

SPIS TREŚCI NUMERU 11(306)

Podstawy matematyki w wieku XX (2) <i>Wiktor Marek</i> <i>Jan Mycielski</i>	str. 1
Jeszcze raz o nierównych średnich <i>Piotr Goldstein</i>	str. 1
Pewien komputer analogowy albo prawa przyrody w kieliszkach <i>Jan Gaj</i>	str. 2
Słońce a klimat <i>Tomasz Kwast</i>	str. 5
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str. 7
Mała Delta	str. 8
Zadania	str.11
O współistnieniu konieczności i przypadku <i>Tomasz Nowicki</i>	str.12
Klub 44	str.15
Patrz w niebo	str.16
Listopad	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:

Prawdopodobieństwo

Okladki i ilustracje

Anna Ludwicka

Rysunki techniczne

Marcin Adamski

Wybór artykułów w języku angielskim

<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
– wiceprzewodniczący

Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Tomasz Hofmokl
Andrzej Hryniewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda
Feliks Przytycki
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz SitarSKI
Andrzej Woszczyk
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Anna Wojtyra
Piotr Zalewski

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 853-59-61, 843-02-41(-2) wewn. 21
BARTOL@MIMUW.EDU.PL

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano

w Drukarni Naukowo-Technicznej S.A.
w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 2000 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 2000 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na I kwartał 2000 r. wynosi 9 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaką”.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A.

Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.

5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Jeszcze raz o nierównych średnich

Piotr GOLDSTEIN

Na łamy *Delty* wraca od czasu do czasu temat nierówności między średnią arytmetyczną, $A_n = (a_1 + \dots + a_n)/n$, a geometryczną, $G_n = (a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{1/n}$, gdzie a_i ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) są dowolnymi nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, a n jest liczbą naturalną. Znane twierdzenie głosi, że po pierwsze

$$(1) \quad A_n \geq G_n,$$

a po drugie, równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby a_i są równe.

Pomysł sprzed lat (kiedyś nie spodobał mi się dowód podany na wykładzie, więc znalazłem własny) wciąż wydaje mi się prostszy od innych. Teraz dzielę się nim z Czytelnikami *Delty*. W dowodzie używa się, co prawda, nierówności Bernoulliego

$$(2) \quad (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha \quad \text{dla wszystkich } \alpha \geq -1 \text{ i } n = 0, 1, 2, \dots$$

(równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $n = 0$ lub $n = 1$ lub $\alpha = 0$), ale tę nierówność zna chyba każdy, kto uczył się zasady indukcji matematycznej – np. w podręczniku Anusiaka dla drugiej klasy liceum jej udowodnienie jest treścią jednego z zadań.

Przypadek, gdy któreś a_i jest równe zeru, jest banalny (Czytelnik sam domyśli się, dlaczego), więc nierówność (1) udowodnimy przy założeniu, że wszystkie a_i są dodatnie. Wtedy, oczywiście, obie rozważane średnie też są dodatnie.

A oto dowód (1) przez indukcję.

1. Dla $n = 1$ jest $A_1 = a_1 = G_1$.

2. Załóżmy, że dla pewnej liczby $k \geq 1$ zachodzi nierówność $A_k \geq G_k$.

Mamy wtedy

$$(3) \quad \begin{aligned} (A_{k+1})^{k+1} &= \left(\frac{a_1 + \dots + a_k + a_{k+1}}{k+1} \right)^{k+1} = \\ &= \left(\frac{k}{k+1} A_k + \frac{a_{k+1}}{k+1} \right)^{k+1} = (A_k)^{k+1} (1 + \alpha)^{k+1}, \end{aligned}$$

gdzie przyjęliśmy oznaczenie $\alpha = a_{k+1}/[(k+1)A_k] - 1/(k+1)$.

Liczba α spełnia założenia nierówności Bernoulliego, $\alpha \geq -1$, bo pierwszy składnik jest nieujemny, a drugi równy co najmniej $-1/2$.

Na mocy nierówności Bernoulliego prawa strona (3) spełnia warunek

$$(4) \quad (A_k)^{k+1} (1 + \alpha)^{k+1} \geq (A_k)^{k+1} (1 + (k+1)\alpha) = (A_k)^k a_{k+1}.$$

Z założenia indukcyjnego mamy więc

$$(5) \quad (A_{k+1})^{k+1} \geq (G_k)^k a_{k+1} = a_1 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1} = (G_{k+1})^{k+1}.$$

Ponieważ A_{k+1} i G_{k+1} są dodatnie, z nierówności (5) wynika ostatecznie, że $A_{k+1} \geq G_{k+1}$. Zasada indukcji daje tezę twierdzenia dla wszystkich liczb naturalnych n .

Nietrudno rozszerzyć ten dowód tak, by za jednym zamachem wykazać prawdziwość drugiej części twierdzenia. Do założenia indukcyjnego dołączamy jeszcze warunek: $A_k = G_k \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_k$. Nierówność Bernoulliego dla wykładników większych od 1 (takich, jak rozważane przez nas $k+1$) przechodzi w równość wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = 0$, czyli gdy $a_{k+1} = A_k$. Razem oznacza to, że $a_1 = \dots = a_k = a_{k+1}$. Indukcja daje tezę.

Podstawy matematyki w wieku XX 2. Zbiory

Wiktor MAREK,
Jan MYCIELSKI

Część pierwsza tego artykułu
ukazała się w *Delcie* 9/1999.

W roku 1900 odbył się w Paryżu Międzynarodowy Kongres Matematyczny, na którym Hilbert wygłosił referat pt. „Problemy Matematyczne”. Nadzwyczaj jasno Hilbert opisuje tam rolę matematyki i proces twórczości matematyka. Po owym interesującym wstępie autor przedstawia 23 otwarte problemy. Trzy z nich (nr 1, 2 i 10) dotyczą podstaw matematyki.

Problem nr 1 należał do teorii mnogości i pochodził od Cantora. Była to tak zwana hipoteza continuum (czy istnieją nieskończone zbiory liczb rzeczywistych, które nie są równoliczne ani ze zbiorem liczb naturalnych, ani z całym zbiorem liczb rzeczywistych). Problem nr 2 należał do logiki (czy układ aksjomatów arytmetyki lub analizy jest niesprzeczny), a problem nr 10 dotyczył teorii obliczalności (czy istnieje algorytm rozstrzygający istnienie całkowitych rozwiązań równań algebraicznych o współczynnikach całkowitych). Tak więc trzy wspomniane wyżej główne tematy podstaw pojawiły się już w wykładzie Hilberta.

Kwestia rozumienia pojęcia zbioru zajmowała (i zajmuje nadal) matematyków badających podstawy przez cały wiek XX. Naiwne podejście do tego pojęcia, zaproponowane przez Fregego i Russella (każda klasa, którą wymyślę, jest zbiorem), doprowadziło do sprzeczności, bowiem nieco później Russell zauważył, co następuje: rozpatrzmy klasę zbiorów R , którą we współczesnej notacji definiujemy: $\{x : x \notin x\}$. Zapytajmy, czy R jest zbiorem. Jeśli tak jest, to, zgodnie z formułą definiującą R , mamy natychmiast równoważność:

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R.$$

Zatem R nie może być zbiorem. Stało się jasne, że pojęcie zbioru musi zostać sprecyzowane tak, aby nie doprowadzało do sprzeczności. Nie oznacza to, że społeczność matematyczna (w szczególności Cantor) kiedykolwiek przyjmowała za prawdziwy schemat

istnienia zbiorów proponowany przez Fregego (że każda klasa jest zbiorem).

Ten sprzeczny schemat ma postać $\exists x \forall y [y \in x \Leftrightarrow \varphi(y)]$, gdzie φ jest dowolną formułą języka teorii mnogości.

Niemniej jednak było jasne, że pojęcie zbioru wymaga dobrego opisu. Trzeba było coś zrobić, by pojęcie zbioru mogło służyć matematykom i z odpowiednią propozycją wyszedł Zermelo. W roku 1908 zbudował on układ aksjomatów opisujący zbiory i metody budowania zbiorów, przy czym aksjomaty nie pociągały za sobą wniosku, że klasa R jest zbiorem. Po pewnych ulepszeniach Skolema i Fraenkla wyłoniła się teoria mnogości Zermelo–Fraenkla, powszechnie dziś przyjęta aksjomatyzacja teorii mnogości i całej matematyki, zwana teorią ZFC.

Spośród aksjomatów tej teorii jeden budził zaniepokojenie niektórych matematyków, mianowicie aksjomat wyboru. Aksjomat ten mówi, że dla dowolnej niepustej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór (zwany selektorem) mający z każdym elementem owej rodziny dokładnie jeden element wspólny. Jest to uogólnienie oczywistej własności rodzin skończonych, ale jest ono nader niekonstruktywne. Jeśli bowiem myślimy o zbiorach jako tworach, które można konstruować z innych zbiorów za pomocą rozmaitych operacji, to zupełnie nie widać, jakie operacje konstruowałyby ów selektor, który – zgodnie z aksjomatem wyboru – ma istnieć. Dziś pogodziliśmy się z aksjomatem wyboru, który w rozmaitych formach (np. lematu Kuratowskiego–Zorna albo zasady dobrego uporządkowania) jest powszechnie używany. Niemniej jednak przyjęcie aksjomatu wyboru powoduje, że musimy też zaakceptować jego konsekwencje, na przykład paradoksalny rozkład kuli, sprzeczny z intuicjami fizycznymi. Na ogół konsekwencje aksjomatu wyboru są dalsze od zastosowań matematyki, niż twierdzenia, które obywają się bez tego aksjomatu.

Hipoteza continuum mówi, że każdy nieskończony zbiór liczb rzeczywistych jest przeliczalny lub jest równoliczny z całym zbiorem liczb rzeczywistych. Teoria mnogości z aksjomatem wyboru dowodzi, iż jest to równoważne temu, że rodzina wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych ma liczbność \aleph_1 (tj. najkrótszego zbioru dobrze uporządkowanego i nieprzeliczalnego). Próby rozwiązania tego problemu doprowadziły do wielu interesujących wyników i wskazały na niepełność dotychczasowego rozumienia pojęcia zbioru liczb rzeczywistych. K. Gödel w drugiej

Pewien komputer analogowy albo prawa przyrody w kieliszkach

Jan GAJ

Dawno, dawno temu, kiedy komputery nazywano mózganymi elektronowymi, najlepsze z nich zajmowały całe hale i konsumowały prąd wystarczający do oświetlenia małego miasteczka. Mimo tych cieplarnianych warunków dysponowały pamięcią o kilka rzędów wielkości mniejszą i liczyły znacznie wolniej niż dostępny dziś średniej klasy pecet, co jest najlepszym argumentem na rzecz słuszności polityki naszych kolejnych rządów wobec sfery budżetowej: ograniczanie zasilania może iść w parze ze zwiększaniem wydajności. W tych to dawnych czasach oprócz maszyn cyfrowych istniały też, przede wszystkim w projektach, niesłusznie dziś zapomniane komputery analogowe, w których liczby są reprezentowane przez jakieś wielkości fizyczne, najczęściej elektryczne. Żeby nadrobić to karygodne zaniedbanie, proponuję dziś wycieczkę w krainę cieczy i naczyń. Wycieczka taka stanowi od pewnego czasu jedno z moich marzeń, a ostatnie opory przed jego realizacją pomogły mi usunąć coraz częściej spotykane reklamy piwa bezalkoholowego! Gdyby więc komuś wybijała wyobraźnia podpowiadała naganne skojarzenia, niech porzuci wszelką nadzieję: o napojach wysokowych tu nie będzie. Żeby zrozumieć, jak działa komputer analogowy, rozważmy najpierw przykład najprostsz.

Kieliszek jako komputer jednowymiarowy

Odpowiedniego kształtu kieliszek może służyć do obliczania zadanej funkcji monotonicznej. Funkcją tą będzie objętość cieczy (oczywiście bezalkoholowej) w kieliszku, a argumentem – wysokość słupa cieczy. Żeby nasz przykład uczynić konkretniejszym, trzeba poszukać prawa przyrody opisywanego jakąś funkcją monotoniczną. Rozważmy na przykład prawo Stefana–Boltzmannia opisujące zależność natężenia promieniowania ciała doskonale czarnego od temperatury:

$$I = \sigma T^4.$$

Za temperaturę przyjmijmy wysokość poziomu cieczy w kieliszku $T = \alpha H$ (z uwzględnieniem współczynnika α wyrażającego skalę), a natężeniem promieniowania będzie objętość tej cieczy $I = \beta V$ (ze współczynnikiem skalowania β). Musimy więc skonstruować kieliszek, w którym objętość będzie proporcjonalna do czwartej potęgi wysokości $V = \beta^{-1} \sigma \alpha^4 H^4 = AH^4$, gdzie $A = \beta^{-1} \sigma \alpha^4$ jest stałym współczynnikiem.



