  z komutatorem  $[K, L] = KL - LK$ . Tutaj tożsamość Jacobiego jest dosyć oczywista:

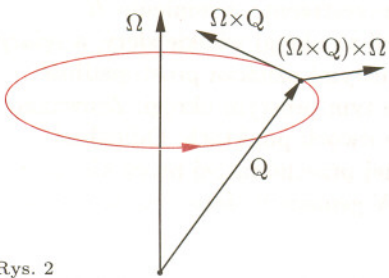
$$\begin{aligned} [[K, L], M] + \text{cykl. permut.} &= [(KLM - LKM) - (MKL - MLK)] + \\ &+ [(LMK - MLK) - (KLM - KML)] + \\ &+ [(MKL - KML) - (LMK - LKM)] = 0. \end{aligned}$$



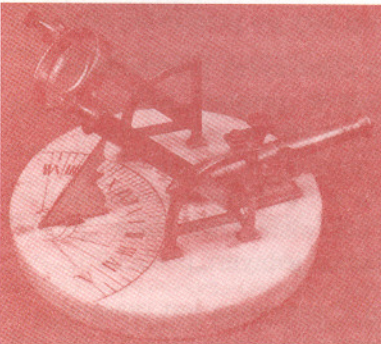
Zegar słoneczny równikowy, Niemcy, XVIII w.



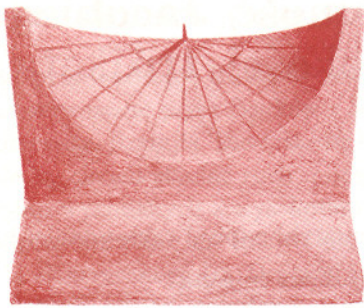
Rys. 1



Rys. 2



Zegar słoneczny z armatką strzelającą w południe, Francja, XVIII wiek.



Rzymski zegar słoneczny, III wiek p.n.e.



**Rozwiązanie zadania M 911.**

Wybierzmy układ współrzędnych tak, by jego osie były jednocześnie osiami parabol. Równania parabol mają w nim postać

$$x = ay^2 + b \quad \text{i} \quad y = cx^2 + d.$$

Zmieniając orientację osi można doprowadzić do sytuacji, gdy  $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$ . Współrzędne  $(x, y)$  punktu przecięcia parabol spełniają układ równań  $x = ay^2 + b, y = cx^2 + d$ . Dzielimy obie strony pierwszego równania przez  $a$ , drugiego przez  $c$ , a następnie dodając te równania stronami, otrzymamy po prostych przekształceniach

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2c}\right)^2 &= \\ &= \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4d^2} - \frac{b}{a} - \frac{d}{c}. \end{aligned}$$

Jest to równanie okręgu o środku  $\left(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2c}\right)$  i promieniu

$$\sqrt{\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4d^2} - \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}.$$

Innym przykładem jest podalgebra  $\mathcal{A}' = so(n)$  algebry  $gl(n)$  złożona z macierzy antysymetrycznych  $K = -K^T$ , gdzie macierz  $K^T$  oznacza macierz transponowaną macierzy  $K$ ; tzn. jeśli na przecięciach  $i$ -tych wierszy i  $j$ -tych kolumn w  $K$  stały liczby  $k_{ij}$ , to na odpowiednich miejscach macierzy  $K^T$  stoją liczby  $k_{ji}$ ; zatem nasza podalgebra składa się z takich macierzy, że  $k_{ij} = -k_{ji}$ . Na przykład,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  i algebra  $so(2)$  składa się z macierzy postaci  $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ . To, iż  $so(n)$  jest algebrą Liego, jest równoważne

faktowi, że jeśli  $K = -K^T, L = -L^T, M = [K, L]$ , to  $M = -M^T$ . To zaś wynika z tego, że operacja przejścia do macierzy transponowanej jest liniowa,  $(K \pm L)^T = K^T \pm L^T$ , i z tego, że przy transponowaniu iloczynu macierzy trzeba zmienić kolejność macierzy transponowanych,  $(KL)^T = L^T K^T$ . Mamy zatem  $M^T = (KL - LK)^T = L^T K^T - K^T L^T = LK - KL = -[K, L] = -M$ .

Każda algebra Liego skończonego wymiaru jest podalgebrą algebry macierzy  $gl(n)$  dla pewnego  $n$ . (Okazuje się, na przykład, że algebra  $\mathbb{R}^3$  z iloczynem wektorowym  $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u} \times \vec{v}$  jest tożsama z  $so(3)$ .) Ta własność sprawia, że teoria algebr Liego stanowi ważny dział matematyki.

