

SPIS TREŚCI NUMERU 2(309)

Zmieniający się Wszechświat <i>Marek Demiański</i>	str. 1
Drobiazgi	str. 5
Indeks odkrywa niewidzialne <i>Witold Sadowski</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Zadania	str. 9
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str.10
Klub 44	str.11
Patrz w niebo	str.16
Luty	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:

Tożsamość Jacobiego
 i wysokości trójkąta

Okladki, ilustracje i rysunki
 techniczne
Anna Ludwicka

Wybór artykułów w języku angielskim
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
 Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichoński
 – wiceprzewodniczący
 Krzysztof Ciesielski
 Jan A. Gaj
 Piotr Goldstein
 Tomasz Hofmokl
 Andrzej Hryniewicz
 Wiesław A. Kamiński
 Marta Kicińska-Habior
 Krzysztof Maślanka
 Janusz Matkowski
 Andrzej Mąkowski
 Zdzisław Pogoda
 Michał Różyczka
 Konrad Rudnicki
 Grzegorz Sitarski
 Andrzej Woszczyk
 Eligiusz Złotkiewicz
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
 Wiktor Bartol
 Krzysztof Biesaga
 Wojciech Kopczyński – z-ca red. nacj.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nacj.
 Tomasz Kwast
 Anna Ludwicka
 Anna Rudnik
 Witold Sadowski
 Joanna Udalska
 Anna Wojtyra
 Piotr Zalewski
 Adres Redakcji:
 ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
 tel. 853-59-61.
 BARTOL@MIMUW.EDU.PL
 Skład systemem TeX wykonała Redakcja.
 Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
 w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2000 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2000 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 2000 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Zmieniający się Wszechświat

Marek DEMIAŃSKI

Wiek dwudziesty w zasadniczy sposób zmienił nasze wyobrażenia o otaczającym nas świecie. Gromadzone przez poprzednie millennia obserwacje astronomiczne oraz niezwykle szybki postęp technologiczny, jaki się dokonał w ostatnich kilkudziesięciu latach, doprowadziły do powstania zupełnie nowej koncepcji Wszechświata.

W starożytności wyobrażano sobie, że Ziemia z krążącymi wokół niej planetami i Słońcem znajduje się w centrum Wszechświata. Gwiazdy rozmieszczone są na sferze o średnicy znacznie większej od odległości między Ziemią i Słońcem i tworzą niezmienne tło. Poza sferą gwiazd stałych jest pustka. Ten obraz Wszechświata został dokładnie skodyfikowany przez Ptolemeusza i przetrwał ponad tysiąc lat.

Pierwszego poważnego wyłomu w tym prostym obrazie Wszechświata dokonał Kopernik, który umieścił Słońce w centrum Wszechświata, a Ziemię sprowadził do roli jednej z planet.

Zbudowanie pierwszej lunety przez Galileusza w 1609 roku i zastosowanie jej do obserwacji astronomicznych spowodowało znacznie szybszy rozwój astronomii. Galileusz odkrył nie tylko kraterzy na Księżycu i księżycy Jowisza, ale wykazał, że Droga Mleczna składa się z gwiazd. W 1687 roku Izaak Newton publikuje swoje słynne *Principia*, zawierające trzy podstawowe prawa dynamiki oraz prawo powszechnego ciężenia. Okazuje się, że ciała niebieskie podlegają takim samym prawom fizyki jak, na przykład, piłka. Śledzenie ruchu ciał niebieskich nic jednak nie mówi o ich naturze. Opracowanie przez R.W. Bunsena i G. Kirchhoffa analizy widmowej i zastosowanie jej do badania widm gwiazd spowodowało szybki rozwój astrofizyki.

Coraz to doskonalsze teleskopy pozwoliły na penetrowanie coraz to dalszych obszarów nieba. Głównym problemem astronomii tamtych czasów była klasyfikacja gwiazd oraz poznanie rozmiarów i struktury Drogi Mlecznej. Problem ten nie był wcale trywialny, gdyż, po pierwsze, obserwujemy Galaktykę z jej wnętrza i nie możemy, niestety, popatrzeć na nią z góry lub z boku, a po drugie bardzo trudno jest zmierzyć odległości do gwiazd. Dzięki badaniom rozkładu gwiazd udało się stwierdzić, że Galaktyka ma kształt dysku. Średnica dysku Galaktyki wynosi około 160 tysięcy lat świetlnych, a jego grubość około 1000 lat świetlnych. Przypomnijmy, że rok świetlny to droga, jaką sygnał świetlny, poruszający się z prędkością 300 000 km/s, przebywa w ciągu roku. Jeszcze 70 lat temu wyobrażano sobie, że cały Wszechświat to Droga Mleczna, a poza nią jest już tylko pusta przestrzeń.

Do obiektów należących do Galaktyki zaliczano też mgławice, które wyglądają jak obłoki świecącego gazu, niektóre o spłaszczonych kształtach wskazujących na ich obrót (tzw. mgławice spiralne) oraz, szczególnie w płaszczyźnie Galaktyki, gaz i pył. Na początku dwudziestego wieku astronomowie zainteresowali się mgławicami spiralnymi. V. Slipher rozpoczął systematyczne badania widm tych mgławic. Wkrótce stwierdził, że widma mgławic spiralnych nie są typowe – wszystkie dające się zaobserwować linie widmowe tych mgławic są przesunięte ku czerwieni, a znacznie rzadziej ku niebieskiej stronie widma. Astronomowie znali już gwiazdy o nietypowych widmach – linie widmowe tych gwiazd periodycznie zmieniały swoje położenie. Przesuwanie się linii to wynik ruchu gwiazdy w układzie podwójnym. Typowe prędkości takich gwiazd to kilkadziesiąt kilometrów na sekundę. Ziemia w swoim rocznym ruchu wokół Słońca porusza się z prędkością ≈ 30 km/s. Z przesunięcia prążków widmowych mgławic spiralnych wynika, że poruszają się one z bardzo dużymi prędkościami, znacznie większymi od typowych prędkości gwiazd. Problem mgławic spiralnych stawał się coraz bardziej intrygujący.

Kiedy w 1917 roku uruchomiono na Mount Wilson w Kalifornii największy wówczas teleskop o średnicy zwierciadła 2,5 m, został on wykorzystany



Rozwiązanie zadania M 907.

Rozważmy drużynę A , która wygrała co najmniej tyle meczów, ile przegrała (taka zawsze istnieje). Niech S będzie zbiorem wszystkich drużyn, które wygrały z A . Oczywiście $S \neq \emptyset$. Z warunków zadania wynika, że dla dowolnej drużyny $B \in S$ istnieje drużyna z tegoż zbioru, która wygrała z B . Tak więc zbiór S musi mieć co najmniej 3 elementy. Drużyn pokonanych przez A jest więc też co najmniej 3. Wszystkich drużyn jest co najmniej $3 + 3 + 1 = 7$.

Uwaga: Proponuję Czytelnikom udowodnienie następującego uogólnienia:

Jeśli dla dowolnych k drużyn ($k \geq 2$) istnieje drużyna, która wygrała z każdą z nich, to liczba drużyn w turnieju jest równa co najmniej $2^{k+1} - 1$.

W innych jednostkach
 $H \approx 75 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$



Rozwiązanie zadania M 908.

Średnia liczba wygranych przypadająca na drużynę wynosi 3,5, a więc istnieje drużyna A , która wygrała co najmniej 4 mecze. Na każdą spośród (pewnych) czterech drużyn, które przegrały z A , przypada średnio 1,5 wygranych w meczach pomiędzy nimi. Tak więc znajdzie się wśród nich taka (B), która wygrała z co najmniej dwiema z tych drużyn, które oznaczymy odpowiednio przez C i D .

Uwaga: Zadanie można uogólnić:

Jeśli w turnieju uczestniczyło 2^{n-1} drużyn, to można znaleźć taki ciąg różnych drużyn A_1, A_2, \dots, A_n , że dla dowolnych $i > j$ drużyna A_i wygrała z A_j .

do badania mgławic spiralnych. W 1923 roku Edwin Hubble odkrył, że mgławica Andromedy jest zbudowana z gwiazd, a następnie wypatrzył gwiazdy w kilku innych mgławicach spiralnych. Aby rozstrzygnąć, czy mgławice spiralne należą do Drogi Mlecznej, czy też są to obiekty pozagalaktyczne, trzeba było znaleźć sposób wyznaczania odległości do nich. Rok później Hubble wypatrzył w Andromedzie cefeidy. Cefeidy to gwiazdy, których jasność ulega okresowym zmianom. Dla cefeid udało się empirycznie wyznaczyć zależność między okresem zmian jasności a jasnością maksymalną. Mierząc dla cefeidy okres zmian jasności, co nie jest trudne, z tej empirycznej zależności można wyznaczyć jej jasność absolutną, a więc i odległość, gdyż jasność maleje odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości. Okazało się, że Andromeda znajduje się w odległości około 2 milionów lat świetlnych, czyli daleko poza granicami Drogi Mlecznej. Wkrótce, korzystając z tej metody, Hubble wyznaczył odległości do kilkunastu innych mgławic, które też leżały poza Drogą Mleczną. W ten sposób Hubble odkrył świat galaktyk.

Korzystając z podstawowych danych o prędkości ruchu galaktyk i ich odległościach, w 1929 roku Hubble zauważył, że powiązane są one liniową zależnością. Prędkość oddalania się galaktyki jest proporcjonalna do jej odległości

$$v = H \cdot d,$$

a współczynnik proporcjonalności H nosi obecnie nazwę stałej Hubble'a. Z wielu różnych obserwacji wynika, że stała Hubble'a wynosi $H = (20 \pm 3) \text{ km/s}$ na milion lat świetlnych. Galaktyka, która znajduje się w odległości 100 milionów lat świetlnych, oddala się od nas z prędkością około 2000 km/s. Odkryte przez Hubble'a rozszerzanie się Wszechświata stanowi podstawę współczesnych rozważań kosmologicznych.

Aby poznawać Wszechświat, trzeba umieć wyznaczać podstawowe parametry galaktyk i dysponować modelem opisującym strukturę Wszechświata. W 1916 roku Albert Einstein sformułował ogólną teorię względności – relatywistyczną teorię grawitacji, która wiąże rozkład materii z geometrycznymi własnościami czasoprzestrzeni. Nawet wielki Einstein tak bardzo wierzył w to, że cały Wszechświat to Droga Mleczna zanurzona w pustej przestrzeni, iż jego model kosmologiczny opisywał statyczną przestrzeń.

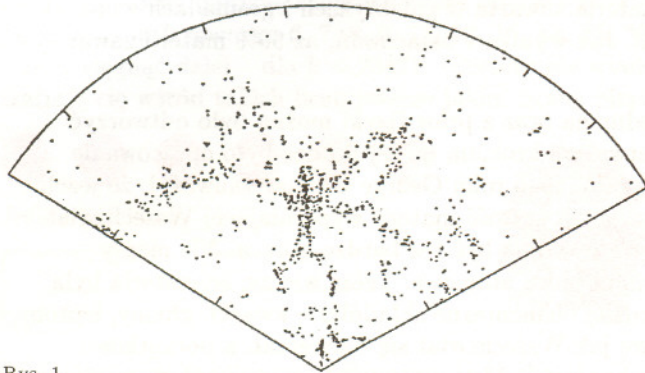
Jeszcze zanim Hubble odkrył fakt rozszerzania się Wszechświata, Aleksander Friedman w 1922 roku wykazał, że równania ogólnej teorii względności przewidują istnienie ewoluującego Wszechświata. Friedman założył, że Wszechświat jest w sposób jednorodny i izotropowy wypełniony materią, czyli żaden punkt i żaden kierunek we Wszechświecie nie są wyróżnione. Z równań Friedmana wynika, że Wszechświat musiał mieć początek! Dalsza ewolucja Wszechświata zależy od średniej gęstości materii we Wszechświecie. Jeżeli średnia gęstość materii we Wszechświecie jest większa od gęstości krytycznej, która jest wyznaczona z zależności $\rho_{\text{kryt}} = \frac{3H^2}{8\pi G}$, (tutaj G to stała grawitacyjna), to Wszechświat osiągnie pewne maksymalne rozmiary, po czym zacznie się kurczyć i w końcu materia zostanie ściśnięta do nieskończonej gęstości (powstanie stan osobliwy). Jeżeli średnia gęstość materii jest mniejsza lub równa gęstości krytycznej, to Wszechświat będzie się rozszerzał wiecznie, a gęstość materii będzie malała do zera.

Prawo Hubble'a pozwala w łatwy sposób wyznaczać odległość do galaktyk. Jeżeli znamy wartość stałej Hubble'a, to do wyznaczenia odległości potrzebna jest tylko znajomość widma, a dokładniej tzw. parametr z , czyli względne przesunięcie linii widmowych. Początkowo wydawało się, że wąskim gardłem w tej procedurze jest konieczność uzyskania widma. Na początku lat trzydziestych, aby uzyskać widmo galaktyki, trzeba było obserwować ją przez kilkanaście, a nawet kilkadziesiąt godzin. Później okazało się, że problemem jest też wartość stałej Hubble'a. Nic więc dziwnego, że liczba galaktyk, do których znana była odległość, wzrastała bardzo powoli. Wśród astronomów

Nowszy wynik to $z = 6,68$.

