SPIS TREŚCI
NUMERU 12(307)

W następnym numerze:

Czy szafa musi być obojętna elektrycznie?

Okładki i ilustracje
Anna Ludwicka

Rysunki techniczne
Marcin Adamski

Wybór artykułów w języku angielskim
http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 853-59-61, 843-02-41(-2) wewn. 21
BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Skład systemem TEX wykonała Redakcja.
Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A. w Warszawie, ul. Mińska 65.

Rozkład Boltzmanna

Krzysztof REJMER

Nawet gdyby światem rządziły ściśle deterministyczne prawa, i tak musielibyśmy posługiwać się metodami statystycznymi. Jeden mol gazu (około 22 litrów w warunkach normalnych) zawiera liczbę cząsteczek rzędu 10^{23}. Gdybyśmy nawet byli w stanie śledzić każdą z nich, to i tak informacja o zderzeniu cząsteczki nr $1{,}628 \cdot 10^{17}$ z cząsteczką nr 13451 byłaby raczej bezużyteczna. Interesują nas głównie różne wielkości średnie, takie jak średnia siła działająca na jednostkę powierzchni (ciśnienie). Wprawdzie a priori można ją obliczyć na podstawie znajomości położeń i prędkości wszystkich cząsteczek w danej chwili, jeśli znamy ich oddziaływania, jednak z taką liczbą równań do rozwiązania nie poradziłby sobie najlepszy komputer. Ponadto, gdybyśmy byli w stanie wyznaczyć warunki początkowe, to byłyby one obarczone pewnym błędem pomiaru, ewolucja zaś układu wielu ciał jest na warunki początkowe bardzo czuła, o czym doskonale z doświadczenia wiedzą miłośnicy bilardu. A do tego dochodzą także zaokrąglenia numeryczne i niedokładna znajomość oddziaływań międzycząsteczkowych. Tak więc – nie tędy droga!

Fizyka statystyczna posługuje się pojęciem zespołu statystycznego. Jest to zbiór kopii układu makroskopowego znajdującego się w stanie równowagi termodynamicznej przy zadanych warunkach zewnętrznych, kopii różniących się jedynie stanami mikroskopowymi. Każdej kopii przypisane jest prawdopodobieństwo odpowiadające danemu mikrostanowi. Najprostszy przykład to tak zwany zespół mikrokanoniczny opisujący układ izolowany. W tym przypadku przyjmujemy, że wszystkie mikrostany są jednakowo prawdopodobne. Z układami izolowanymi mamy jednak bardzo rzadko do czynienia. Częstą sytuacją jest taka, w której układ wymienia energię z otoczeniem o stałej temperaturze (termostatem). Zakładając, że układ i termostat tworzą razem układ izolowany – możemy znaleźć rozkład prawdopodobieństwa dla mikrostanów samego układu. Jest ono dane wyrażeniem

$$P_i = \frac{1}{A} \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right),$$

gdzie P_i oznacza prawdopodobieństwo i-tego mikrostanu, E_i jego energię, T temperaturę absolutną, natomiast k_B jest stałą Boltzmanna służącą do przeliczania temperatury na energię. Stała normalizacyjna A jest równa

$$A = \sum_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right).$$

Wielkość ta określa energię swobodną układu, czyli potencjał termodynamiczny, który w stanie równowagi, przy warunkach zewnętrznych określonych przez ustaloną temperaturę, objętość i liczbę cząsteczek w układzie, osiąga minimum. Ten zespół nazywany jest zespołem kanonicznym. Posługując się rozkładem kanonicznym, w łatwy sposób możemy uzasadnić rozkład Boltzmanna. Jeśli interesuje nas układ znajdujący się w zewnętrznym polu i chcielibyśmy znać prawdopodobieństwo (ściślej – gęstość prawdopodobieństwa) znalezienia cząsteczki w punkcie $\vec{r}$, to jest ona proporcjonalna do $\exp\left(-\frac{U(\vec{r})}{k_B T}\right)$, gdzie $U(\vec{r})$ to energia potencjalna cząsteczki w tym punkcie. To z kolei pozwala na znalezienie rozkładu gęstości cząsteczek i wielu innych wielkości, które można znaleźć doświadczalnie i w ten sposób sprawdzić słuszność założeń czynionych przy wyprowadzeniu rozkładu prawdopodobieństwa.

Istnieje jednak pewna trudność teoretyczna. Choć metoda oparta na pojęciu zespołu statystycznego prowadzi do wniosków zgodnych z eksperymentem, to musimy pamiętać o tym, że posługując się tą metodą, obliczamy średnie względem zespołów, podczas gdy w doświadczeniu mamy do czynienia ze średnimi względem czasów. Przyjmujemy, że na ogół obie średnie są jednakowe, jednak nie istnieje dowód, że tak musi być. To bardzo ważny i zarazem bardzo trudny problem. I zupełnie inna historia.

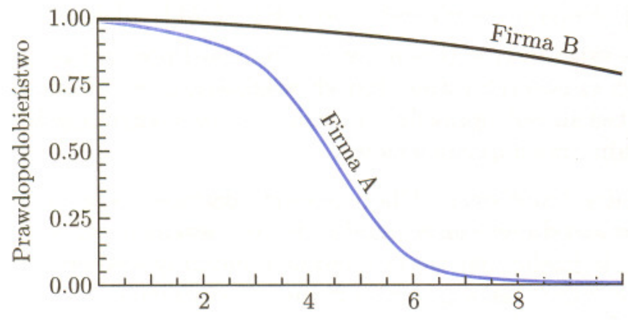
Prawdopodobieństwo rozpadu promieniotwórczego

Jacek DOBACZEWSKI

Nietrwałe obiekty materialne, jakie nas otaczają, rozpadają się w rozmaity sposób. Obiekty makroświata, czyli odpowiednio duże, rozpadają się głównie na drodze przemian chemicznych, jakie w nich zachodzą: deski próchnieją, samochody rdzewieją, itd. Skupmy uwagę na samochodach. Rysunek 1 przedstawia prawo rozpadu chemicznego produktów dwu różnych firm. Firma A używa marnej stali i nie troszczy się o zabezpieczenie antykorozyjne, więc z tysiąca wyprodukowanych przez nią pojazdów po trzech latach zardzewiałych będzie już ze dwieście, a po kolejnych trzech latach – dziewięćset. Krzywa pokazana na rysunku 1 określa więc prawdopodobieństwo, że kupując samochód tej firmy, będziemy się cieszyć jego dobrym stanem w kolejnych latach użytkowania. Jest jasne, że firma B produkuje trwalsze samochody, gdyż krzywa rozpadu jej produktów jest zupełnie inna.

Niestety, obiekty mikroświata, te – wydawałoby się – idealne i nienaruszalne podstawowe cegiełki materii, też się rozpadają. Przede wszystkim rozpadają się jądra atomów. Tylko 253 jądra atomowe, spośród znanych około 2700, są trwałe. Pozostałe, po krótszym lub dłuższym czasie, ulegają rozpadowi, czyli przemianie promieniotwórczej, i powstają z nich inne jądra atomowe. Nietrwała jest też ogromna większość znanych nam cząstek elementarnych. Nie ma nawet pewności, czy trwałe są protony! Na razie ich nietrwałości domagają się tylko niepoprawni teoretycy; rozpadający się proton pozwoliłby im skonstruować ogólniejszą teorię cząstek elementarnych. Nie należy się nimi (teoretykami) za bardzo przejmować, ale tylko do czasu. Jeśli kiedyś rozpad protonu zostanie odkryty doświadczalnie, to wtedy, uwaga, nawet te trwałe 253 jądra atomowe nie będą chronione przed zgryźliwym zębem czasu – i one, wcześniej czy później, się rozpadną.

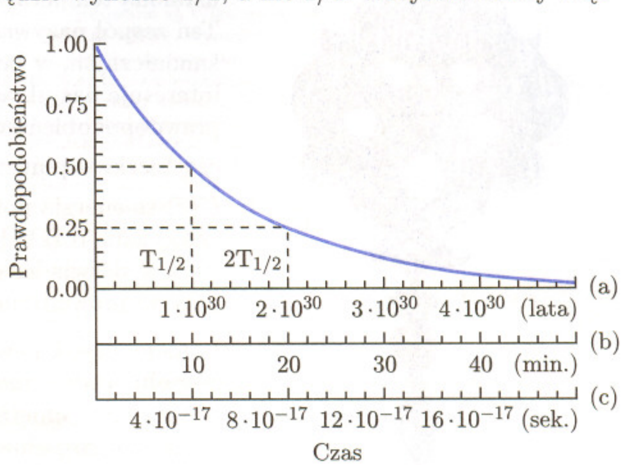
Właśnie. Wszystko zależy, oczywiście, od tego, czy wcześniej, czy później. Czyli od tego, jakie jest prawdopodobieństwo, że nasz ulubiony proton, który nabyliśmy za ciężko zapracowaną jedną milionową jednej milionowej jednej miliardowej grosza, pozostanie jeszcze protonem po kilku latach czy też rozpadnie się np. na bezwartościowy mezon π^0 i pozyton. Żeby podjąć decyzję, czy kupno tegoż protonu jest sensowną inwestycją, musimy popatrzeć na krzywą rozpadu protonów. W ramach Kącika Porad Inwestycyjnych (KPI), specjalnie dla Czytelników *Delty*, autor przygotował rysunek 2, udzielający odpowiedzi na takie pytanie.



Rys. 1. Prawo rdzewienia samochodów.

Ponieważ rozpadu protonu jeszcze w laboratoriach nie wykryto, więc rysunek przedstawia jedynie, co się może zdarzyć w najgorszym razie, czyli prawdziwe prawdopodobieństwa są na pewno większe niż pokazuje narysowana krzywa.

Z rysunku widać, że nie ma się czym martwić. Prawdopodobieństwo, że proton pozostanie protonem, spada do połowy po czasie co najmniej równym około 10^{30} lat (tysiąc miliardów miliardów miliardów lat). Określone jest ono przez uniwersalne prawo rozpadu promieniotwórczego, które mówi, iż po czasie $T_{1/2}$, zwanym czasem połowicznego rozpadu, prawdopodobieństwo, że obserwowany obiekt (cząstka, jądro) będzie dalej istniał, wynosi 1/2. Jest to bardzo ciekawe prawo, gdyż można je stosować, poczynając od dowolnej chwili. Jeśli bowiem w danej chwili mamy pewność (prawdopodobieństwo równe jeden), że obiekt istnieje (jeszcze się nie rozpadł), to po czasie $T_{1/2}$ prawdopodobieństwo to będzie wynosić 1/2. A co się stanie po czasie $2T_{1/2}$? Musimy pomnożyć prawdopodobieństwo, że obiekt dożył do czasu $T_{1/2}$ (równe 1/2) przez prawdopodobieństwo, że przeżyje kolejny czas $T_{1/2}$ (znów 1/2) i otrzymamy 1/4. I tak dalej: po każdym czasie $T_{1/2}$ prawdopodobieństwo P spada kolejne dwa razy, a więc jego zależność od czasu T musi wyrażać się wzorem wykładniczym $P = 2^{-T/T_{1/2}}$. Natomiast co będzie, gdy po pierwszym czasie $T_{1/2}$ sprawdzimy, że obiekt się jeszcze nie rozpadł? Wtedy znów prawdopodobieństwo jego istnienia jest równe jeden i po drugim czasie $T_{1/2}$ będzie wynosiło 1/2, a nie 1/4. Wszystko zależy więc



Rys. 2. Prawo rozpadu promieniotwórczego protonu (a), neutronu (b) i jądra ^{8}Be (c).

od tego, w której chwili mamy pewność, że cząstka istnieje, a prawo rozpadu promieniotwórczego mówi nam jedynie o tym, że będzie ono o połowę mniejsze po każdym przedziale czasu $T_{1/2}$.

Prawo rozpadu promieniotwórczego jest więc odbiciem faktu, że hipotetyczne rozpady w poszczególnych przedziałach czasu są niezależne. Dlatego prawdopodobieństwa rozpadu mnożą się, kiedy dodajemy przedziały czasu.

Uniwersalność prawa rozpadu promieniotwórczego polega na tym, że można je stosować do dowolnych nietrwałych obiektów mikroświata. Dla każdej cząstki wystarczy wziąć pod uwagę jej własny czas połowicznego rozpadu, a więc trzeba jedynie zmienić skalę na rysunku 2. Dla przykładu, pokazano tam też prawa rozpadu promieniotwórczego neutronu swobodnego ($T_{1/2} \sim 10$ min.) i jądra ^{8}Be, czyli izotopu berylu o 4 protonach i 4 neutronach ($T_{1/2} \sim 4 \cdot 10^{-17}$ s). Jedna wspólna krzywa opisuje wszystkie prawdopodobieństwa rozpadu; wystarczy patrzeć na różne osie czasowe.