Algebry Liego są związane z grupami Liego, tzn. z ciągłymi grupami przekształceń. Elementy algebry Liego odpowiadają przekształceniom bardzo bliskim przekształceniu tożsamościowemu; mierzą one pierwsze (liniowe) odchylenie od tożsamości. W szczególności elementy algebry  $so(n)$  mierzą małe obroty w  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej i algebra  $so(n)$  jest stowarzyszona ze specjalną ortogonalną grupą  $SO(n)$ , definiowaną jako grupa obrotów  $\mathbb{R}^n$ . Algebra  $gl(n)$  jest związana z grupą liniową  $GL(n)$ , złożoną ze wszystkich wzajemnie jednoznacznych przekształceń liniowych tej przestrzeni.

Niestety, nie możemy podać więcej szczegółów tej teorii, ponieważ wymaga to zaawansowanej znajomości algebry i analizy.

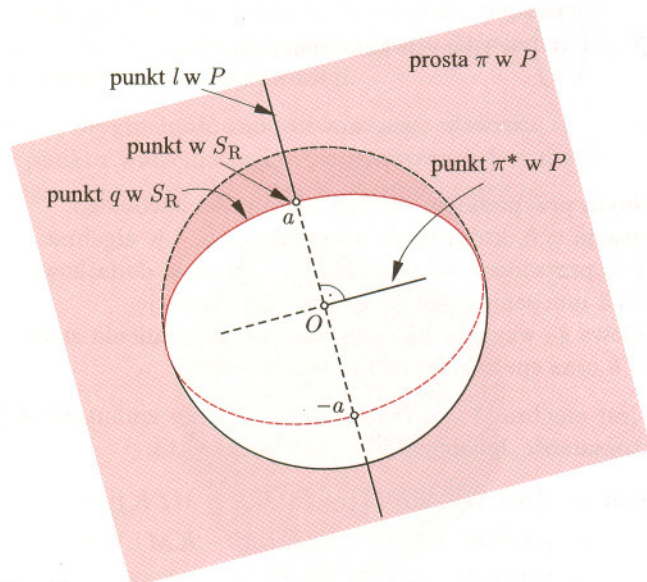
### 4. Geometria sferyczna

Modelem geometrii sferycznej jest sfera  $S_R$  w przestrzeni o promieniu  $R$  o środku w punkcie  $O$ . Prostymi w tej geometrii są okręgi wielkie sfery, a relacja ortogonalności (tzn. prostopadłości) między prostymi oznacza prostopadłość płaszczyzn wyznaczonych przez odpowiadające tym prostym okręgi. Zauważmy, że dwie różne proste sferyczne przecinają się w dwóch punktach. Odległość punktów jest mierzona wzdłuż prostej sferycznej przechodzącej przez nie; przy tym należy wybierać krótszy z dwóch łuków. W geometrii sferycznej krzywizna przestrzeni jest stała, dodatnia i równa  $R^{-2}$ .

Z geometrią sferyczną można związać następującą przestrzeń  $P$ . Jej „punktami” są proste przechodzące przez środek  $O$  sfery  $S_R$ . Tak więc, każdemu punktowi sfery można przypisać jeden „punkt” przestrzeni  $P$  – prostą przechodzącą przez ten punkt. (Zauważmy, że jednemu „punktowi” z  $P$  odpowiadają dokładnie dwa punkty z  $S_R$ , drugi leży po przeciwnej stronie.)

„Prostymi” w  $P$  będą płaszczyzny przechodzące przez  $O$ . „Punkt”  $x$  leży w „prostej”, jeśli odpowiadająca mu prosta leży w odpowiedniej płaszczyźnie. Jednej „prostej” w  $P$  odpowiada dokładnie jedna prosta w  $S_R$ . Pojęcie prostopadłości „prostych” jest tutaj oczywiste. Dwie różne „proste” przecinają się w dokładnie jednym „punkcie”.

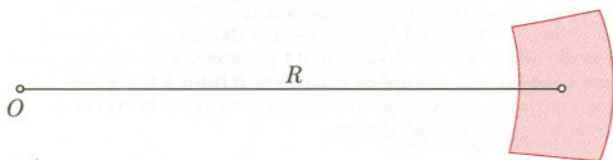
Geometria przestrzeni  $P$  nazywana jest czasami modelem rzutowym geometrii eliptycznej;  $S_R$  zaś jest modelem sferycznym geometrii eliptycznej. Istnieje odwzorowanie z modelu sferycznego do modelu



Rys. 3

rzutowego. W modelu rzutowym nie będziemy mówić o krzywiznie, bo nie wprowadziliśmy tam metryki (tzn. odległości między „punktami”).

Użycie modelu rzutowego geometrii eliptycznej pozwala na wykazanie, że takie własności geometrii sferycznej jak prostota prostych sferycznych oraz incydencja punktu  $a$  i prostej  $q$  (tzn.  $a \in q$ ) nie zależą od  $R$ , czyli od krzywizny przestrzeni  $S_R$ . W szczególności własność przecinania się (lub nieprzecinania) wysokości trójkąta sferycznego nie zależy od  $R$ .