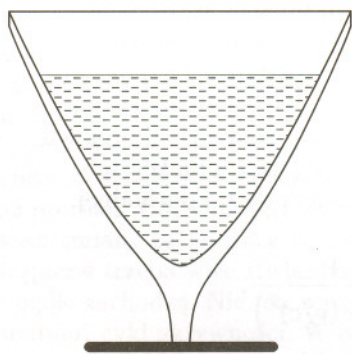
W przypadku kieliszka o symetrii obrotowej scharakteryzowanego zależnością promienia R od wysokości H objętość można wyrazić wzorem $V = \int_0^H \pi R^2(h) dh$, z którego wynika $\frac{dV}{dH} = \pi R^2$, a zatem $R = \sqrt{\pi^{-1} \frac{dV}{dH}}$.

W naszym przypadku oznacza to proporcjonalność promienia do wysokości w potęgę $3/2$, a więc kieliszek wyrażający prawo Stefana–Boltzmannia powinien wyglądać w przekroju tak, jak na powyższym rysunku.

Oczywiście, ważny jest tylko kształt wnętrza, reszta z punktu widzenia naszego wywodu nie ma żadnego znaczenia. Obliczenie natężenia promieniowania przy użyciu takiego kieliszka polegałoby na przelaniu do menzurki cieczy z kieliszka napełnionego do wysokości odpowiadającej temperaturze. Jeżeli ktoś nie lubi pierwiastkowania, może skonstruować „kieliszek” płaski, w którym warstwa cieczy o grubości d będzie ograniczona ściankami determinującymi szerokość b słupa cieczy zależną od wysokości h . W takim kieliszku objętość V w zależności od wysokości słupa cieczy H będzie opisana wzorem

$$V = d \int_0^H b(h) dh.$$

Pozwala to, podobnie jak w poprzednim przypadku, wyliczyć szerokość b jako funkcję wysokości H dla żądanej zależności objętości od wysokości $b = d^{-1} \frac{dV}{dH}$. Ostatni wzór ukazuje nam szczególną użyteczność kieliszka płaskiego do ilustracji praw przyrody, w których interesuje nas zarówno jakaś wielkość (reprezentowana przez V), jak i jej pochodna (jest do niej proporcjonalna szerokość kieliszka b).



W przypadku zależności kwadratowej (a więc pochodnej liniowo zależnej od argumentu) nie pomyłmy się, kieliszek nie będzie miał kształtu stożka, powinien natomiast mieć promień proporcjonalny do pierwiastka z wysokości, a więc wyglądać, jak na rysunku obok.

Ostatni przykład podaję nie bez kozery, bo ilustruje nie tylko prostą

zależność kwadratową (na przykład energii kinetycznej od prędkości). Świetnie nadaje się też do rozszerzenia naszych rozważań na przypadek dwuwymiarowy. Prawem, które również potrzebuje takiego kieliszka, a najlepiej dwóch, jest

Twierdzenie Pitagorasa

Jak wiemy, odnosi się ono do trójkąta prostokątnego i mówi, że suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej: $a^2 + b^2 = c^2$. Dysponując dwoma kieliszkami o kwadratowej zależności objętości od wysokości poziomu cieczy, wystarczy nalać do każdego z nich, na przykład, soku pomidorowego do wysokości odpowiadającej długości jednej z przyprostokątnych trójkąta, zlać zawartość obu kieliszków do jednego z nich, a wtedy odczytamy z wysokości poziomu soku długość przeciwprostokątnej. Łatwo zauważyć, że ten tryb postępowania można stosować wtedy, kiedy mamy do czynienia z dodawaniem pewnych funkcji wielkości, które nas interesują, według schematu $f(a) + f(b) = f(c)$. Na przykład energia całkowita układu dwóch identycznych kul jest proporcjonalna do sumy kwadratów ich prędkości. Dzięki temu można omawianą parę kieliszków wykorzystać także do przewidywania wyniku zderzenia sprężystego, w którym, jak wiadomo, energia kinetyczna się zachowuje, a więc zachodzi równość

$$v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2,$$

gdzie dolny indeks numeruje kule, a prim odnosi się do sytuacji po zderzeniu. Trzeba tylko nalać cieczy do dwóch kieliszków

połowie lat 30. wykazał, że hipoteza continuum jest niesprzeczna z aksjomatyką teorii mnogości. Krok ten był podobny do innego, wcześniejszego rewolucyjnego wyniku Gödla – mianowicie dowodu niezupełności arytmetyki.

Technika użyta przez Gödla wiąże się z odwróceniem niejako obiekcji co do aksjomatu wyboru. Zamiast pytać, jak definiować zbiory, Gödel ogranicza zbiory do tych, które dadzą się skonstruować w trakcie (pozakończzonego) procesu, który pokrótce opiszemy poniżej. Postępujemy tak: definiujemy indukcyjnie „poziomy konstruowalne”, tak że zbiory należące do kolejnego poziomu są definiowalne w strukturze złożonej z obiektów poprzedniego poziomu. Definicje są formułami, a formułom można przypisać kody będące liczbami naturalnymi. Teraz możemy już definiować dobry porządek zbiorów konstruowalnych. Postępujemy indukcyjnie. Wystarczy wskazać porządek kolejnego poziomu. Najpierw porządkujemy k -tki obiektów z poziomów poprzednich. Następnie zaś dany poziom porządkujemy według par: kod formuły, ciąg parametrów (z uprzednich poziomów). Wszystko to, wraz z dodatkowym faktem (wielce nietrywialnym), mianowicie tym, że elementarne podstruktury poziomów są same izomorficzne z poziomami, wystarcza do wykazania, iż wszystkie konstruowalne zbiory liczb naturalnych są skonstruowane w krokach o indeksach przeliczalnych. To już łatwo implikuje hipotezę continuum wewnątrz uniwersum złożonego ze zbiorów konstruowalnych. Jeszcze tylko musimy wykazać, że wszystkie aksjomaty ZFC są spełnione w uniwersum zbiorów konstruowalnych, ale to już jest łatwe. W szczególności aksjomatyka ZFC pozostaje niesprzeczna po dołączeniu hipotezy continuum. Co więcej, wszystkie zbiory konstruowalne (i tylko one) są konstruowalne wewnątrz uniwersum konstruowalnego. Tak więc wszelkie konsekwencje teorii ZFC i zdania mówiącego, że wszystkie zbiory są konstruowalne, są prawdziwe wewnątrz uniwersum zbiorów konstruowalnych. Wewnątrz uniwersum złożonego ze zbiorów konstruowalnych prawdziwa jest nawet uogólniona hipoteza continuum: dla każdej liczby porządkowej α jest $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

Klasa L zbiorów konstruowalnych może być wzbogacona przez dodatkowe obiektywy, które mogą być używane w powyższej definicji indukcyjnej. Na przykład, jeśli dodamy wszystkie liczby rzeczywiste, otrzymujemy interesujące uniwersum zwane $L[\mathbf{R}]$.

Teoria mnogości ZFC pozwala na przypisanie każdemu zbiorowi x jego rangi, którą oznaczamy $\text{rank}(x)$. Zbiorowi pustemu przypisujemy rangę 0. Dla zbiorów niepustych $\text{rank}(x) = \sup\{\text{rank}(y) + 1 : y \in x\}$. Stąd już krok do zdefiniowania *poziomów von Neumanna*, V_α , mianowicie $V_\alpha = \{x : \text{rank}(x) < \alpha\}$. Każde V_α jest zbiorem. Zbiory V_α pozwalają z kolei zdefiniować zbiory *porządkowo definiowalne*. Zbiór x jest porządkowo definiowalny, jeśli dla jakiegoś poziomu von Neumanna V_α i jakiejś formuły $\varphi(\cdot)$, x jest zbiorem tych elementów y z V_α , które spełniają w $\langle V_\alpha, \in \rangle$ formułę $\varphi(y)$. Klasę zbiorów definiowalnych z liczb porządkowych oznaczamy OD . Jak wykazał Gödel, uniwersum złożone ze zbiorów *dziedzicznie definiowalnych z liczb porządkowych* (tj. takich, że one same, wszystkie ich elementy, elementy elementów etc. są definiowalne z liczb porządkowych) spełnia wszystkie aksjomaty ZFC. Podobnie jak $L[\mathbf{R}]$ definiujemy klasę $OD[\mathbf{R}]$. Jeden z problemów, jakie sformulujemy na końcu tego artykułu, odnosi się właśnie do tego uniwersum.

Długo nie umiano wykazać, że hipoteza continuum jest niezależna, tzn. nie może być udowodniona na gruncie teorii mnogości ZFC (o ile ta ostatnia jest niesprzeczna). Zostało to wykazane w roku 1963 przez P.J. Cohena. Rozumowanie Cohena jest bardziej skomplikowane niż argument Gödla i opiera się na konstrukcji modelu boolowskiego – klasy złożonej z pewnych funkcji o wartościach w algebrze Boole'a podzbiorów otwarto-domkniętych przestrzeni topologicznej. Przy odpowiedniej definicji relacji należenia i relacji równości dla takich funkcji klasa tych funkcji nadaje wszystkim aksjomatom ZFC wartość boolowską 1. Ale dla odpowiednio dobranej przestrzeni topologicznej wartość formuły opisującej hipotezę continuum w tym uniwersum jest równa 0. Teraz już tylko trzeba dowieść, że cokolwiek da się wykazać z formuł przyjmujących w owym modelu wartość 1, też ma wartość 1. Tak więc hipoteza continuum jest zdaniem niezależnym na gruncie teorii mnogości. Ani nie jest dowodliwa (Cohen), ani jej negacja nie jest dowodliwa (Gödel). Przy okazji dowodu niezależności hipotezy continuum Cohen wprowadził metodę tzw. forsingu. Metoda ta była następnie użyta do bardzo wielu dowodów niezależności, w tym do dowodu niezależności aksjomatu wyboru od pozostałych aksjomatów ZFC. Dość wspomnieć, że w latach sześćdziesiątych

do wysokości odpowiadających prędkościom dwóch kul przed zderzeniem, następnie przelać część płynu z jednego kieliszka do drugiego tak, aby poziom cieczy w nim odpowiadał prędkości jednej z kul po zderzeniu. Z poziomu w drugim kieliszku odczytujemy prędkość drugiej kuli po zderzeniu. Ten sam schemat rozumowania można zastosować nawet do tak zaawansowanego zagadnienia, jak relatywistyczne dodawanie prędkości. Potrzebne są do tego

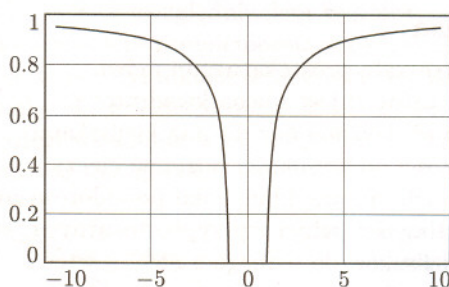
Kieliszki Einsteina

Jak można przeczytać w artykule Wojciecha Kopczyńskiego w jednym z niedawnych numerów *Delty* (7/1997), relatywistyczne dodawanie prędkości niezwykle się upraszcza, kiedy zamiast prędkości v rozważamy tak zwany kąt hiperboliczny ψ spełniający warunek $\text{tgh}\psi = v/c$, gdzie $\text{tgh}\psi = (e^\psi - e^{-\psi}) / (e^\psi + e^{-\psi})$ jest tangensem hiperbolicznym, natomiast c – oczywiście prędkością światła. Kąt hiperboliczny jest bowiem addytywny: aby otrzymać prędkość będącą relatywistycznym złożeniem dwóch prędkości, wystarczy znaleźć kąt hiperboliczny prędkości wypadkowej, zwyczajnie dodając kąty hiperboliczne prędkości składowych. Mówimy tu o najprostszym przypadku dodawania relatywistycznego ruchów odbywających się wzdłuż jednej prostej. Widać więc, że możemy zastosować tu przywołany poprzednio schemat $f(a) + f(b) = f(c)$, gdzie potrzebną nam funkcją jest funkcja odwrotna do tangensa hiperbolicznego, wzięta od prędkości podzielonej przez prędkość światła $f(v) = \text{Artgh}(v/c)$. Jeżeli chcemy skonstruować kieliszek Einsteina, potrzebujemy zgodnie z poprzednimi rozważaniami zadać w wersji tradycyjnej promień proporcjonalny do pierwiastka z pochodnej naszej funkcji lub w wersji płaskiej – szerokość proporcjonalną do tej pochodnej. Różniczkując naszą funkcję, mamy

$$\frac{d}{dv} f(v) = \frac{1}{c \left(1 - (v/c)^2\right)},$$

a więc, uwzględniając dowolność skalowania, promień kieliszka w zależności od wysokości powinien mieć postać

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - (H/H_0)^2}},$$



natomiast szerokość płaskiego kieliszka Einsteina jest

$$\frac{b}{b_0} = \frac{1}{1 - (H/H_0)^2}.$$

W praktyce kształt kieliszka w wersji płaskiej wygląda tak jak na wykresie.