Wróćmy do rozpadu nabytego uprzednio pojedynczego protonu. Po czasie równym wiekowi Wszechświata (około 10^{10} lat) prawdopodobieństwo jego rozpadu jest rzędu zaledwie $T/T_{1/2} \sim 10^{-20}$. Gorzej jest, gdy spojrzy się na Wszechświat jako całość. We Wszechświecie jest podobno około 10^{80} protonów, więc od narodzin Wszechświata mogło się już było rozpaść około 10^{60} z nich. A tego jest już całkiem sporo – tak około tysiąca Słońc!

Kolektywy i miary

Prawdopodobieństwo według von Misesa i Kołmogorowa

Andrzej DĄBROWSKI

Niemożliwość przewidzenia zjawisk, nazwanych losowymi, była, według koncepcji uczonych XVIII wieku, skutkiem olbrzymiej liczby nie do końca poznanych przyczyn. Wyrazem tego pesymizmu była *zasada równomożliwości*: skoro nie umiemy opisać w pełni mechanizmu powstawania wyników przeprowadzanego eksperymentu, to uznajemy te wyniki za jednakowo możliwe. Z tej zasady Pierre Simon Laplace (1749–1827) wyprowadził definicję prawdopodobieństwa, zwaną do dziś definicją klasyczną Laplace'a. W dziele *Théorie analytique des probabilitées*, wydanym w 1812 roku, przyjął założenie, że możliwych wyników elementarnych (czyli czegoś w rodzaju atomów) jest skończenie wiele i skoro są z założenia jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia jest ilorazem liczby zdarzeń elementarnych, zawartych w tym zdarzeniu, do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych.

Zasada ta po raz pierwszy pojawiła się w pracy *Ars Conjectandi* Jakuba Bernoulliego, wydanej po jego śmierci w 1713 r.

Rachunek prawdopodobieństwa wzbogacił się w XIX wieku o nowe fakty i o nowe metody. Znaczące wyniki uzyskali: Gauss, Poisson, Czebyszew, Poincaré i inni. Ale od czasów Laplace'a nie uczyniono istotnego postępu w podstawach tej teorii. W dalszym ciągu nie było wiadomo, czym jest prawdopodobieństwo zdarzeń, gdy wyników elementarnych doświadczenia jest nieskończenie wiele.

Nauki przyrodnicze, głównie fizyka, dostarczały faktów doświadczalnych, których wyjaśnienie wymagało zaangażowania teorii prawdopodobieństwa na poziomie, odpowiadającym standardom teorii aksjomatycznych, obowiązujących na początku XX wieku. Nie może więc dziwić, że w odczycie Dawida Hilberta na II Międzynarodowym Kongresie Matematyków, który odbywał się w Paryżu w roku 1900, wśród zagadnień kluczowych w rozwoju matematyki XX wieku znalazł się postulat aksjomatyzacji teorii prawdopodobieństwa.

Pierwsze próby aksjomatyzacji prawdopodobieństwa z 1909 roku pochodziły od matematyka francuskiego, Emila Borela (1871–1956) i dotyczyły teorii prawdopodobieństwa w eksperymentach, których wyniki elementarne da się ustawić w ciąg (a więc zbiór wyników jest przeliczalny).

Prawdziwą burzę wywołały jednak prace nad podstawami teorii prawdopodobieństwa profesora Uniwersytetu Berlińskiego, Richarda von Misesa, opublikowane w roku 1919. O powodach podjęcia takiego wyzwania pisał w swojej książce (*Kleines Lehrbuch des Positivismus*) poświęconej pozytywizmowi: *Pozytywizm nie oznacza, że na wszystkie pytania można odpowiedzieć racjonalnie, tak jak medycyna nie opiera się na obietnicy, że wszystkie choroby są uleczalne, ani tak jak fizyka nie postuluje, że wszystkie*

Richard von Mises urodził się 19 kwietnia 1883 roku we Lwowie. Był wszechstronnym matematykiem, specjalistą z zagadnień statystyki i teorii prawdopodobieństwa, fizykiem i filozofem. W wieku 26 lat został profesorem zastosowań matematyki w Strasburgu, gdzie pozostał do 1918 roku; podobne stanowisko zajmował w Berlinie w latach 1920–1933. Zmuszony przez hitlerowców do opuszczenia kraju, najpierw zatrzymał się w Stambule, aby wyemigrować do USA w 1939 roku, gdzie otrzymał stanowisko profesora na Uniwersytecie Harvarda. Był entuzjastą i wybitnym teoretykiem lotnictwa, specjalistą mechaniki płynów, aerodynamiki i aeronautyki. Jego dzieło *Theory of Flight* jest nadal wydawane. Pierwszy uniwersytecki wykład z teorii lotów silnikowych wygłosił w roku 1913. W roku 1915 skonstruował 600-konny samolot silnikowy, który pilotował podczas I wojny światowej jako oficer armii austriackiej. Zmarł 14 lipca 1953 roku w Bostonie.

zjawiska da się objaśnić. Ale możliwość, że może nie być odpowiedzi na jakieś pytania, nie jest wystarczającym powodem, aby nie poszukiwać wyjaśnień albo nie używać tych, które są osiągalne.

Z takim też nastawieniem Richard von Mises przystąpił do budowania teorii prawdopodobieństwa. Wielki wpływ na jego koncepcje miały prace logika angielskiego, Johna Venna (1834–1923), od którego zapożyczył pomysł granicy częstości i losowego ciągu zdarzeń.

Venn jest powszechnie znany z wynalazku *diagramów Venna*.

Von Mises rozpoczyna swoje rozumowanie od krytyki definicji Laplace'a. Jak można określić prawdopodobieństwa uzyskania wyników na fałszywej kości? Albo: w jaki sposób obliczyć prawdopodobieństwo przeżycia kolejnych 5 lat przez 80-latka? Odpowiedzi na te pytania w definicji Laplace'a nie ma.

Odpowiedź von Misesa jest oczywista: należy przeprowadzić serię doświadczeń z kością i **wyliczyć** prawdopodobieństwo z tej serii. Podobnie, należy obserwować wszystkich 80-latków (w tym celu trzeba jakoś tych ludzi uporządkować) i wyliczyć prawdopodobieństwo przeżycia kolejnych 5 lat. A jak wyliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia? Po prostu: dla każdego n obliczyć częstość pojawienia się tego zdarzenia w serii n pierwszych doświadczeń, a następnie wyliczyć granicę tych częstości, gdy n zmierza do nieskończoności.

Częstość jest stosunkiem liczby doświadczeń, w których wystąpiło dane zdarzenie, do liczby doświadczeń.

Matematykowi natychmiast nasuwa się pytanie: czy taka granica zawsze istnieje? I gdybyśmy od nowa przeprowadzili serię doświadczeń, to czy nowa granica częstości byłaby taka sama, jak w poprzedniej serii? Przecież mamy do czynienia z ciągiem *przypadkowych* wyników, więc i serie muszą być różne. Von Mises rozcina ten węzeł gordyjski, zakładając, że interesują nas tylko takie doświadczenia, w których granica częstości istnieje.

Podobne sytuacje zdarzają się w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa, gdzie częstości zbliżają się do pewnej stałej (czyli prawdopodobieństwa zdarzenia), ale za cenę specyficznego sposobu przeprowadzania doświadczeń. Tak więc von Mises uzupełnia założenie istnienia granicy częstości o warunek losowości ciągu wyników.

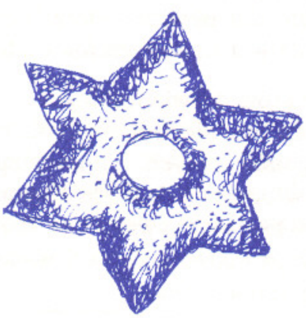
Jest to *prawo wielkich liczb*, udowodnione przez Jakuba Bernoulliego w 1692 roku.

Doświadczenia wzajemnie na siebie nie wpływają i są przeprowadzone w tych samych warunkach.

W grach hazardowych ciąg wypłat może być uważany za losowy, jeśli nie istnieje strategia wygrywania, czyli takiego wyboru momentów przystąpienia do gry, który prowadziłby do zwiększenia prawdopodobieństwa wygranej.

Te ogólnikowe postulaty von Mises uściśla, wprowadzając pojęcie kolektywu.

Kolektyw jest to nieskończony ciąg elementów, z których każdemu jest przypisana etykieta, będąca elementem ustalonego zbioru etykiet. Muszą być co najmniej dwie etykiety, które są przypisane nieskończonej liczbie elementów kolektywu.



Własności kolektywu opisują dwa postulaty:

1. *Istnienie granic*. Niech A będzie dowolnym podzbiorem zbioru etykiet (zdarzeniem). Istnieje wtedy granica W_A częstości zdarzenia A, zwana prawdopodobieństwem: $W_A = \lim n_A/n$, gdzie n_A jest liczbą elementów kolektywu, występujących na n pierwszych miejscach i opatrzonych etykietami ze zbioru A.
2. *Nieregularność*. Niech A i B będą rozłącznymi zbiorami etykiet o prawdopodobieństwach W_A i W_B w kolektywie K. Usuńmy z K te elementy, które nie należą ani do A, ani do B. Z otrzymanego podciągu wybieramy jeszcze raz podciąg K', ale w sposób niezależny od etykiet. W kolektywie K' istnieją prawdopodobieństwa W'_A i W'_B oraz zachodzi wzór $W'_A/W'_B = W_A/W_B$.

Warunek nieregularności stanowi kościec teorii von Misesa. Na przykład, wynika z niego możliwość obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia na podstawie cząstkowych obserwacji – jest to podstawa szacowania prawdopodobieństw w statystyce.

Gdy B jest dopełnieniem A, to z warunku nieregularności wynika, że prawdopodobieństwo zdarzenia A w podkolektywie jest równe prawdopodobieństwu tego zdarzenia w kolektywie.

W praktycznej interpretacji pojęcia prawdopodobieństwa i w jego zastosowaniach przyjęty został powszechnie punkt widzenia von Misesa.

Praktycy nie widzieli istotnej rozbieżności między tym, co ona głosiła, a tym, co sami obserwowali. Poszukiwanie prawdopodobieństwa tylko w jednym kolektywie jest odzwierciedleniem sytuacji, że ciąg etykiet, który obserwujemy, jest jedyną realizacją procesu losowego i w praktyce nie są możliwe żadne powtórzenia. Założenie o nieskończonej długości ciągu etykiet w kolektywie jest potwierdzeniem możliwości wnioskowania z coraz dłuższego ciągu obserwacji. Przeciwnicy teorii uważali, że ten postulat jest nierealistyczny, bo przecież nie jest możliwe, aby prowadzić obserwacje nieskończenie długo.

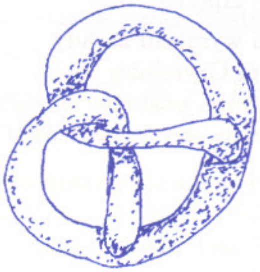
Zwolennicy teorii von Misesa odpowiadali wtedy, że równie nierealistycznie jest mówić o prostych, które przecież w rzeczywistości nie istnieją.

Niestety, warunek nieregularności sformułowany jest niejasno, szczególnie, gdy mowa o sposobach wyboru podkolektywu. Dla matematyka pierwszy wariant teorii był nie do przyjęcia – był logicznie sprzeczny i nie zawierał aksjomatów. Sam von Mises nie uznawał braku aksjomatów za mankament. Pełny wykład jego teorii, zawarty w prawie 600-stronicowej monografii wydanej w 1931 roku, opracowany przez jego żonę, Hildę Geiringer, zawierał już układ aksjomatów, sporządzony przez jego zwolenników. Teoria von Misesa spotkała się z oporem środowiska matematycznego. W swoich wspomnieniach z Getyngi z lat 30. algebraik Saunders MacLane pisze, że odczyt o teorii kolektywów, wygłoszony przez von Misesa przed takimi autorytetami jak Hilbert, Bernays i Bernstein, zakończył się miażdżącą krytyką pomysłów prelegenta.