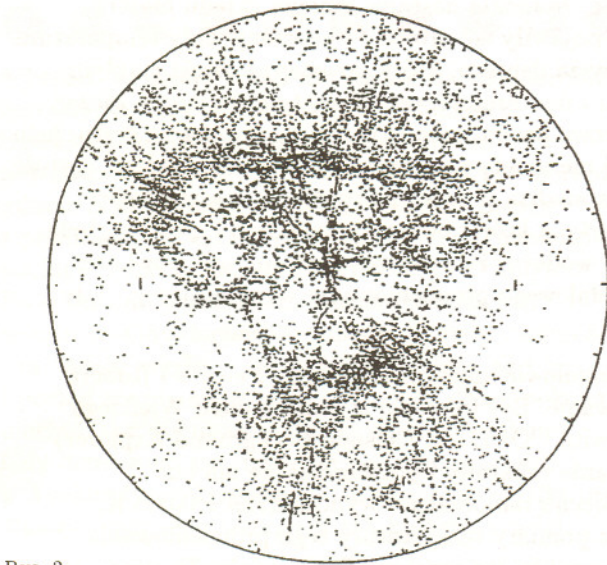
zajmujących się obserwowaniem galaktyk trwała i trwa nadal rywalizacja w znajdowaniu jak najdalszych obiektów we Wszechświecie. W tej chwili najdalsza galaktyka ma $z = 5,64$, znajduje się w odległości 10 miliardów lat świetlnych i oddala się od nas z prędkością $0,95 c!$ Po dokładniejszym zbadaniu okazało się, że jest to normalna galaktyka.

W ciągu ostatnich 30 lat dzięki nowym technologicznym możliwościom, a przede wszystkim wprowadzeniu elektronicznego sposobu zapisu obrazu (kamera CCD) oraz coraz większym teleskopom, dramatycznie zmieniły się możliwości obserwowania galaktyk. Na początku lat osiemdziesiątych grupa astronomów



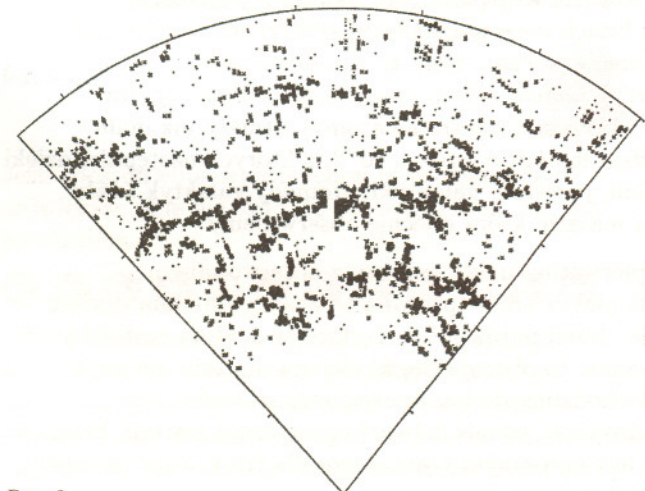
Rys. 1

z Harvard Smithsonian Center for Astrophysics (CfA) postanowiła zrobić przestrzenną mapę rozkładu galaktyk w wybranym obszarze nieba. Już pierwsze wyniki były zaskakujące. Po naniesieniu położenia około 1000 galaktyk utworzyły one zgrupowanie przypominające swoim kształtem człowieka (tzw. patyczak z Harvard – rys. 1). Korpus tego kosmicznego ludka tworzą galaktyki z gromady galaktyk Coma. Przez kilka następnych lat rozszerzono ten przegląd i przebadano cały pasek na sferze niebieskiej. Wyniki tego przeglądu przedstawione są na rysunku 2. Galaktyki nie są w przestrzeni rozłożone przypadkowo. Istnieją wyraźnie widoczne płaskie ściano-podobne skupiska galaktyk ograniczające olbrzymie puste obszary, gdzie galaktyki nie występują prawie wcale. Tam, gdzie ściany się przecinają, występują gęste łańcuchy galaktyk, a w miejscach, gdzie przecinają się łańcuchy, widzimy bogate gromady galaktyk. Duże skupisko galaktyk (widoczne w górnej części rysunku 2) o długości sięgającej 500 milionów lat świetlnych, to tak zwana Wielka Ściana, której grubość wynosi około 20 milionów lat świetlnych. Pustki widoczne w przestrzennym rozkładzie galaktyk mają typowo średnicę około 100 milionów lat świetlnych. Ściany skupiają około 60% galaktyk, natomiast zajmują jedynie około 10% objętości Wszechświata. W gęstych łańcuchach skupionych jest około 20% galaktyk, a pozostałe 20% galaktyk tworzy ubogie, słabo widoczne łańcuchy galaktyk. Ostatnio dokonano jeszcze głębszego przeglądu galaktyk we fragmencie południowego nieba. Wyniki tego przeglądu przedstawione są na rysunku 3.



Rys. 2

Najdalsze galaktyki w tym przeglądzie są odległe od nas o około 1,5 miliarda lat świetlnych, są więc 3 razy dalej niż galaktyki z przeglądu CfA, ale nawet w tak dalekich obszarach galaktyki nie są rozłożone równomiernie i ich struktura rozkładu jest bardzo podobna do tej ujawnionej w przeglądzie CfA. Od dwóch lat zbierane są dane do najgłębszego z dotychczasowych przeglądów galaktyk, który ma skatalogować około 3 milionów galaktyk. Oczekuje się, że ten przegląd ujawni wreszcie rozmiary tzw. komórki jednorodności – obszaru, który będzie zawierał w przybliżeniu tyle samo galaktyk niezależnie od jego położenia.



Rys. 3

Badanie galaktyk i gromad galaktyk doprowadziło do jeszcze jednego zaskakującego odkrycia. Jednym ze sposobów oceny masy galaktyki jest pomiar ilości światła emitowanego przez galaktykę. Nasze Słońce jest dość typową gwiazdą o znanej masie i znanej jasności (ilości energii emitowanej w ciągu sekundy), zatem dzieląc jasność galaktyki przez jasność Słońca, dowiadujemy się

**Rozwiązanie zadania F 517.**

Począs każdego rozpadu jądra atomu ${}_{92}\text{U}^{235}$ wydziela się energia $E_0 = 200 \text{ MeV}$. Podczas rozpadu porcji uranu o masie m na dobę wydziela się energia

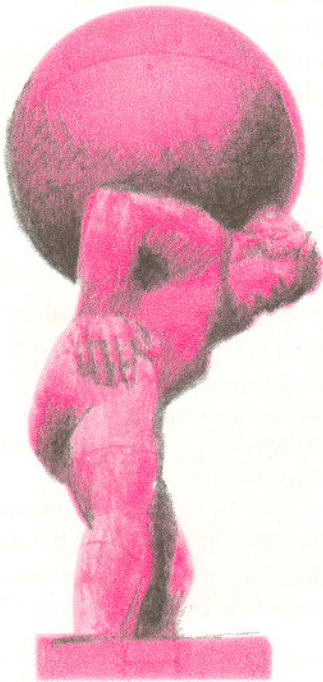
$$E = \frac{mN_0}{M} E_0,$$

gdzie M – liczba masowa uranu ${}_{92}\text{U}^{235}$, N_0 – liczba Avogadra. Efektywna energia wyprodukowana przez elektrownię w ciągu doby wynosi $E_1 = \eta E$. Z drugiej strony $E_1 = Pt$, gdzie P to moc elektrowni, a t to czas pracy – czyli w tym przypadku 1 doba. Mamy zatem

$$Pt = \eta \frac{mN_0}{M} E_0$$

i stąd otrzymujemy

$$m = \frac{MPt}{\eta N_0 E_0} \approx 0,031 \text{ kg} = 31 \text{ g}.$$

**Rozwiązanie zadania F 518.**

Energia fotonu $h\nu$ jest zużyta na wykonanie pracy A potrzebnej do wyjścia elektronu oraz na nadanie mu energii kinetycznej, zatem

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}.$$

Aby zatrzymać elektrony, należy przyłożyć pole hamujące. Przy tym energia kinetyczna elektronu powinna być równa pracy pola elektrycznego eU . Wobec tego

$$h\nu_1 = A + eU_1 \quad \text{i} \quad h\nu_2 = A + eU_2,$$

skąd otrzymujemy

$$h = \frac{e(U_2 - U_1)}{\nu_2 - \nu_1} \approx 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

w przybliżeniu, z ilu gwiazd się ona składa, co daje nam informację o jej masie. Dla galaktyk spiralnych, które zawdzięczają swój kształt ruchowi obrotowemu, masę można oszacować metodami dynamicznymi (trzecie prawo Keplera), obserwując, z jaką prędkością gwiazdy obiegają centrum galaktyki. Masa galaktyki oszacowana dynamicznie jest od kilku do kilkudziesięciu razy większa od masy galaktyki oszacowanej na podstawie jej jasności. Znacznie trudniej jest oszacować masę gromady galaktyk, ale i w tym przypadku można zastosować dwie metody – ocenić masę gromady na podstawie jej sumarycznej jasności lub śledząc ruch galaktyk w gromadzie. Okazuje się, że typowa gromada galaktyk zawiera kilkaset razy więcej masy, niż wynikałoby to z ilości światła, które emituje. Ta nieświecząca materia zawarta w galaktykach i gromadach galaktyk nosi nazwę ciemnej materii. Jak wynika z oszacowań, aż 90% materii zawartej we Wszechświecie nie świeci.

Korzystając z modelu Friedmana oraz z praw fizyki można było odtworzyć historię Wszechświata. Pierwszym krokiem na tej drodze było opracowanie modelu Wielkiego Wybuchu. W 1946 roku George Gamow zauważył, że jeżeli w początkowych etapach ewolucji gęstość materii wypełniającej Wszechświat była bardzo duża, to materia powinna być też bardzo gorąca. Nie mogły wówczas istnieć ani atomy, ani jądra atomowe. Teraz wiemy, że materia była wówczas rozbita na najbardziej elementarne składniki – kwarki, gluony, leptoni, fotony i grawitony. W miarę jak Wszechświat się rozszerzał, a początkowo Wszechświat rozszerzał się bardzo szybko, zmniejszała się gęstość materii i temperatura. Po upływie około 10^{-5} s od Wielkiego Wybuchu gęstość materii i jej temperatura spadły na tyle, że mogła nastąpić zmiana składu materii (nastąpiło przejście fazowe) i pojawiły się protony i neutrony. Gdy temperatura spadła do około 10^9 K, czas życia deuteru, który powstawał dzięki ciągłym zderzeniom między protonami i neutronami, wzrósł na tyle, że mogły zacząć zachodzić kolejne reakcje jądrowe prowadzące w końcu do powstania trytu, helu i litu. Inne cięższe pierwiastki nie mogły powstawać, gdyż temperatura i gęstość zbyt szybko malały. Dokładna analiza procesu pierwotnej nukleosyntezy prowadzi do wniosku, że materia, z której powstały galaktyki i gwiazdy, była złożona w 25% z helu i 75% z wodoru. Po tym wczesnym okresie powinien pozostać ślad w postaci mikrofalowego promieniowania wypełniającego cały Wszechświat.

W 1965 roku dwaj radioastronomowie amerykańscy, Arno Penzias i Robert Wilson, odkryli to promieniowanie. Był to wielki tryumf modelu Wielkiego Wybuchu. Kilka lat temu satelita COBE (od COsmic Background Explorer) dokładnie zbadał promieniowanie reliktove i potwierdził, że ma ono termiczny charakter, a jego obecna temperatura wynosi $2,726 \pm 0,005$ K. Tak jak oczekiwano, dokładne pomiary temperatury tego promieniowania w różnych obszarach nieba pozwoliły zmierzyć prędkość, z jaką Ziemia porusza się względem układu, w którym promieniowanie reliktove jest izotropowe. Galaktyka porusza się względem tego układu z prędkością około 600 km/s. Po dwóch latach obserwacji COBE odkrył też bardzo małe fluktuacje temperatury, które świadczą o tym, że w momencie odprężania się promieniowania i materii (moment rekombinacji, gdy protony i jądra helu przyłączają elektrony i powstają neutralne atomy) istniały już małe niejednorodności w rozkładzie materii o $\delta\rho/\rho \sim 10^{-5}$, z których następnie, dzięki przyciąganiu grawitacyjnemu, powstały galaktyki, gromady galaktyk i cała złożona struktura rozkładu materii, którą obecnie obserwujemy.

Porównanie przewidywań pierwotnej nukleosyntezy z obserwowanym rozpowszechnieniem lekkich pierwiastków pozwala wyznaczyć średnią gęstość barionów we Wszechświecie. Jeżeli porównać tę gęstość ze średnią gęstością materii szacowaną dynamicznie, to okazuje się, że ciemna materia nie może być złożona z barionów! Dochodzimy do bardzo ważnego wniosku – we Wszechświecie istnieje bardzo dużo jakiejś dziwnej egzotycznej materii. Poznanie natury tej ciemnej materii jest ogromnym wyzwaniem dla fizyki i astronomii dwudziestego pierwszego wieku.

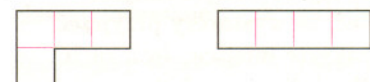
Spośród liczb postaci $2^{2^k} + 1$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną, pięć początkowych (dla $k = 0, 1, 2, 3, 4$) to liczby pierwsze. Dla $k = 5$ otrzymujemy liczbę złożoną, bo

$$\begin{aligned} 4294967297 &= 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 5^4 \cdot 2^{28} - (5^4 \cdot 2^{28} - 1) = \\ &= 2^{28}(2^4 + 5^4) - (5^2 \cdot 2^{14} + 1)(5 \cdot 2^7 + 1)(5 \cdot 2^7 - 1) = \\ &= 641(2^{28} - (5^2 \cdot 2^{14} + 1) \cdot 639). \end{aligned}$$

Znane są trochę bardziej skomplikowane dowody złożoności takich liczb, np. dla k równego 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38, 73 czy – żeby sięgnąć dalej – dla $k = 23471$. Niestety nie wiadomo, czy trafiają się wśród takich liczb jeszcze jakieś liczby pierwsze.