Relatywistyczną sumą prędkości będzie, na przykład, prędkość v_2 w układzie spoczynkowym cząstki poruszającej się z prędkością v_1 względem rakiety pędzącej z prędkością u , oczywiście wszystko wzdłuż jednej prostej. Dla znalezienia prędkości wypadkowej wystarczy zawartość dwóch kieliszków Einsteina, napełnionych do poziomów odpowiadających v_1 oraz u , wlać do jednego z nich. Oczywiście skala prędkości nie osiąga tu c , gdyż wtedy kieliszki musiałyby mieć nieskończone rozmiary.

Zachęcam Czytelnika do projektowania kieliszków opisujących najróżniejsze prawa przyrody, a nawet do szukania stosownych kształtów po sklepach.

Słońce a klimat

Tomasz KWAST

O zależności Ziemi i licznych, zachodzących na niej, zjawisk od Słońca nikogo nie trzeba przekonywać. Bywa raczej odwrotnie, tzn. niektórzy są skłonni dopatrywać się decydującej roli Słońca tam, gdzie jest to nieuzasadnione, a przynajmniej nie dowiedzione. Na poparcie tych domniemyanych więzi przytacza się różne statystyki, zapominając o tym, że statystyka jest cierpliwa, korelować można wszystko ze wszystkim, tylko że na końcu i tak nie wiadomo, czy korelacja – jeżeli w ogóle wystąpi – jest przypadkowa, czy jest skutkiem jakiejś fizycznej więzi. Nierzadko w prognozie pogody słyszymy np., że następny dzień będzie ciężki dla meteopatów, bo nadciąga niż. Tymczasem naturalne jest, że ponura pogoda działa na wszystkich przynębiająco, nikt nie lubi gwałtownych zmian ciśnienia, za to jeżeli ktoś akurat dostał podwyżkę, to najbardziej ponura pogoda nie zepsuje mu nastroju. Tak więc ostrożnie z tego rodzaju statystykami, bo można by uwierzyć nawet w to, że konfiguracja planet w chwili urodzenia człowieka określa jego charakter i losy.

Niemniej jednak Ziemia od Słońca otrzymuje konkretną ilość energii, która określa średnią temperaturę i w ogóle klimat. W ciągu roku Słońce silniej oświetla to północną, to znowu południową półkulę Ziemi – wskutek pochylenia ziemskiej osi obrotu – i wynikiem tego są pory roku. W ciągu roku zmienia się też odległość Ziemi od Słońca, a więc ilość energii, otrzymywanej od Słońca, lekko się zmienia. Jednak jest to efekt bardzo mały, gdyż spłaszczenie orbity ziemskiej jest niewielkie, a poza tym ilość ta uśrednia się już po roku. Chcielibyśmy wiedzieć, czy w dłuższych okresach czasu zmiany zachodzące na Słońcu mają wpływ na klimat Ziemi. Najpierw trzeba więc stwierdzić, czy takie zmiany na Słońcu w ogóle zachodzą. Nie ma wątpliwości, że Słońce przechodzi 11-letni (średnio) cykl aktywności. W okresie tym zmienia się liczba plam, magnetyzm i całkowite natężenie promieniowania słonecznego. Minimum cyklu to minimum liczby plam, w tym też czasie pole magnetyczne na powierzchni Słońca jest najslabsze i – co nie jest oczywiste – najslabsze jest też całkowite promieniowanie Słońca. Inaczej mówiąc, zaplamione Słońce świeci silniej, gdyż plamom towarzyszą liczne obszary aktywne, które z nadmiarem rekompensują zmniejszenie się świecącej normalnie powierzchni Słońca. Zmiany te są zresztą bardzo małe. Ziemia otrzymuje od Słońca średnio $1,372 \text{ kW/m}^2$ (jest to tzw. stała słoneczna), a wspomniane zmiany to w przybliżeniu o jednostkę na trzecim miejscu dziesiętnym, może trochę więcej. Ten 11-letni cykl aktywności Słońca przejawia się w rozmaitym natężeniu występowania zórz polarnych, okresowych trudnościach w łączności radiowej, różnym napromieniowaniu Ziemi przez energetyczne cząstki pochodzenia kosmicznego itd. Czy jednak ma to znaczenie dla klimatu? Jeżeli nawet kroniki zanotują, że były lata chłodne i gorące, to nie nazwiemy tego zmianami, lecz fluktuacjami klimatu, bo 11 lat to za mało, by już orzekać o zmianie klimatu.

Czy na Słońcu zachodzą zmiany o dłuższym okresie? Tu już sprawa nie jest prosta, bo nawet to, co najłatwiej zaobserwować, czyli plamy, ludzkość śledzi (w każdym razie systematycznie) nie dłużej niż od wynalezienia teleskopu, czyli od niecałych 400 lat. Wiadomo, że w tym okresie wystąpiło jedno bardzo długie minimum aktywności Słońca (tzw. minimum Maundera) w latach 1640–1700, któremu towarzyszyło dość istotne oziębienie, przynajmniej w Europie. Nie ma też żadnych wzmianek o zorzach z tego okresu, podczas zaćmień praktycznie nie było widać korony słonecznej,

(i później) ciągle pojawiały się twierdzenia o niezależności różnych zdań od teorii mnogości ZFC. Istnieje jednak bardziej pozytywna strona badań w teorii mnogości: niemal wszystkie te zdania niezależne dają się jednak udowodnić lub obalić w dwóch naturalnych poduniwersach, mianowicie poduniwersum zbiorów konstruowalnych L oraz (przy użyciu hipotez o istnieniu dużych liczb kardynalnych) we wspomnianym wyżej poduniwersum $L[R]$.

W związku z tym motywem przewodnim badań teorii mnogości stały się tzw. duże liczby kardynalne. Różnych klas takich liczb jest wiele – skoncentrujemy się tutaj na dyskusji jednego ich rodzaju, mianowicie liczb mierzalnych. Oto mianowicie liczbę kardynalną κ nazywamy mierzalną, jeśli dla zbioru X mocy κ w rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru X istnieje taka miara o wartościach $0, 1$, że miara każdego zbioru jednoelementowego jest równa 0 , miara całego zbioru X jest 1 , suma zaś mniej niż κ zbiorów miary 0 ma miarę 0 . Na granice teorii mnogości ZFC nie można udowodnić istnienia liczb mierzalnych, dlatego że w uniwersum L nie ma odpowiednich miar. Ale założenie istnienia liczb mierzalnych, lub innych dużych liczb kardynalnych, ma liczne ciekawe i głębokie konsekwencje w analizie rzeczywistej i kombinatoryce, szczególnie jej części dotyczącej zbiorów nieskończonych.

Praktykujący matematyk, algebraik albo analityk, nieczęsto styka się z problemami niezależnymi od teorii mnogości ZFC. Fakt ten jest zadziwiający, bowiem teoria mnogości została odkryta przez Cantora ponad 100 lat temu. Mimo że matematyka jest stale inspirowana przez nauki przyrodnicze (opisy rzeczywistości fizycznej), prawie nigdy nie prowadzi nas do zdań niezależnych od ZFC lub do nowych aksjomatów. Co więcej, w ostatnich latach wiele słynnych problemów (np. hipotezy Fermata oraz Bieberbacha) zostało rozwiązanych przy użyciu bardzo słabych podteorii teorii ZFC. Zważmy, że sama niezależność jakiegoś zdania od teorii mnogości nie mówi nam nic o prawdziwości tego zdania. Mówi ona tylko, że takie zdanie jest fałszywe w jakimś uniwersum będącym modelem teorii ZFC. Tak więc wyniki o niezależności różnych zdań zazwyczaj mówią tylko o tym, co się dzieje w pewnych poduniwersach. Jeśli ograniczymy się do uniwersum zbiorów konstruowalnych, to otrzymamy zupełnie inny obraz struktury zbiorów liczb rzeczywistych, niż w uniwersum złożonym

ze zbiorów konstruowalnych z miary o wartościach 0, 1 na liczbie mierzalnej. Natomiast budowanie uniwersum wszystkich zbiorów jest procesem, który nie zakończył się (i prawdopodobnie nigdy się nie zakończy).

Szczególnie jasno widać rolę różnych uniwersów, gdy spojrzeć na konsekwencje aksjomatu determinacji. W latach 60. Mycielski i Steinhaus rozważali zdanie o istnieniu strategii zwycięskich dla klasy gier pozycyjnych należących do $L[\mathbf{R}]$, zwane *aksjomatem determinacji*. Istnienie takich strategii okazało się bardzo silnym założeniem (przeczącym aksjomatowi konstruowalności). Co więcej, aksjomat determinacji daje wiele konsekwencji zgodnych z intuicją fizyczną i pozwala rozwiązać wiele problemów dotyczących struktury zbioru liczb rzeczywistych i jego podzbiorów. Determinacja dostarczyła nowego impetu badaniom deskryptywnej teorii mnogości (tj. teorii definiowalnych podzbiorów tzw. przestrzeni polskich, czyli przestrzeni metrycznych ośrodkowych i zupełnych). W ostatnich latach Martin, Woodin i Steele wykazali, że istnienie owych strategii dla gier w $L[\mathbf{R}]$ wynika z aksjomatów istnienia „dużych” liczb kardynalnych.

Teoria mnogości odgrywa dziś rolę analogiczną do tej, jaką geometria Euklidesa grała przez ponad półtora tysiąca lat – do odkryć Newtona i Leibniza, mianowicie jest teorią uniwersalną dla współczesnej matematyki. Ale jej aksjomatyka nie jest zupełna. Niekiedy w trakcie rozwoju matematyki napotykały nowe zasady dotyczące zbiorów, na przykład aksjomat determinacji dla klasy $L[\mathbf{R}]$. Rozwój matematyki zadecyduje, które z tych i innych nowych aksjomatów, jakie niechybnie się pojawiają, będą powszechnie akceptowane w końcu XXI wieku.

Na zakończenie omówienia teorii mnogości podkreślmy raz jeszcze, że teoria mnogości ZFC wystarcza do wyprowadzenia całej niemal współczesnej matematyki. Nie wiemy, dlaczego tak się dzieje, aksjomatyka pochodzi z początku wieku (z roku 1908), a mimo to po dziś dzień 99% wyników matematycznych nie wymaga środków spoza ZFC. Wzmocnienia ZFC aksjomatami istnienia dużych liczb kardynalnych nie są inspirowane przez zastosowania, lecz raczej przez pojęcia tworzone w wyobraźni ludzkiej i nie mające interpretacji fizycznych. Tylko aksjomat determinacji dla $L[\mathbf{R}]$ inspirowany jest przez intuicje fizyczne.

Część trzecia ukaże się w *Delcie* 1/2000.

a obecne pomiary zawartości węgla ^{14}C dowodzą jego zwiększonej ilości w substancjach organicznych z tamtych czasów, bowiem słabe słoneczne pole magnetyczne nie chroniło Ziemi przed cząstkami promieniowania kosmicznego, produkującymi w atmosferze promieniotwórczy węgiel z azotu. Informacje o temperaturze na Ziemi są jeszcze uboższe, rzetelne obejmują ostatnie 250 lat, ale chyba do dziś trudno mówić, że dotyczą całej Ziemi. Wynika z nich, że temperatura jest skorelowana nie z fazą cyklu, lecz z jego długością, przy czym w okresie długich cykli (około lat 1800, 1855 i 1900) następowało obniżenie się średniej temperatury na półkuli Ziemi, zresztą zaledwie o mniej niż jeden stopień. Jest nawet gorzej, gdyż minimum temperatury czasem następowało po najdłuższych cyklach aktywności Słońca, a czasem przed. Jest więc korelacja, ale czy także związek fizyczny?

Badanie tych zagadnień stwarza chyba więcej nowych pytań niż daje odpowiedzi na dawne pytania. Próby odtwarzania związków Ziemia-Słońce choćby w czasach historycznych są jeszcze bardziej zawodne. Wiadomości o klimacie są wrywkowe, a płam i tak nikt nie obserwował. W odniesieniu do czasów dawniejszych niepewność jest jeszcze większa. O temperaturze na danym obszarze próbuje się wnioskować np. na podstawie śladów roślinności w odpowiednich warstwach geologicznych, nigdy jednak nie ma pewności, czy pyłki roślin znajdujące w tych warstwach pochodzą akurat z tego terenu, czy zostały przywiane przez wiatr. Dlatego wyciąganie wniosków z takich obserwacji pośrednich jest i trudne, i niepewne.