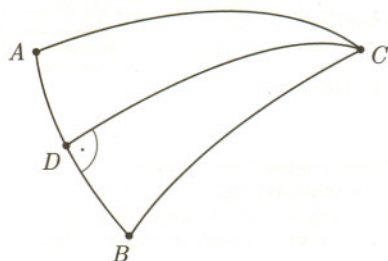
Rys. 4

Zauważmy teraz, że płaska geometria euklidesowa  $E = \mathbb{R}^2$  jest granicą przy  $R \rightarrow \infty$  (czyli przy krzywiznie dążącej do zera) geometrii sferycznej przestrzeni  $S_R$  (rys. 4).

Zatem własność przecinania się wysokości trójkąta euklidesowego jest konsekwencją analogicznej własności w  $S_R$  i w  $P$ . Naszym celem będzie teraz powiązanie tożsamości Jacobiego z przecinaniem się wysokości w trójkącie w modelu rzutowym geometrii eliptycznej.

## 5. Dualność w geometrii eliptycznej

Weźmy model rzutowy  $P$  geometrii eliptycznej. Każdemu „punktowi” w  $P$  (czyli prostej  $k$  w przestrzeni, przechodzącej przez  $O$ ) przyporządkowujemy „prostą” odpowiadającą płaszczyźnie  $\Sigma$  (oznaczymy ją  $k^*$ ) prostopadłej do prostej  $k$ . Analogicznie „prostej” (czyli płaszczyźnie  $\Pi$  przechodzącej przez  $O$ ) odpowiada „punkt” – prosta  $l (= \Pi^*)$  prostopadła do płaszczyzny  $\Pi$ . To odwzorowanie nazywa się *dualnością*.



Rys. 5

Dualność zachowuje relację incydencji (jeśli  $l \in \Sigma$ , to  $\Sigma^* \in l^*$ ) oraz relację prostota prostych i płaszczyzn. Płaszczyzny  $\Pi$  i  $\Sigma$  są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy ich dualne proste  $\Pi^*$  i  $\Sigma^*$  są prostopadłe.

Własność przecinania się trzech płaszczyzn wzdłuż jednej prostej oznacza, że dualne proste leżą w jednej płaszczyźnie.

W szczególności, jeśli proste  $a, b, c$  są prostymi dualnymi do płaszczyzn przechodzących przez boki  $BC, AC, AB$  trójkąta sferycznego  $ABC$  (rys. 5), to wysokości  $CD$  (z wierzchołka  $C$  na bok  $AB$ ) odpowiada prosta  $d$  leżąca w płaszczyźnie wyznaczonej przez  $a$  i  $b$  oraz prostopadła do prostej  $c$ .

## 6. Rozwiązanie zadania Arnolda

Niech (jak w punkcie 5)  $a, b, c$  będą prostymi w przestrzeni dualnymi do płaszczyzn przechodzących przez łuki  $BC, AC, AB$  trójkąta sferycznego  $ABC$ . Wybierzmy niezerowe wektory  $\vec{u} \in a, \vec{v} \in b, \vec{w} \in c$ .

Wektor  $\vec{x} = (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$  wyznacza prostą  $d$ , odpowiadającą wysokości  $CD$ . Podobnie wektory  $\vec{y} = (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u}$  i  $\vec{z} = (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v}$  wyznaczają pozostałe proste  $e$  i  $f$  odpowiadające pozostałym dwóm wysokościami trójkąta.

Tożsamość Jacobiego oznacza, że  $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = 0$ . Zatem wektory  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  leżą w jednej płaszczyźnie  $\Pi$ . Ta płaszczyzna zawiera proste  $d, e, f$ . Dualna prosta  $\Pi^*$  odpowiada punktowi przecięcia się wysokości trójkąta  $ABC$ .

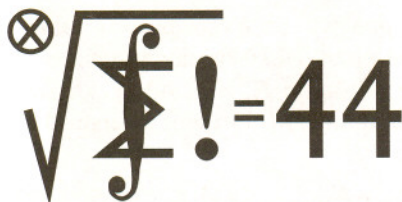
### Literatura

V.I. Arnold, *O prepodawaniu matematyki*, Uspechi Matem. Nauk 53 No 1 (1998), 229–234 (po rosyjsku).

Wydaje się, że granicę  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  można elegancko obliczyć, stosując regułę de l'Hospitala. Obliczenie to jest jednak równie eleganckie, co pozbawione sensu, gdyż aby wiedzieć, ile wynosi pochodna  $\sin x$ , trzeba znać wartość granicy  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \dots$

Kolejność wykonywania jednokładności i obrotu na płaszczyźnie nie ma wpływu na wynik dokładnie wtedy, gdy mają one ten sam środek. W przestrzeni odpowiedni warunek orzeka, iż środek jednokładności leży na osi obrotu.