Jeśli z kafelków



ułożymy figurę środkowosymetryczną, to liczba tych kafelków z lewej zawsze będzie parzysta.



Schemat w rozumowaniu nie zawsze da się nadrobić fantastyczną nawet biegłością w rachunkach. Opowiada się np., że następujący problem postawiono von Neumannowi: Z miasta A w kierunku miasta B oddalonego o 100 km wyrusza pociąg z prędkością 50 km/h. W tej samej chwili naprzeciw pociągu wylatuje mucha z szybkością 100 km/h. Po spotkaniu z pociągiem mucha zawraca i leci do miasta B . Gdy dociera do miasta B , znów zawraca i tak krąży między miastem a pociągiem, aż i ona, i pociąg znajdą się w mieście B . Jaką drogę pokona mucha? Von Neumann odpowiedział w 5 sekund. Gdy doniesiono mu, iż Fermi podał rozwiązanie w 3 sekundy, wykrzyknął: – To niemożliwe! Nikt nie obliczy sumy tego szeregu w tak krótkim czasie!...



Jeśli największa odległość punktów figury płaskiej F wynosi d , to można ją przykryć sześciokątem foremnym o boku $\frac{d}{\sqrt{3}}$.



Jeśli spośród elips wpisanych w równoległobok największe pole ma koło, to równoległobok ten jest kwadratem.



Młody Galois rzucał w egzaminatora gąbką, gdy ten zadawał mu zbyt łatwe pytania. Newton jako młodzienczek marzył o spaleniu domu rodzinnego. Zupełnie inny charakter miał Riemann: w dzieciństwie najbardziej wzruszała go tragiczna historia rozbiorów Polski, którą wciąż od nowa musiano mu opowiadać.



Każda izometria płaszczyzny da się przedstawić w postaci złożenia symetrii osiowych. Możemy nawet zażądać, aby osie symetrii były wybierane tylko spośród prostych przechodzących przez dowolnie ustalony punkt P plus jedna prosta przez P nie przechodząca. O ile jednak, wybierając osie spośród wszystkich prostych, możemy do każdej izometrii użyć nie więcej niż 3 symetrii, to w tym oszczędnym przypadku dla każdej liczby N istnieje izometria, którą można z symetrii osiowych uzyskać jedynie używając ich więcej niż N .



W przestrzeni trójwymiarowej jest tylko 5 brył platońskich, w czterowymiarowej – 6, a w przestrzeniach o wyższym wymiarze tylko 3.



Próbując uogólnić twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej, można by podejrzewać, iż, o ile wyrażenie

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}$$

jest dobrze określone, to ma wartość 1 (γ jest funkcją zmiennych α i β). Nie jest to prawda. Np. jeśli α to ciśnienie, β objętość, natomiast γ to temperatura gazu, wówczas korzystając ze wzoru $\frac{\alpha \beta}{\gamma} = \text{const}$ łatwo wyliczyć, że (dla $\text{const} = 1$)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = -1.$$



Jeśli P i Q ($P \neq Q$) są środkami symetrii figury F , to F jest nieograniczona.



W dowolnym czworokącie następujące 7 odcinków ma punkt wspólny: 4 odcinki łączące wierzchołek ze środkiem ciężkości przeciwległej ściany i 3 łączące środki skośnych krawędzi. Punkt wspólny dzieli te pierwsze w stosunku 3 : 1 oraz połowi te drugie. Tyle ładu, a pomyśleć, że wysokości czworokątnu punktu wspólnego przeważnie nie mają.



Pytanie: czy mając dane dwa sznurki, z których każdy spala się w godzinę, ale w sposób nieregularny, można odmierzyć kwadrans?

Odpowiedź na pytanie: można. Pierwszy sznurek podpalamy dokładnie kwadrans. Zostało podpalony z dwóch stron, to czas palenia wyniesie spali, gasimy ogień na drugim sznurku. Jeśli to, co z niego spali, gasimy ogień z jednego. Gdy pierwszy się z dwóch końców, a drugi tylko z jednego. Pierwszy sznurek podpalamy



Indeks odkrywa niewidzialne

Witold SADOWSKI

Kiedy w *Mistrzu i Małgorzacie* Bułhakowa Asasello prezentuje swój talent strzelecki, Małgorzata dowiaduje się, iż potrafi on trafiać w dowolną komorę i dowolny przedmiot serca przeciwnika.

– *Ależ tego nie widać* – dziwi się Małgorzata.

– *Właśnie o to chodzi, że nie widać* – odpowiada jej Korowioł – *Trafic w to, co widać, każdy potrafi.*

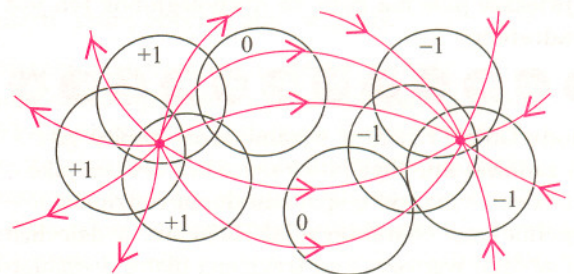
Być może, żeby strzelać do tego, czego nie widać, konieczne są diabelskie sztuczki. Nie są one jednak potrzebne, by poznać pewne własności ukrytych przedmiotów. Często wystarczy uważna obserwacja ich otoczenia i odrobina sprytu.

Przypuśćmy np., że jesteśmy nad brzegiem jakiegoś zbiornika wodnego, w którym znajdują się ujścia i źródła wody. Pewien fragment bajorka zasłania nam jakaś przeszkoda, a my chcemy się dowiedzieć, czy zasłonięte miejsce kryje w sobie źródło, czy ujście. Nietrudno wymyślić, że wystarczy przyjrzyć się uważnie np. pewnemu okręgowi otaczającemu zakryte miejsce. Jeśli ruch wody obrazuje rysunek 1, to spodziewamy się źródła, jeśli rysunek 2, to ujścia. Gdyby natomiast najbardziej odpowiadał prawdzie rysunek 3, to moglibyśmy podejrzewać, że w środku nie ma ani ujścia, ani źródła (lub może, że występuje i jedno, i drugie).

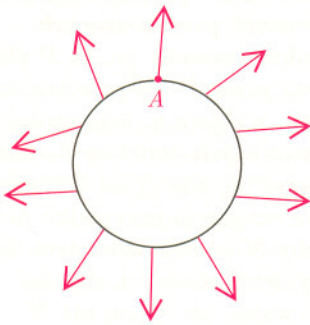
Zwolennicy pewnego formalizmu i bardziej ścisłego podejścia do zagadnień spływu i wypływu czują się może nieco zaniepokojeni rozważaniami, w których wiele zależy od naszego „widzi-nam-się”. Specjalnie dla nich wprowadzmy kilka użytecznych pojęć. Powiedzmy, że powierzchnię bajorka opisuje płaszczyzna. Każdemu jej punktowi przypisujemy wektor – prędkość przepływu („poziomego”) wody w tym punkcie. W ten sposób na płaszczyźnie zostaje określone **pole wektorowe**. Taka płaszczyzna z wektorami przypomina nieco sierść psa. Zakładając, że przepływ wody jest dość regularny, możemy uważać, iż sierść ta jest gładko uczesana. Zdarzają się jednak na niej miejsca, w których pojawia się łysinka – są to, oczywiście, punkty reprezentujące źródła bądź ujścia (np. ze źródła woda rozplywa się na wszystkie strony, więc dokładnie w punkcie źródła wektor prędkości „poziomej” jest zerowy). Wszystkie łysinki, czyli te punkty, którym przypisany został wektor zerowy, nazywamy **punktami osobliwymi** pola wektorowego.

Widzimy zatem, że indeksy okręgów z rysunków 1, 2, 3 wynoszą odpowiednio: 1, -1 , 0.

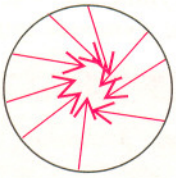
Jasne jest, że indeks okręgu musi być liczbą całkowitą (po pełnym obiegu okręgu końcowe położenie wektora pola jest przecież takie samo, jak wyjściowe). Wynika stąd, że nawet przy ciągłych zmianach położenia oraz promienia okręgu bądź też sposobu „uczesania” pola wektorowego zmiana indeksu albo wcale się nie dokonuje, albo dokonuje się skokowo (z jednej liczby całkowitej na drugą). Oczywiście, taka „nagła” zmiana



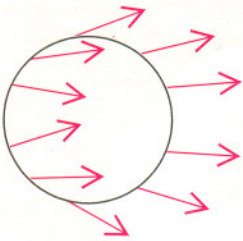
Rys.4



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Do badania punktów osobliwych wykorzystaliśmy wcześniej otaczający je okrąg. Spójrzmy jeszcze raz na rysunek 1. Jeżeli wyruszymy z punktu A , poruszając się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, zobaczymy, że wektor pola początkowo wskazujący „północ”, zacznie pokazywać „zachód”, potem „południe”, „wschód”, aż wreszcie – po przejściu całego okręgu – znów pokaże „północ”. W ten sposób podczas pełnego obiegu okręgu wektor pola wykonał pełen obrót w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara. Nietrudno spostrzec, że w analogicznej sytuacji wektor pola na rysunku 2 również wykona jeden obrót, ale w przeciwną stronę. Natomiast wektor pola z rysunku 3 nie wykona żadnego obrotu.

Liczbę obrotów wektora pola przy obiegu okręgu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara nazywamy **indeksem** tego okręgu. (W przypadku, gdy wektor pola obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara, liczbę obrotów bierzemy ze znakiem minus.)

indeksu nastąpić może tylko w „dramatycznych” okolicznościach, tzn. gdy na okręgu pojawi się jakiś punkt osobliwy (rys. 4). O ile zadamy, aby do tego nie doszło, to przy ciągłych deformacjach bądź okręgu, bądź pola, indeks pozostanie taki sam.

Zauważmy też, że jeżeli w gładko uczesanyemu polu wektorowym indeks pewnego okręgu jest różny od zera, to we wnętrzu tego okręgu musi znajdować się punkt osobliwy. Przypuśćmy bowiem, że tak nie jest. Ścisakajmy okrąg tak, by jego promień malał do zera. Skoro założyliśmy, że wewnątrz nie ma punktów osobliwych, to indeks okręgu przez cały czas będzie taki, jak na początku, tj. różny od zera. Oznacza to, że na dowolnie małym okręgu wektor pola wykonuje pełne obroty. Jeżeli więc w środku okręgu wektory pola nie są „przystrzyżone” i nie pojawia się nigdzie wektor zerowy, to pole musi być „rozczochrane”, a nie gładko „uczesane”, jak zakładaliśmy.

Spróbujmy teraz wykorzystać nasze spostrzeżenia w ... teorii liczb zespolonych.

Przypomnijmy, że liczba zespolona to liczba postaci $z = a + ib$, gdzie a oraz b to liczby rzeczywiste, a $i^2 = -1$.

Liczbę zespoloną możemy przedstawić jako punkt bądź wektor na płaszczyźnie. Długość tego wektora nazywamy **modułem** liczby z i oznaczamy $|z|$. Kąt, jaki ten wektor tworzy z osią OX , nazywamy **argumentem** liczby z . Ponieważ $a = |z| \cos \varphi$, a $b = |z| \sin \varphi$, więc

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

W tej postaci liczby zespolone bardzo łatwo się mnoży. Jeśli argumentem z_1 jest φ , a argumentem z_2 jest ψ , to

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot |z_2|(\cos \psi + i \sin \psi) = \\ &= |z_1||z_2|((\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi)). \end{aligned}$$

Po skorzystaniu z faktu, że $i^2 = -1$ oraz ze wzorów na kosinus i sinus sumy kątów, uzyskujemy

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|((\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))).$$

W szczególności dla liczby naturalnej n zachodzi elegancki wzór de Moivre'a:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Weźmy dowolny punkt na płaszczyźnie. Jeśli ma on współrzędne (a, b) , to odpowiada on liczbie zespolonej $z = a + ib$. Niech f będzie pewnym wielomianem zmiennej z

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0,$$

gdzie a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 to liczby zespolone. Oczywiście, $f(z)$ jest pewną liczbą zespoloną, powiedzmy $f(z) = c + id$. Możemy teraz punktowi (a, b) przypisać wektor $[c, d]$. Postępując tak dla każdego punktu, określamy na płaszczyźnie pole wektorowe. W szczególnym przypadku mamy wielomian

$$g(z) = z.$$

Każdemu punktowi przypisany zostaje wektor $[a, b]$

i pole wygląda podobnie, jak na rysunku 1.

W punkcie $(0, 0)$ mamy punkt osobliwy, natomiast indeks każdego okręgu, w którego wnętrzu leży punkt $(0, 0)$, wynosi 1. Inny przypadek otrzymujemy, gdy rozpatrzmy wielomian

$$h(z) = z^n, \quad \text{dla } n > 1.$$

I tym razem łatwo stwierdzić, że w punkcie $(0, 0)$ mamy „łysinę”, natomiast indeks dowolnego okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ wynosi n . (Zachęcam Czytelnika, by to sprawdził, korzystając ze wzoru de Moivre'a).