Rzecz jasna, nonsensem byłoby twierdzić, że ziemski klimat nie zależy od Słońca. Jednak udokumentowane zmiany aktywności Słońca powodują bardzo niewielkie zmiany stałej słonecznej i – jak widzimy – bardzo niewielkie zmiany temperatury na Ziemi. Zapewne jedno z drugim wiąże się, chcielibyśmy jednak umieć oddzielić wpływ Słońca od innych czynników określających ziemski klimat. Wydaje się, że nastanie i ustąpienie epok lodowcowych wywoływane są zmianami w przebiegu wielkich prądów morskich, a te z kolei wypiętrzaniem się lub zanikaniem łądów, czyli ogólnie ruchem płyt tektonicznych. Ale np. wyginięcie dinozaurów 65 mln lat temu nastąpiło chyba z innych przyczyn. Coraz bardziej przebija się hipoteza upadku wielkiego meteorytu – prawdopodobnie na skraj Jukatanu – co doprowadziło do takiego zapylenia atmosfery, że z braku światła wyginęła roślinność, a w konsekwencji z głodu dinozaury. Jednak według innej hipotezy Słońce przechodziło w owym czasie przez gęstsze obszary ramienia spiralnego naszej Galaktyki i to oddziaływanie Słońca z gęstą materią międzygwiazdową mogło spowodować znaczne oziębienie klimatu Ziemi. Wreszcie może w ogóle nie ma powodów do przejmowania się zmiennością Słońca, a bardziej drastyczne zmiany klimatu może wywołać wzmożona aktywność wulkaniczna Ziemi lub nawet działalność człowieka, systematycznie zanieczyszczającego środowisko naturalne. Niektórzy twierdzą, że już obserwujemy ocieplenie klimatu, co przypisuje się wzbogaceniu atmosfery w dwutlenek węgla i zwiększenie przez to efektu szklarniowego. Konkurencja z kolei dowodzi, że jest to niemożliwe, gdyż oceany i tak wchłoną każdą (powiedzmy – do pewnych granic), wyprodukowaną przez człowieka, ilość dwutlenku węgla, tak że skład atmosfery jeszcze długo się nie zmieni. Badanie tych zjawisk na pewno jest nie tylko zaspokajaniem naukowej ciekawości, gdyż może dać człowiekowi bardzo konkretne wskazówki co do postępowania w przyszłości. Niestety, jak dotąd wniosek jest raczej pesymistyczny, mianowicie zbyt wiele jest tu niewiadomych. Nie zmienia to faktu, że przyjemnie jest, jeżeli powietrzem daje się oddychać, a wody ze źródła można się napić, więc lepiej zbyt intensywnie z naszą planetą nie eksperymentować.

Aktualności (nie tylko) fizyczne

Kolekcjonowanie leży w naszej naturze. Choć (na szczęście) tylko dla nielicznych staje się sensem życia, to każdy coś zbiera. Jedni znaczki, drudzy oceny w szkole. Jedni puste butelki, inni referencje do swoich publikacji. Czy coś zbieramy, najłatwiej poznać po tym, że co jakiś czas oglądamy naszą kolekcję. I tu zaczyna się kłopot. Do najcenniejszych należą zbiory eksponatów łatwo ulegających zniszczeniu. Drogocenne przedmioty bywają zabezpieczane przed zwiedzającymi. Czasami wręcz uniemożliwiając cieszenie się nimi. Często zmuszeni jesteśmy oglądać arcydzieła zza pancernych szyb lub wręcz zadowalać się makietami. Obcowanie z kolekcją zamienia się w wątpliwą przyjemność czytania spisu inwentarzowego. Są jednak obiekty tak ulotne, że giną przy każdej próbie kontaktu. Klasycznym przykładem mogą być arcydzieła sztuki kulinarnej. Żeby ich doświadczyć, trzeba je zjeść!

Oprócz klasycznych, są też przykłady kwantowe. Na przykład fotony. Kolekcjonowanie pojedynczych fotonów wydaje się beznadziejne, gdyż przekonać się o ich obecności można dopiero po ich zaabsorbowaniu, czyli zniszczeniu. Nie jest to jednak ograniczenie fundamentalne. Prawa mechaniki kwantowej zezwalają na tzw. QND, czyli nieniszczący pomiar kwantowy (quantum non-demolition measurement). W tym przypadku mierzony stan kwantowy zachowuje się jak katalizator – sam nie ulegając zmianie wywołuje wykrywalną zmianę otoczenia. W przypadku fotonu można by jednocześnie „mieć ciastko i je zjeść”, choć, jak się za chwilę przekonamy, chodzi tu bardziej o wywołanie „kwantowej ślinki” niż „zaspokajanie kwantowego łakomstwa”.

O szczegółach jednego z najnowszych osiągnięć w dziedzinie QND można przeczytać w *Nature* [1] i na świetnie przygotowanych stronach WWW [2]. Doniesienie dotyczy pierwszego nieniszczącego pomiaru pojedynczego fotonu. Centralnym elementem zestawu doświadczalnego jest nadprzewodząca wnęka rezonansowa – miejsce ekspozycji fotonu. Aby przekonać się o jego obecności, przez wnękę przepuszcza się pojedyncze atomy rubidu wzbudzone do rydbergowskiego stanu kołowego o głównej liczbie kwantowej $n = 50$. (Chodzi tu o bardzo silnie wzbudzone atomy z maksymalnym momentem pędu, dla których orbital elektronu walencyjnego jest cienkim torusem o dużym promieniu. Rydbergowskie stany kołowe charakteryzują się długimi czasami życia i silnym sprzężeniem do mikrofalowych fotonów umożliwiającymi przejście pomiędzy stanami o kolejnych głównych liczbach kwantowych.)

Parametry eksperymentu odpowiadają zachodzeniu tzw. cyklu Rabiiego polegającego na rezonansowym oddziaływaniu atomu z wnęką. Układ ten oscyluje pomiędzy stanami o $n = 50$ i jednym fotonie a $n = 51$ i brakiem fotonu we wnęcie. Czas oddziaływania można tak dobrać, żeby atom o $n = 50$ zaabsorbował foton, a następnie go wyemitował. W ten sposób wnęka pozostaje w nie zmienionym stanie, co jest podstawą pomiaru QND. Atom rubidu, pełniący tu rolę próbniaka, też wylatuje z wnęki w tym samym stanie, ale ze zmianą fazy o π , jeżeli we wnęcie jest foton, albo bez zmiany fazy, gdy fotonu nie ma. Zmiana fazy jest mierzona, co pozwala na stwierdzenie, czy we wnęcie ukrywa się „ciastko”.

Metoda polega na wykorzystaniu interferencji ramseyowskiej. Nazwijmy atom o głównej liczbie kwantowej $n = 50$ *głodnym*, o $n + 1$ *najedzonym*, a o $n - 1$ *śpiącym*. Początkowo *głodny atom*, tak przed wejściem do centralnej części wnęki, jak i po wyjściu z niej, przechodzi przez strefy Ramseya, w których napotyka falę mikrofalową dostrojoną do przejścia pomiędzy stanem *głodnym* i *śpiącym*. Atom *głodny* staje się najpierw superpozycją *głodnego* + *śpiącego*. Następnie jego *głodna* część zmienia fazę, jeżeli we wnęcie jest foton (przechodząc cykl Rabiiego *głodny* → *najedzony* → - *głodny*). Na końcu *głodna* część ponownie zamienia się na superpozycję *głodnej* + *śpiącej*, natomiast część *śpiąca* na superpozycję *śpiącej* - *głodnej*. Pamiętając o czynniku normalizacyjnym $1/\sqrt{2}$, łatwo sprawdzić, że jeżeli we wnęcie jest foton, to na końcu otrzymamy w ten sposób atom *głodny* (i to z zaostrozonym apetytem), a jeżeli nie ma, to *śpiący* (wiadomo przecież, że jak nie ma co jeść, to najlepiej głód przespać), co rozpoznać łatwo.

Eksperyment ten to nie tylko sprawdzanie podstaw mechaniki kulinarnej, tzn. kwantowej, czy propozycja dla ekscentrycznych kolekcjonerów. Zbudowany układ może być wykorzystany jako pamięć kwantowa albo tzw. kwantowa bramka fazowa [2], otwierając kolejne drzwi na drodze do kwantowych komputerów.

Piotr ZALEWSKI

[1] *Seeing a single photon without destroying it*, G. Nougues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J.M. Raimond, S. Haroche, *Nature* 400(15/07/1999)239

[2] <http://www.lkb.ens.fr/recherche/qedcav/english/englishframes.html>

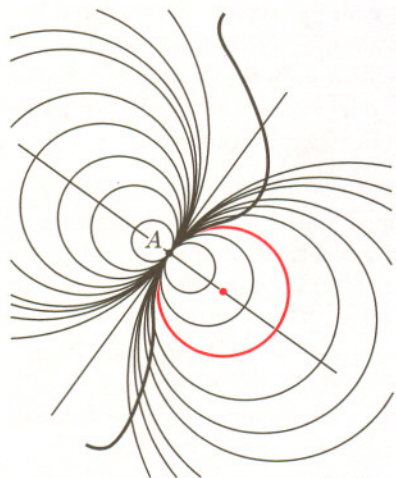


δ

mała delta

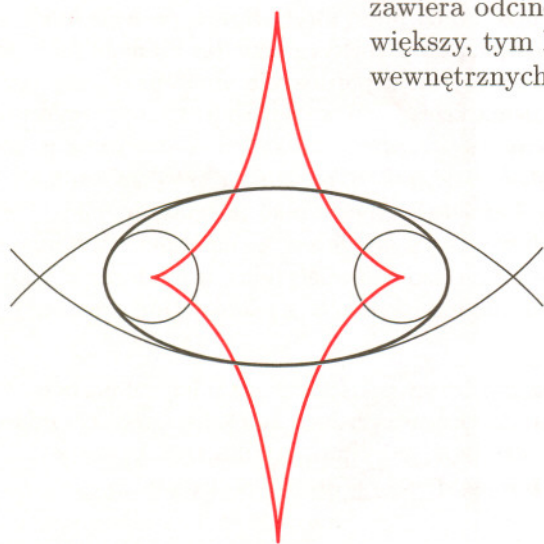
Kółka i sznurki

Kiedy jadący samochód wejdzie w zakręt (szczególnie, gdy kierowca nie zmniejszy szybkości), jadący czują, że jakaś siła popycha ich na zewnętrzne (w stosunku do zakrętu) drzwi. Fizycy o tym zjawisku mówią *siła odśrodkowa*, matematycy nazywają je *krzywizna*. Można wielkość krzywizny mierzyć w rozmaitych jednostkach – matematycy umówili się, że będą używać odwrotności długości (np. $\frac{1}{\text{cm}}$). Wybór ten staje się zrozumiały, gdy zauważymy, iż wielkość krzywizny przy jeździe po okręgu (dla tej samej szybkości jazdy) jest odwrotnie proporcjonalna do promienia tego okręgu, a wielkość promienia możemy mierzyć w centymetrach. Przyjmuje się przy tym dla prostoty umowę, że stosunek tej proporcjonalności jest 1.

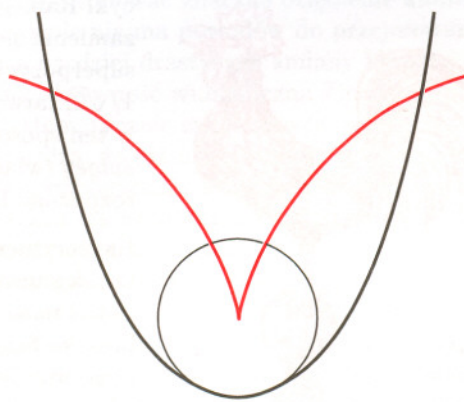


Rys. 1. Odwrotność długości promienia kolorowego okręgu to krzywizna grubej krzywej w punkcie A, a jego środek to środek krzywizny.

Jak zorientować się, jaką krzywiznę ma w swoich różnych punktach dana nam przez kogoś, czy coś, krzywa? Metoda jest bardzo prosta ideowo, choć nieco trudniejsza przy praktycznych wyliczeniach. Mianowicie dla punktu krzywej, w którym chcemy zmierzyć jej krzywiznę, bierzemy wszystkie okręgi mające w tym punkcie tę samą prostą styczną, co krzywa, i wybieramy ten okrąg, który najlepiej (w okolicy tego punktu) badaną krzywą przybliża (rys. 1). Odwrotność promienia tego okręgu to właśnie wielkość krzywizny. Ale dowiedzieliśmy się też, gdzie ta krzywizna ma środek. Możemy więc dla prawie każdej krzywej znaleźć inną krzywą, złożoną z jej środków krzywizny i zwaną *ewolutą* lub – po polsku – *rozwiniętą* tej krzywej (rys. 2 i 3). Skąd wzięła się taka nazwa, za chwilę. Słowo „prawie” bierze się stąd, że, gdy krzywa zawiera odcinek, to tam najlepiej przybliżającego go okręgu nie ma (im większy, tym lepszy) i tym samym nie ma, dla żadnego z jego punktów wewnętrznych, środka krzywizny.