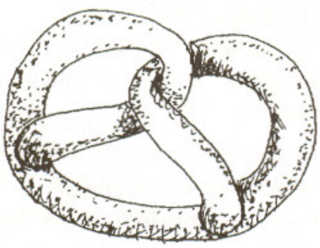
Stosunek do teorii von Misesa ewoluował. Najpierw odrzucono podejrzenie, że kolektywy w ogóle nie istnieją. Wybitny statystyk Abraham Wald w swojej pracy z 1937 roku pokazał, że precyzując pojęcie wyboru podkolektywu, można udowodnić, że kolektywy istnieją. Co więcej, pokazał on, że prawdopodobieństwo w sensie von Misesa istnieje dla bardzo ogólnej klasy zbiorów. Istnieje też nieskończenie wiele kolektywów, w których prawdopodobieństwo danego zdarzenia ma tę samą wartość. Z drugiej jednak strony okazało się, że są zdarzenia, których prawdopodobieństwa w teorii von Misesa nie da się obliczyć (prawdopodobieństwo von Misesa nie jest addytywne!). Nie można, na przykład, w teorii von Misesa rozstrzygnąć, czy z prawdopodobieństwem 1 ciągi częstości są zbieżne do stałej (nie ma w niej mocnego prawa wielkich liczb).

Założenie nieregularności wymusza niekonstruktywność kolektywu, w przeciwnym przypadku wybór podkolektywu musiałby zależeć od etykiet, a to jest niemożliwe.

Trudności w zdefiniowaniu nieregularności w kolektywach były jedną z przyczyn zajęcia się przez Andrieja Kołmogorowa teorio-miarową aksjomatyką rachunku prawdopodobieństwa. Czytając monografię Kołmogorowa z 1933 roku (*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*), można jednak zauważyć, jak wiele idei von Misesa jest tam zawartych. W rozdziale zatytułowanym *Związek ze światem eksperymentu* Kołmogorow skodyfikował zasady stosowania metod probabilistycznych, wyrażając je w duchu teorii von Misesa.



W swojej długoletniej aktywności naukowej Kołmogorow wielokrotnie nawiązywał do pomysłów von Misesa, przyznając, że w latach 30. nie poruszał problemu zastosowań prawdopodobieństwa, gdyż nie wiedział, jak ten problem rozwiązać. Pozostał jednak wierny swoim poglądom, że zdefiniowanie prawdopodobieństwa jako granicy ciągu częstości jest „matematyczną fikcją i nie może mieć praktycznego znaczenia".



Jeszcze jedną próbę ożywienia teorii von Misesa podjął sam Kołmogorow we wczesnych latach 60. Tym razem zajął się ścisłym zdefiniowaniem pojęcia losowości, które w teorii von Misesa było wyrażone w postaci założenia o nieregularności. Definicja Kołmogorowa, oparta na teorii automatów, uznawała ciąg za losowy, jeśli ma maksymalną złożoność. Mówiąc inaczej, ciąg losowy to taki, którego nie da się nauczyć na pamięć. Współpracownik Kołmogorowa, Martin-Löf, udowodnił w 1971 roku, że dla ciągów losowych istnieje granica częstości, czyli, co było wynikiem nieoczekiwanym, że z założenia nieregularności (w wersji Kołmogorowa) wynika założenie istnienia granic w kolektywach.

Obecny stosunek specjalistów do teorii von Misesa można porównać do stosunku do martwego języka, którym z jakiegoś powodu nikt nie chce mówić, ale – po odpowiednich poprawkach i zmianach – w pełni można by było powiedzieć wszystko, co się mówi w żywym języku.

Cytat z podręcznika rachunku prawdopodobieństwa Tutubalina.

Zasada nieoznaczoności

Jerzy KAMIŃSKI

W dniu 23 marca 1927 roku do redakcji *Zeitschrift für Physik* wpłynęła praca *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik* (*O poglądowej treści kwantowoteoretycznej kinematyki i mechaniki*). Autor, Werner Heisenberg, przebywał wtedy na asystenturze u Nielsa Bohra w Kopenhadze. Ta 27-stronicowa publikacja, uważana za najbardziej doniosłe osiągnięcie Heisenberga w fizyce, zawierała sformułowanie zasady nieoznaczoności, która wspólnie z zasadą komplementarności, ogłoszoną przez Bohra latem tego samego roku na konferencji w Como, i podaną nieco wcześniej przez Maxa Borna statystyczną interpretacją funkcji falowej, stanowi fundament tzw. kopenhaskiej interpretacji (nierelatywistycznej) mechaniki kwantowej, do dziś bardzo kontrowersyjnej, lecz kończącej głęboką przemianę fizyki, w której wyniku powstała teoria opisująca niezmiernie szerokie spektrum zjawisk fizycznych i zmieniająca całkowicie nasze rozumienie przyrody.

W mechanice klasycznej opisuje się ruch elektronu, podając jego położenie i prędkość w dowolnej chwili. Heisenberg twierdził jednak, że w mikroświecie pojęcie toru cząstki nie ma sensu. Jeśli bowiem chcemy dokładnie znać położenie elektronu, to musimy użyć np. mikroskopu o wielkiej zdolności rozdzielczej, a to wymaga oświetlenia elektronu światłem o bardzo małej długości fali. Im krótsza fala, tym większą energię kwant światła przekazuje elektronowi i tym większego odrzutu doznaje elektron. Powoduje to utratę pewnej informacji o prędkości elektronu – tym większą, im dokładniej chcemy mierzyć położenie. Heisenberg stwierdził więc, że musi istnieć związek między nieokreślonościami, z jakimi możemy jednocześnie zmierzyć położenie i prędkość elektronu. Jak ten związek ująć matematycznie?

W mechanice kwantowej najpełniejszego opisu układu dostarcza funkcja falowa, spełniająca równanie wprowadzone przez Erwina Schrödingera w 1926 r. W najprostszym przypadku ruchu jednowymiarowego, gdy cząstka o masie m oddziałuje z zewnętrznym polem sił o potencjale $V(x,t)$, równanie to ma postać

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x,t)\right]\psi(x,t)\,,$$

gdzie $i^2 = -1$, a $\hbar$ jest tzw. kresloną stałą Plancka. Wynika z niego w szczególności, że niezależnie od postaci funkcji ψ w chwili początkowej t_0 w dowolnej innej chwili t zachodzi równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t_0)|^2\,\mathrm{d}x\,,$$

o ile powyższe całki są skończone. Ta własność rozwiązań równania Schrödingera pozwoliła Maxowi Bornowi podać interpretację fizyczną (unormowanej) funkcji falowej: kwadrat jej modułu, $|\psi(x,t)|^2$, jest gęstością prawdopodobieństwa przebywania cząstki w punkcie x w chwili t.

A jaka jest gęstość prawdopodobieństwa, że cząstka ma pęd p? Z interpretacji Borna i z samego równania Schrödingera wynika, że gęstość ta w chwili t wynosi $|\tilde{\psi}(p,t)|^2/(2\pi\hbar)$, gdzie $\tilde{\psi}$ jest transformatą Fouriera funkcji ψ, tzn.

$$\tilde{\psi}(p,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ipx/\hbar}\psi(x,t)\,\mathrm{d}x\,.$$

Z zasadą nieoznaczoności ściśle wiąże się następujący fakt: im bardziej funkcja jest skupiona wokół pewnej wartości argumentu, tym bardziej rozmyta jest jej transformata Fouriera i na odwrót. By tę relację ująć ilościowo, można posłużyć się wartościami średnimi potęg położenia i pędu w chwili t, które zgodnie z ogólnymi zasadami rachunku prawdopodobieństwa określa się wzorami

$$\langle x^n\rangle_t = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n|\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\langle p^n\rangle_t = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} p^n|\tilde{\psi}(p,t)|^2\,dp$$

(zakładamy, że całki są skończone). Zwykle za miary nieokreśloności położenia i pędu w chwili t uznaje się dyspersje $\Delta x(t) = \sqrt{\langle x^2\rangle_t - \langle x\rangle_t^2}$ i $\Delta p(t) = \sqrt{\langle p^2\rangle_t - \langle p\rangle_t^2}$. Okazuje się, że zachodzi nierówność

$$\Delta x(t)\cdot\Delta p(t) \geq \hbar/2\,,$$

będąca matematycznym wyrazem zasady nieoznaczoności. Ambitni Czytelnicy mogą wyprowadzić ją sami (trzeba posłużyć się dobrze znaną nierównością Cauchy'ego–Schwarza).

W modelu Bohra atomu wodoru postuluje się, że elektron, okrążając jądro atomowe, nie promieniuje. Postulat ten jest w sprzeczności z fizyką klasyczną, gdyż naładowana cząstka, poruszająca się ruchem przyspieszonym, musi promieniować i, w wyniku utraty energii, spaść na jądro atomowe. Zasada nieoznaczoności pozwala wyjaśnić ten paradoks. Spadający elektron byłby coraz lepiej zlokalizowany, więc nieoznaczoność jego pędu musiałaby rosnąć, a wraz z nią średnia energia całkowita.

Jedną z głębokich konsekwencji zasady nieoznaczoności jest pogwałcenie klasycznego determinizmu: skoro nie znamy położenia i prędkości w jednej chwili, nie umiemy ich wyznaczyć w momentach późniejszych. Możemy tylko określić gęstości prawdopodobieństw obu wielkości, co – jak stwierdził już Heisenberg – oznacza, że przewidywania mechaniki kwantowej mają w ogólności jedynie charakter statystyczny. Była to konkluzja, z którą nie mogło się pogodzić wielu współczesnych mu fizyków tej miary, co Albert Einstein, Max Planck i Erwin Schrödinger.

Niezależność zdarzeń

Jacek JAKUBOWSKI

Niezależność jest jednym z najważniejszych pojęć rachunku prawdopodobieństwa, wykorzystywanych nieświadomie (bez podawania ścisłej definicji) od samego początku powstawania teorii. Mianowicie, prawdopodobieństwo zajścia n zdarzeń jednocześnie obliczano jako iloczyn prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń (tzw. reguła mnożenia). Najbardziej spektakularny przykład to rozpatrywany przez Bernoulliego schemat n-krotnego powtórzenia tego samego doświadczenia o dwu możliwych wynikach. Brak ścisłej definicji niezależności, a także ogólnej definicji prawdopodobieństwa, prowadził do wielu błędów. Np. d'Alembert uważał, że szansa uzyskania dwu orłów w dwu rzutach monetą jest równa $1/3$, gdyż jeśli otrzymamy za pierwszym razem reszkę, to drugi raz nie warto rzucać, a gdy za pierwszym razem wypadnie orzeł, to za drugim razem może wypaść orzeł lub reszka, a więc mamy trzy równoprawne zdarzenia $\{R, OR, OO\}$. Tego typu błędy, paradoksy (np. Bertranda) oraz różnego rodzaju nadinterpretacje spowodowały, że wiele osób nie uważało rachunku prawdopodobieństwa za gałąź matematyki. Dopiero praca wielu matematyków uwieńczona podaniem przez Kołmogorowa aksjomatów rachunku prawdopodobieństwa i definicji niezależności spowodowała, że rachunek prawdopodobieństwa stał się ścisłą teorią matematyczną. Niezależność została związana z pojęciem miary i uzyskała jasną interpretację.

Definicja. Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ z danej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ są niezależne, gdy

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

dla dowolnych $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, $k = 2, \ldots, n$.

Zatem niezależność definiujemy za pomocą reguły mnożenia (która, jak już wspominałem, nie była wysłowiona, ale była używana od samego początku).

Teraz skoncentrujemy się na niezależności dwu zdarzeń. Zacznijmy od przykładu: gdy wyciągamy jedną kartę z talii 52 kart, to zdarzenia: A – wyciągnięcie pika i B – wyciągnięcie asa są niezależne (gdyż $P(A) = 13/52$, $P(B) = 4/52$, $P(A \cap B) = 1/52$). Natomiast zdarzenia: C – wyciągnięcie pika i D – wyciągnięcie karty czarnej starszej niż 10 nie są niezależne, gdyż $P(C) = 13/52$, $P(D) = 8/52$, $P(C \cap D) = 4/52$. Zdarzenie pewne (Ω) i zdarzenie niemożliwe $(\emptyset)$ są niezależne od każdego innego zdarzenia. Jednakże nie zawsze istnieją takie zdarzenia niezależne A, B, że $P(A), P(B) \in (0,1)$. Na przykład biorąc $\Omega = \{1, 2, \ldots, 13\}$ i przyjmując, że wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, weźmy $P(A) = k/13$, $P(B) = l/13$, $P(A \cap B) = m/13$, $0 < k, l < 13$. Zdarzenia A, B są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{k}{13}\frac{l}{13} = \frac{m}{13}$ – $kl = 13m$, a ta równość zachodzić nie może.