Powstaje pytanie, jak wygląda sytuacja w przypadku ogólnym. Czy zawsze w polu wektorowym, określonym przez wielomian o współczynnikach zespolonych, pojawia się „łysinka”? Innymi słowy, czy dla dowolnych współczynników a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 istnieje takie z , że

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0?$$

Odpowiedź na to pytanie nie wydaje się łatwa, gdyż w ogólności nie da się takich z wyliczyć ze współczynników równania. Jak zatem stwierdzić, że istnieje coś, czego „nie widzimy”?

Spróbujmy wykorzystać nasze poprzednie sztuczki. Weźmy okrąg O o środku w punkcie $(0, 0)$ i bardzo dużym promieniu R tak, by ewentualne punkty osobliwe znajdowały się wewnątrz niego.

Możemy to zrobić biorąc, na przykład, $R > |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}| + 1$, gdyż wtedy dla $|z| \geq R$ jest $|z^n| > |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0|$, z której to nierówności wynika, iż $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \neq 0$.

Zmieńmy teraz „uczesanie” pola wektorowego tak, by w chwili t było ono określone przez wielomian

$$f_t(z) = z^n + (1-t)(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0).$$

W chwili $t = 0$ pole wektorowe określone jest przez wyjściowy wielomian, w chwili zaś $t = 1$ przez wielomian z^n . W czasie „przeczesywania” pola żaden punkt osobliwy nie pojawia się na okręgu O , dla każdego $t \in (0; 1)$ oraz $|z| \geq R$ mamy bowiem

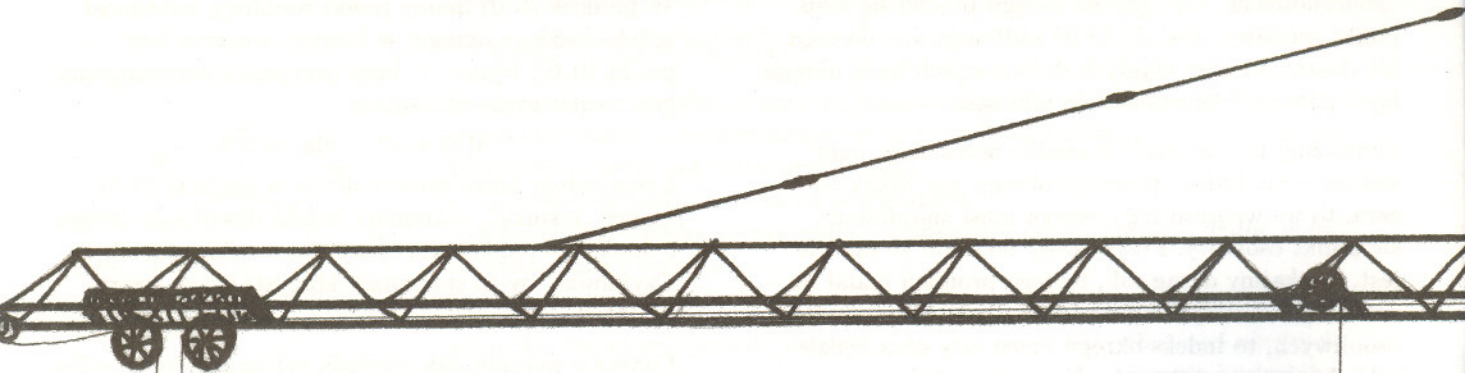
$$|z^n| > |1-t||a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0|.$$

A zatem indeks okręgu O jest taki sam w chwili $t = 0$, jak w chwili $t = 1$. Skoro w końcowym momencie wynosił n , więc również na początku wynosił n . Skoro zaś na początku wynosił n , więc był różny od zera i okrąg O musiał kryć w sobie „łysinę”.

Udowodniliśmy zatem, że dla dowolnych współczynników zespolonych wielomian

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0, \quad n \geq 1,$$

ma miejsce zerowe. Wynika stąd natychmiast, że każdy wielomian niezerowego stopnia o współczynnikach zespolonych ma pierwiastek. Jest to **podstawowe twierdzenie algebry**.

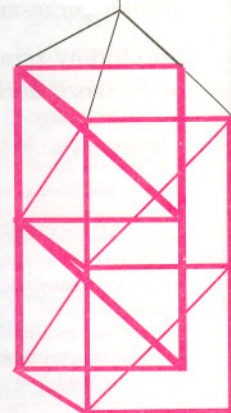


Jak rośnie dźwig?

*Niech się mury pną do góry, póki dłonie silne są,
zbudujemy betonowy nowy dom!*

Te słowa piosenki z lat odbudowy Warszawy znowu stały się aktualne. Betonowe mury wykańczane na świecącetko pną się do góry gdzie nie spojrzeć. Żadnej myśli urbanistycznej w tych stawianych na wyścigi biurowcach nie ma, ale tempo prac bywa imponujące.

Dla laika (takiego jak ja) jest też w takim budowaniu wiele zastanawiających problemów technicznych. Do budowania używa się np. bardzo wysokich dźwigów. Czy zastanawialiście się kiedyś, w jaki sposób są one konstruowane?



– To przecież proste – odpowiedzie. – Przyjeżdża specjalny teleskopowy dźwig samochodowy, za pomocą którego stawia się też teleskopowy dźwig kolumnowy, który później sam rozsuwa się do odpowiedniej wysokości.

Nie powiem, pomysł całkiem niezły. Rzeczywiście w pierwszej fazie używa się innego dźwigu. Ale dźwig z rysunku nie jest teleskopowy, więc nie może się rozsuwać. Z drugiej strony jest najwyższy na budowie i wyższy niż zasięg teleskopowego dźwigu samochodowego. Muszę przyznać, że wiele razy przypatrywałem się takim dźwigom, za każdym razem dochodząc do wniosku, że one muszą się w jakiś chytry sposób budować same – czyli rosnać. Wszystkie mają kolumny zbudowane z oddzielnych elementów, ale żeby dodać nowy element, należałoby górną część dźwigu na chwilę unieść, co wydaje się niemożliwe.

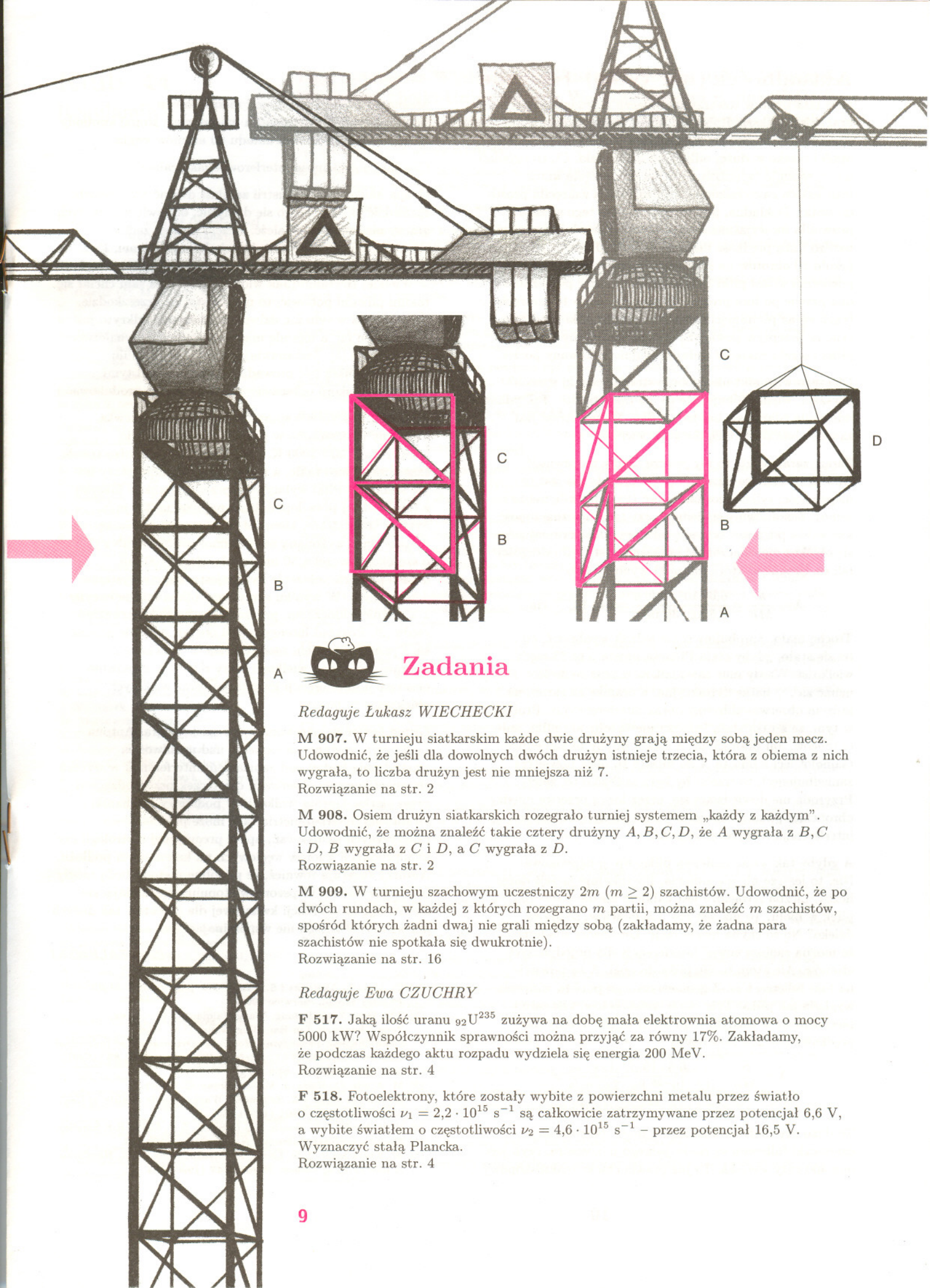
W końcu udało mi się złapać dźwig w trakcie linienia. Ta faza wzrostu jest o wiele bardziej dyskretna niż spektakularne mocowanie się tamującego ruchu dźwigu samochodowego z olbrzymim ramieniem naszego dźwigu, więc łatwo ją pomylić z normalną jego pracą.

Do samodzielnego rośnięcia używa on specjalnej obejmy, którą sam sobie nakłada na kolumnę.

Następnie mocuje górną część obejmy do elementu C i rozłącza połączenie pomiędzy elementami B i C. Pozwala mu to na rozsuniecie kolumny o wysokość elementu D, który może zostać wstawiony pomiędzy B i C.

Operację tę powtarza do uzyskania żądanej wysokości, a następnie obejmę może sobie zdjąć, aby umożliwić jej użycie do budowy (lub demontażu) innego dźwigu oraz sprowokować do stawiania pytań, takich jak tytułowe dzisiejszej δ .

Małą Deltę przygotował Piotr ZALEWSKI



Zadania

Redaguje *Lukasz WIECHECKI*

M 907. W turnieju siatkarskim każde dwie drużyny grają między sobą jeden mecz. Udowodnić, że jeśli dla dowolnych dwóch drużyn istnieje trzecia, która z obiema z nich wygrała, to liczba drużyn jest nie mniejsza niż 7.
Rozwiązanie na str. 2

M 908. Osiem drużyn siatkarskich rozegrało turniej systemem „każdy z każdym”. Udowodnić, że można znaleźć takie cztery drużyny *A, B, C, D*, że *A* wygrała z *B, C* i *D*, *B* wygrała z *C* i *D*, a *C* wygrała z *D*.
Rozwiązanie na str. 2

M 909. W turnieju szachowym uczestniczy $2m$ ($m \geq 2$) szachistów. Udowodnić, że po dwóch rundach, w każdej z których rozegrano m partii, można znaleźć m szachistów, spośród których żadni dwaj nie grali między sobą (zakładamy, że żadna para szachistów nie spotkała się dwukrotnie).
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje *Ewa CZUCHRY*

F 517. Jaką ilość uranu ${}_{92}\text{U}^{235}$ zużywa na dobę mała elektrownia atomowa o mocy 5000 kW? Współczynnik sprawności można przyjąć za równy 17%. Zakładamy, że podczas każdego aktu rozpadu wydziela się energia 200 MeV.
Rozwiązanie na str. 4

F 518. Fotoelektrony, które zostały wybite z powierzchni metalu przez światło o częstotliwości $\nu_1 = 2,2 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ są całkowicie zatrzymywane przez potencjał 6,6 V, a wybite światłem o częstotliwości $\nu_2 = 4,6 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ – przez potencjał 16,5 V. Wyznaczyć stałą Plancka.
Rozwiązanie na str. 4

Aktualności (nie tylko) fizyczne

Dwa lata temu w towarzyskim meczu z Francją znany brazylijski piłkarz, Roberto Carlos, wykonał rzut wolny stulecia. Wydawało się, że kopnięta bardzo mocno piłka opuści boisko w dużej odległości od bramki. Ci, co oglądali mecz, zgodnie twierdzili, że piłka po minięciu muru francuskich zawodników jak zaczarowana zakręciła prosto do siatki. Dokładna, poklatkowa analiza tego strzału pozwoliła na wyjaśnienie zagadki [1]. Zawodnik nadał piłce bardzo dużą prędkość liniową (około 110 km/h) i obrotową (około 10 obrotów na sekundę). Początkowo opływ powietrza wokół piłki był turbulentny, więc poruszała się ona prawie po linii prostej. Jednak po około 10 metrach (czyli zaraz po minięciu muru) prędkość piłki spadała na tyle, że przepływ powietrza stał się laminarny i wirująca piłka zaczęła zakręcać, udając zdalnie kierowany pocisk.