Paul R. Halmos długo wahał się, co wybrać: matematykę czy filozofię? Kiedy jednak nie zdał egzaminu magisterskiego z filozofii, przestał mieć wątpliwości. Matematyka okazała się właściwą dziedziną: wkrótce w hierarchii naukowej Halmos wyprzedził swego egzaminatora. Okazuje się więc, że są egzaminy, które warto oblać...



Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 V 2000

**Skrót regulaminu**

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkie rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2000.

**Zadania z matematyki nr 397, 398**

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**397.** Wielomian  $P(x)$  o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje wartości dodatnie dla wszystkich  $x \geq 0$ . Udowodnić, że dla pewnej liczby naturalnej  $n$  wielomian  $Q(x) = (1 + x)^n P(x)$  ma wszystkie współczynniki nieujemne.

**398.** Dla każdej liczby całkowitej  $n \geq 1$  wyznaczyć największą liczbę całkowitą, nie przekraczającą  $\frac{1}{\sqrt[n]{e} - 1}$ .

Zadanie 398 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1999**

Przypominamy treść zadań:

**389.** W turnieju rozgrywanym systemem „każdy z każdym” (bez remisów) każdy zawodnik, który każdego innego pokonał bezpośrednio lub pośrednio, otrzymał nagrodę. (Gracz  $A$  pokonał gracza  $C$  pośrednio, jeśli pokonał pewnego zawodnika  $B$ , który wygrał z  $C$ .) Dowieść, że jeżeli przyznana została tylko jedna nagroda, to otrzymał ją zawodnik, który wszystkich innych pokonał bezpośrednio.

**390.** Prostokąt o bokach długości  $a, b$  ( $a \geq b$ ) dzielimy w dowolny sposób na  $n$  prostokątów o bokach równoległych do boków dużego prostokąta;  $n$  jest ustaloną liczbą naturalną. Dla każdego prostokątka obliczamy stosunek długości krótszego boku do długości dłuższego boku, a następnie obliczamy sumę tych stosunków. Znaleźć kres dolny wartości takich sum.

**389.** Niech  $A$  będzie tym jedynym zawodnikiem, który otrzymał nagrodę. Oznaczmy przez  $U$  zbiór tych zawodników, którzy wygrali z  $A$ , przez  $V$  zaś zbiór tych, którzy przegrali z  $A$ , i przypuśćmy, wbrew tezie zadania, że zbiór  $U$  jest niepusty. Weźmy pod uwagę zawodnika  $A^* \in U$ , który bezpośrednio pokonał największą liczbę przeciwników ze zbioru  $U$ .

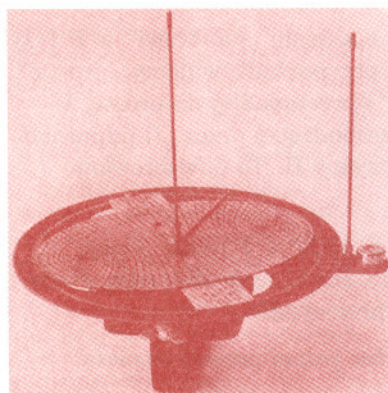
Jeżeli  $C$  jest dowolnym graczem ze zbioru  $U$ , który wygrał z  $A^*$ , to wśród zawodników  $B \in U$ , którzy przegrali z  $A^*$ , znajdzie się co najmniej jeden, który wygrał z  $C$  (w przeciwnym razie gracz  $C$  miałby w zbiorze  $U$  więcej przeciwników pokonanych bezpośrednio niż  $A^*$ ). To znaczy, że  $A^*$  pokonał bezpośrednio lub pośrednio każdego zawodnika ze zbioru  $U$ .

Ponadto  $A^*$  pokonał bezpośrednio zawodnika  $A$ , i w konsekwencji pokonał pośrednio wszystkich zawodników ze zbioru  $V$ . Zgodnie z warunkami turnieju zawodnik  $A^*$  także powinien dostać nagrodę - wbrew założeniu, że nagrodę otrzymał tylko zawodnik  $A$ . Sprzeczność kończy dowód.

**390.** Oznaczmy przez  $a_i, b_i$  długości boków  $i$ -tego prostokątka ( $a_i \geq b_i$ ). Z zależności

$$ab = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \frac{b_i}{a_i} \leq a^2 \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}$$

wynika, że rozważana suma  $S = \sum b_i/a_i$  spełnia nierówność  $S \geq b/a$ . Równość w tym oszacowaniu zachodzi, gdy  $a_i = a$  dla każdego  $i$ , czyli gdy duży prostokąt jest podzielony na  $n$  pasków liniami równoległymi do jego dłuższego boku. Zatem kres dolny wartości  $S$  wynosi  $b/a$ .



Amerykański zegar słoneczny umieszczany na czołgach w czasie działań na Filipinach, 1942.