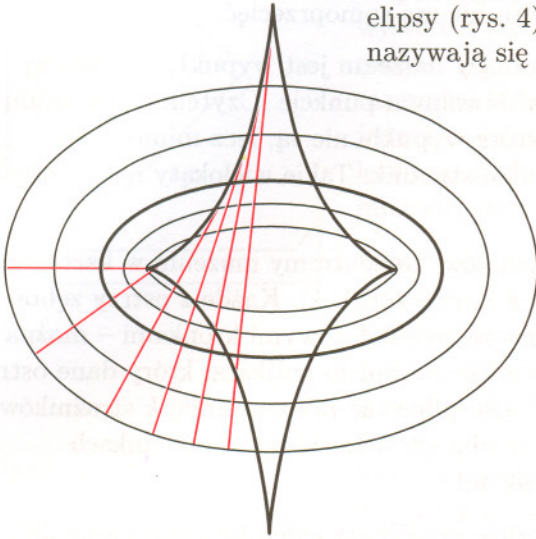
Rys. 2. Elipsa (gruba) i jej ewoluta (kolorem). Jeśli elipsa ma równanie $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, to jej ewoluta E_e ma równanie $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$.



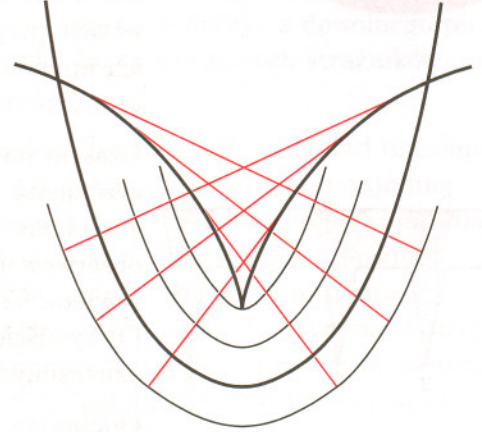
Rys. 3. Parabola (gruba) i jej ewoluta (kolorem). Jeśli parabola ma równanie $x^2 = 2py$, to jej ewoluta E_p ma równanie $27px^2 = 8(y - p)^3$.

O kółkach już było, teraz o sznurkach. Najłatwiej siłą odśrodkową demonstrować posługując się rozkręconym ciężarkiem na sznurku. Gdy chodzi o ruch po okręgu, należy trzymać sznurek w jednym punkcie – obracający się ciężarek będzie zataczał okrąg. Ale przecież jeden punkt to ewoluta okręgu. Analogicznie można postąpić w przypadku dowolnej ewoluty.

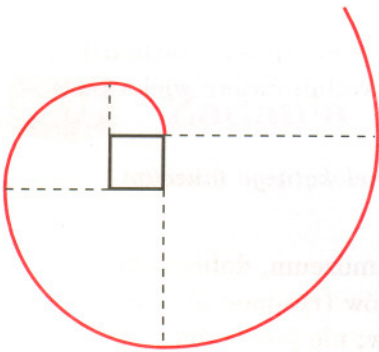
Wyobraźmy sobie napiętą nić rozwijaną ze szpulki w kształcie ewoluty elipsy (rys. 4) czy też ewoluty paraboli (rys. 5). Otrzymane krzywe nazywają się ewolwentami odpowiednio krzywej E_e i E_p .



Rys. 4. Ewolventy krzywej E_e . Jest wśród nich tylko jedna elipsa – ta, dla której otrzymaliśmy E_e .



Rys. 5. Ewolventy krzywej E_p . Jest wśród nich tylko jedna parabola – ta, dla której otrzymaliśmy E_p .



Rys. 6. Jedna z ewolwent brzegu kwadratu. Składa się z ćwiartek okręgów. A inne?

Każdy, kto zetknął się z obliczaniem pochodnych, widzi, że relacja między ewolutą i ewolwentą jest zupełnie analogiczna do relacji między pochodną i funkcją pierwotną.

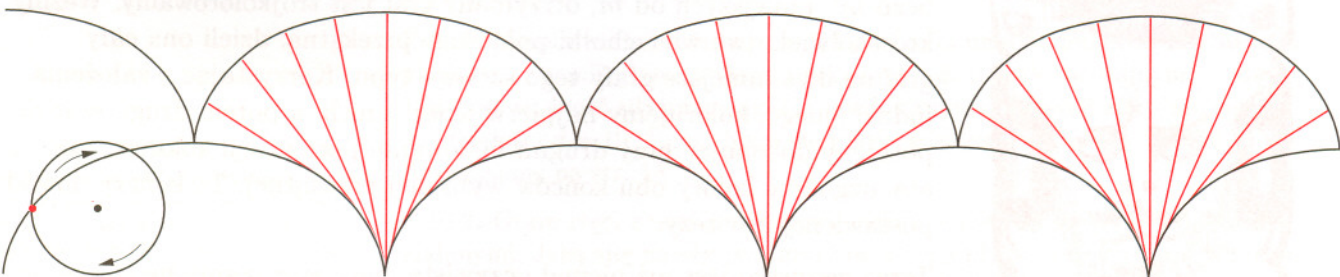
Tym razem polska nazwa ewolventy – *rozwijająca* – jest całkiem zrozumiała: faktycznie jest to linia, którą zakresłamy rozwijając sznurek. Zauważmy teraz, że ewoluta każdej krzywej, otrzymanej z pewnej krzywej K przez to rozwijanie, jest krzywą K . Mamy zatem wyjaśnienie polskiej nazwy ewoluty i bardzo interesujące twierdzenie dla krzywych bez odcinków:

ewoluta ewolventy danej krzywej to właśnie ta krzywa.

Są to więc operacje wzajemnie odwrotne.

Ewoluta krzywej (jeśli istnieje) jest jedna, ewolwent zaś jest dużo. To, którą ewolwentę danej krzywej otrzymamy, zależy od początkowej długości sznurka.

Znajdować ewolutę możemy tylko dla krzywych gładkich, to znaczy takich, które w każdym punkcie mają dobrze określoną styczną (i, na dodatek, nie zawierają odcinków), nie mogą natomiast mieć np. dziobków. Przy znajdowaniu ewolwent te ograniczenia są łagodniejsze. Widać to w obu rozpatrzonych przykładach, a rysunek 6 pokazuje, że w brzegu mogą się znajdować i odcinki.



Rys. 7. Huygens odkrył, że krzywa może być taka sama, jak jej ewoluta, czy ewolventa; przykładem jest cycloida, czyli krzywa jaką zakresła punkt okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej.

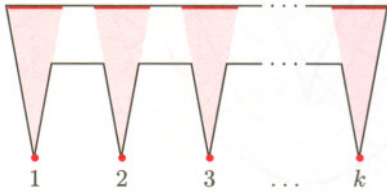


Strażnicy w muzeum

Przypuśćmy, że muzeum ma kształt wielokąta o m bokach (niekoniecznie wypukłego), a jego dyrektor chciałby mieć pewność, że wszystkie punkty muzeum znajdują się stale pod obserwacją strażników, którzy stoją w miejscu, ale mogą się obracać. Ilu strażników powinien zatrudnić? Zakładamy, że muzeum nie ma dziur wewnątrz, tzn. jego brzeg tworzy jedna łamana zamknięta, która nie ma samoprzecięć.

Oczywiście, gdy wielokąt tworzący muzeum jest wypukły, wystarczy jeden strażnik, postawiony w dowolnym punkcie. Czytelnik bez trudu wskaże przykłady muzeów, które wypukłe nie są, lecz mimo to do ich upilnowania wystarcza jeden strażnik. Takie wielokąty nazywamy *gwiazdzistymi*.

Czasem potrzeba więcej strażników. Rozpatrzmy muzeum w kształcie grzebienia, które ma $m = 3k$ ścian (rysunek 1). Każde z ostrzy zębów grzebienia – na rysunku zaznaczonych kolorowymi kropkami – można obserwować tylko z punktów zacięniowanego trójkąta, który dane ostrze zawiera. Tego muzeum musi więc pilnować przynajmniej k strażników i oczywiście tylu wystarczy: trzeba ich ustawić np. na odcinkach oznaczonych kolorowymi kreskami.



Rys. 1

Odcinając z muzeum w kształcie grzebienia jeden lub dwa narożniki, przekonamy się, że dla każdej liczby m (nie tylko dla rozpatrzonych przed chwilą m podzielnych przez 3) istnieje muzeum o m bokach, którego musi pilnować przynajmniej $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ strażników.

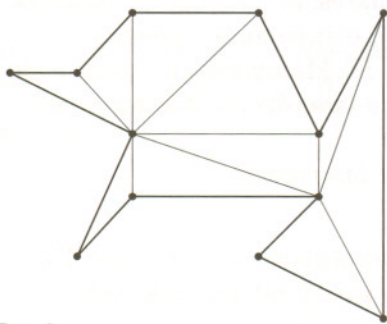
Okazuje się, że gorszego przypadku wymyślić nie sposób, zachodzi bowiem następujące twierdzenie, które udowodnił ćwierć wieku temu Vaclav Chvátal:

Twierdzenie. *Do pilnowania dowolnego wielokątnego muzeum o m ścianach wystarczy $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ strażników.*

Dla dowodu narysujmy $m - 3$ przekątnych muzeum, dobranych tak, by podzielić muzeum na $m - 2$ trójkątów (rysunek 2). Zawsze można to zrobić, na ogół na wiele sposobów; nie jest ważne, który z nich wybierzemy. Gdy wierzchołki muzeum oznaczymy kropkami, powstanie graf. Okazuje się, że jest to zawsze graf *trójkolorowalny*: jego wierzchołki można pomalować trzema kolorami w taki sposób, żeby każde dwa wierzchołki, które są połączone odcinkiem, miały różne kolory. Udowodnimy to przez indukcję względem m .

Gdy $m = 3$, nie ma czego dowodzić: każdy z wierzchołków malujemy innym kolorem. Przypuśćmy teraz, że $m > 3$ i założmy, że dla wszystkich liczb m' , mniejszych od m , otrzymany graf jest trójkolorowalny. Weźmy którekolwiek dwa wierzchołki połączone przekątną; dzieli ona cały graf na dwa mniejsze grafy tego samego typu. Korzystając z założenia indukcyjnego, kolorujemy najpierw jeden z nich, a potem drugi, w razie potrzeby dokonując przy drugim malowaniu permutacji kolorów, tak aby uzgodnić kolory obu końców wybranej przekątnej. To kończy dowód postawionej hipotezy.

Teraz wszystko jest już niemal oczywiste: ponieważ mamy m wierzchołków pomalowanych trzema kolorami, więc istnieje kolor – powiedzmy kolor czerwony – którym pomalowano nie więcej niż



Rys. 2

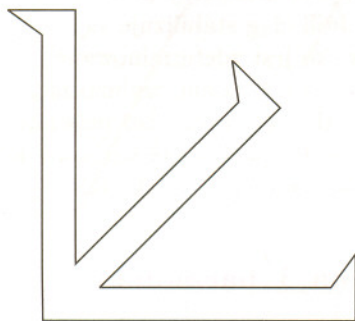


$\lceil \frac{m}{3} \rceil$ wierzchołków. Strażników należy ustawić właśnie w tych wierzchołkach; każdy z trójkątów, na które przekątne dzieli muzeum, ma wierzchołek czerwony, a zatem każdego trójkąta z pewnością pilnuje przynajmniej jeden strażnik. Skoro tak, to i całe muzeum znajduje się pod obserwacją.

Istnieją różne wersje i odmiany zadania o strażnikach w muzeum. Wspomnijmy o jednej z nich, która do dziś czeka na to, aż jakiś wystarczająco zdolny i zapalony człowiek ją rozwiąże. Nadal rozpatrujemy muzeum o m ścianach, takie, jak poprzednio, jednak tym razem zakładamy, że każdy ze strażników może spacerować wzdłuż jednej ze ścian i widzi wszystko, co można zobaczyć z dowolnego punktu leżącego gdziekolwiek na tej ścianie. Ilu spacerujących strażników musi pilnować muzeum?

Łatwo podać, w ślad za Gottfriedem Toussaintem, przykład muzeum o $m = 4s$ ścianach, do którego upilnowania potrzeba przynajmniej s spacerujących strażników. Rysunek 3 przedstawia ten przykład dla $s = 3$; Czytelnik bez trudu wskaże, wzdłuż których ścian powinni spacerować strażnicy. Nie wiadomo natomiast, czy w muzeum o m ścianach $\lceil \frac{m}{4} \rceil$ spacerujących strażników zawsze wystarczy; istnieje hipoteza, która głosi, że tak, być może z wyjątkiem pewnych niezbyt dużych wartości m . Może więc ci z Czytelników, którym marzą się matematyczne ostrogi, spróbują swych sił?

Małą Deltę przygotowali Marek KORDOS i Paweł STRZELECKI



Rys. 3



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 898. Niech a i b będą dwiema względnie pierwszymi liczbami naturalnymi, n zaś liczbą całkowitą. Niech (x_0, y_0) będzie punktem kratowym leżącym na prostej o równaniu $ax + by = n$. Wykazać, że punktami kratowymi na tej prostej, leżącymi najbliżej punktu (x_0, y_0) , są $(x_0 - b, y_0 + a)$ i $(x_0 + b, y_0 - a)$.