Wykluczające się zdarzenia A, B są często uważane za niezależne. Tymczasem są one niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$.

Rozważmy teraz zadanie. Spośród rodzin mających $n > 1$ dzieci wybieramy losowo jedną. Czy zdarzenie A: *w wybranej losowo rodzinie są dziewczynki i chłopcy* i zdarzenie B: *w wybranej losowo rodzinie jest co najmniej jedna dziewczynka*, są niezależne? Zdarzenia elementarne to uporządkowane według wieku dzieci. Są one jednakowo prawdopodobne. Jak łatwo sprawdzić (zachęcam, by Czytelnik to zrobił), A i B są niezależne – $n = 3$. Zatem na podstawie samego opisu zdarzeń nie można stwierdzić, czy są one niezależne, czy nie.

Warto sobie uświadomić, że pojęcie niezależności w rachunku prawdopodobieństwa jest różne od potocznego rozumienia tego słowa. Na przykład, temperatura morza nie zależy od mojej ochoty do kąpieli, natomiast moja chęć do kąpieli zależy od temperatury morza – w rachunku prawdopodobieństwa zdarzenia są wzajemnie niezależne.

Gdy $P(B) > 0$, to (z definicji prawdopodobieństwa warunkowego) mamy $P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$, zatem niezależność zdarzeń A, B jest równoważna warunkowi $P(A|B) = P(A)$, czyli warunkowi, że zajście zdarzenia B nie ma wpływu na prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A. Tak wygląda jedno z intuicyjnych wyobrażeń niezależności.

Gdy wrócimy do definicji n zdarzeń niezależnych, to widzimy, że trzeba sprawdzić $2^n - n - 1$ równości. Ale na szczęście często można je sprawdzić za pomocą jednego rozumowania. Przykładem tego może być dowód, że przy n-krotnym rzucie kostką niezależne są zdarzenia A_k: w k-tym rzucie wypadła szóstka, $k = 1, 2, \ldots, n$. Istotnie, dla dowolnego wyboru indeksów,

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{6^{n-k}}{6^n} = \frac{1}{6^k} = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k}).$$

Także zamiana dowolnej liczby z niezależnych zdarzeń $A_1, A_2, \ldots, A_n$ na przeciwne zachowuje niezależność (co sprawdzamy indukcyjnie). Stąd np. jeśli w doświadczeniu, polegającym na tym, że n osób oddaje strzał do tarczy, zdarzenia, iż poszczególni strzelcy trafiają do tarczy, są niezależne, to zdarzenia, że poszczególni strzelcy nie trafiają, też są niezależne. Powstaje pytanie, czy w definicji niezależności nie ma za dużo warunków, czy nie można by opuścić pewnych równości. Okazuje się, że do niezależności nie wystarczy niezależność zdarzeń parami; np. przy dwukrotnym rzucie monetą zdarzenia: A – za pierwszym razem wypadł orzeł, B – za drugim razem wypadł orzeł, C – za pierwszym i drugim razem wypadła ta sama strona monety, są parami niezależne, a wszystkie trzy nie są niezależne. (Czytelnik zechce sam podać przykład zdarzeń A, B, C, które nie są parami niezależne, ale $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.) Zatem liczby równości, które trzeba sprawdzać w definicji niezależności, nie można zredukować.

mała delta

Prawdopodobieństwo i pochopne rozumowania

Rozważmy z początku bardzo prosty przykład: pani w szkole rozdaje z czapki dziesięć losów, z których tylko jeden wygrywa (można go wymienić na bilet do kina). Gdzie należy się ustawić w dziesięcioosobowej kolejce, żeby mieć największe szanse wygranej?

Jeden powie: oczywiście z przodu, bo wtedy na pewno wśród losów będzie jeszcze ten wygrywający – nikt nie zdąży mi go odebrać. Kto inny się nie zgodzi i będzie chciał stać z tyłu kolejki, mówiąc, że osoby stojące z przodu wyciągną raczej puste losy (bo takich jest przecież więcej), a wtedy to właśnie on będzie miał większe szanse wygrać.

Matematyk odpowiada na to pytanie tak: nie ma znaczenia, gdzie się ustawimy. Ostatecznie chodzi tu o losowy wybór, jak się uczenie mówi, jakiejś permutacji zbioru dziesięcioelementowego, czyli w tym konkretnym przypadku jednego z możliwych sposobów rozdania 10 losów dziesięciu osobom; jest tych sposobów $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1$; z uwagi na symetrię całej sytuacji nie ma najmniejszego powodu, żeby któryś z nich wyróżniać – podobnie jak nie ma żadnego powodu, żeby podczas gry w brydża uznawać, że los (i karta) sprzyja tej parze, która siedzi na linii równoległej do wanny.

Oto inny przykład: cztery osoby, panowie Abacki, Babacki, Cabacki i Dabacki, spotykają się często na brydżu i za każdym razem rzucają dwukrotnie monetą, by ustalić, kto robi wszystkim kawę i herbatę. Jeśli wypadną dwa orły, do kuchni idzie Abacki, jeśli najpierw reszka, a potem orzeł – Babacki, jeśli najpierw orzeł, a potem reszka – Cabacki, jeśli zaś dwie reszki – wtedy napoje szykuje Dabacki. Panowie słusznie uważają, że wyniki losowania nikogo nie faworyzują: cztery wyniki dwóch rzutów symetryczną monetą są przecież równoprawdopodobne.

Pewnego razu Cabacki i Dabacki nie przychodzą na umówione spotkanie; Abacki z błyskiem w oku proponuje grę w szachy zamiast brydża i dopasowaną do nowej sytuacji metodę losowania osoby robiącej napoje: należy rzucać monetą, aż w końcu w którychś dwóch kolejnych rzutach pojawi się OO lub RO; w pierwszej sytuacji zgodnie z dawnym obyczajem do kuchni pójdzie Abacki, a w drugiej – Babacki.

Być może Czytelnicy byliby skłonni uznać, że jest to sprawiedliwa metoda losowania i argumentować, że w dwóch rzutach wyniki OO oraz RO pojawiają się z równym prawdopodobieństwem. To drugie istotnie jest prawdą, natomiast to pierwsze wcale nie. Przecież jeśli za pierwszym razem wypadnie reszka, to nie ma po co rzucać dalej: wynik jest jasny, nie został tylko formalnie przypieczętowany – po pierwszym orle, niezależnie od tego, ile przed nim wypadnie reszek, do kuchni pofatyguje się Babacki. Jeśli zaś w pierwszym rzucie, jak to średnio w połowie przypadków bywa, wypadnie orzeł, to wtedy zdecyduje drugi rzut, z równym prawdopodobieństwem wskazując jednego z panów.

Ostatecznie więc Abacki będzie parzył kawę i herbatę z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, a Babacki – z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Wielu osobom ten wynik wydaje się zaskakujący: było sprawiedliwie, odrzuciliśmy dwóch graczy i przestało być sprawiedliwie. Cóż, okazuje się, że to możliwe. Jeśli ma być sprawiedliwie, a przy tym prosto, trzeba rzucić monetą tylko raz.

Na koniec przykład trzeci: pewien zawodnik uczestniczy w turnieju, w którym gra się w pewną bezremisową grę (np. w tenisa) i aby zakwalifikować się do finału, musi wygrać przynajmniej jedną partię z Mistrzem, z którym wygrać jest trudno, i przynajmniej jedną partię z Szarakiem, z którym wygrać jest dość łatwo. Może rozegrać trzy mecze, zmieniając po każdym przeciwnika – będzie więc grał albo w układzie M–Sz–M, albo Sz–M–Sz. Który układ pojedynków jest korzystniejszy, jeśli założymy, że w meczu z Mistrzem nasz zawodnik wygrywa z ustalonym prawdopodobieństwem $p < \frac{1}{2}$, a w meczu z Szarakiem – z prawdopodobieństwem $q > \frac{1}{2}$? Przyjmujemy, że wyniki poszczególnych meczów są niezależne.

Wiele osób niemal automatycznie stwierdza, że korzystny jest układ Sz–M–Sz. Czyżby dlatego, że nie chcą się narażać Mistrzom i wolą wygrywać z Szarakami? W tym przypadku taka strategia zdecydowanie nie popłaca: z reguł turnieju jasno wynika, że aby wejść do finału, trzeba koniecznie wygrać środkowy z trzech meczów – lepiej więc rozgrywać go z łatwiejszym przeciwnikiem. Ponadto, z Mistrzem też trzeba choć raz wygrać – lepiej więc mieć do dyspozycji dwie próby niż jedną. Mniejsza o konkretny wynik, choć nietrudno obliczyć, że grając mecze w układzie M–Sz–M zawodnik wejdzie do finału z prawdopodobieństwem $pq(2-p)$, a w układzie Sz–M–Sz – z prawdopodobieństwem $pq(2-q)$. Skoro $p < q$, zatem $2-p > 2-q$, a stąd $pq(2-p) > pq(2-q)$, co się zgadza z przytoczonym zdroworozsądkowym rozumowaniem. Układ Sz–M–Sz byłby oczywiście korzystny, gdyby trzeba było wygrać co najmniej dwa mecze wszystko jedno z kim.

W rachunku prawdopodobieństwa, jak zresztą we wszystkich innych działach matematyki, lepiej więc nie myśleć pochopnie i zbyt szybko; lepiej też nie dokładać do rozwiązywanych zadań założeń, których wcale nie ma i być nie powinno.

Małą Deltę przygotowali: Edward STACHOWSKI i Paweł STRZELECKI

Zadania

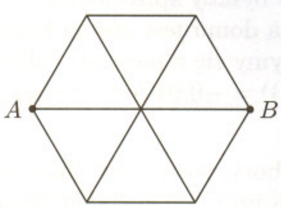
Przygotował Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 901. Udowodnić, że niezależnie od tego, jaką strategię obierze przeciwnik, można z prawdopodobieństwem większym od 1/2 wygrać grę, w której nasz przeciwnik zapisuje na dwóch kartkach papieru dwie dowolne (ale różne) liczby całkowite, my zaś losujemy jedną z tych kartek, odczytujemy zapisaną liczbę i mamy odgadnąć, czy liczba na drugiej kartce jest większa, czy mniejsza. (Zadanie zaproponował Rafał Latała.)
Rozwiązanie na str. 15

M 902. Załóżmy, że w pięćdziesięciu kolejnych rzutach monetą wypadła reszka. (Czytelnicy, którzy oglądali film „Guildenstern i Rosenkrantz nie żyją”, spotkali się już z taką sytuacją). Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania reszki w następnym rzucie?
Rozwiązanie na str. 17

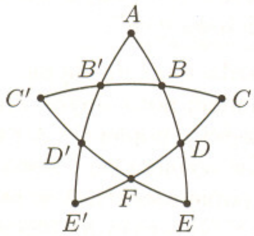
M 903. W wielkim nieprzezorczystym pudle znajduje się nieznana liczba piłeczek pingpongowych. Przez otwór na szczycie pudła wyciągamy po omacku 10 piłeczek; malujemy pięć z nich na zielono, a pięć na czerwono, po czym wrzucamy je z powrotem. Po dokładnym wymieszaniu zawartości pudła znów wyciągamy z niego 10 piłeczek, w tym dokładnie jedną zieloną i jedną czerwoną. Jak na tej podstawie oszacować, ile piłeczek zostało jeszcze w pudle?
Rozwiązanie na str. 14

Redaguje Ewa CZUCHRY



Rys. 1

F 513. Znaleźć opór R przewodników rozgałęzienia między punktami A i B (rys. 1), jeżeli każdy z przewodników wchodzących w skład rozgałęzienia ma opór r.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

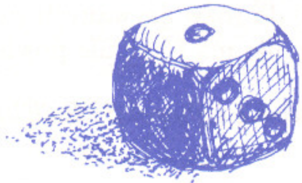
F 514. Pięć jednakowych prętów miedzianych, każdy o długości l, zostało połączonych na kształt gwiazdy (rys. 2). Punkty połączenia każdego pręta dzielą go na trzy równe części ($AB = BD = DE = \ldots$). Wyznaczyć opór tej figury między punktami A i F. Powierzchnia przekroju poprzecznego pręta wynosi S, opór właściwy miedzi jest równy ρ.
Rozwiązanie na str. 11

Probabilistyka w życiu codziennym

Bolesław
KOPOCIŃSKI

Przypadek pojawia się na każdym poziomie ogólności naszych rozważań; odgrywa rolę w fizycznym opisie świata, biologicznym opisie życia, zachowaniu mas w życiu społecznym itd. Jednostka postrzega przypadek jako zagrożenie lub wykorzystuje go jako element strategii w starciu z konkurentem. Probabilistykę spotykamy więc w codzienności. Oto przykłady.