**Rozwiązanie zadania F 520.**  
Moc  $P_1$ , wydzielana na oporze  $R$ , w pierwszym przypadku jest równa

$$P_1 = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2},$$

gdzie  $\mathcal{E}$  - siła elektromotoryczna baterii. Moc  $P_2$ , wydzielana na dwóch oporach połączonych równolegle, wynosi

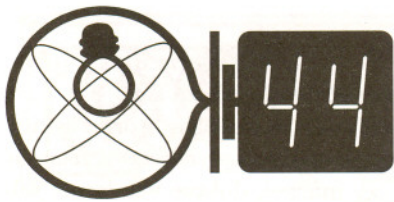
$$P_1 = I_c^2 R_c = \frac{\mathcal{E}^2 R_c}{(R_c + r)^2},$$

gdzie  $R_c = \frac{RR_x}{R + R_x}$ . Zgodnie z warunkiem zadania mamy  $P_1 = P_2$ , zatem

$$\frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 RR_x (R + R_x)}{[RR_x + r(R_x + R)]^2}.$$

Rozwiązując to równanie względem  $R_x$ , otrzymujemy

$$R_x = R \frac{r^2}{R^2 - r^2} = 0,1125 \Omega.$$



Termin nadsyłania rozwiązań:

31 V 2000

Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 F

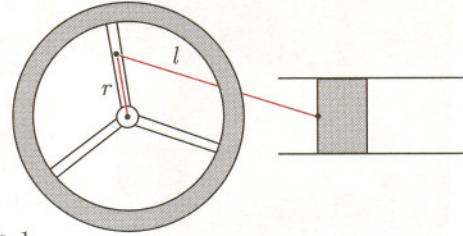
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 282 (WT=3,00) i 283 (WT=3,87)  
z numeru 9/1999

Tomasz Wietecha	- Tarnów	37,76
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	31,95
Aleksander Surma	- Myszków	27,66
Artur Arciszewski	- Kielce	23,40
Jarosław Łazuka	- Warszawa	20,19
Grzegorz Miłoś	- Mielec	17,14
Marek Wójcicki	- Szczecin	16,97
Tomasz Rudny	- Warszawa	16,13

## Zadania z fizyki nr 294, 295

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**294.** Ciało o masie  $m$  („tłok”) może się poruszać wzdłuż linii prostej i jest połączone przegubowo za pośrednictwem nieważkiego pręta z kołem zamachowym o momencie bezwładności  $I$  (rys. 1). Dane są: długość pręta  $l$  oraz odległość  $r$  punktu jego zamocowania na kole zamachowym od osi tego koła. Układ wprowadzono w ruch. „Tłok” i koło poruszają się bez tarcia. Jeśli maksymalna prędkość kątowa koła jest równa  $\omega_1$ , to ile wynosi jego minimalna prędkość kątowa  $\omega_2$ ? Obliczenia wykonać dla  $l = 2r$ .



Rys. 1

**295.** Mikroskop tworzy obraz powiększony 300-krotnie w odległości dobrego widzenia (25 cm) od oka obserwatora. Jaka powinna być dokładność ustawienia mikroskopu względem przedmiotu, jeśli odległość obrazu od oka ma nie różnić się od podanej wartości 25 cm więcej niż o 5 cm?

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1999

Przypominamy treść zadań:

**286.** Oceń orientacyjnie maksymalną ilość (masę) tlenu, jaką może zawierać butla stalowa o rozsądnych rozmiarach i masie  $m = 40$  kg, napełniona pod ciśnieniem równym połowie wartości, która spowodowałaby rozerwanie butli. Dane dotyczące stali wzięć z tablic.

**287.** Mion rozpada się na elektron i dwa neutrina:



Obliczyć maksymalną energię kinetyczną elektronu powstałego z rozpadu spoczywającego mionu. Masa mionu wynosi  $105,6 \text{ MeV}/c^2$ , masa elektronu –  $0,51 \text{ MeV}/c^2$ , a masę neutrin należy pominąć.

**286.** Przyjmijmy następujące założenia:

- butla ma kształt długiego cylindra, przy czym pomijamy masę i objętość końcowych półkul,
- grubość ścianek jest znacznie mniejsza od promienia cylindra,
- rolę ciśnienia zewnętrznego można pominąć (standardowa wartość ciśnienia gazu w butlach jest ponad 100 razy większa),
- obowiązuje równanie stanu gazu doskonałego.