Dlaczego więc nikt nie próbuje strzelać w taki sposób? Owszem, wielu próbuje, ale to nie takie proste. Tak udane uderzenie zdarza się bardzo rzadko. Mocny strzał jest zawsze obarczony dużą dozą niepewności.

Zaraz, zaraz, gdzie to my jeszcze mamy niepewność. Aha, w mechanice kwantowej. Co prawda nie jest to niepewność, tylko nieoznaczoność (to naprawdę nie to samo). Zastanówmy się jednak, czy taka nieoznaczoność kwantowa pogarsza sytuację piłkarza. Dla poruszającego się obiektu nieoznaczoność położenia jest rzędu długości fali de Broglie'a, która dla piłki wynosi około

$$\lambda = \frac{h}{Mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{0,5 \text{ kg} \cdot 30 \text{ m/s}} = 44 \cdot 10^{-33} \text{ cm.}$$

Trochę mało. Spróbujmy sobie jednak wyobrazić, co by się stało, gdyby stała Plancka urosła o te 33 rzędy wielkości. Wtedy mur zawodników można by było uznać za ... siatkę dyfrakcyjną, a bramkę za ekran, na którym obserwowalibyśmy obraz interferencyjny. Problem w tym, że z taką stałą Plancka nie byłoby ani piłki, ani obrońców, ani bramkarza. A nawet gdyby to zaniedbać (samolot leci z miasta A do miasta B, opór powietrza zaniedbujemy), to trzeba by było zadbać o to, żeby Przyroda nie dowiedziała się, przez którą przerwę między obrońcami piłka przeleciała. Tylko wtedy możliwa jest interferencja różnych dróg piłki.

A gdyby tak wziąć mniejszą piłkę, np. pingpongową. Nie, to jeszcze nic nie zmienia. Poszukajmy jakiejś dużej liczby. Liczba Avogadra jest całkiem niezła: $6,02 \cdot 10^{23}$ piłek w molu. To już jest coś. Co mówicie, że idę za daleko? No to chyba macie rację. Od dawna wiadomo, że można zaobserwować interferencję dla pojedynczych atomów. Ale atom to nie piłka do nogi. A co powiecie na taki fulleren C_{60} . Z geometrycznego punktu widzenia wygląda jak piłka. Tyle samo sześciokątów, tyle samo pięciokątów, w każdym rogu atom węgla. Wtedy dla prędkości $v = 220 \text{ m/s}$ mamy

$$\lambda = \frac{h}{Mv} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{12 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \cdot 220 \text{ m/s}} = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0,0025 \text{ nm.}$$

To dużo czy mało? Nadal raczej mało, bo rozmiary cząsteczki fullereny są rzędu jednego nanometra, czyli jest ona 400 razy większa. To już prawie obiekt makroskopowy.

Można go sobie obejrzyć pod mikroskopem skaningowym [2]. W dodatku ma on wiele stopni swobody związanych z drganiami układu 60 atomów węgla.

Czy taki obiekt może interferować jako całość?

Grupa naukowców z Austrii zamiast dumać postanowiła sprawdzić [3]. Jak łatwo się domyślić, odpowiednio małych graczy nie udało się znaleźć. Uczni musieli zadowolić się samymi piłkami. Z tym już nie było problemu. Po prostu zamówili je w *Dynamic Enterprises Ltd.* z Twyford w Wielkiej Brytanii. (Jak widać, gdyby ktoś sam chciał się takimi piłkami pobawić, to nic nie stoi na przeszkodzie. Niby nie ma w tym nic dziwnego. Fullereny odkryto już 15 lat temu [4], a metodę masowej produkcji wynaleziono 5 lat później [5]. Zastanawiające jest jednak, w ilu miejscach muszą być prowadzone badania nad tymi kuleczkami, skoro oplaca się już po prostu je produkować.)

W każdej dyscyplinie sportu istotna jest rozgrzewka. Fullereny umieszczono w piecyku i podgrzano do temperatury 900–1000 K. (Jak widać, są to bardzo trwałe cząsteczki, skoro takie, a nawet wyższe temperatury im nie szkodzą.) Piłki wylatywały przez otworek w piecyku z (najbardziej prawdopodobną) prędkością 220 m/s. System kolimatorów kierował ich strumień na siatkę dyfrakcyjną (wykonaną nanotechnologicznie z SiN_x) o szerokości szczelin 50 nm i stałej siatki 100 nm, a następnie ich położenie było rejestrowane w systemie detekcyjnym. W wyniku otrzymano obraz interferencyjny z wyraźnie widocznymi prążkami zerowego i pierwszego rzędu [3]. Rozkład intensywności obrazu świetnie zgadza się z przewidywaniem teorii dyfrakcji. Tym samym poprawiono o rząd wielkości stary rekord w dziedzinie obserwacji interferencji kwantowej coraz większych obiektów.

Grupa trenerów kierowana przez selekcjonera, Antona Zeillingera, zastanawia się teraz nad możliwością prowadzenia badań nad zanikaniem interferencji w wyniku zintensyfikowanej obserwacji cząsteczek przechodzących przez siatkę. Oprócz wnikania w podstawy mechaniki kwantowej, interferometria taka może prowadzić do szeregu praktycznych zastosowań, np. w precyzyjnej metrologii czy nanoprodukcji wzorów węglowych na krzemowym podłożu. Autorzy sugerują również, że podobne metody będą mogły być w przyszłości ulepszone w stopniu umożliwiającym obserwację interferencji kwantowej dla obiektów tak dużych jak wirusy. O kotach nie wspominając.

Piotr ZALEWSKI

- [1] T. Asai, T. Akatsuka i S. Haake, *The physics of football*, *Physics World*, czerwiec 1998.
- [2] J.G. Hou, Yang Jinlong, Wang Haiqian, Li Qunxiang, Zeng Changgan, Lin Hai, Bing Wang, D.M. Chen i Zhu Qingshi, *Identifying Molecular Orientation of Individual C60 on a Si(111)-(7x7) Surface*, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 3001, <http://prl.aps.org>
- [3] M. Arndt, O. Nairz, J. Vos-Andreae, C. Keller, G. von der Zouw i A. Zeillinger, *Wave-particle duality of C60 molecules*, *Nature* **401** (1999) 680.
- [4] H.W. Kroto, J.R. Heath, S.C. O'Brien, R.F. Curl i R.E. Smalley, *C60: buckminsterfullerene*, *Nature* **318** (1985) 162.
- [5] W. Krätschmer, L.D. Lamb, K. Fostiropoulos i D.R. Hauffman, *A new form of carbon*, *Nature* **347** (1990) 354.

Klub 44

Regulamin

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (4), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (5), P. Gadziński (6), K. Jedziniak, J. Olszewski, L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha, T. Józefczyk
(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie **Klubu 44 M** (alfabetycznie):
„dwukrotni”:

Z. Bartold, W. Bednorz, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, J. Witkowski, G. Zakrzewski;
„jednokrotni”:
W. Bednarek, T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, B. Dydą, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Łazuka, J. Mańdziuk, M. Marczak, M. Matłega, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, K. Patkowski, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, Z. Skalik, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zająć, Z. Zaus, K. Zawislowski, P. Żmijewski.

Weterani **Klubu 44 F** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):
P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma, P. Gworys, A. Idzik
(każdy z nich trzykrotnie przekroczył barierę 44 punktów).

Pozostali członkowie **Klubu 44 F** (alfabetycznie):
„dwukrotni”:
J. Lipkowski, J. Łazuka, P. Perkowski, T. Wietecha;
„jednokrotni”:
A. Borowski, P. Gadziński, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, A. Nowogrodzki, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, P. Wach, M. Wójcicki.

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n + 2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1999 upłynął 31 stycznia 2000). Szkicowe rozwiązania podawane są w numerze $n + 4$.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przysłał zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymują ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. 10, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy 44 punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44 M** lub **Klubu 44 F**.

14. Po zgromadzeniu 44 punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość 44 zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44 M** (lub **Klubu 44 F**) daje tytuł **Weterana Klubu 44 M** (**Klubu 44 F**).

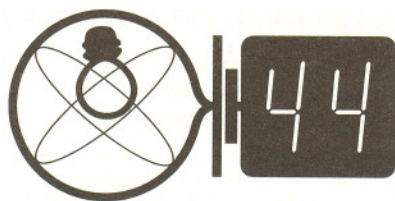
16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy zbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów trzykrotnie; następny raz ukazuje się wtedy, gdy uczestnik powiększy stan swojego konta.

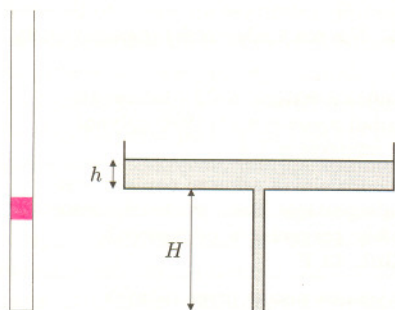
18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2000



Rys. 1 Rys. 2

292. Jednorodna bryła ma kształt graniastoslupa prostego, którego podstawa jest n -kątem foremnym. Dla jakich n bryła ta może się toczyć po poziomej powierzchni, tzn. kiedy po zetknięciu ściany z podłożem będzie się dalej obracała w tę samą stronę, bez poślizgu? Można przyjąć, że siła działa ze strony podłoża tylko na kolejne krawędzie graniastoslupa i ma charakter niesprężysty, tzn. bryła nie podskakuje.

Pytanie poza konkursem: Jeśli n spełnia powyższy warunek, to ile wynosi podczas toczenia się bryły maksymalna liczba „przeskoków” od jednej krawędzi do następnej (uwarunkowana z jednej strony tym, aby bryła pokonała wzniesienie między przeskokami, a z drugiej strony tym, aby siła odśrodkowa nie oderwała jej od podłoża)? Pominąć straty energii poza przeskokami.

Idea zadania pochodzi od dr. Sławomira Brzezowskiego z Krakowa, a została przekazana przez jego uczniów – zwycięzców Olimpiady Fizycznej.

293. Po napompowaniu powietrza do komory ciśnieniowej w dolnej części ustawionej pionowo rury metalowej (rys. 1) zwolniono tłok, który został wyrzucony w górę (tłokiem tym może być zabawka, np. flara opadająca na spadochronie). Obliczyć wysokość osiąganą przez ciężarek o masie 0,4 kg, jeśli rura ma długość 2 m (z czego 75 cm zajmuje komora ciśnieniowa) i średnicę wewnętrzną 28 mm, ciśnienie atmosferyczne wynosi 10^5 Pa, a ciśnienie w komorze w chwili zwolnienia spustu – $5 \cdot 10^5$ Pa. Ponadto dana jest wartość stosunku ciepła właściwych dla powietrza $\gamma = c_p/c_V = 1,4$.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1999

Przypominamy treść zadań:

284. Wąską rurkę o długości H dołączono do otworu w dnie szerokiego naczynia, do którego nalano wody na głębokość h (rys. 2). Z jaką prędkością będzie wypływać z rurki woda?

285. Do źródła napięcia o okresowym przebiegu $U(t)$ przyłączono szeregowo opornik o oporności 100Ω , zwojnicę o zmiennej indukcji L i amperomierz mierzący skuteczną wartość

natężenia prądu I_{sk} . Dana jest tabela przedstawiająca zależność I_{sk} od L :

L [H]	0,03	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	1
I_{sk} [mA]	222	220	213	203	198	195	194

Podać wzór opisujący funkcję $U(t)$ i wartości parametrów występujących w tym wzorze.

Uwaga: odpowiedź może być niejednoznaczna, za prawidłowe będzie uważane każde rozwiązanie dające dobrą zgodność z tabelą.

284. Ciśnienie przy dnie naczynia jest równe sumie ciśnienia atmosferycznego p_0 i ciśnienia słupa wody ρgh . Z drugiej strony, przy dolnym końcu rurki ciśnienie wynosi p_0 , a więc aby znaleźć ciśnienie przy jej górnym końcu, należy od p_0 odjąć ciśnienie słupa wody ρgH . Skok ciśnienia przy przejściu od naczynia do rurki wynosi zatem $\Delta p = \rho g(h + H)$ i jest związany ze skokową zmianą prędkości cieczy, gdyż praca wykonana przy przepływie objętości ΔV wody (równa $\Delta p \cdot \Delta V$) zgodnie z zasadą zachowania energii równa się zmianie energii kinetycznej cieczy, czyli $\rho \Delta V \cdot \Delta(v^2/2)$. Ponieważ prędkość wody w szerokim naczyniu jest praktycznie równa zero, więc w rurce wynosi ona

$$v = \sqrt{2\Delta p/\rho} = \sqrt{2g(h + H)} \quad (\text{równanie Bernoulliego}).$$

Założyliśmy, że ciecz jest nieściśliwa, a jej słup nie ulega rozerwaniu – zatem prędkość pozostaje w rurce stała.