Użyteczność wygranych na loterii. Loterią są m.in. ubezpieczenia majątkowe. Ubezpieczyciel szacuje prawdopodobieństwo np. pożaru, pobiera od klienta składkę równą np. 5% wartości obiektu i, w razie straty, wypłaca odszkodowanie. Klient ocenia wartość proponowanej loterii. Przy wspomnianej stawce może oczekiwać, że we wsi złożonej z 20 domów corocznie jeden dom spłonie lub (w bardziej efektownym wariancie) może liczyć na kompletną zagładę wsi średnio co 20 lat. Obserwacje rzeczywistości pozwalają ocenić, czy gra w ubezpieczenia jest sprawiedliwa.



Dla zabawy, aby przeżyć namiastkę gry, zaproponujmy znajomym wpłatę po złotówce do puli; niech pewien mechanizm losowy z równymi szansami przyzna całą pulę jednemu z nas. Większość osób, jakkolwiek nie widzi w tej grze większego sensu, przystaje na udział w grze. Zauważmy, że mało osób zagra, gdy stawkę podniesiemy do 100 zł.

Dlaczego ludzie biorą udział w grach niesprawiedliwych, a nie biorą udziału w sprawiedliwych? Odpowiedzi na to pytanie udziela teoria użyteczności. Każda wygrana i każda przegrana ma bowiem dla grających odpowiednią użyteczność.

Formalnie biorąc, do oceny gry losowej potrzebne jest pojęcie oczekiwanej wygranej. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ będą wypłatami w grze, a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – prawdopodobieństwami tych wypłat. Oczekiwaną wygraną definiuje się wzorem $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. Przypisując wygranej x użyteczność $u(x)$, bierzemy pod uwagę nową grę, w której z prawdopodobieństwem p_i zdarza się wypłata $u(x_i)$. Oczekiwaną użytecznością jest więc $\mathrm{E}(u(X)) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) p_i$.

Więcej informacji na temat funkcji użyteczności znajdzie Czytelnik np. w książce: C.H. Coombs, R.M. Dawes, A. Tversky, *Wprowadzenie do psychologii matematycznej*, PWE, Warszawa 1977.

O kształt funkcji użyteczności toczą spory psychologowie i matematycy. Tu dla przykładu weźmiemy funkcję sklejoną z dwóch gałęzi parabol, określoną wzorami $u(x) = \sqrt{x/10}$ dla $x \geq 0$ i $u(x) = -(x/10)^2$ dla $x < 0$, która bagatelizuje pewne straty (np. te z przedziału $(-10, 0)$), a przecenia pewne zyski (np. te z przedziału $(0, 10)$). Jeśli $x_1 = -5$, $x_2 = 5$, $p_1 = p_2 = 0{,}5$, to $\mathrm{E}(X) = 0$, czyli gra w sensie oczekiwanej wygranej jest sprawiedliwa, emocjonalnie obojętna. Natomiast $\mathrm{E}(u(X)) = 0{,}5(-0{,}25 + \sqrt{0{,}5}) = 0{,}23$, czyli w sensie oczekiwanej użyteczności gra jest atrakcyjna, i to dla obu graczy!

Inna znana loteria to gra w ruletkę; w końcu XIX wieku w Monte Carlo przyjezdnych witał tłum tzw. Profesorów – ludzi, którzy sami zbankrutowali i usiłowali innych uczyć swych niezawodnych systemów gry.

Podczas długiej gry grający cząstka po cząstce traci kapitał (patrz np. *Delta* 6/1998); zmieniają się zarówno kwoty, którymi dysponuje, jak i użyteczność stawek. Jeśli się już gra, warto stawiać wszystko w jednej grze, która daje wygraną o pożądanej użyteczności.

Wracając do ubezpieczeń, przypuśćmy, że dom wartości 30 ($\times 10^4$ zł) jest zagrożony pożarem z prawdopodobieństwem 0,05. Strata X przyjmuje wartości $x_1 = -30$, $x_2 = 0$, z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1 = 0{,}05$, $p_2 = 0{,}95$. Zatem $\mathrm{E}(X) = -1{,}5$, a więc składka 1,5 byłaby sprawiedliwa. Oczekiwana użyteczność rezygnacji z ubezpieczania domu jest równa $\mathrm{E}(u(X)) = -(30/10)^2 \cdot 0{,}05 = -0{,}45$. Jeśli nawet ubezpieczymy się z niesprawiedliwą składką 2, to i tak oczekiwana użyteczność $\mathrm{E}(u(X)) = -0{,}04$ jest większa, niż gdy rezygnujemy z ubezpieczenia.

Metoda reprezentacyjna. Kiedy nadchodzą wybory, wiele osób chce zawczasu wiedzieć, jakie będą wyniki. Informacji dostarczają im biura badania opinii publicznej, ogłaszając np.: „kandydata A popiera 40% wyborców, z dokładnością 3%; reprezentatywna próba składała się z 1000 ankietowanych".

Teoria matematyczna leżąca u podstaw takich stwierdzeń opiera się na rozkładzie dwumianowym i jego aproksymacji rozkładem normalnym. Zakłada się, że wyborcy mają zdeterminowane poglądy: w części p popierają A i w części $1 - p$ są mu przeciwni. Spośród wszystkich wyborców wybiera się losowo osoby ankietowane, które ujawniają swe poglądy. Frakcja popierających A w próbie jest estymatorem p poparcia w całym społeczeństwie. Głównym problemem

Rozwiązanie zadania F 514.
Potencjały punktów B i B' są równe i odcinek BB' nie wpływa na opór figury. Jeżeli przewodnik BB' usuniemy, to otrzymaną figurę można rozpatrywać jako równoległe połączenie dwóch jednakowych obwodów elektrycznych: $ABCDEF$ i $AB'C'D'E'F$. Wyznaczamy opór gałęzi $ABCDEF$. Opór pręta jest równy $r = \rho\frac{l}{S}$, a więc opór każdej części pręta wynosi $\frac{1}{3}r$. Opór trójkąta BCD wynosi $\frac{2}{9}r$, stąd opór całej gałęzi $ABCDEF$ ma wartość

$$R_1 = 2\cdot\frac{2}{9}r + \frac{1}{3}r = \frac{7}{9}r\,.$$

Opór całej figury jest równy:

$$R = \frac{1}{2}R_1 = \frac{7}{18}r = \frac{7}{18}\rho\frac{l}{S}\,.$$

badań reprezentacyjnych (obok sposobu losowania próby) jest ustalenie wielkości próby wystarczającej do oceny preferencji wyborców z wymaganą dokładnością.

Niech S_n będzie liczbą popierających A w próbie o liczebności n; ułamek $S_n/n = p'$ wyraża, jaka część próby popiera A. Podana informacja o błędzie prognozy oznacza, iż $|p'-p| \le 0{,}03$. Należy podkreślić, że żadna liczebność próby nie gwarantuje spełnienia tej nierówności; trzeba bowiem dopuścić myśl, iż losowa próba może się składać z samych zwolenników A nawet wtedy, gdy stanowią oni drobną część wyborców. Decydujemy się zatem na pewien *poziom ufności* α, np. $\alpha = 0{,}95$ – tzn. chcemy dobrać n tak, by nierówność $|p'-p| \le 0{,}03$ zachodziła z prawdopodobieństwem równym co najmniej 0,95.

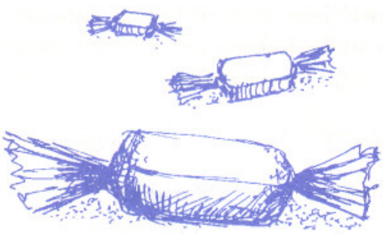
Używane metody losowania próby gwarantują zwykle, że S_n ma rozkład dwumianowy z parametrami n i p. Do rozwiązania naszego zadania wystarczy twierdzenie de Moivre'a–Laplace'a, które mówi, że przybliżeniem rozkładu dwumianowego jest rozkład normalny, a ściślej

$$P(|p'-p| \le 0{,}03) = P(|S_n/n - p| \le 0{,}03) = P(-0{,}03n \le S_n - np \le 0{,}03n) =$$
$$= P(-z \le Z \le z) \cong \phi(z) - \phi(-z),$$

gdzie $Z = (S_n - np)/\sqrt{npq}$, $z = 0{,}03n/\sqrt{npq}$, ϕ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego.

W odpowiednich tablicach można sprawdzić, że $\phi(z) - \phi(-z) = 0{,}95$ dla $z = 1{,}96$, czyli dla $n = 4268{,}4pq$. Ponieważ pq nie przekracza $\frac{1}{4}$, więc $n > 1067$ zapewnia wymagany poziom ufności. Pamiętajmy jednak, iż jest jedna szansa na 20, że błąd $|p'-p|$ przekroczy 0,03.

Celowe zaburzenia w badaniach reprezentacyjnych. Największym zagrożeniem metody reprezentacyjnej jest unikanie lub fałszowanie odpowiedzi. Zdarza się też często, że ankietowani – np. ze względu na wstyd lub inne uczucia – nie są skłonni ujawnić poglądów, ale chętnie się nimi dzielą, gdy mogą w jakiś sposób ukryć własne zdanie. Dla uwiarygodnienia ankiet dodaje się więc czasem jeszcze jeden element losowy. Oto przykład.



Przypuśćmy, że w ankiecie możliwa jest jedna z dwóch odpowiedzi: 0 lub 1. Ankietą objęto n osób; ich poglądy tworzą deterministyczny ciąg $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zer i jedynek. Celem ankiety jest znalezienie frakcji $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ osób wyznających pogląd 1.

Ankietowani odpowiadają zgodnie z następującą instrukcją: (1) rzuć monetą; (2) rzuć monetą po raz drugi; jeśli wypadnie orzeł, odnotuj w ankiecie własny pogląd, a jeśli reszka – wynik poprzedniego rzutu (0 oznacza reszkę, a 1 orła).

Zauważmy, że ankietowany może odpierać wszelkie uwagi, twierdząc, iż jego odpowiedź to wynik rzutu monetą. Nadto jednakowe odpowiedzi nie dowodzą jednomyślności w grupie.

Wprowadźmy zmienne losowe charakteryzujące i-tą osobę: δ_i – wynik pierwszego rzutu monetą (orzeł: $\delta_i = 1$; reszka: $\delta_i = 0$); Δ_i – wynik drugiego rzutu (orzeł: $\Delta_i = 1$; reszka: $\Delta_i = 0$). Wówczas odpowiedź i-tej osoby wyraża wzór $X_i = \Delta_i x_i + (1-\Delta_i)\delta_i$, a $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ to liczba odpowiedzi 1.

Zmienne losowe $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ są niezależne i przyjmują z prawdopodobieństwem 1/2 wartości 0 i 1. Łatwo więc sprawdzić, że $\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{4}$, $\mathrm{Var}(X_i) = \frac{3}{16}$. Proponowany estymator p^* frakcji p i jego wariancja (potrzebna do oceny błędu estymacji) są następujące:

$$p^* = \frac{2}{n}S_n - \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{Var}(p^*) = \frac{3}{4n}.$$

Wariancja zmiennej losowej X, określana wzorem

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X - \mathrm{E}X)^2)\,,$$

jest miarą rozproszenia tej zmiennej.

Nasz estymator jest nieobciążony, tzn. jego wartość oczekiwana jest równa nieznanemu parametrowi: $\mathrm{E}(p^*) = p$. Jego wariancja maleje liniowo ze wzrostem n (tak samo jak w metodzie reprezentacyjnej bez zaburzania ankiet). Opisana metoda jest na tyle efektywna, że można ją stosować w praktyce, a grube oszacowania p nie wymagają wielu obserwacji.

Przy innej okazji napiszemy w *Delcie* o trafności losowych prognoz pogody.

Dlaczego gaz elektronowy nie chce być gazem doskonałym?