Oznaczmy promień cylindra przez  $r$ , jego długość przez  $l$ , grubość ścianek przez  $d$ , ciśnienie tlenu przez  $p$ , wytrzymałość stali na rozerwanie przez  $W$ , a gęstość stali przez  $\rho$ . Rozpatrując siły działające na jedną połowę butli (rys. 2), stwierdzamy, że siła parcia gazu  $p \cdot 2lr$  równoważy się z iloczynem naprężenia przez pole przekroju stali. Podstawiamy naprężenie równe  $\frac{1}{2}W$ , a pole przekroju równe  $2ld$ , czyli

$$2pr = Wd.$$

Masa stali jest – zgodnie z przyjętym założeniem, że  $d \ll r$  – dana wzorem  $m = 2\pi rdl\rho$ , natomiast masę  $M$  tlenu obliczymy z równania Clapeyrona

$$M = \frac{\mu p V}{RT} = \frac{\mu}{RT} \cdot \frac{Wd}{2r} \cdot \pi r^2 l = \frac{\mu W}{RT} \cdot \frac{m}{4\rho}.$$

Podstawiając masę molową tlenu  $\mu = 0,032$  kg, temperaturę  $T = 290$  K i dane materiałowe stali  $W = 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ , obliczamy  $M \approx 17$  kg. Interesujące jest, że przy ustalonej masie butli wynik nie zależy od wymiarów cylindra ani od grubości ścianek; natomiast przyjęcie, że butla ma kształt kuli, prowadzi do wzoru, w którym w mianowniku liczba 4 zostaje zastąpiona przez 3, czyli  $M \approx 23$  kg.

**287.** Oznaczmy szukaną energię kinetyczną przez  $E$ , a łączną energię neutrin przez  $E_\nu$ . Bilans energii ma postać

$$m_\mu c^2 = m_e c^2 + E + E_\nu,$$

natomiast z zasady zachowania pędu wynika, że pęd  $p$  elektronu jest równy łącznemu pędowi neutrin  $p_\nu$ . Jak widać, maksymalną wartość  $E$  otrzymamy wtedy, gdy energia neutrin będzie minimalna. Taka sytuacja wystąpi, jeśli oba neutrina pobiegą w tym samym kierunku, gdyż wtedy  $E_\nu = p_\nu c$  (w innym przypadku równanie to

pozostałoby w mocy dla każdego z neutrin oddzielnie, ale łączny pęd byłby mniejszy od sumy długości wektorów, więc zachodziłaby nierówność  $E_\nu > p_\nu c$ ). Po skorzystaniu z tożsamości

$$m_e c^2 + E = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (pc)^2}$$

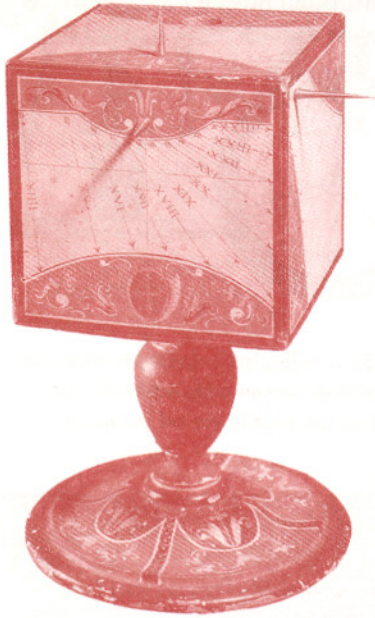
dochodzimy do równania

$$E^2 + 2m_e c^2 E = p^2 c^2 = E_\nu^2 = (m_\mu c^2 - m_e c^2 - E)^2.$$

Znajdujemy  $E = (m_\mu - m_e)^2 c^2 / (2m_\mu) = 52,3 \text{ MeV}$ .



## Patrz w niebo



Zegar słoneczny, Florencja, XVI wiek.

Jedną z zagadek kosmologii jest pytanie, dlaczego we Wszechświecie nie występują w równych ilościach materia i antymateria. Przypuszcza się, że materia wypełniająca Wszechświat obecnie może być tą resztką, która została po wzajemnym zniszczeniu się materii i antymaterii występujących we wczesnym Wszechświecie prawie w równych ilościach. Tak czy inaczej, dobrze wiadomo, jak antymaterii szukać. Mianowicie elektrony, stykając się ze swoimi antycząstkami, pozytonami, znikają produkując kwanty o energii 0,511 MeV należące do zakresu gamma promieniowania elektromagnetycznego. Obecności antymaterii można więc oczekiwać tam, skąd dochodzi takie promieniowanie – co prawda akurat w stadium jej anihilacji z równoważną jej ilością zwykłej materii.

I takie promieniowanie się obserwuje. Nie jest dziwne, że jego źródłem jest centrum Galaktyki. Obecna tam zapewne czarna dziura wywołuje w swoim otoczeniu burzliwe procesy, w których mogą powstawać również antycząstki anihilujące następnie z materią. Ale obserwacje wykonane przez grupę amerykańskich astronomów za pomocą teleskopu GRO (od *Gamma Ray Observatory*) ujawniły, że charakterystyczne promieniowanie emituje też pewien mały obszar położony wyraźnie poza centrum. Gdyby, jak w aktywnej galaktyce, antymateria powstawała w strugach wyrzucanych z jądra, to powinno się widzieć dwa takie obszary położone symetrycznie względem jądra Galaktyki. Skoro jest jeden, to widocznie mechanizm produkcji antymaterii jest inny. Według amerykańskich badaczy źródłem antymaterii mogą być promieniotwórcze pierwiastki wytworzone lokalnie w wielkich ilościach przez np. gromadę supernowych. Trzeba jednak przyznać, że jest to przypuszczenie, a nie solidne wytłumaczenie obserwowanego faktu.