285. Nie powiedzie się próba dopasowania danych do wzoru $I_{sk} = U_{sk}/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$, który obowiązywałby, gdyby napięcie miało przebieg czysto sinusoidalny – nawet „na oko” widać, że dla dużych L natężenie prądu się ustala, a przy takim założeniu powinno maleć do zera. Wnioskujemy więc, że U ma co najmniej dwie składowe – stałą, która decyduje o wartości I_{sk} dla dużych L , i zmienną, odgrywającą pewną rolę dla małych L . Załóżmy, że

$$U(t) = U_0 + U_1 \sin(\omega t).$$

Natężenie prądu będzie w takim przypadku dane wyrażeniem

$$I(t) = I_0 + I_1 \sin(\omega t + \phi),$$

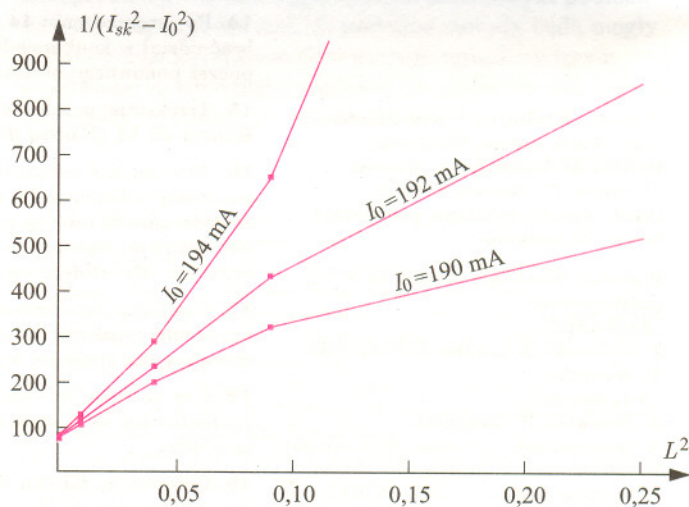
przy czym standardowe przekształcenia prowadzą do wzorów na I_0 i I_1 :

$$I_0 = U_0/R, \quad I_1 = U_1/\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}.$$

Następnie obliczamy I_{sk} :

$$I_{sk} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2/2}.$$

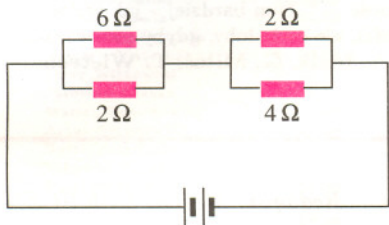
Na podstawie powyższych wzorów można się przekonać, że jeśli na osi x wykresu odłożymy L^2 , a na osi y odłożymy $1/(I_{sk}^2 - I_0^2)$, to przy prawidłowym doborze I_0 punkty zaznaczone według tabeli będą się układać wzdłuż linii prostej. Na rysunku 3 przedstawiono takie wykresy dla trzech wartości I_0 równych 190 mA, 192 mA i 194 mA; zaznaczono przy tym punkty $L = 0,03, 0,1, 0,2, 0,3$ i $0,5$ H. Jak widać, najlepiej pasowałby do linii prostej wykres odpowiadający wartości I_0 pomiędzy 192 a 194 mA. Niech więc $I_0 \approx 193$ mA, $U_0 \approx 19,3$ V. Punkt przecięcia prostej z osią pionową ($L = 0$) odpowiada $y = 1/(I_{sk}^2 - I_0^2) \approx 77 \text{ A}^{-2}$, czyli $I_1 \approx 161$ mA, $U_1 \approx 16,1$ V. Ostatni parametr ω wyznaczymy z nachylenia prostej: czterokrotne zwiększenie y następuje dla $L^2 \approx 0,06 \text{ H}^2$, $L \approx 0,24$ H, a z drugiej strony wzory dowodzą, że wtedy $L\omega = R\sqrt{3}$. Stąd $\omega \approx 720 \text{ s}^{-1}$.



Rys. 3

1. Fotografując z brzegu jeziora o gładkiej powierzchni przeciwny brzeg otrzymano obraz tego brzegu wraz z jego odbiciem w wodzie. W jaki sposób można odróżnić górę od dołu na zdjęciu, jeśli obie połowy nie różnią się pod względem ostrości ani jasności?

2. Który z oporników grzeje się najsilniej (ew. które – jeśli jednakowo)?



3. Transformatory mają zwykle po kilkaset zwojów w każdym z uzwojeń, np. 500 i 200. Ponieważ jednak we wzorze na przekładnię transformatora występuje tylko stosunek liczby zwojów, można by sądzić, że równie dobrze zwojów mogłoby być 50 i 20 lub nawet 5 i 2. Taki transformator spełniałby jednak swoje zadanie tylko pod warunkiem, że: a) natężenia prądów byłyby bardzo wielkie, b) natężenia prądów byłyby bardzo małe, c) napięcia byłyby bardzo wysokie, d) napięcia byłyby bardzo niskie, e) wszelkie inne ciała przewodzące zostałyby oddalone, aby rozproszone pole magnetyczne nie indukowało w nich prądów. Wybrać właściwą wersję i uzasadnić.

4. Aby zmierzyć temperaturę ciała za pomocą termometru rtęciowego, należy trzymać go pod pachą 5–10 minut. Po odczytaniu można go jednak strząsnąć praktycznie natychmiast. Dlaczego?

Po raz drugi w ramach Festiwalu Nauki we wrześniu w Warszawie odbył się **Turniej Rozwiązywania Zadań z Fizyki** – firmowa impreza naszego czasopisma i **Klubu 44 F**. Uczestnicy bawili się znakomicie, raz i drugi żądając przedłużenia turnieju o dodatkowe zadanie. Zwycięzcą został **Tomasz Rudny** (zeszłoroczny zdobywca II miejsca), a dalsze miejsca zajęli pp. **Pielech, Sapieryńska, Smólska i Zakrzewski** (bardzo przepraszamy, ale nie zanotowaliśmy imion). Nagrodami były programy komputerowe, modem i kalkulatory (m.in. graficzny i programowalny). Obok przedstawiamy niektóre z zadań turniejowych.

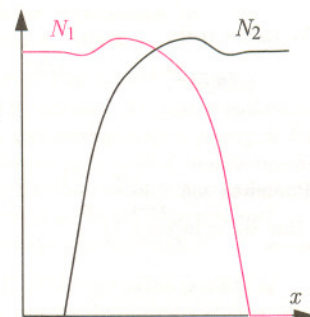
Jak co roku, przegląd przysłanych przez Czytelników rozwiązań zadań ligowych nasunął pewne dodatkowe komentarze:

Zadanie 262. [Prędkość zerwanych końców drutu] (współczynnik trudności $WT = 2,20$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 3$). Bezbłędne rozwiązania nadesłali **A. Idzik** i **J. Łazuka**, natomiast przyjęte przez **M. Wójcickiego** założenie, że prędkość drutu maleje w miarę oddalania się od miejsca zerwania, jest niesłuszne (nie wpłynęło to jednak w dużym stopniu na wynik). Spadek napięcia rozchodzi się bowiem wzdłuż drutu jako impuls nadający kolejnym elementom ośrodku jednakową prędkość – jest to ogólną cechą fal w ośrodku jednowymiarowym.

Zadanie 263. [Minimalna dawka promieniowania pochodzącego od punktowego źródła, przy ustalonym początku i końcu drogi] ($WT = 2,14$, $LPR = 3$). Trudno oczekiwać od uczestników ligi znajomości rachunku wariacyjnego – dlatego zamiast polecenia „wyznaczyć drogę, dla której całkowita dawka jest minimalna” w zadaniu zamieszczono tylko żądanie rozpatrzenia wskazanej rodziny dróg i znalezienia jakiegokolwiek drogi korzystniejszej od nich (ale niekoniecznie optymalnej). Okazało się jednak, że spośród trzech poprawnych rozwiązań (**A. Idzika, J. Łazuki** i **M. Wójcickiego**) aż dwa są „perfekcyjne”, tzn. zawierają rozwiązania równania Eulera rachunku wariacyjnego. Trzecie rozwiązanie ogranicza się natomiast do porównania dawek dla wybranej rodziny dróg, ale za to uwzględnia zmianę dawki wynikającą ze zjawiska Dopplera! Hm... z pewnością jest to niezbędne, jeśli prędkość podróżnika jest znaczącym ułamkiem prędkości cząstek promieniowania...

Zadanie 269. [Siła odrzutu działająca na preparat promieniotwórczy osłonięty z jednej strony] ($WT = 2,53$, $LPR = 5$). Poprawne rozwiązania – **A. Idzik, J. Łazuka, M. Misiak, A. Nowogrodzki** i **A. Surma**, przy czym w jednym z nich wystąpił ciekawy błąd. Zadanie wymagało uśrednienia jednej składowej pędu względem kierunków emitowanej cząstki promieniowania, czyli obliczenia średniej wartości $\cos \theta$ względem kierunków w półprzestrzeni; otrzymuje się $\langle \cos \theta \rangle = 1/2$. Jeśli jednak uśrednić względem kierunków w płaszczyźnie (na tym polegał błąd Czytelnika), to wynikiem jest $\langle \cos \theta \rangle = 2/\pi$. A gdyby tak skonstruować silnik działający w przestrzeni czterowymiarowej?

Zadanie 270. [Maksymalny ciężar, jaki można zawiesić na sznurku zamocowanym na końcach] ($WT = 2,28$, $LPR = 4$). Bezbłędne okazały się rozwiązania **A. Arciszewskiego, A. Idzika, J. Łazuki** i **M. Łupieżowca**, a ponadto kilka z nich zawierało analizę sięgającą dalej niż rozwiązanie wzorcowe. Tak więc **M. Łupieżowiec** wyznaczył *analitycznie* ekstrema funkcji wyrażającej szukany ciężar, co wymagało rozwiązania równania trzeciego stopnia, natomiast pozostali trzej wymienieni Czytelnicy zamieścili w swoich pracach wykresy przedstawiające napięcie sznurka w zależności od punktu zawieszenia ciężaru. **A. Idzik** przedyskutował jeszcze zmiany charakteru tego wykresu przy zmianach odległości między zamocowanymi końcami sznurka (parametr ten – nazwijmy go e – był ustalony i równy 0,87 długości sznurka). „Jasnym się dla mnie stało wyrachowanie Autora zadania” – napisał, no i trudno zaprzeczyć! Rzeczywiście, wybór e wziął się stąd, aby przebieg wykresu był „jak najciekawszy”. Na przykład, przy małych wartościach e zadanie staje się banalne, gdyż najkorzystniejsze jest wtedy zawieszenie ciężaru w środku sznurka (wtedy napięcie każdej jego części jest równe w przybliżeniu połowie ciężaru), a najmniej korzystne – w pobliżu jednego z końców (wtedy ciężar wisi na jednej części, podczas gdy druga zwisa luźno).



Oznaczenia: x – odległość punktu zawieszenia od jednego z końców sznurka, N_1 i N_2 – napięcie jednej i drugiej części sznurka.

Zadanie 273. [Poprawa izolacji cieplnej budynku] ($WT = 1,33$, $LPR = 8$). W rozwiązaniu nadesłanym przez **Z. Galiasa** zmieniona została treść zadania (inny jest więc wynik), ale fachowość komentarza przeważa nad wszystkim innym. Jak się dowiadujemy, zgodnie z Polską Normą PN-91 B-02020, współczynnik przenikania ciepła może być obliczony wg wzoru

$$k_0 = \frac{1}{R_i + \sum (d_j/\lambda_j) + R_e}$$

gdzie R_i i R_e są oporami przejmowania ciepła dla obu stron ściany... No cóż, pozostaje schylić czoła przed autorytetem Polskiej Normy (ale jaki właściwie sens fizyczny ma, u licha, ten opór przejmowania ciepła?).

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 261 zadaniach

Zbigniew Galias	– Kraków	38,08
Tomasz Wietecha	– Tarnów	2-37,76
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	1-31,26
Aleksander Surma	– Myszków	3-25,25
Artur Arciszewski	– Kielce	22,63
Jarosław Łazuka	– Warszawa	2-20,19
Grzegorz Miłoś	– Mielec	17,14
Tomasz Rudny	– Warszawa	15,53
Marek Wójcicki	– Szczecin	1-13,96
Jacek Konieczny	– Poznań	10,56
Marian Łupieżowiec	– Zebrzydowice	9,81

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1997–1999 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 9 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.



Zadanie 276. [Wyznaczyć temperaturę wody i pary po ustaleniu się równowagi] ($WT = 2,20$, $LPR = 5$). Gdyby tak ogłosił konkurs na najbardziej zawiłą metodę rozwiązania prostego problemu, to niektóre rozwiązania zadania 276 miałyby duże szanse. Tym Czytelnikom, którzy rozpatrywali parowanie kolejnych partii wody w zmieniającej się temperaturze i pracowicie wyliczali numerycznie odpowiednie całki, należy zwrócić uwagę, że pomijali ciepło oddane przez wcześniej powstałą parę (zresztą ciepło właściwe pary nie było dane). Dobre (lub poprawne) rozwiązania: **A. Idzik, M. Wójcicki, G. Miłoś, T. Wietecha i A. Surma.**

Zadanie 281. [Opór zastępczy sieci 18 oporników] ($WT = 2,23$, $LPR = 6$). Zacytujmy perełkę pochodzącą ze (skądinąd prawidłowego) rozwiązania przyslanego przez **A. Arciszewskiego**: „jeśli prąd wpływający do obwodu posiadał świadomość...” Tym bardziej – jak sądzę – można by odwoływać się do jego poczucia przyzwoitości, ale co byłoby, gdyby przeważała złośliwość albo perfidia? Pozostałe dobre rozwiązania: **A. Idzik, G. Miłoś, T. Wietecha, J. Łazuka i T. Rudny.**

Zadania z matematyki nr 395, 396

Redaguje Marcin E. KUCZMA

395. Liczby rzeczywiste $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2000}$ tworzą ciąg monotoniczny. Udowodnić, że

$$\sum_{k=0}^{2000} (-1)^k a_k^2 \geq \left(\sum_{k=0}^{2000} (-1)^k a_k \right)^2.$$

396. Dane są dwie przecinające się sfery oraz sześć różnych punktów A, B, C, D, E, F . Punkty A i B leżą na jednej z tych sfer, punkty C i D na drugiej; punkty E i F należą do obu sfer. Punkt E leży na odcinku AC , a punkt F leży na odcinku BD , który jest równoległy do prostej przechodzącej przez środki danych sfer. Dowieść, że rzuty prostokątne odcinków AB i CD na prostą AC mają jednakową długość.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1999

Przypominamy treść zadań:

387. Ciąg liczb dodatnich a_0, a_1, a_2, \dots spełnia zależność $2^{n+1}(a_{n-1} - a_n) = a_n^2$. Wykazać zbieżność i obliczyć granicę tego ciągu.