Jan BLINOWSKI

W drugiej połowie XIX i w pierwszych latach XX wieku sformułowane zostały podstawy klasycznej fizyki statystycznej. Używając języka teorii prawdopodobieństwa, teoria ta pozwoliła powiązać makroskopowe własności prostych układów fizycznych, np. porcji gazu pod tłokiem czy kawałka ciała stałego, z mechanicznymi własnościami atomów. Jednym z pierwszych wielkich sukcesów teorii było wyliczenie przez Maxwella i Boltzmanna rozkładu energii cząsteczek w rozrzedzonych gazach i uzasadnienie prawa ekwipartycji energii. Wyniki te zilustrujemy, odwołując się do wyprowadzonego wiele lat później rozkładu Gibbsa. Najpierw jednak przypomnimy kilka podstawowych pojęć fizyki statystycznej.

Ważnymi pojęciami fizyki statystycznej są stany mikroskopowe i makroskopowe układu wielu cząstek. W fizyce klasycznej aby zdefiniować stan mikroskopowy układu, składającego się z N punktów materialnych, trzeba podać $3N$ liczb określających współrzędne ich wektorów położeń i $3N$ liczb określających współrzędne ich wektorów prędkości albo pędu. Mówimy, że taki układ ma $3N$ translacyjnych stopni swobody. (Dla cząstek o wewnętrznej strukturze, mogących rotować lub drgać, liczba stopni swobody byłaby większa.) Do zdefiniowania stanu makroskopowego porcji gazu pod tłokiem w równowadze mechanicznej i cieplnej z otoczeniem wystarczy podać wartości dwu niezależnych parametrów stanu, tzn. dwu spośród trzech wielkości fizycznych: temperatury, ciśnienia, objętości. (Dla bardziej złożonych układów liczba niezależnych parametrów stanu jest większa.) Oczywiste jest, że każdemu makroskopowemu stanowi równowagi odpowiada bardzo wiele różnych stanów mikroskopowych, przez które przebiega układ w czasie swojej ewolucji.

Gibbs wykazał, że jeśli w stanie o ściśle określonej energii układu bardzo wielu cząstek wydzielić niewielki podukład składający się z N cząstek, to gęstość prawdopodobieństwa $W(A)$ znalezienia tego podukładu w określonym stanie mikroskopowym A jest wprost proporcjonalna do tzw. boltzmanowskiego czynnika wykładniczego $\exp(-E_A/kT)$, gdzie E_A jest energią stanu A, T jest temperaturą bezwzględną, a k stałą Boltzmanna. Wynik Gibbsa pozostaje słuszny w fizyce kwantowej, tyle że tam stany mikroskopowe układów dają się ponumerować liczbami całkowitymi i należy mówić o prawdopodobieństwie, a nie o gęstości prawdopodobieństwa.

W układzie cząstek nieoddziałujących lub oddziałujących jedynie w chwilach zderzeń, zamkniętym w sześciennym pudle o krawędziach L, energia jest sumą energii kinetycznych poszczególnych cząstek. W tej sytuacji czynnik boltzmanowski staje się iloczynem czynników boltzmanowskich poszczególnych cząstek. Jeśli zatem stany poszczególnych cząstek są zupełnie niezależne od pozostałych, a tak jest dla klasycznego gazu doskonałego, to gęstość prawdopodobieństwa $W(A)$ staje się iloczynem gęstości prawdopodobieństwa $w(a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ wszystkich cząstek, gdzie a_i oznacza stany i-tej cząstki. Gęstości te mają postać

$$w(a) = C\exp(-E_A/kT),$$

gdzie E_a jest energią cząstki w stanie a.

Stałą C można wyznaczyć z warunku unormowania prawdopodobieństwa, to znaczy warunku, by prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w dowolnym stanie a, czyli w dowolnym miejscu w objętości L^3 i z dowolnym pędem $\vec{p}$, było równe jedności. O cząstkach, dla których obowiązuje powyższy wzór, mówi się, że mają statystykę boltzmanowską. Zauważmy jeszcze, że energię E_a można przedstawić w postaci sumy energii związanych z ruchami w trzech prostopadłych kierunkach osi x, y i z. Tym samym $w(a)$ można przedstawić jako iloczyn trzech gęstości prawdopodobieństwa odpowiadających stanom ruchu wzdłuż trzech osi w_x, w_y, w_z, gdzie np.

$$w_x = c\exp(-p_x^2/2mkT).$$

Stałą $c = \dfrac{1}{L}\sqrt{\dfrac{m}{2\pi T}}$ wyznacza się z warunku unormowania prawdopodobieństwa, który tym razem ma postać: $L\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_x \mathrm{d}p_x = 1.$

Stąd już tylko krok do prawa ekwipartycji energii. Prawo to głosi, że średnia energia, przypadająca na każdy stopień swobody układu, wynosi $(1/2)kT$. Aby obliczyć tę średnią energię, należy obliczyć całkę $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{p_x^2}{2m} w_x \mathrm{d}v_x$, całkę tego typu można jednak znaleźć w każdej tablicy całek oznaczonych:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\exp(-ax^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}.$$

O gęstości prawdopodobieństwa $W(x)$ mówimy wtedy, gdy zmienna losowa x ma rozkład ciągły, tzn. może przybierać wszelkie wartości z pewnego skończonego lub nieskończonego przedziału liczb rzeczywistych. Prawdopodobieństwo $P(X, \Delta x)$, że zmienna x jest w przedziale $(X - \Delta x/2, X + \Delta x/2)$, wiąże z gęstością prawdopodobieństwa wzór $P(X, \Delta x) = \int\limits_{X-\Delta x/2}^{X+\Delta x/2} W(x)\mathrm{d}x$. Dla dostatecznie małych Δx zachodzi przybliżona równość $P(X, \Delta x) \cong W(X)\Delta x$.

Zgodnie z prawem ekwipartycji energia wewnętrzna mola gazu doskonałego jest równa $U = 3N_A \cdot (1/2)kT = (3/2)RT$, gdzie N_A jest liczbą Avogadry, a R stałą gazową. Tym samym molowe ciepło właściwe gazu doskonałego w stałej objętości $C_V = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta T}$ nie zależy od temperatury i wynosi (3/2)R. Takie wartości rzeczywiście otrzymuje się doświadczalnie dla rozrzedzonych gazów jednoatomowych.

Dla cząsteczek dwuatomowych dochodzą na każdą cząsteczkę dwa rotacyjne stopnie swobody i jeden oscylacyjny, który należy liczyć podwójnie, gdyż do średniej energii kinetycznej dochodzi równa jej średnia energia potencjalna drgań. Z zasady ekwipartycji energii wynika więc, że ciepło właściwe takich gazów także powinno być niezależne od temperatury i równe $(7/2)R$. Tu właśnie zaczynają się kłopoty z zasadą ekwipartycji. W odróżnieniu od sytuacji w gazach jednoatomowych doświadczalne wartości ciepła właściwego dla gazów dwuatomowych silnie zależą od temperatury. W niskich temperaturach wynoszą około $(3/2)R$, w wysokich temperaturach $(5/2)R$, a w temperaturach zbliżonych do temperatury rozpadu cząsteczek na atomy znowu rosną, ale nigdy nie osiągają $(7/2)R$.

Dlaczego prawo ekwipartycji energii nie obowiązuje dla rotacyjnych i oscylacyjnych stopni swobody? Odpowiedź na to pytanie dała mechanika kwantowa. Okazało się, że energie ruchów rotacyjnych i oscylacyjnych są skwantowane, mogą przybierać tylko niektóre wartości. W tych warunkach obliczenie średniej energii musi przebiegać inaczej. Całkowania w warunku normalizacyjnym prawdopodobieństwa i przy obliczaniu energii średniej trzeba zastąpić sumowaniem względem dozwolonych wartości energii. Tak otrzymane wyniki dobrze zgadzają się z doświadczeniem.

Jednak znacznie większe i trudniejsze do wyjaśnienia kłopoty pojawiły się przy próbach zastosowania zasady ekwipartycji do obliczenia ciepła właściwego gazu swobodnych elektronów w metalach i do obliczenia rozkładu widmowego energii gazu fotonowego. Ograniczymy się tutaj do gazu elektronowego. Ciekawe własności fotonów warte są oddzielnego omówienia.

Na początku XX wieku było już jasne, że nośnikami prądu w metalach są elektrony, pomiary Thomsona stosunku e/m, ładunku do masy, pomiary Millikana ładunku elementarnego, w połączeniu z pomiarami zjawiska Halla pozwoliły ustalić nie tylko cechy elektronów, ale i wykazać, że koncentracja elektronów w metalach jest bardzo duża, tego samego rzędu, co koncentracja dodatnio naładowanych jonów. Poruszające się prawie swobodnie elektrony powinny zgodnie z prawem ekwipartycji wnosić duży, niezależny od temperatury przyczynek do ciepła właściwego metali. Pomiary ciepła właściwego dla kryształów izolatorów wykazywały, że ich ciepło właściwe w niskich temperaturach dąży do zera proporcjonalnie do trzeciej potęgi temperatury. Przyjmując, że przyczynek do ciepła właściwego sieci krystalicznej metali jest podobny jak dla izolatorów, spodziewano się, że ciepło właściwe metali z powodu swobodnych elektronów powinno być zawsze znacznie większe niż dla izolatorów. Pomiary w wysokich temperaturach nie wykazały jednak istotnych różnic między metalami i izolatorami, a dokładne badania w niskich temperaturach ujawniły niewielki przyczynek do ciepła właściwego, liniowy względem temperatury. Przyczynek ten, występujący we wszystkich metalach, a nieobecny w izolatorach, przypisano swobodnym elektronom. Pozostawało jednak tajemnicą, dlaczego w tak drastyczny sposób przewidywania oparte na prawie ekwipartycji rozmijają się z rzeczywistością. Było to tym bardziej niezrozumiałe, że w odniesieniu do ruchów postępowych przewidywania mechaniki kwantowej pokrywają się pod wieloma względami z rozważaniami klasycznymi. Energia jest taką samą funkcją pędu cząstki jak w fizyce klasycznej i, jeśli tylko objętość układu jest dostatecznie duża, współrzędne wektorów pędu cząstek kwantowych mogą przybierać dowolnie bliskie siebie wartości. Także rozkład przestrzenny nieoddziałujących cząstek w objętości V jest – podobnie jak dla klasycznego gazu – jednorodny. (W fizyce kwantowej nie można jednocześnie ustalać ściśle wartości pędu i położenia, toteż do odróżniania stanów cząstki swobodnej w pudle wystarczają trzy składowe wektora jej pędu.)

Kluczem do tajemnicy okazała się zasada Pauliego, zgodnie z którą w układzie nieoddziałujących, nierozróżnialnych cząstek, nie może być cząstek o identycznych stanach. Zasada ta wynika z nierozróżnialności cząstek w mechanice kwantowej i ograniczeń, jakie stąd wynikają dla funkcji falowych cząstek. Wszystkie cząstki elementarne podzielić można na dwie klasy – fermiony, których funkcje falowe muszą zmieniać jedynie znak przy zamianie miejscami dwu dowolnych identycznych cząstek, oraz bozony, których funkcje falowe nie ulegają zmianie przy takich zamianach. Elektrony są fermionami obdarzonymi wewnętrznym momentem pędu – spinem, oraz związanym z nim momentem magnetycznym. Każdemu pędowi swobodnego elektronu mogą odpowiadać dwa stany różniące się kierunkiem spinu i momentu magnetycznego. Można jednak dla prostoty podzielić wszystkie elektrony na dwie grupy o różnych kierunkach spinu i rozpatrywać każdą grupę z osobna, jakby to były dwa różne rodzaje cząstek.