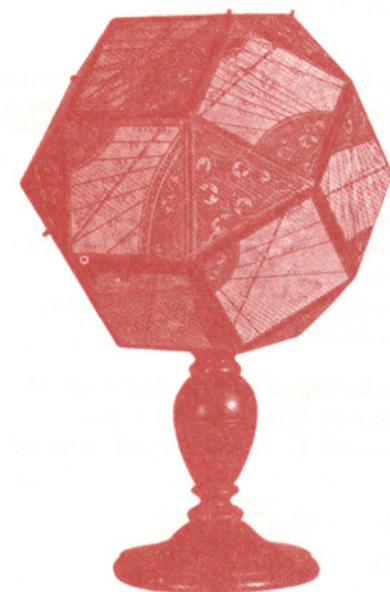
Jeżeli omawiany obłok antymaterii położony jest rzeczywiście w pobliżu jądra naszej Galaktyki, to z jego rozmiarów kątowych wynikają jego rzeczywiste rozmiary rzędu 1 pc. Brzmi to przerażająco, tymczasem moc promieniowania tego obłoku dowodzi, że antycząstki znajdują się tam w ilości jednego pozytonu na kilkaset metrów sześciennych przestrzeni, a więc byłoby to chyba do zniesienia, nawet gdyby Ziemia się w tym obłoku zanurzyła.

Tomasz KWAST

## Marzec

Wieczorem trzeba wysoko unieść głowę, by zobaczyć gwiazdozbiór Woźnicy. Jego najjaśniejsza gwiazda, Capella, a w każdym razie jej dominujący składnik, jest olbrzymem typu widmowego bardzo zbliżonego do typu Słońca. Dlatego ma prawie taką jak Słońce temperaturę, lecz rozmiary kilkanaście razy większe. Towarzysz obiega dominującą gwiazdę w odległości 0,74 j.a., przez co podwójność układu przejawia się w okresowym przesuwaniu się linii widmowych gwiazd spowodowanym zjawiskiem Dopplera. Cały układ Capelli leży w odległości 14 pc. Gwiazdozbiór Woźnicy leży w Drodze Mlecznej, dzięki czemu w jego „wnętrzu”, wyznaczonym przez czworokąt najjaśniejszych gwiazd, przez niewielką lunetę widać kilka pięknych otwartych gromad gwiazd.

Wenus widać nad ranem w Wodniku. Bardzo blisko niej znajduje się Merkury. Może to pomóc w jego odszukaniu, ale obie te planety są już dość blisko Słońca, przez co giną w jego blasku. Mars jest w Rybach i wcześniej zachodzi. Jowisz i Saturn są razem w Baranie i obie te planety widać krótko po zachodzie Słońca. W ogóle kto śledzi nasze informacje o niebie, a może i samo niebo, mógł zauważyć, że Marsa, Jowisza i Saturna widać coraz krócej po zachodzie, a Wenus coraz krócej przed wschodem Słońca. Czym to może się skończyć?... Nów Księżyca wypada 6 III, pełnia 20 III. Również 20 III jest równonoc wiosenna, czyli początek wiosny. Księżyc zbliży się mocno do Wenus 4 III, ale jej zakrycie widać będzie tylko z południowej półkuli Ziemi.



Zegar słoneczny o siedemnastu tarczach, Włochy, 1570.

T.K.

*Dowód:* Skorzystamy ze znanego twierdzenia: jeśli liczby  $a$  i  $n$  są względnie pierwsze, to istnieje taka liczba naturalna  $r$ , że

$$a^r \equiv 1 \pmod{n}.$$

Stosujemy powyższe twierdzenie do  $a = 2$ . Niech  $r$  będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią spełniającą kongruencję

$$2^r \equiv 1 \pmod{n}.$$

Jeśli  $r$  jest parzyste, to z założenia minimalności  $r$  mamy  $2^{r/2} \not\equiv 1 \pmod{n}$ , a ponieważ  $2^{r/2} \equiv \pm 1 \pmod{n}$ , zatem musi być  $2^{r/2} \equiv -1 \pmod{n}$ . Wystarczy więc przyjąć  $k = r/2$ .

Jeśli natomiast  $r$  jest nieparzyste, to mamy  $(-2)^r \equiv -1 \pmod{n}$ , wystarczy więc przyjąć  $a = n - 2$  oraz  $k = r$ .