Rozwiązanie na str. 16

M 899. Niech a i b będą dwiema względnie pierwszymi liczbami naturalnymi. Niech M będzie zbiorem wszystkich liczb całkowitych, których nie da się przedstawić w postaci $ax + by$, gdzie x i y są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Znaleźć $\max M$.

Rozwiązanie na str. 15

M 900. Wykazać, że przy założeniach zadania 899 dla dowolnej liczby całkowitej n dokładnie jedna z liczb n i $(\max M - n)$ należy do M .

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 511. Kropla wody o masie $m = 0,1$ g została umieszczona między dwiema płaskimi i równoległymi płytkami szklanymi, doskonale zwilżalnymi wodą.

Jaka jest wielkość siły przyciągania między płytkami, jeżeli znajdują się one w odległości $d = 10^{-4}$ cm? Napięcie powierzchniowe wody $\alpha = 7,3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Rozwiązanie na str. 15

F 512. Gram rtęci został umieszczony między dwiema płaskimi płytkami szklanymi. Jaką siłę należy przyłożyć do górnej płytki, aby rtęć miała postać krążka jednakowej grubości o promieniu $R = 5$ cm? Zakładamy, że rtęć doskonale nie zwilża szkła. Napięcie powierzchniowe rtęci $\alpha = 0,5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Rozwiązanie na str. 14

Ciecz doskonale zwilża naczynie, jeśli tworzy menisk wklęsły, stykający się ze ścianką naczynia pod kątem równym 0. Podobnie ciecz doskonale nie zwilża naczynia, jeśli tworzy menisk wypukły, stykający się ze ścianką pod tym samym kątem (a więc w obu przypadkach ścianka naczynia jest styczna do menisku w punkcie zetknięcia się z nim).

O współlistnieniu konieczności i przypadku

Tomasz NOWICKI

Zjawiska ewoluujące w czasie możemy opisywać ciągami rekurencyjnymi, które określa się wzorami postaci $x_{n+1} = f(x_n)$. Ponieważ często nie znamy lub nie potrafimy kontrolować początku ciągu, więc chcielibyśmy powiedzieć coś o dalekich wyrazach ciągu niezależnie od x_0 . Jeśli ciąg stabilizuje się, na przykład, gdy ma granicę, to mówimy, że zjawisko jest zdeterminowane – jakkolwiek byśmy zaczęli, znamy rezultat końcowy. Czasem, wybierając, powiedzmy, co szósty wyraz, dostaniemy podciągi zbieżne; wtedy też mówimy o determinizmie – w granicy zjawisko jest okresowe. Często jednak zachowanie ciągu wymyka się takim przewidywaniom. A czasem jest i tak, i tak. Jak? Zobaczmy na przykładzie.

Średnia arytmetyczna, geometryczna i harmoniczna

Zadanie 1. Dla $p > q > 0$ określamy dwa ciągi: $a_0 = p$, $g_0 = q$, a dalej rekurencyjnie,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + g_n}{2}, \quad g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n}.$$

Zbadaj zbieżność tych ciągów.

Dla $p > q > 0$ mamy $(p+q)^2 > 4pq$. Stąd również $p > (p+q)/2 > \sqrt{pq} > q$, a zatem $p \geq a_n > g_n \geq q$ dla wszystkich n , przy czym a_n maleje, a g_n rośnie. Ponadto, $|a_{n+1} - g_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n - g_n|$, a więc oba ciągi mają wspólną granicę, którą nazywa się średnią arytmetyczno-geometryczną liczb p i q .

Zadanie 1 ilustruje twierdzenie o zbieżności ciągów monotonicznych ograniczonych w przypadku, gdy granicę trudno jest wyrazić wzorem. Czasem łatwiej przekonać się do rozumowania, gdy możemy granicy dotknąć ręką.

Zadanie 2. Dla $p > q > 0$ określamy dwa ciągi: $a_0 = p$, $h_0 = q$, a dalej rekurencyjnie

$$a_{n+1} = \frac{a_n + h_n}{2}, \quad h_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{h_n}} = \frac{2a_n h_n}{a_n + h_n}.$$

Zbadaj zbieżność tych ciągów.

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, $p \geq a_n > a_{n+1} > h_{n+1} > h_n \geq q$ (trzeba skorzystać z nierówności $(1/p + 1/q)^2 > 4/(pq)$), a oba ciągi mają wspólną granicę g , którą tym razem możemy obliczyć. Mamy bowiem $a_{n+1}h_{n+1} = a_n h_n = \dots = a_0 h_0 = pq$, skąd $g^2 = pq$, czyli $g = \sqrt{pq}$ (rys. 1). Korzystając z tego, otrzymujemy jeden ciąg rekurencyjny

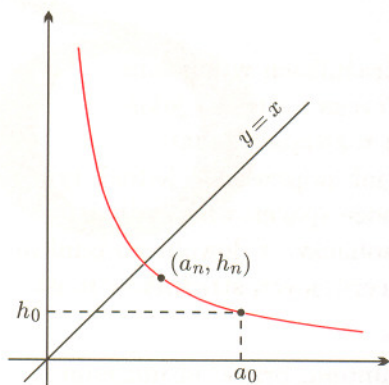
$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{g^2}{a_n} \right).$$

Zadanie 3. Naszczycuj wykres funkcji $f(x) = (x^2 + g^2)/2x$.

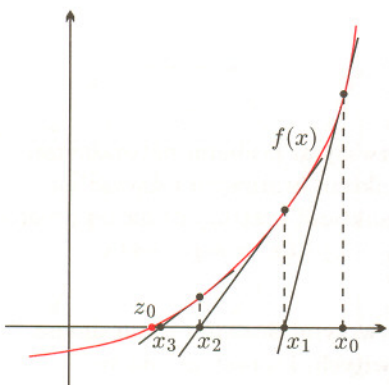
Ciąg $a_{n+1} = f(a_n)$ jest bardzo szybko zbieżny do punktu stałego funkcji f ; właśnie tej procedury używają kieszonkowe kalkulatory do obliczania (przybliżeń) pierwiastków kwadratowych. Przy okazji, jest to algorytm obliczania miejsca zerowego funkcji $x^2 - g^2$ metodą stycznych (algorytm Newtona – rys. 2).

Zanim przejdziemy dalej, zauważmy, że wzory rekurencyjne ciągów a_n i h_n są jednorodne, to znaczy, że dla $\lambda > 0$ ciągi $A_n = \lambda a_n$ i $H_n = \lambda h_n$ spełniają te same warunki i wzory, co ciągi a_n i h_n (z nowymi punktami startowymi $P = \lambda p$ i $Q = \lambda q$).

Mamy tu do czynienia z sytuacją w pełni zrozumiałą, ciąg (a_n, h_n) jest bardzo szybko zbieżny. Gdybyśmy więc modelowali nim jakieś zjawisko, już po niewielu iteracjach widzielibyśmy tylko punkt zbieżności. Pełny determinizm. A przecież



Rys. 1. Gdy $a_0 h_0 > 0$, to dla wszystkich n punkt (a_n, h_n) należy do tej samej gałęzi hiperboli $xy = a_0 h_0$, do której należy (a_0, h_0) . Dla $n \rightarrow \infty$ punkt (a_n, h_n) zmierza bardzo szybko do prostej $y = x$.



Rys. 2. Metoda stycznych – algorytm Newtona. Załóżmy, że funkcja f jest ściśle wypukła (wystarczy, by $f''(x) > 0$ dla wszystkich x) i $f(z_0) = 0$. Dla dowolnego x_0 określamy ciąg

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Punkt x_{n+1} to miejsce, w którym styczna do wykresu f w punkcie $(x_n, f(x_n))$ przecina oś OX . Ciąg (x_n) jest zbieżny do miejsca zerowego z_0 , przy czym – o ile z_0 nie jest minimum f – dla x_n bliskich z_0 mamy

$$|x_{n+1} - z_0| \approx |x_n - z_0|^2,$$

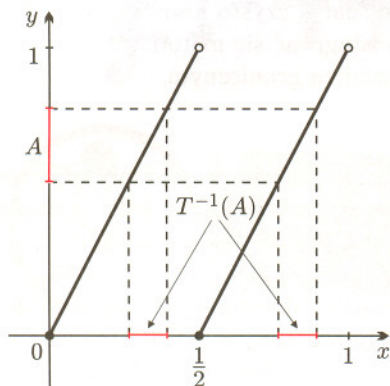
co oznacza, że za każdym krokiem liczba cyfr dokładnych przybliżenia z grubszą biorąc podwaja się.

Zwróćmy uwagę, że funkcja wypukła może mieć dwa miejsca zerowe, więc trzeba uważać, gdzie się startuje. Czytelnik zechce pomyśleć, co się może dziać, gdy f nie ma miejsca zerowego lub nie jest wypukła.

w ciągu tym tkwią jeszcze pewne tajemnice. Zanim je poznamy, spróbujemy opisać sytuację jak najbardziej losową.

Jedno przekształcenie o wielu obliczach

Rozpatrzmy przekształcenie T odcinka $[0, 1)$ określone następująco: $Tx = 2x$ dla $0 \leq x < 0,5$ oraz $Tx = 2x - 1$ dla $0,5 \leq x < 1$ (rys. 3). Będziemy też pisać $Tx = 2x \bmod 1$. Oba odcinki, na których T jest ciągłe, będziemy nazywać połówkami.



Rys. 3. Wykres przekształcenia T .

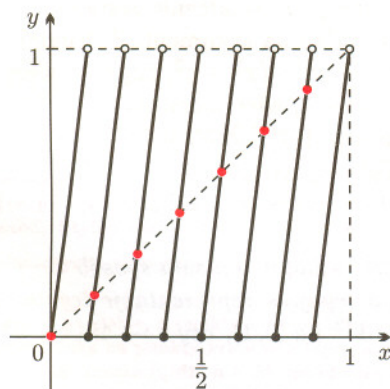
Rozwinięcie dwójkowe liczby $x \in [0, 1)$ to jej przedstawienie w postaci

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k},$$

gdzie $b_k \in \{0, 1\}$ jest nazywane k -tą cyfrą rozwinięcia. Czasem piszemy $[x]_2 = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$. Aby rozwinięcie było jednoznaczne, przyjmujemy, że ciąg cyfr ma nieskończoną liczbę zer. Jeśli taki ciąg ma skończoną liczbę jedynek (czyli od pewnego miejsca występują w nim same zera), to x jest liczbą postaci $q/2^n$, gdzie n jest pozycją ostatniej jedynki.

Przedział dwuadyczny

$[q/2^n, (q+1)/2^n]$ dla $0 \leq q < 2^n$ składa się z liczb, których rozwinięcia dwójkowe są takie same na n pierwszych pozycjach, a potem są dowolne. Długość tego przedziału wynosi $1/2^n$.



Rys. 4. Przekształcenie $T \circ T \circ T = T^3$ ma $2^3 - 1 = 7$ punktów stałych.

Przekształcenie T nakrywa dwukrotnie $[0, 1)$, a jego n -ta iteracja T^n nakrywa odcinek 2^n -krotnie, w szczególności, T^n ma $2^n - 1$ punktów stałych (rys. 4), czyli T ma $2^n - 1$ punktów okresowych o okresie n . *Czytelnik odpowie: dla ilu z tych punktów n jest najmniejszym okresem?* Każdy podprzedział, który zawiera się w jednej z połówek, przekształcenie T rozciąga dwukrotnie. Przeciwobraz dowolnego odcinka zawartego w $[0, 1)$ składa się z dwóch dwa razy krótszych odcinków.

Zajmiemy się teraz zapisem dwójkowym liczb $z \in [0, 1)$.

Przekształcenie T działa tak, że w rozwinięciu dwójkowym wszystkie cyfry przesuwamy o jedną pozycję w lewo, a o pierwszej cyfrze zapominamy. Każda liczba ma zakodowane wszystkie swoje iteracje w następujący sposób. Jeśli na $(k+1)$ -tej pozycji w rozwinięciu dwójkowym liczby występuje zero, to $0 \leq T^k x < 0,5$, jeśli zaś jeden, to $0,5 \leq T^k x < 1$, czyli po k iteracjach punkt zawędruje do wskazanej połówki odcinka. Co więcej, pierwsze m cyfr rozwinięcia wskazuje, do którego przedziału dwuadycznego $[q/2^m, (q+1)/2^m]$ należy liczba. Liczba o ustalonych m cyfrach na pozycjach od $k+1$ do $k+m$ trafi po k iteracjach do przedziału długości 2^{-m} wyznaczonego przez te cyfry. Teraz widać, że można znaleźć mnóstwo liczb, które pod działaniem przekształcenia T będą trafiały do kolejnych, z góry danych odcinków.

Zadanie 4. Znajdź długość sumy odcinków złożonych z liczb, które dokładnie w k -tej iteracji trafią do zadanego przedziału dwuadycznego. Znajdź długość sumy odcinków złożonych z liczb, które nie odwiedzą zadanego przedziału dwuadycznego przed k -tą iteracją.