Zasada Pauliego, obowiązująca dla fermionów, sprawia, że nawet dla układu zupełnie nieoddziałujących elektronów, mimo że energia występująca w wykładniku w rozkładzie Gibbsa pozostaje sumą energii kinetycznych wszystkich cząstek, wartości współrzędnych pędów przybieranych przez elektrony o jednym kierunku spinu nie są niezależnymi zmiennymi losowymi, lecz są w pewnym stopniu współzależne. Każdy stan N nieoddziałujących elektronów o wybranym kierunku spinu scharakteryzowany jest przez N wektorów pędu, z których żaden nie może występować więcej niż raz i w dodatku żaden z tych wektorów nie może być przypisany konkretnej cząstce. Można jedynie powiedzieć, że jedna cząstka ma pęd $\vec{p}_1$, jedna $\vec{p}_2$ itd. Wygodnie jest więc dla rozróżniania stanów wielocząstkowych wprowadzić pojęcie liczb obsadzeń n_i dla jednocząstkowych stanów. Każdy stan wielocząstkowy w układzie nieoddziałujących fermionów określamy, podając liczby obsadzeń wszystkich stanów jednocząstkowych. Dla i-tego stanu jednocząstkowego liczba obsadzeń równa jest 1, o ile jakaś cząstka układu jest w stanie i, a równa jest 0, jeśli w układzie nie występuje cząstka o takim stanie. Nie istnieje, niestety, elementarny sposób wyprowadzenia wzoru na zależność średniej liczby obsadzeń od energii E stanu i temperatury T. Wzór ten nosi nazwę rozkładu Fermiego–Diraca i ma postać:

$$n(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E-\mu}{kT}\right)}.$$

Stała μ nosi nazwę poziomu lub energii Fermiego i musi być ustalona z warunku unormowania całkowitej liczby cząstek – suma liczb obsadzeń musi być równa liczbie cząstek w układzie $\sum_a n(E_a) = N$. Mówimy ogólnie o sumowaniu względem stanów jednocząstkowych, a nie względem różnych wektorów pędu cząstki, gdyż rozkład Fermiego–Diraca obowiązuje także dla fermionów w zewnętrznych polach, gdy stany jednocząstkowe trzeba numerować innymi liczbami kwantowymi. Zauważmy, że funkcja Fermiego–Diraca dla temperatur dążących do zera dąży do funkcji schodkowej – równej 1 dla energii mniejszych od μ i 0 dla energii większych od μ. Dla przypadku gazu swobodnych elektronów oznacza to, że w najniższym stanie energetycznym układu całkowita energia kinetyczna nie jest równa zeru jak w gazie doskonałym, lecz jest bardzo duża. Choć pojedynczy elektron może mieć zerową energię kinetyczną, w układzie występują także elektrony o energiach większych, aż do energii Fermiego. Poziom Fermiego w metalach jest rzędu kilku elektronowoltów, a więc jest o dwa rzędy wielkości większy od kT w temperaturach pokojowych.

W temperaturach różnych od zera, dopóki kT jest znacznie mniejsze od μ, funkcja Fermiego–Diraca w dalszym ciągu przypomina schodek, tyle że nieco wygładzony – dla $E = \mu$ mamy $n(E) = 1/2$, ale już dla energii większych lub mniejszych o kilka kT wartości $n(E)$ są praktycznie takie same jak w temperaturze zera bezwzględnego – 1 albo 0. Oznacza to, że w skończonych, niezbyt wysokich, temperaturach tylko niewielka część elektronów, z przedziału energii rzędu kilku kT, ma energie wyższe niż dla $T = 0$. Wszystkie pozostałe elektrony mają takie same energie jak w temperaturze zera bezwzględnego. Prawo ekwipartycji energii nie stosuje się zupełnie do fermionów w niskich temperaturach!

Bez jakichkolwiek rachunków można przewidzieć zależność ciepła właściwego gazu elektronowego od temperatury. Liczba elektronów, które zmieniły swoje energie, jest proporcjonalna do kT i same zmiany ich energii są rzędu kT. Tym samym różnica ΔU między całkowitą energią układu w temperaturze T i energią w temperaturze zerowej jest proporcjonalna do kwadratu temperatury, a ciepło właściwe w stałej objętości musi więc dla gazu elektronowego w niezbyt wysokich temperaturach być liniową funkcją temperatury!

W bardzo wysokich temperaturach dla gazu elektronowego o bardzo małej gęstości poziom Fermiego staje się ujemny, funkcja Fermiego–Diraca rozmywa się na bardzo szeroki obszar i dla prawie wszystkich energii przypomina funkcję Boltzmanna z bardzo małym prawdopodobieństwem obsadzenia każdego ze stanów. W tych warunkach zasada Pauliego staje się mało istotna i w tym zakresie temperatur ciepło właściwe gazu elektronowego dąży do klasycznego wyrażenia $(3/2)NkT$ wynikającego z zasady ekwipartycji energii. Klasyczną statystykę boltzmanowską można więc uważać za graniczny przypadek statystyki Fermiego–Diraca.

Sprawa ciepła właściwego elektronów jest tylko jedną z wielu konsekwencji zasady Pauliego i statystyki Fermiego–Diraca obowiązujących wszystkie fermiony zarówno na szczeblu atomowym, jak i w astrofizyce, poczynając od wyjaśnienia struktury układu okresowego pierwiastków, a skończywszy na równaniach stanu białych karłów i gwiazd neutronowych.

Rozwiązanie zadania M 903.

Istotną informację stanowi tylko to, że za drugim razem wśród wyciągniętych piłeczek były dokładnie dwie pomalowane; kolory nie są ważne. Oznaczmy przez N nieznaną liczbę piłeczek, które na początku były w pudle. Oczywiście $N \geq 18$ i prawdopodobieństwo tego, że zaszło zdarzenie opisane w zadaniu, wynosi

$$p_N = \frac{\binom{10}{2}\binom{N-10}{8}}{\binom{N}{10}}.$$

Obliczając stosunek p_{N+1}/p_N, można sprawdzić, że

$$p_{18} < p_{19} < \ldots < p_{49} = p_{50} > p_{51} > \ldots$$

W miarę rozsądne byłoby więc przypuszczenie, że $N = 49$ lub $N = 50$. Ale czy 49, czy 50? Jeśli np. wiemy, że piłeczki sprzedawane są w paczkach po 10 szt., to druga możliwość wydaje się bardziej atrakcyjna (chyba że osoba wrzucająca piłeczki przywłaszczyła sobie jedną z nich). A jeśli piłeczki paczkowane są po trzy? A co, jeśli nasza odpowiedź zostanie uznana za dopuszczalną (i wtedy w nagrodę dostaniemy całe pudło *Innego Proszku do Prania*), jeśli wskazując N, pomylimy się co najwyżej o 2? Czy należałoby wtedy wybrać takie N, żeby

$$p_{N-2} + p_{N-1} + p_N + p_{N+1} + p_{N+2}$$

było maksymalne? A jeżeli można pomylić się o 10% ? A co robić, jeśli widać, że w pudle nie zmieściłoby się nawet 40 piłeczek?

Wnikliwemu Czytelnikowi proponujemy dalsze samodzielne rozmyślanie nad znaczeniem słowa *niewiadoma* w rachunku prawdopodobieństwa. Okazuje się, że czasami ważne jest nie tylko to, czego nie wiemy, ale również, „w jaki sposób" tego nie wiemy.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Termin nadsyłania rozwiązań:
29 II 2000

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 379 (WT=1,37) i 380 (WT=2,40)
z numeru 4/1999

Tadeusz Józefczyk	– Poznań	44,59
Piotr Kumor	– Olsztyn	39,18
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	39,07
Zbigniew Galias	– Kraków	35,12
Andrzej Daniluk	– Kraków	34,51

W matematycznym **Klubie 44** mamy już dwudziestu Weteranów! Pan Józefczyk pokonał był czterdziestoczteropunktowy limit już dwukrotnie (ostatni raz jedenaście lat temu), po czym zmniejszył częstość przesyłania rozwiązań, nie dając jednak o sobie zapomnieć; parę miesięcy temu miał na koncie w kolejnej rundzie 42,19 p. – i oto autorstwo zadania konkursowego dało trzecią „gwiazdkę" i status dwudziestego Weterana **Klubu 44 M**.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 278 (WT=1,81) i 279 (WT=2,50)
z numeru 5/1999

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	40,90
Tomasz Wietecha	– Tarnów	33,84
Aleksander Surma	– Myszków	25,25
Artur Arciszewski	– Kielce	18,71
Jarosław Łazuka	– Warszawa	16,49
Marek Wójcicki	– Szczecin	13,23
Grzegorz Miłoś	– Mielec	13,22
Tomasz Rudny	– Warszawa	12,73

Zadania z matematyki nr 391, 392

Redaguje Marcin E. KUCZMA

391. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie T. Niech X będzie dowolnym punktem na boku BC (różnym od B i C). Udowodnić, że okręgi wpisane w trójkąty BXT, TXA, AXC mają wspólną prostą styczną.

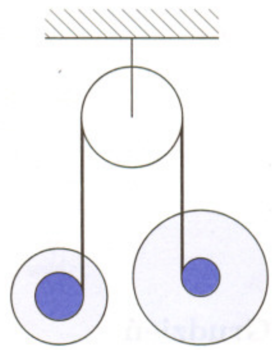
392. Dane są liczby całkowite x, y, z o tej własności, że liczba $x^{666}+y^{666}-z^{666}$ dzieli się przez 1999. Dowieść, że co najmniej jedna z liczb x, y dzieli się przez 1999.

Zadanie **392** na pożegnanie roku 1999 zaproponował pan Krystian Bartniczek z Würselen.

Zadania z fizyki nr 288, 289

Redaguje Jerzy B. BROJAN

288. Zabawka „jojo" składa się z dwóch jednorodnych walców o promieniu R_1 i łącznej masie m_1, połączonych ośką – walcem o promieniu r_1 i bardzo małej masie. Dla drugiej takiej zabawki analogiczne parametry są równe R_2, m_2 i r_2. Na ośkach nawinięto końce długiej nici, którą przełożono przez blok (rysunek), po czym oba „joja" puszczono. Jeśli masę bloku i tarcie w jego osi można pominąć, to jaki związek muszą spełniać wymienione parametry, aby „joja" spadły z tej samej wysokości w ciągu tego samego czasu?



289. Mamy dwa kilogramy wody A o temperaturze 0°C i jeden kilogram wody B o temperaturze 100°C. Jaka jest maksymalna temperatura, do której możemy ogrzać wodę A, korzystając z ciepła dostarczonego przez wodę B? Rozważyć dwa warianty zadania:
a) Możemy dzielić każdą wodę na dowolną liczbę części, wlewać do naczyń umożliwiających wymianę ciepła (bez mieszania) i ponawiać te czynności dowolną liczbę razy. Na końcu należy zlać całą wodę A do jednego naczynia – temperatura po jej wyrównaniu jest wielkością szukaną.
b) Oprócz czynności wymienionych wyżej możemy użyć silnika cieplnego korzystającego z wody gorącej jako grzejnika, a z zimnej jako chłodnicy. Pracę tego silnika można zmagazynować i zużytkować w dowolny sposób, np. do napędu chłodziarki oziębiającej jedną wodę, a ogrzewającej inną.
Ciepło właściwe wody uznajemy za stałe.

Rozwiązanie zadania M 901.

Zauważmy, że gdyby to przeciwnik decydował, którą z liczb mamy poznać, mógłby ograniczyć nasze szanse zwycięstwa do 1/2, np. wybierając z prawdopodobieństwami równymi 1/2 pary (1,2) oraz (2,3), i pokazując nam zawsze kartkę z liczbą 2. Z drugiej strony, niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik, mamy 50% szans na zwycięstwo: wystarczy z prawdopodobieństwem 1/2 mówić, że na drugiej kartce jest liczba większa, a z prawdopodobieństwem 1/2 – że mniejsza.

Oto strategia dająca większe prawdopodobieństwo wygranej. Niech $(c_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ będzie dowolnym rosnącym ciągiem liczb z przedziału $(0,1)$, np. $c_k = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arc\,tg} k}{\pi}$. Gdy wylosujemy kartkę z liczbą k, z prawdopodobieństwem c_k mówimy, że liczba z drugiej kartki jest mniejsza od k, a z prawdopodobieństwem $1-c_k$ – że większa.

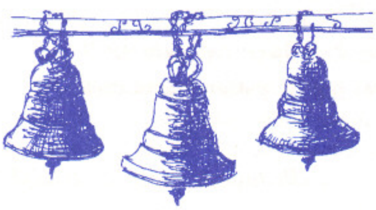
Jeśli $p_{m,n}$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że przeciwnik zapisał na kartkach liczby m i n, przy czym $m>n$, to prawdopodobieństwo naszej wygranej jest równe:

$$\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m>n}} p_{m,n}\left(\frac{1}{2}c_m + \frac{1}{2}(1-c_n)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m>n}} p_{m,n}(c_m - c_n) > \frac{1}{2},$$

bo przynajmniej jedna z liczb $p_{m,n}$ musi być dodatnia (jako że w sumie dają 1), a $c_m > c_n$ dla $m>n$.

Wnikliwy Czytelnik zechce się zastanowić, jakie prawdopodobieństwo wygranej możemy sobie zapewnić, jeśli przeciwnik ma prawo wybierać tylko liczby ze zbioru $\{1,2,\ldots,100\}$.