JWR

## MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (21)

**TWIERDZENIE:** Dla dowolnej liczby nieparzystej  $n > 3$  istnieją takie liczby całkowite  $a$  i  $k$ , że  $1 \leq a \leq n - 2$ ,  $k > 1$  oraz

$$a^k \equiv -1 \pmod{n}.$$

## MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (20'')

*Wyjaśnienie oszustwa (20'):* Oczopląs oczopląsem, a błędne wzory na początku rozwiązania pozostały. Prawdziwa jest jednak równość podana w treści zadania! Najmniejsza wspólna wielokrotność jest wprawdzie równa iloczynowi podzielonemu przez największy wspólny dzielnik, ale tylko dla dwóch liczb. Dla trzech liczb odpowiedni wzór jest bardziej złożony

$$[a, b, c] = \frac{abc \cdot (a, b, c)}{(a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a)}.$$

Poprawne rachunki wyglądają więc następująco

$$\frac{[a, b] \cdot [b, c] \cdot [c, a]}{[a, b, c]^2} = \frac{\frac{ab}{(a, b)} \cdot \frac{bc}{(b, c)} \cdot \frac{ca}{(c, a)}}{\frac{a^2 b^2 c^2 \cdot (a, b, c)^2}{(a, b)^2 \cdot (b, c)^2 \cdot (c, a)^2}} = \frac{ab \cdot bc \cdot ca}{a^2 b^2 c^2} \cdot \frac{(a, b)^2 \cdot (b, c)^2 \cdot (c, a)^2}{(a, b, c)^2 \cdot (a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a)} = \frac{(a, b) \cdot (b, c) \cdot (c, a)}{(a, b, c)^2}.$$

JWR

## GRY (11)

Oto dalsze własności sumy gier, prowadzące do pojęcia gier równoważnych.

Podstawowe znaczenie ma obserwacja, że dla dowolnej gry  $G$  w grze  $G \oplus G$  wygrywa drugi gracz. Łatwo bowiem podać jego strategię postępowania. Wystarczy, aby kopiował on ruchy gracza rozpoczynającego. Na czym polega to kopiowanie? Otóż gra  $G \oplus G$  w pozycji wyjściowej składa się z dwóch egzemplarzy tej samej gry. Pierwszy gracz wybiera jeden z tych egzemplarzy, a następnie wykonuje na nim legalny ruch. Gracz drugi wykonuje ten sam ruch na pozostałym egzemplarzu. Znowu pierwszy gracz ma wykonać ruch, i znowu bieżąca pozycja jest sumą dwóch egzemplarzy tej samej gry. W ten sposób gracz drugi zawsze będzie miał odpowiedź na ruch gracza pierwszego. A ponieważ gra zakończyć się musi, przegra gracz pierwszy. Prześledź to, Drogi Czytelniku, na przykładzie gry *Nim* z dwoma stosami równej liczności. A w wolnym czasie obejrzyj film *Mistrz zawsze traci* z cyklu *Parada oszustów*.

Z kolei przyjrzyjmy się równości  $0 \oplus G = G \oplus 0 = G$ . Dodanie gry  $0$  (końcówki) jest niezauważalne, bo nie stwarza żadnej dodatkowej możliwości ruchu. Powstaje jednak pytanie, jakie gry można dodać bez wpływu na ostateczny wynik rozgrywki. Okazuje się, że jest tak dla gier, w których drugi gracz wygrywa. Niech bowiem  $H$

będzie grą o strategii wygrywającej dla drugiego gracza. Posadźmy dwóch graczy do gry  $G \oplus H$ . Co się wówczas stanie? Jeden z graczy zorientuje się, że ma strategię wygrywającą w grze  $G$ . Powie sobie: *Chcę grać tylko w grę  $G$* . Jednak jego przeciwnik ma pełne prawo wykonać ruch także w grze  $H$ . Strategia wygrywająca w grze  $G \oplus H$  dla gracza mającego strategię wygrywającą w grze  $G$  jest następująca: grać w grę  $G$  zgodnie z regułami strategii wygrywającej w tej grze. Jeśli jednak przeciwnik wykona ruch w grze  $H$ , to natychmiast na ten ruch odpowiedzieć. Wnikliwy Czytelnik dostrzeże, że jakkolwiek obecność gry  $H$  zmienia przebieg rozgrywki, to nie wpłynie na jej ostateczny wynik.

Ponieważ interesuje nas nie tyle sam przebieg gier, co ich ostateczny wynik, uzasadnione staje się pisanie  $H \equiv 0$  dla gier  $H$  o strategii wygrywającej dla drugiego gracza.

Będziemy także pisać  $G \equiv H$  dla dowolnych takich gier  $G$  i  $H$ , że  $G \oplus H \equiv 0$ .

Nie będziemy podawać formalnie własności relacji równoważności gier, powiemy tylko, że gry równoważne we wszystkich rozważanych przez nas okolicznościach można utożsamiać.

Czytelnik zechce sprawdzić, że prawdziwe są równoważności  $\{1\} \equiv 0$  oraz  $\{1, \{1\}, 2\} \equiv 3$ .

JWR