Zauważmy, że jeśli dwa punkty są różne, to któraś iteracja wepchnie je do różnych połówek, a jeśli wtedy oba będą blisko środka, to następna odepchnie je do przeciwnych końców odcinka $[0, 1)$. Mamy więc przekształcenie, które produkuje ciągi o wielu własnościach: są okresowe o dowolnie zadanym okresie, są inne – odwiedzające każdy odcinek; bliskie punkty rozjeżdżają się, odległe wpadają na siebie. Czy jest tu jakaś regularność?

Losowanie i statystyka

Teraz zaczniemy rzucać monetą. Wyniki kolejnych rzutów kodujemy jako zera (dla orłów) i jedynki (dla reszek). Jeśli rzucimy n razy, otrzymamy ciąg orłów i reszek, który kodujemy w postaci przedziału dwuadycznego $[q/2^n, (q+1)/2^n]$, wypisując rozwinięcie dwójkowe liczby $q/2^n$ – kolejne cyfry po przecinku to wyniki kolejnych rzutów. Zauważmy, że dodanie następnego rzutu to wybranie którejś połowy już otrzymanego przedziału.

Taki sposób kodowania rzutów ma dodatkową zaletę: dla monety symetrycznej szansa otrzymania ciągu orłów i reszek, który spełnia te czy inne z góry narzucone warunki (np. w ciągu dziesięciu rzutów nie ma trzech kolejnych reszek), odpowiada długości sumy przedziałów dwuadycznych określonych przez owe warunki (w tym przykładzie chodzi o przedziały $[q2^{-10}, (q+1)2^{-10}]$, dla których w rozwinięciu $q2^{-10}$ nie ma trzech kolejnych jedynek).

W języku rzutów monetą przekształcenie T to zapominanie o wyniku pierwszego rzutu. Zastosowanie k -tej iteracji przekształcenia to odrzucenie pierwszych k rzutów. Długość przedziałów po przekształceniu odpowiada

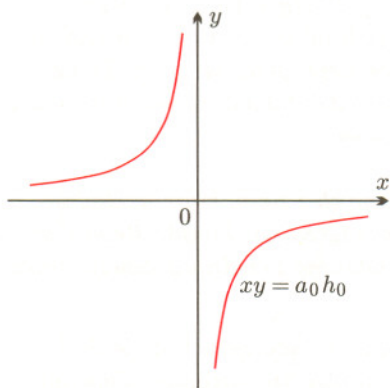
Centralne Twierdzenie Graniczne.
Jeśli S_n oznacza liczbę sukcesów w n próbach Bernoulliego z ustalonym prawdopodobieństwem sukcesu p , to

$$P((S_n - np)/\sqrt{np(1-p)} \leq t) \rightarrow F(t)$$
dla $n \rightarrow \infty$, gdzie F jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego,

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t \exp(-x^2/2) dt.$$

Przykład. Szansa, że w długiej serii rzutów monetą wśród rzutów od 401 do 500 będzie co najwyżej 60 orłów, jest równa $P(S_{100} \leq 60) = P((S_{100} - 50)/\sqrt{25} \leq 2) \approx F(2)$.

Podobnie, łączna długość przedziałów dwuadecychnych, w których rozwinięcia liczb mają na pozycjach od 401 do 500 co najwyżej 60 zer, jest równa około $F(2)$. Są to te liczby, które po 400 początkowych iteracjach przekształcenia T w stu kolejnych odwiedzą dolną połowę przedziału $[0, 1]$ co najwyżej 60 razy.



Rys. 5. Gdy $a_0 h_0 < 0$, to punkt (a_n, h_n) skacze w chaotyczny sposób po obu gałęziach hiperboli $xy = a_0 h_0$ (wnikliwi Czytelnicy zechcą poeksperymentować sami).



Rozwiązanie zadania F 512.
Zadanie rozwiązujemy podobnie jak poprzednie, otrzymując

$$F = pS = \frac{2\alpha}{d} S,$$

gdzie d jest grubością krawężka cieczy, a $S = \pi R^2$ jego polem powierzchni. Ale

$$d = \frac{V}{S} = \frac{m}{\rho \pi R^2}$$

i stąd

$$F = \frac{2\pi^2 \alpha \rho R^4}{m} \approx 840 \text{ N}.$$

prawdopodobieństwu warunkowemu, z warunkiem opisanym przez początkowe k rzutów.

Cokolwiek możemy powiedzieć o seriach niezależnych rzutów monetą symetryczną, możemy też powiedzieć o liczbach dwuadecychnych i przekształceniu T . A zatem, jeśli obserwujemy zjawisko, które można opisać za pomocą iteracji T , to mamy do czynienia z sytuacją czysto losową i po pominięciu początkowych obserwacji możemy posługiwać się metodami statystycznymi, na przykład centralnym twierdzeniem granicznym.

Wracamy do początku

Wzoru rekurencyjnego na średnie: arytmetyczną i harmoniczną możemy użyć nie tylko dla liczb dodatnich. Jeśli obie liczby p, q są ujemne, to dzięki jednorodności otrzymujemy ten sam wynik, co dla obu dodatnich. Jeśli jednak jedna jest dodatnia, a druga ujemna, to (pomijając drobny kłopot, kiedy $a_n + h_n = 0$) tak już pozostanie dla wszystkich n , bo niezmienniczy iloczyn $a_n h_n$ będzie stałe ujemny. Przeskalujemy zmienne do $pq = -1$, wtedy też $a_n h_n = -1$ dla każdego n . Tym razem dla h_n dostajemy

$$h_{n+1} = \frac{2a_n h_n}{a_n + h_n} = \frac{-2}{-\frac{1}{h_n} + h_n} = \frac{2h_n}{1 - h_n^2}$$

i pozostaje zbadać funkcję $x_1 = f(x) = 2x/(1 - x^2)$. Zauważmy, że podstawiając $x = \operatorname{tg}\alpha$, gdzie $\alpha \in [-\pi, \pi)$, otrzymamy znajomy szkolny wzór na tangens kąta 2α :

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = x_1 = \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}2\alpha,$$

co po przetłumaczeniu na kąty, już bez tangensów, i zadbanie, aby α_1 należało do $[-\pi, \pi)$, daje warunki $\alpha_1 = 2\alpha$ dla $\alpha \in [-\pi, 0)$ oraz $\alpha_1 = 2\alpha - 2\pi$ dla $\alpha \in [0, \pi)$. Po liniowym przeskalowaniu dostaniemy dla $\beta = (\alpha + \pi)/2\pi$ równość

$$\beta_1 = 2\beta \bmod 1.$$

Oznacza to, że gdy $a_0 h_0 < 0$, to elementy ciągu (a_n, h_n) zachowują się tak losowo, jak przekształcenie T , czyli jak niezależne rzuty monetą symetryczną (rys. 5).

Rodzina kwadratowa

Nasze rozważania o dwóch średnich można przenieść do dziedziny zespolonej. Tam również spotykamy współistnienie konieczności i przypadku.

Przekształcenie $\phi \mapsto 2\phi \bmod 1$ jest to przeskalowane przekształcenie zespolone $z \mapsto z^2$ na okręgu jednostkowym, gdzie patrzymy tylko na argument. Z drugiej strony, we współrzędnych (x, y) mamy $(x, y) = z \mapsto z^2 = (x^2 - y^2, 2xy)$, a ponieważ jesteśmy na okręgu S^1 , gdzie $-y^2 = x^2 - 1$, więc pierwsza współrzędna punktu z , która należy do przedziału $[-1, 1]$, poddawana jest przekształceniu kwadratowemu $x \mapsto 2x^2 - 1$. Widzimy zatem, że $f(x) = 2x^2 - 1$ jest innym przedstawieniem tego samego zjawiska, co $\phi \mapsto 2\phi \bmod 1$.

Zadanie 5. Sprawdź, że zmieniając liniowo współrzędne w ten sam sposób w dziedzinie i przeciwdziedzynie, można dostać następujące reprezentacje tego przekształcenia: $y \mapsto y^2 - 2$ na $[-2, 2]$, $t \mapsto (2t - 1)^2$ na $[0, 1]$, czy $u \mapsto 4u(1 - u)$ na $[0, 1]$. Wykonaj rysunki (wraz z przekątną).

W ostatnim wzorze dokonaj zamiany współrzędnych $u = \sin^2(\pi\phi/2)$.

Samo przekształcenie $z \mapsto z^2$ w dziedzinie zespolonej zachowuje się tak: wewnątrz okręgu jednostkowego wszystko zbiega w szaleńczym tempie do zera, a na zewnątrz ucieka równie szybko do nieskończoności (to w istocie to samo – wystarczy przecieżyć zmienić z na $1/z$). Natomiast na samym okręgu nie mamy wcale takiego determinizmu; tu panuje losowość, poddająca się jednak prawom statystycznym.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 2000

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 276 ($WT=2,20$) i 277 ($WT=1,64$)
z numeru 4/1999

Zbigniew Galias	- Kraków	38,08
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	37,99
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	30,41
Tomasz Wietecha	- Tarnów	29,89
Aleksander Surma	- Myszków	25,25
Artur Arciszewski	- Kielce	17,26
Jarosław Łazuka	- Warszawa	13,90
Grzegorz Miloś	- Mielec	11,52
Tomasz Rudny	- Warszawa	11,46

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
377 ($WT=1,70$) i 378 ($WT=1,52$)
z numeru 3/1999

Bogumiła Piotrowska	- Zielona Góra	39,07
Piotr Kumor	- Olsztyn	35,79
Zbigniew Galias	- Kraków	35,12

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Zadania z fizyki nr 286, 287

Redaguje Jerzy B. BROJAN

286. Ocenic orientacyjnie maksymalną ilość (masę) tlenu, jaką może zawierać butla stalowa o rozsądnych rozmiarach i masie $m = 40$ kg, napełniona pod ciśnieniem równym połowie wartości, która spowodowałaby rozerwanie butli. Dane dotyczące stali wzięć z tablic.

287. Mion rozpada się na elektron i dwa neutrina:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu.$$

Obliczyć maksymalną energię kinetyczną elektronu powstałego z rozpadu spoczywającego mionu. Masa mionu wynosi $105,6 \text{ MeV}/c^2$, masa elektronu - $0,51 \text{ MeV}/c^2$, a masę neutrin należy pominąć.

Zadania z matematyki nr 389, 390

Redaguje Marcin E. KUCZMA

389. W turnieju rozgrywanym systemem „każdy z każdym” (bez remisów) każdy zawodnik, który każdego innego pokonał bezpośrednio lub pośrednio, otrzymał nagrodę. (Gracz A pokonał gracza C *pośrednio*, jeśli pokonał pewnego zawodnika B , który wygrał z C .) Dowiedz, że jeżeli przyznana została tylko jedna nagroda, to otrzymał ją zawodnik, który wszystkich innych pokonał bezpośrednio.

390. Prostokąt o bokach długości a, b ($a \geq b$) dzielimy w dowolny sposób na n prostokącików o bokach równoległych do boków dużego prostokąta; n jest ustaloną liczbą naturalną. Dla każdego prostokątka obliczamy stosunek długości krótszego boku do długości dłuższego boku, a następnie obliczamy sumę tych stosunków. Znaleźć kres dolny wartości takich sum.

Zadanie 390 zaproponowała pani Joanna Jaszuka z Warszawy.



Rozwiązanie zadania M 899.

Niech l_n będzie prostą o równaniu $ax + by = n$. Z zadania M 898 wynika, że każda prosta l_n dla $n \in \mathbb{Z}$ ma dokładnie jeden punkt kratowy w pasie $\{(x, y) | 0 \leq x \leq b - 1\}$. Poza tym punkt ten ma obie współrzędne nieujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $n \notin M$. Rozważmy teraz symetrię środkową σ płaszczyzny względem punktu $(\frac{b-1}{2}, -\frac{1}{2})$, która jest dana wzorem $(x, y) \mapsto (b-1-x, -1-y)$. Zauważmy, że pas $\{(x, y) | 0 \leq x \leq b-1\}$ przechodzi przy σ na siebie, a punkty kratowe z tego pasa o współrzędnych nieujemnych przechodzą na punkty kratowe z tego pasa o współrzędnych ujemnych i na odwrót. Tak więc proste l_n dla $n \in M$ przechodzą na proste l_m dla $m \notin M$ i na odwrót. Jak nietrudno obliczyć, obrazem prostej l_n w symetrii σ jest prosta $l_{ab-a-b-n}$. Oczywiście jest, że $\min(\mathbb{Z} \setminus M) = 0$, z czego wynika, że $\max M = ab - a - b$.



Rozwiązanie zadania M 900.

Oznaczmy $c = \max M$. Jak pokazano w rozwiązaniu zadania M 899, prosta l_n przechodzi na l_{c-n} i na odwrót. Poza tym proste l_n dla $n \in M$ przechodzą przy σ na proste l_m dla $m \notin M$ i na odwrót. Stąd wynika już teza zadania.