Patrz w niebo



30 czerwca 1908 r. na Syberii w okolicy rzeki Podkamienna Tunguska spadł tajemniczy obiekt zwany skrótowo meteorytem tunguskim. Nazwa ta jest w sprzeczności z zasadami nazywania ciał spadających z nieba. Meteorytem nazywa się tego rodzaju obiekt, jeżeli został znaleziony i można go podnieść z ziemi. Tymczasem meteoryt tunguski zniszczył wprawdzie wiele kilometrów kwadratowych tajgi, żadnych jednak jego szczątków dotychczas nie odnaleziono – widocznie eksplodował i wyparował całkowicie jeszcze nad ziemią. Wydarzenie to uwiecznił przed laty Stanisław Lem w swoich *Astronautach*, gdzie meteoryt ten został przedstawiony jako statek kosmiczny z Wenus, który w pobliżu Ziemi uległ katastrofie. Astronomowie jednak do dziś poszukują racjonalnego wytłumaczenia pochodzenia meteorytu.

Naukowe rozważania na ten temat można by prowadzić, gdyby dysponowało się przynajmniej przyzwoitymi obserwacjami lotu obiektu w atmosferze ziemskiej. Meteoryt spadł jednak w okolicy niemal bezludnej i jedynie z daleka jego ślad widziało kilka przypadkowych osób kompletnie nie przygotowanych do jakichkolwiek obserwacji. Dlatego odtwarzanie kierunku lotu i jego prędkości to – trzeba sobie szczerze powiedzieć – raczej spekulacje. Część badaczy tego zagadnienia skłaniała się do wniosku, że był to odłamek komety Enckego. Odłamek taki, jako bryła „brudnego śniegu", miał prawo zniknąć bez śladu przy zderzeniu. Ostatnio jednak mówi się, że tak głęboko do ziemskiej atmosfery mogło dotrzeć tylko ciało w rodzaju planetoidy, czyli bryła skalna, która ostatecznie i tak eksplodowała wysoko na drobne okruchy, które z kolei wyparowały przed osiągnięciem powierzchni Ziemi. Tak w każdym razie twierdzą rosyjscy badacze, którzy przeprowadzili numeryczne symulacje całego procesu przebijania się meteorytu przez atmosferę. Rozmiary tego obiektu oceniono na kilkadziesiąt metrów. Stworzywszy taką wersję wydarzenia z 1908 roku rosyjscy badacze dali szanse poszukiwaczom szczątków meteorytu, bowiem niektóre jego fragmenty mogły oderwać się wysoko nad ziemią i ocaleć, tylko że zapewne musiały wtedy spaść wiele kilometrów poza terenem katastrofy.

Tomasz KWAST

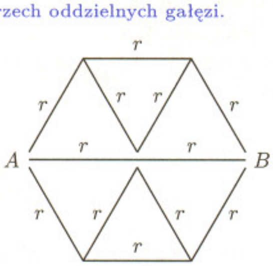
Grudzień

W grudniowe wieczory widać w kierunku południowym wielki obszar nieba pozbawiony jasnych gwiazd, przez co generalnie trudno się w nim rozeznać. Tymczasem znajdują się tam duże gwiazdozbiory, z których największy, Erydan (Rzeka Erydan), jest w ogóle rekordowy. Linia poprowadzona najkrótszą trasą przez gwiazdy mające literowe oznaczenia obejmowałaby – gdyby ją wyprostować – łuk ponad 90°. Najjaśniejsza gwiazda, Achernar, leży na południowym końcu Rzeki i z Polski nigdy jej nie widać. Drugi koniec Rzeki znajduje się tuż na zachód od Oriona. W północnej części gwiazdozbioru znajduje się średnio jasna (3,8 mag) gwiazda ϵ Eridani, czerwonawa gwiazda ciągu głównego, typu widmowego K2. Jest ona gwiazdą stosunkowo bliską, bowiem jej odległość wynosi 3,3 pc. Najciekawsze jednak, że bardzo powoli się obraca, co sugeruje, że może mieć własny układ planetarny, któremu w przeszłości przekazała większość pierwotnego momentu pędu. Byłaby to więc sytuacja podobna do obserwowanej w Układzie Słonecznym, gdzie planety skupiające zaledwie 1/1000 masy Słońca niosą 98% momentu pędu.

22 XII rozpoczyna się astronomiczna zima, będzie więc zapewne jeszcze zimniej, ale dni już będą się wydłużać. Wenus znajduje się w Wadze i wschodzi przed wschodem Słońca. Mars jest w Koziorożcu i wieczorem zachodzi, więc praktycznie go nie widać. Jowisz jest w Rybach, a Saturn niedaleko w Baranie i obie te planety widać do późnej nocy. Nów Księżyca wypada około północy 7/8 XII, pełnia 22 XII. Księżyc znajdzie się blisko Aldebarana 21 XII, ale zakrycia nie będzie. Z końcem miesiąca żegnamy się z kalendarzami zaczynającymi się od jedynki i rozpoczynamy ostatni rok wieku i zarazem tysiąclecia. Wszystkiego najlepszego.

T.K.

Rozwiązanie zadania F 513.
Dany układ rozpatrujemy jako składający się z trzech oddzielnych gałęzi.



Opór środkowej części R_1 górnej gałęzi wynosi

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r}, \quad \text{stąd} \quad R_1 = \frac{2}{3} r.$$

Całkowity opór górnej gałęzi wynosi $2r + \frac{2}{3}r = \frac{8}{3}r$, tyle samo także gałęzi dolnej. Środkowa gałąź ma opór $2r$.

Całkowity opór układu R wynosi więc

$$\frac{1}{R} = 2\frac{1}{\frac{8}{3}r} + \frac{1}{2r}, \quad \text{stąd} \quad R = 0,8\,r.$$

12/99 (24)

Γ $\lim_{n\to\infty}$ atias

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (19′)

Wyjaśnienie oszustwa (19): Oszustwo polega na wykonywaniu manipulacji, które, jak się intuicyjnie wydaje, zwiększają wartość oczekiwaną wygranej Bazylego, ale prowadzą od wygranej dodatniej do ujemnej. Wartość oczekiwana nie jest w żadnym momencie liczona, ale wyjaśnienie sprawia wrażenie, że możemy określić jej znak.

W sytuacji wyjściowej (losowanie stawki, a potem zwycięzcy) wartość oczekiwana dana jest w postaci szeregu

$$\left(\frac{20}{4}-\frac{10}{4}\right)+\left(\frac{200}{8}-\frac{100}{8}\right)+\left(\frac{2000}{16}-\frac{1000}{16}\right)+ \\ +\left(\frac{20000}{32}-\frac{10000}{32}\right)+\ldots=$$

$$=(5-2{,}5)+(25-12{,}5)+(125-62{,}5)+(625-312{,}5)+\ldots$$

Szereg ten można by uznać za rozbieżny (ale ani do $-\infty$, ani do $+\infty$), gdyby nie scenariusz gry, który nakazuje nam umieszczenie nawiasów w sposób sugerujący rozbieżność szeregu do $+\infty$.

Pierwsza modyfikacja gry zaproponowana przez Ambrożego polega na **zmianie kolejności** wyrazów szeregu, co przy szeregach rozbieżnych nie jest bezpieczne. Otrzymujemy różnicę 2 szeregów

$$(5+25+125+625+\ldots)-(2{,}5+12{,}5+62{,}5+312{,}5+\ldots)$$

Jest to wyrażenie $\infty-\infty$, choć optycznie pierwsza nieskończoność jest dwa razy większa od drugiej.

Prześledźmy dalsze modyfikacje zasad gry i ich wpływ na postać sumy mającej wyrażać wartość oczekiwaną.

Postawienie przez Ambrożego **3 stawek** w sytuacji, gdy wygrał Bazyli. Otrzymujemy

$$((6{,}25+0)+(31{,}25+0)+(156{,}25+0)+(781{,}25+0)+\ldots)- \\ -(2{,}5+12{,}5+62{,}5+312{,}5+\ldots)$$

Przeniesienie losowania *5 stawek czy 0* przed losowanie stawki daje

$$((0+0+0+0+\ldots)+(6{,}25+31{,}25+156{,}25+781{,}25+\ldots))- \\ -(2{,}5+12{,}5+62{,}5+312{,}5+\ldots)=$$

$$=(0+6{,}25+31{,}25+156{,}25+781{,}25+\ldots)- \\ -(2{,}5+12{,}5+62{,}5+312{,}5+\ldots)$$

Zaoferowanie wypłaty pocieszenia 5 przez Ambrożego w sytuacji, gdy Bazyli wygrywa zerowe losowanie, a przegrywa pierwsze. Mamy

$$(1{,}25+6{,}25+31{,}25+156{,}25+781{,}25+\ldots)- \\ -(2{,}5+12{,}5+62{,}5+312{,}5+\ldots)$$

Zwrócenie uwagi na fakt, że obydwa powyższe szeregi odzwierciedlają tę samą procedurę losowania stawki, daje szereg, który wygląda ujemnie

$$(1{,}25-2{,}5)+(6{,}25-12{,}5)+(31{,}25-62{,}5)+\ldots$$

Patrząc na powyższe manipulacje, widzimy, że wychodząc od szeregu o sumie $+\infty$ i zwiększając lub przestawiając jego wyrazy, dochodzimy do szeregu o sumie na pozór ujemnej. Ponieważ szereg jest rozbieżny (i ma dowolnie duże wyrazy dodatnie i ujemne), takie operacje i wnioskowania są błędne.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (12″)

Pan Lech Wołowski zwrócił moją uwagę na pewną niefrasobliwość w wyjaśnieniu oszustwa 12 w Γ-limatiasie 14.

Napisałem tam, że wartość oczekiwana wygranej Bazylego wynosi

$$w=-2+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}-\frac{20}{6}+ \\ +\frac{10}{36}+\frac{20}{36}+\frac{30}{36}+\frac{40}{36}+\frac{50}{36}-\frac{200}{36}+ \\ +\frac{100}{216}+\frac{200}{216}+\frac{300}{216}+\frac{400}{216}+\frac{500}{216}-\ldots,$$

gdy tymczasem p. Wołowski podaje wzór

$$w=-\frac{1}{6}+\frac{0}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}- \\ -\frac{12}{36}-\frac{2}{36}+\frac{8}{36}+\frac{18}{36}+\frac{28}{36}-\frac{122}{216}-\ldots$$

Jeśli bowiem Bazyli wyrzucił kolejno: 6, 6, 3, to wpłacił Ambrożemu 2, potem 20 i 200 zł, a na końcu dostał 300. W podanym przeze mnie wzorze te cztery kwoty występują w czterech różnych miejscach. U p. Wołowskiego są połączone w jeden ułamek $\frac{-2-20-200+300}{216}=\frac{78}{216}$ i to jest poprawne, gdyż te cztery wypłaty dotyczą jednego zdarzenia. Nie zmienia to faktu, że szereg opisujący wartość oczekiwaną jest rozbieżny.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl

Rozwiązanie zadania M 902.

Pytanie jest niejasne. Jeśli wiadomo, że moneta jest symetryczna, to wyniki 50 poprzednich rzutów nie mają nic do rzeczy i gdy rzucimy jeszcze raz, reszka wypadnie z prawdopodobieństwem równym 1/2.

Wprawdzie symetryczną monetą można teoretycznie, choć bardzo rzadko, wyrzucić 50 kolejnych reszek, lecz np. na monecie, która ma dwie reszki, orzeł nie wypadnie nigdy. Ilościowe rozstrzygnięcie, w jakim stopniu z wyrzucenia 50 reszek pod rząd wynika, że za 51 razem też wypadnie reszka, wymaga większej liczby danych lub uczynienia założeń wykraczających poza matematykę.
W deterministycznym świecie sztuki teatralnej, w którym znajdowali się Guildenstern i Rosenkrantz, nie było miejsca na przypadek i pytanie o wynik kolejnego rzutu miałoby podobny sens, co pytanie o to, czy jutro wzejdzie słońce, skoro wschodziło przez ostatnie 50 dni.

Wnikliwy Czytelnik zechce rozwiązać następujące zadanie: jeśli wiadomo, że $n\%$ monet znajdujących się w obiegu ma po obu stronach reszkę, a wszystkie pozostałe monety są symetryczne, i jeśli 50 kolejnych rzutów losowo pozyskaną monetą dało w wyniku reszkę, to jakie jest prawdopodobieństwo, że w 51 rzucie też wypadnie reszka? Czy odpowiedź zależy od parametru n?