387. Podstawienie $a_n = 2^n c_n$ sprowadza daną zależność rekurencyjną do postaci

$$(c_n + 1)^2 = c_{n-1} + 1.$$

Skoro liczby c_n są dodatnie, otrzymujemy łańcuszek równości

$$c_n + 1 = (c_{n-1} + 1)^{1/2} = (c_{n-2} + 1)^{1/4} = \dots \\ \dots = (c_0 + 1)^{1/2^n} = (a_0 + 1)^{1/2^n}.$$

W takim razie

$$a_n = 2^n \left((a_0 + 1)^{1/2^n} - 1 \right) = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \cdot \ln(a_0 + 1),$$

$$\text{gdzie } x_n = \frac{\ln(a_0 + 1)}{2^n}.$$

Ponieważ zaś $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, zatem, ostatecznie, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln(a_0 + 1)$.

388. Dla ustalonej liczby naturalnej n rozwiązać równanie

$$\left(2 - \frac{1}{x_1}\right) \left(2 - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(2 - \frac{1}{x_n}\right) = 3$$

w liczbach całkowitych x_1, x_2, \dots, x_n .

388. Dla $n = 1$ mamy jedyne rozwiązanie $x_1 = -1$. Dla $n = 2$ równanie przybiera (po przekształceniu) postać $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 3$ i ma cztery rozwiązania (x_1, x_2) : $(-1, 1), (1, -1), (3, 5), (5, 3)$.

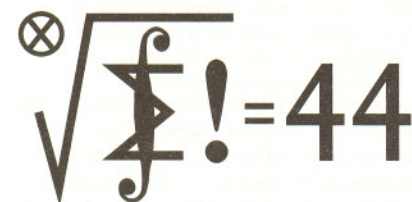
Przyjmijmy, że $n \geq 3$ i że liczby całkowite x_1, x_2, \dots, x_n spełniają podane równanie. Jeśli $x_i = 1$, to $2 - (1/x_i) = 1$. Jeśli któraś z liczb x_i jest różna od 1, to odpowiedni czynnik $2 - (1/x_i)$ jest większy lub równy $3/2$. Mogą być co najwyżej dwa takie czynniki; w przeciwnym razie ich iloczyn byłby większy od 3.

Uwzględniając wyniki uzyskane w przypadkach $n = 1$ oraz $n = 2$ stwierdzamy, że w przypadku ogólnym układ liczb całkowitych (x_1, x_2, \dots, x_n) jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy albo jedna z liczb x_i jest równa -1 , a pozostałe 1, albo jedna z liczb x_i jest równa 3, jedna 5, a pozostałe są jedynekami.

Kolejny rok ligowy za nami. Kolejna okrągła liczba pojawiła się w statystyce ligowej: mamy już dwudziestu Weteranów ligi matematycznej. Może należałoby wprowadzić status „Super-weterana”, chlubiącego się dwukrotnym wypełnieniem weterańskiej normy? Do tej pory tylko dwaj uczestnicy wykonali sześć czterdziestoczwieropunktowych rund... Ciekawe, czy kiedykolwiek zostanie pobity rekord, ustanowiony już dość dawno przez **Jerzego Janowicza**, który swój udział w lidze rozpoczął od rozwiązania zadań z *Delty* 9/1981 (kiedy to liga właśnie wystartowała), aby po dwunastu latach nieprzerwanego uczestnictwa, zadaniami z numeru 10/1993 zamknąć ósme okrażenie.

Jak przed rokiem, spotkaliśmy się we wrześniu w Warszawie w gronie członków **Klubu 44 M**, którzy nie przerwali kontaktu z ligą. Także scenariusz spotkania był taki sam, jak rok temu: mieliśmy sesję „szybkiego rozwiązywania zadań” (otwartą dla publiczności i wkomponowaną w ciąg imprez III Festiwalu Nauki) oraz wysłuchaliśmy wykładu Zbigniewa Marciniaka o tym, jak język teorii grup pozwala elegancko formułować i dowodzić twierdzenia na temat zliczania kombinatorycznego.

A teraz omówienie wybranych zadań: co ciekawego zaprezentowali w swych rozwiązaniach uczestnicy ligi, jaka wpadka tym razem była udziałem prowadzącego ligę, które wreszcie zadania okazały się najtrudniejsze (minimalne liczby poprawnych rozwiązań).



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 2000

Zestawienie na następnej stronie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1997, 1998 lub 1999.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Lista uczestników
ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 383 (WT=2,00) i 384 (WT=1,25)
z numeru 6/1999

Piotr Kumor	- 4-	46,20
Bogumiła Piotrowska	-	45,60
Krzysztof Zapisek	-	42,22
Janusz Olszewski	- 3-	37,91
Andrzej Daniluk	-	37,07
Rafał Pikula	-	36,97
Zbigniew Galias	- 1-	35,12
Andrzej Jówlik	-	34,12
Paulina Domagalska	-	34,09
Tomasz Wietecha	- 3-	33,66
Jerzy Witkowski	- 2-	33,22
Jarosław Łazuka	- 1-	31,44
Marian Łupieżowiec	-	31,29
Artur Arciszewski	-	29,56
Bartłomiej Dyda	- 1-	29,29
Nikodem Szpak	-	29,06
Bartłomiej Marczak	-	28,94
Krzysztof Jasek	-	27,47
Wojciech Maciak	-	27,26
Michał Adamaszek	-	26,73
Zbigniew Sewartowski	-	25,35
Mieczysław Jędrzejowski	-	24,99
Michał Lewandowski	-	22,96
Przemysław Gadziński	- 6-	22,39
Konrad Patkowski	- 1-	21,17
Andrzej Nagórko	-	21,10
Marek Prausa	- 3-	20,73
Marcin Peczański	-	20,12

Legenda (przykładowo): stan konta
6-22,39 oznacza, że uczestnik już
sześciokrotnie zdobył 44 punkty,
a w kolejnej (siódmej) rundzie ma
22,39 punktów.

Dwóch uczestników w tej kolejce
ligowej przekroczyło próg 44 punktów:
B. Piotrowska – po raz pierwszy,
a Weteran P. Kumor – po raz piąty(!).

Zadanie 367. [Układ równań w liczbach nieujemnych: $\sqrt{a+x} + \sqrt{b+y} + \sqrt{c+z} = 1$;
 $\sqrt{a+y} + \sqrt{b+z} + \sqrt{c+x} = 1$; $\sqrt{a+z} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+y} = 1$; dowieść, że $a = b = c$ lub
 $x = y = z$] (współczynnik trudności WT=2,71; liczba poprawnych rozwiązań LPR=3).

P. Kumor proponuje interpretację geometryczną: składniki rozważanych sum to długości odcinków łączących punkty $(\sqrt{a}, 0)$, $(\sqrt{b}, 0)$, $(\sqrt{c}, 0)$ z punktami $(0, \sqrt{x})$, $(0, \sqrt{y})$, $(0, \sqrt{z})$, w trzech permutacjach; tezę uzyskuje rozważając kilka przypadków i korzystając z tego, że w niezdegenerowanym czworokącie wypukłym suma długości przekątnych jest większa niż suma długości dwóch przeciwległych boków.

Pozostałe dwa dobre rozwiązania: **K. Patkowski** (nie prostsze od firmowego) i **J. Witkowski** (analogiczne do firmowego).

Zadanie 370. [Losowanie ze zwracaniem liczb x_1, \dots, x_k ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$; obliczyć wartość oczekiwaną $\prod x_i$ pod warunkiem $(\sum x_i = n)$] (WT=3,17; LPR=3). Oznaczając badaną wartość oczekiwaną przez $E(n, k)$ można uzyskać zależność rekurencyjną:

$$E(n, k) = \binom{n-1}{k-1}^{-1} \sum_{i=1}^n \binom{n-i-1}{k-2} i E(n-i, k-i); \text{ w takiej postaci podaje ją } \mathbf{K. Patkowski};$$

a w postaci nieznaczącej się od tego różniące – **A. Nagórko**. Ostateczny wynik

$$E(n, k) = \binom{n-1}{k-1}^{-1} \binom{n+k-1}{2k-1} \text{ otrzymuje się stąd przez indukcję. Trzecie dobre rozwiązanie (} \mathbf{M. Mostowski} \text{) też sprowadza się do schematu indukcyjnego.}$$

Zadanie 371. [$x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$; $\sum x_k = 1$, $\sum \sqrt{k}(\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k+1}}) = 1$;
 $(x_1, \dots, x_n) = ?$] (WT=2,45; LPR=3). Szukane układy mają postać $(a, a, \dots, a, 0, 0, \dots, 0)$,
gdzie a jest liczbą tak dobraną, by $\sum x_k = 1$. **P. Kumor** dowodzi tego przez indukcję
względem n ; **M. Kasperski** – jak w rozwiązaniu firmowym.

B. Dyda zauważa, że zbiór $A \subset \mathbf{R}^n$, określony przez warunki $x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ oraz
 $\sum x_k = 1$, jest zwarty i wypukły, po czym sprawdza, że suma występująca w ostatnim
warunku zadania określa funkcję $A \rightarrow \mathbf{R}$, ciągłą i ściśle wklęsłą; taka funkcja musi przyjmować
w pewnych punktach zbioru A swoją wartość minimalną; a może ją przyjąć tylko w punktach
ekstremalnych zbioru A , którymi są właśnie punkty wymaganej postaci; w tych zaś punktach
przyjmuje wartość 1; stąd teza. (Punkt ekstremalny zbioru wypukłego – to punkt nie będący
kombinacją wypukłą żadnej pary innych punktów tego zbioru.)

Zadanie 380. [Maksymalne pole trójkąta równobocznego wpisanego w prostokąt o zadanych
bokach] (WT=2,40; LPR=10). Zadanie, jak widać, niezbyt trudne; dość dużo poprawnych
rozwiązań – mniej lub bardziej rachunkowych. Ze skrucich trzeba się przyznać, że rozwiązanie
firmowe nie kwalifikuje się do kategorii „rozwiązań poprawnych” – gubi bowiem przypadek,
gdy dwa wierzchołki trójkąta leżą na dwóch krótszych bokach prostokąta. To przegapienie
szczęśliwie nie wpłynęło na końcowy wynik, ale luka jest niewątpliwa.

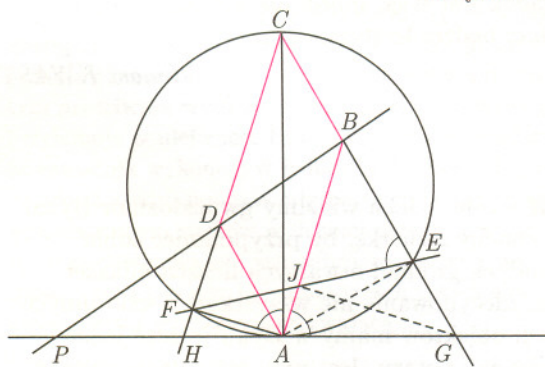
Zadanie 383. [$ABCD$ – równoległobok z ostrym kątem A ; okrąg o średnicy
 AC przecina proste CB i CD w punktach E i F ; styczna do okręgu w punkcie
 A przecina BD w punkcie $P \Rightarrow$ punkty E, F, P są współliniowe] (WT=2,00;
LPR=18). Wiele ciekawych metod. Bardzo zgrabne rozwiązanie, używające
prostych środków, przedstawili **W. Bednorz** oraz **A. Idzik**:

Prosta AP przecina proste CB i CD w punktach G i H (rys. 1); trójkąty
 HAD i AGB są jednokładne względem punktu P , odcinek AF jest wysokością
w pierwszym z tych trójkątów. Niech J będzie punktem przecięcia prostych EF
i AB ; $\angle BEJ = \angle CAF = \angle JAG$, więc na czworokącie $AGEJ$ można opisać
okrąg; wobec tego $\angle AJG = \angle AEG = 90^\circ$, czyli odcinek GJ jest wysokością
w trójkącie AGB . Zatem punkty F i J odpowiadają sobie we wspomnianej
jednokładności; a to znaczy, że prosta EF przechodzi przez punkt P .