Rozwiązanie zadania F 511.

Warstwa wody między płytkami jest ograniczona po bokach meniskiem wklęsłym o promieniu krzywizny równym połowie grubości warstwy wody $R = \frac{1}{2}d$. Napięcie powierzchniowe wywołuje ujemne ciśnienie - ciecz jest rozciągana. Pod meniskiem wklęsłym nadwyżka p ciśnienia zewnętrznego, działającego na powierzchnię płytek S , wynosi

$$p = \frac{\alpha}{R} = \frac{2\alpha}{d}.$$

A więc siła, którą należy przyłożyć, aby oderwać płytki od siebie, jest równa

$$F = pS = \frac{2\alpha}{d} S.$$

Pole zwilżanej powierzchni płytek wynosi

$$S = \frac{V}{d} = \frac{m}{\rho d}.$$

Ostatecznie

$$F = \frac{2\alpha m}{\rho d^2} = 14600 \text{ N}.$$

Chyba mamy szczęście, że żyjemy w spokojnym zakątku spokojnej galaktyki. Wprawdzie samo centrum naszej Galaktyki całkiem spokojne nie jest (znajduje się tam prawdopodobnie czarna dziura o masie rzędu miliona mas Słońca), ale to nic w porównaniu z innymi galaktykami. Wydaje się, że galaktyki o nienormalnie jasnym jądrze należą do dwóch klas. Nadmierna jasność galaktyk jednej klasy wynika z niezwykle silnego tempa powstawania nowych gwiazd, u drugiej klasy natomiast wywołana jest właśnie obecnością supermasywnej czarnej dziury. Ale od niedawna dwaj japońscy astronomowie, Yoshiaki Taniguchi i Keichi Wada, twierdzą, że te typy galaktyk wcale nie są rozłączne.

Otóż w stosunku do wielu galaktyk, w których intensywnie toczą się procesy gwiazdotwórcze, można podejrzewać, że doznały zaburzenia wskutek bliskiego przejścia innej galaktyki. Tymczasem japońscy badacze twierdzą, że tylko u 30% takich galaktyk można znaleźć pobliską galaktykę towarzyszącą, która mogłaby być źródłem tego zaburzenia. Z drugiej strony zauważają oni, że niemal wszystkie wielkie galaktyki spiralne mają bardzo małe towarzyszkę, tak jak nasza ma swoje Obłoki Magellana. Wiele tych satelitarnych galaktyk zostanie w przyszłości wchłoniętych przez znacznie masywniejsze galaktyki centralne. Co więcej, w naszym sąsiedztwie okazało się, że przynajmniej jedna mała galaktyka satelitarna – M 32, towarzysząca Wielkiej Mgławicy w Andromedzie – zawiera supermasywną czarną dziurę, a wiele innych o to się podejrzewa. Japońscy astronomowie przeprowadzili więc komputerowe symulacje, by dowiedzieć się, co stanie się, gdy wielka i bogata w gaz międzygwiazdowy galaktyka z czarną dziurą w centrum wchłonie podobną, tyle że mniejszą, galaktykę.

Generalnie wchłanianie małej galaktyki z czarną dziurą prowadzi do silnego „zamieszania” materii większej galaktyki, podobnie jak mieszanie herbaty w szklance. Szczegóły takiego procesu zależą jednak od stosunku mas czarnych dziur. Jeżeli pochłaniana czarna dziura jest wyraźnie mniej masywna, to dochodzi do powstania ramion spiralnych lub wielkich pierścieni, w których gwałtownie formowane są nowe gwiazdy. Jeżeli jednak czarne dziury są porównywalne, dochodzi do zjawisk bardziej chaotycznych. Gaz międzygwiazdowy ulega silniejszemu zgęszczeniu i gwałtowne procesy gwiazdotwórcze obejmują nieregularne obszary o rozmiarach zaledwie kilkuset parseków, przy czym mogą one być usytuowane również w centralnych częściach galaktyki. Prawdopodobnie takie właśnie struktury obu typów zaczęto dostrzegać w odległych galaktykach za pomocą teleskopu Hubble’a.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania M 898.

Niech (x_1, y_1) będzie punktem kratowym na rozważanej prostej, różnym od (x_0, y_0) . Po odjęciu stronami równań $ax_i + by_i = n$ ($i = 0, 1$) otrzymamy $a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = 0$, czyli $a(x_0 - x_1) = -b(y_0 - y_1)$. Liczby a i b są względnie pierwsze, więc $a|(y_0 - y_1)$ oraz $b|(x_0 - x_1)$. Wynika stąd, że najbliższymi do punktu (x_0, y_0) punktami kratowymi na prostej będą te spełniające $y_0 - y_1 = \pm a$ i odpowiednio $x_0 - x_1 = \mp b$, czyli punkty $(x_0 - b, y_0 + a)$ i $(x_0 + b, y_0 - a)$.

Listopad

Wielka Mgławica w Andromedzie (M 31, NGC 224), o której wspomnieliśmy wyżej, to jeden z najciekawszych obiektów jesiennego nieba, a z racji bliskości jeden z najciekawszych w ogóle. Jest najodleglejszym obiektem widocznym gołym okiem – leży w odległości 0,7 Mpc. Oprócz małej galaktyki M 32 (NGC 221, to ta z czarną dziurą w centrum) ma za towarzyszkę jeszcze jedną galaktykę M 110 (ostatni numer w katalogu Messiera lub też NGC 205). Razem stanowią więc układ potrójny podobnie jak nasza Galaktyka z Wielkim i Małym Obłokiem Magellana, z tym tylko, że towarzyszkę M 31 to galaktyki eliptyczne, a Obłoki Magellana zaliczają się do nieregularnych. Niedaleko Andromedy, w Trójkącie, znajduje się druga co do jasności galaktyka M 33 (NGC 598), odległa o 0,8 Mpc. By ją dostrzec, potrzebna jest jednak przynajmniej lornetka. Jest to również duża galaktyka spiralna, stanowiąca wraz

z naszą i z M 31 trójkę największych obiektów w Lokalnej Grupie Galaktyk. Ale ona nie ma galaktyk towarzyszących.

W listopadzie Wenus znajduje się w Pannie i widać ją na wschodnim niebie przed wschodem Słońca. Mars jest w Strzelcu i widać go wieczorem nisko i dość krótko na południowym zachodzie. Jowisz jest w Rybach, a Saturn niedaleko w Baranie i obie planety widać praktycznie przez całą noc. Saturn 6 XI ma opozycję, tzn. znajdzie się na niebie w kierunku przeciwnym do kierunku na Słońce. Now Księżyc wypadła 8 XI, a pełnia 23 XI. Księżyc zbliży się mocno do Aldebarana też 23 XI, ale zakrycia nie zobaczymy. Wreszcie 15 XI Merkury przejdzie przed tarczą Słońca, ale zjawisko to będzie widoczne w obu Amerykach, na Pacyfiku, we wschodniej Azji i w północnej Australii.

T.K.

MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (19)

- Czy postawiłbyś jedną stawkę przeciwko moim dwóm stawkom na rzut monetą? – kusi Bazylego Ambroży.
- Z tobą boję się w cokolwiek grać.
- Ale powiedz, czy byś postawił.
- Pewnie potem powiesz, że stawka jest ujemna.
- Ależ skąd. Mogę ci powiedzieć, jak ją ustalimy. Będziemy rzucać monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Jeśli orzeł wypadnie za n -tym razem, wtedy stawka wyniesie 10^n .
- A więc jeśli będzie kolejno *reszka, reszka, orzeł*, to stawka wyniesie 1000?
- Zgadza się. Czy postawisz wówczas na rzut monetą 1000 przeciwko moim 2000?
- Uczciwą monetą?
- Uczciwą. Jak wypadnie reszka, płacę ci 2000, a jak orzeł, to ty mi płacisz 1000.
- No... postawię. Jasne, że postawię.
- Czy zdecydujesz się grać, jeśli stawka wyniesie 10?
- Tak, zagram niezależnie od tego, jaką stawkę wylosujemy.
- Skoro zawsze zdecydujesz się zagrać, to może najpierw wylosujemy zwycięzcę, a potem stawkę, w ten sposób gra będzie mniej nerwowa. Zgadzasz się na taką modyfikację?
- Losowania stawki i zwycięzcy są niezależne, więc to chyba bez różnicy.
- Jeśli już wygrasz dwie stawki, to czy zgodzisz się je postawić przeciwko moim trzem na rzut monetą?
- Czyli jak wypadnie reszka, to dostanę 5 stawek, a jak orzeł, to nic?
- Zgadza się.

- Czemu nie? W końcu wartość oczekiwana mojego zysku w takiej dogrywce wynosi pół stawki.
- Podsumujmy, co ustaliliśmy. Rzucamy monetą. Jeśli wypadnie orzeł, to losujemy stawkę i ty mi ją wypłacasz. Jeśli wypadnie reszka, to losujemy stawkę, a następnie przez rzut monetą decydujemy, czy mam ci wypłacić 5 stawek, czy jesteśmy kwita.
- Właściwie w przypadku, gdy w pierwszym rzucie wypadnie reszka, moglibyśmy najpierw rzucić monetą o to, czy ty mi płacisz 5 stawek, czy nie, a potem – o ile masz mi coś płacić – wylosujemy stawkę.
- Dobry pomysł. Wiesz, trochę mi głupio, że czasami niby wygrasz, a nie dostaniesz nic. Czy przyjmiesz ode mnie 5 zł, jeśli okaże się, że pomimo twojej wygranej w pierwszym rzucie, drugi rzut rozstrzygnął, że nie mam ci nic płacić?
- Co chcesz w zamian?
- Nic.
- No pewnie, że się zgadzam.
- Jeszcze raz podsumujmy, co ustaliliśmy. Rzucamy monetą (nazwijmy ten rzut zerowym). Jeśli wypadnie orzeł, to ja wygrałem i ustalamy stawkę, rzucając monetą do pierwszego orła. Jeśli orzeł wypadnie w pierwszym rzucie, to płacisz mi 10, w drugim 100, trzecim 1000, potem 10000 itd. Jeśli natomiast w zerowym rzucie wypadnie reszka, to wiadomo, że ty wygrałeś i rzucamy dalej monetą. Jeśli w pierwszym rzucie wypadnie orzeł, to płacę ci 5, jeśli reszka, to rzucamy dalej do pierwszego orła. Ja wypłacam ci 50, 500, 5000, 50000 itd. w zależności od tego, kiedy pojawi się orzeł.
- Tak ustaliliśmy.
- Czyli, mówiąc krótko, losujemy przez rzut monetą, kto wygrał, a następnie losujemy stawkę według przyjętej wcześniej procedury. Jeśli ja wygram, to zapłacisz mi stawkę. Jeśli ty wygrasz, to ja wypłacę ci pół stawki.
- Chwila! Jakże pół? Miało być więcej.
- Popatrz uważnie na to, co ustaliliśmy.

JWR

GRY (8)

Poznaliśmy już kilka przykładów gier, najwyższy czas odpowiedzieć precyzyjnie na pytanie: *Co będziemy uważać za grę?*

Mówiąc poglądowo, chcemy nazwać grą procedurę, w której dwaj gracze wykonują na przemian ruchy, przy czym ruchy dostępne dla obydwu graczy są takie same. Postronny obserwator znając pozycję w takiej grze, wiedziałby, jakie są dozwolone ruchy bez konieczności dopytywania się, kto za chwilę wykona swój ruch. Nie są grą w tym sensie szachy lub warcaby, gdyż jeden gracz uprawniony jest do wykonywania ruchów białymi bierkami, a drugi czarnymi. Będziemy zakładać również skończoność gry, tzn. gra musi zakończyć się w skończonej liczbie ruchów, a w każdej pozycji istnieje tylko skończenie wiele ruchów do wyboru. Jeśli zechcemy rozważać gry nieskończone, wyraźnie to zaznaczymy. Przyjmujemy wreszcie uniwersalną zasadę, że wygrywa gracz, który jako ostatni wykona ruch,

pozostawiając przeciwnika na pozycji, w której legalny ruch nie istnieje.

Bardziej formalnie, grą nazywać będziemy dowolny skończony zbiór gier:

$$G = \{G_1, G_2, G_3, \dots, G_n\}.$$

Zakładamy ponadto, że wszystkie rozważane gry powstają w opisany sposób. Powyższy zapis rozumiemy w ten sposób, że gracz, który w pozycji G ma wykonać ruch, może wybrać jedną z n opcji, a mianowicie $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$. Faktycznie utożsamiamy więc gry o jednakowej strukturze różniące się tylko scenariuszem postępowania. Zauważmy, że w tak określonych grach nie ma mowy o remisach. Zanim omówimy przykłady gier, parę dalszych przykładów niegier: poker, brydż, piłka nożna, tenis stołowy, kółko i krzyżyk (bo są remisy).

Przykłady prostych gier podamy za 2 miesiące.

JWR