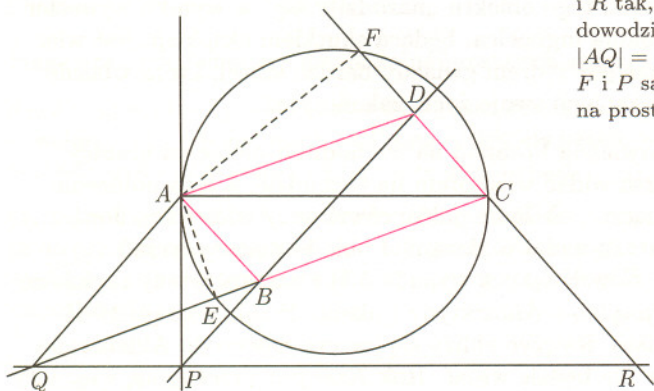
Inaczej rozumuje **L. Kamiński**: na prostych CE i CF wyznacza punkty Q
i R tak, by prosta QR była równoległa do AC i przechodziła przez P (rys. 2);
dowodzi następnie (pominiemy tu szczegóły, nietrudne do uzupełnienia), że
 $|AQ| = |CR|$, skąd wniosek, że punkty A, C, Q, R leżą na okręgu; punkty $E,$
 F i P są rzutami prostokątnymi punktu A na proste CQ, CR i QR , więc leżą
na prostej Simsona punktu A względem trójkąta CQR .

Rozwiązanie oparte na twierdzeniu Menelaua (podobne
do firmowego) przysłał **A. Nagórko**. Pozostałe poprawne
rozwiązania – albo znacznie bardziej skomplikowane pojęciowo,
albo uciążliwie rachunkowe.

Zadanie 384. [p – liczba pierwsza, $p \nmid n \Rightarrow n \mid p^{n-1} - 1$]
(WT=1,25; LPR=24). Większość rozwiązań sprowadza się do
spostrzeżenia, że w myśl twierdzenia Eulera $p^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$,
gdzie $\phi(n)$ jest liczbą elementów zbioru $\{1, \dots, n\}$, pierwszych
względem n , a więc liczbą mniejszą od n , a więc dzielnikiem
liczby $n!$; stąd natychmiast wynika, że $p^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.



Rys. 1

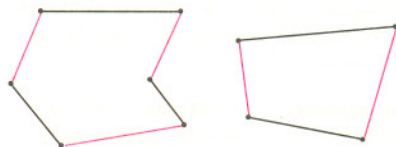


Rys. 2



Rozwiązanie zadania M 909.

Szachistów będziemy przedstawiać jako punkty na płaszczyźnie. Pary, które spotkały się w pierwszej rundzie, połączymy czarnym odcinkiem, zaś pary, które spotkały się w drugiej rundzie – kolorowym. Zauważmy, że od każdego punktu odchodzi jeden odcinek czarny i jeden kolorowy. Wynika z tego, że powstały graf rozpada się na rozłączne, zamknięte cykle (p. przykładowy rysunek), w których odcinki czarne i kolorowe występują na przemian. Tak więc każdy z tych cykli jest łamaną zamkniętą o parzystej liczbie krawędzi. Wybierając z każdej z nich połowę wierzchołków tak, by żadne dwa nie były połączone krawędzią, utworzymy szukany zbiór.



Gdzie szukać śladów supernowych? Chyba jasne: po eksplozji powinna zostać gwiazda neutronowa, a wokół niej ekspandująca mgławica, a więc jeśli ma się odpowiednio potężny teleskop... To w zasadzie prawda, ale świadectw takich wydarzeń warto też szukać niemal pod nogami.

Nie ma, oczywiście, sensu szukać śladów supernowej, która wybuchła w odległości parseka lub bliżej. Znalezienie się Ziemi głęboko w takiej mgławicy (oznaczanej zazwyczaj symbolem SNR, od angielskiego *supernova remnant*), zlikwidowałyby cały problem przez likwidację bądź Ziemi, bądź jakiegokolwiek życia na niej. Eksplozja w odległości – powiedzmy – dziesięciu parseków lub trochę dalej mogłaby zniszczyć życie na Ziemi w sposób bardziej wyrafinowany, niejako „cudzymi rękami”. Wystarczyłoby zniszczenie np. warstwy ozonowej w atmosferze, a reszty dokonałoby już skądinąd życiodajne Słońce swoim promieniowaniem nadfioletowym. Wtedy też nie byłoby komu zastanawiać się nad takimi problemami.

Ale jeżeli supernowa wybuchłaby w odległości 50 pc lub dalej, to wyemitowane przez nią wysokoenergetyczne cząstki weszłyby w reakcje jądrowe z atomami gazów atmosferycznych lub skorupy ziemskiej, tworząc anomalne ilości różnych izotopów. W końcu Ziemia mogłaby też zwyczajnie zgarniać materię pozostałą po rozproszonej mgławicy – i tych właśnie izotopów należy poszukiwać. Miejscami, gdzie mogłyby się one gromadzić i przetrwać w niezakłóconej postaci do naszych czasów, są np. osady oceaniczne i znacznie łatwiej dostępne lodowce. Trzeba od razu przyznać, że nie ma bezspornych dowodów na obecność takich izotopów na Ziemi, niemniej jednak prowadzone są prace teoretyczne usiłujące wykryć, jakie to mogłyby być izotopy. Ich potencjalnym źródłem byłaby gwiazda, z której narodziła się Gemia, tajemniczy pulsar odległy o 150 pc, liczący zapewne 300 000 lat. Pierwsze obserwacje związane z tym zagadnieniem wykazały, że w głębokich warstwach lodu na Antarktydzie istnieje nadmierna ilość berylu 10. Wiek tych warstw oceniono na 35 000 i 60 000 lat. Nie wiadomo, czy takie opóźnienie osadzenia się berylu 10 w lodach w stosunku do eksplozji proto-Gemingi jest usprawiedliwione. Ponadto uważa się, że jeżeli beryl 10 jest śladem po supernowej, to powinny mu towarzyszyć inne jeszcze izotopy, których obecności na razie nie badano. Zagadek jest więc sporo, ale szukanie śladów supernowych pod nogami z pewnością będzie kontynuowane.

Tomasz KWAST

Luty



Zgodnie z obowiązującym (niemal na całym świecie) kalendarzem gregoriańskim przestępny jest rok, którego numer jest podzielny przez 4. Wyjątkiem są lata podzielne przez 100, ale jeżeli numer roku dzieli się przez 400, to rok jest jednak przestępny.

W lutowe wieczory w zachodniej już stronie nieba widzimy gwiazdozbiór Byka, na którego zawsze warto skierować choćby lornetkę, by przypomnieć sobie obraz Plejad. To jedna z bardzo młodych gromad otwartych licząca kilkadziesiąt gwiazd, przy czym w lornetce widać zdecydowanie nie wszystkie. Wśród innych niedostrzegalnych za pomocą lornetki obiektów mamy w Byku jeszcze jeden bardzo słynny obiekt, zarazem młody, jak i stary. Jest nim, jak łatwo zgadnąć, Mgławica Krab (M 1 w katalogu Messiera) wraz z genetycznie związanym z nią pulsarem. Oba składniki tego obiektu „narodziły się” w wyniku wybuchu supernowej w 1054 roku. Sama mgławica, będąca skutkiem eksplozji, jest więc niezwykle młoda, pulsar zaś jest jądrem gwiazdy bardzo starej, która właśnie niecałe tysiąc lat temu w eksplozji swoje życie zakończyła.

Wenus nadal świeci jako Gwiazda Poranna na wschodnim niebie na granicy Strzelca i Koziorożca. Marsa widać wieczorem na zachodzie, a jego położenie 12 II dość dokładnie wyznacza położenie punktu równonocy wiosennej. Jowisz jest nadal w Rybach, a Saturn nadal w Baranie i obie te planety widać w pierwszej połowie nocy. Nów Księżyca wypada 5 II i nastąpi wtedy częściowe zaćmienie Słońca widoczne tylko z Antarktydy i okolic. Pełnia nastąpi 19 II (rocznica urodzin Kopernika). Księżyc zbliży się jeszcze mocno do Aldebarana 14 II, ale z Polski zakrycia nie będzie widać. Rok 2000 jest przestępny, więc luty ma 29 dni.

T.K.

$$\frac{\frac{ab}{(a,b)} \cdot \frac{bc}{(b,c)} \cdot \frac{ca}{(c,a)}}{\frac{a^2 b^2 c^2}{(a,b,c)^2}} = \frac{ab \cdot bc \cdot ca}{a^2 b^2 c^2} \cdot \frac{(a,b,c)^2}{(a,b) \cdot (b,c) \cdot (c,a)} = \frac{(a,b,c)^2}{(a,b) \cdot (b,c) \cdot (c,a)},$$

a zatem zamiast podanej w zadaniu równości prawdziwa jest równość

$$\frac{[a,b] \cdot [b,c] \cdot [c,a]}{[a,b,c]^2} = \frac{(a,b,c)^2}{(a,b) \cdot (b,c) \cdot (c,a)}.$$

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (20')

Wyjaśnienie oszustwa (20):

Oszustwo dosyć prymitywne – *oczopląs przy ułamkach*. Końcówka rozwiązania powinna wyglądać następująco:

GRY (10)

Znamy już precyzyjną definicję gry. Teraz nauczymy się dodawać gry. Można dodać dowolną (skończoną) liczbę gier, ale najlepiej wyjaśnić operację dodawania w przypadku sumy dwóch gier. Niech dane będą gry

$$G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_n\} \text{ i } H = \{H_1, H_2, H_3, \dots, H_m\}.$$

Przypominamy, że pierwszy z powyższych zapisów oznacza, iż pierwszy ruch w grze G polega na wyborze jednej z pozycji (czyli też gier w przyjętym przez nas sensie) G_1, G_2, \dots, G_n , które to pozycje będziemy nazywać opcjami gry G .

Sumą gier G i H nazwiemy grę

$$G \oplus H = \{G_1 \oplus H, G_2 \oplus H, G_3 \oplus H, \dots, G_n \oplus H, G \oplus H_1, G \oplus H_2, G \oplus H_3, \dots, G \oplus H_m\}.$$

Zastanówmy się nad powyższą definicją. Aby dodać gry G i H , musimy umieć dodać grę H do dowolnej opcji gry G oraz grę G do dowolnej opcji gry H . Nie stanowi to problemu, gdyż, jak widzieliśmy poprzednio, gry tworzone są stopniowo z *niczego*, zatem opcje G_1, G_2, \dots, G_n gry G są prostsze (zostały utworzone wcześniej) niż sama gra G .

Jaka jest interpretacja sumy gier? Wyobraźmy sobie, że gramy z kimś jednocześnie w dwie gry, stosując następującą zasadę wykonywania ruchów: gracz wybiera jedną z gier, a następnie wykonuje ruch w tej grze. Po tym przeciwnik wybiera jedną z gier (tę samą lub inną) i wykonuje w niej ruch. I tak dalej. Może się zdarzyć, że zawodnik wykonuje w jednej ze składowych gier kilka ruchów z rzędu, podczas gdy przeciwnik zajęty jest wykonywaniem ruchów w drugiej grze. Sumą gier jest gra *Nim*: podstawową grą jest zabójczo nudna gra z jednym stołem, podczas gdy już suma trzech takich gier ma nieoczywistą strategię wygrywającą.

Nie będziemy się zbytnio wdawać w teoretyzowanie, wspomnimy tylko, że dodawanie gier jest przemienne i łączne.

Popatrzymy, jak dodawanie działa na najprostszych grach.

$0 \oplus 0 = \{\} \oplus \{\} = \{\} = 0$ – mając do wyboru dwie gry, w żadnej z których nie mamy legalnego ruchu, nie jesteśmy w stanie wykonać ruchu i przegrywamy natychmiast.

Ogólniej, $0 \oplus G = G \oplus 0 = G$ dla dowolnej gry G . Co z tego, że do gry G dodano grę 0 , skoro i tak nie można wykonać w niej ruchu. Powyższa równość tłumaczy, dlaczego grę $\{\}$ nazwaliśmy 0 .

$1 \oplus 1 = \{0\} \oplus \{0\} = \{0 \oplus 1, 1 \oplus 0\} = \{1, 1\} = \{1\}$. Zauważmy, że utożsamiamy gry $\{1, 1\}$ i $\{1\}$. Formalnie ich struktura jest inna, ale efekt rozgrywki taki sam. W pierwszej z nich gracz rozpoczynający może przejść do pozycji 1 na dwa sposoby, w drugiej na jeden. Nie ma to żadnego znaczenia. Gra $\{1\}$ może mieć następującą realizację: jeden z graczy ma w kieszeni jedną bierkę, w swoim ruchu może ją wyjąć i położyć na stole (nie dopuszczamy innego zachowania gracza), gracz drugi bierze bierkę ze stołu i mówi *wygrałem*, koniec gry. Analogiczna realizacja gry $\{1, 1\}$ jest następująca: jeden z graczy ma w kieszeni dwie bierki, w swoim ruchu może położyć na stole jedną z nich, gracz drugi bierze bierkę ze stołu i mówi *wygrałem*. Fakt, że pierwszy gracz miał możliwe 2 ruchy (bo mógł wybrać jedną z 2 bierek), nie zmienił niczego, gdyż praktycznie były one nierozróżnialne.

Podobnie stwierdzamy, że

$$2 \oplus 1 = \{0, 1\} \oplus \{0\} = \{0 \oplus 1, 1 \oplus 1, 2 \oplus 0\} = \{1, \{1\}, 2\}$$

oraz

$$1 \oplus 1 \oplus 1 = 1 \oplus \{1\} = \{0\} \oplus \{1\} = \{0 \oplus \{1\}, 1 \oplus 1\} = \{\{1\}, \{1\}\} = \{\{1\}\}.$$

Zachęcamy Czytelników do samodzielnego przeanalizowania struktury gier występujących w powyższych przykładach.

JWR