

SPIS TREŚCI NUMERU 8(303)

Fizyczne metody datowania
 w badaniu prehistorii
 człowieka

Grzegorz Wrochna

str. 1

Dzwonnik z Londynu
Francesc Rosselló

str. 1

Arytmetyczne figle
Jarosław Górnicki

str. 4

Aktualności
 (nie tylko) fizyczne

str. 7

Mała Delta

str. 8

Wiek topologii

Jerzy Mioduszeński

str.10

Zadania

str.13

Klub 44

str.14

Patrz w niebo

str.16

Sierpień

str.16

Gammalimatias

str.17

W następnym numerze:

Podstawy matematyki
 w wieku XX

Okładki i ilustracje
Anna Ludwicka

Rysunki techniczne
Marcin Adamski

Wybór artykułów w języku angielskim

<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
 Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichoński
 – wiceprzewodniczący
 Krzysztof Ciesielski
 Jan A. Gaj
 Piotr Goldstein
 Tomasz Hofmökł
 Andrzej Hryniewicz
 Wiesław A. Kamiński
 Marta Kicińska-Habior
 Krzysztof Maślanka
 Andrzej Mąkowski
 Zdzisław Pogoda
 Feliks Przytycki
 Michał Różycka
 Konrad Rudnicki
 Zbigniew Semadeni
 Grzegorz Sitarski
 Andrzej Woszczyk
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol
 Krzysztof Biesaga
 Wojciech Kopczyński – z-ca red. nacj.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nacj.
 Tomasz Kwast
 Anna Ludwicka
 Anna Rudnik
 Paweł Strzelecki
 Joanna Udalska
 Anna Wojtyra
 Piotr Zalewski

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
 tel. 853-59-61, 843-02-41(-2) wewn. 21
 BARTOL@MIMUW.EDU.PL
 Skład systemem TeX wykonała Redakcja.
 Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej
 w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Żuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1999 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1999 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na IV kwartał 1999 r. wynosi 9 zł.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
- Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
- Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.
- Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numerzy archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Dzwonnik z Londynu

Francesc ROSSELLÓ

Zanim Lagrange zaczął stosować permutacje do badania równań algebraicznych, pewien Anglik uczynił z nich użytek w sposób bardzo przypominający o sto lat późniejszą teorię grup. Mowa o Fabianie Stedmanie, urodzonym w 1640 r. w Londynie, drukarzu, a potem – aż do śmierci w 1713 r. – poborcy podatkowym. Do historii wprowadziło Stedmana jego hobby. Należał do przeróżnych stowarzyszeń miłośników muzyki dzwonów, a jego dwie książki *Tintinnalogia* (1668) i *Campanalogia* (1677) czynią z niego ojca nowoczesnego dzwonienia. To, co może nas tu zainteresować, to elementy teorii grup, które można odnaleźć w jego pracach – cały długi wiek przed Lagrangem.

Grupa – algebra $(G, o, ^{-1}, e)$, w której o jest dwuargumentowym działaniem łącznym, e elementem neutralnym względem o , a $^{-1}$ taką funkcją, że $a o a^{-1} = e = a^{-1} o a$ dla każdego elementu a grupy.

W Anglii (a także, w mniejszym stopniu, w innych krajach pod brytyjskim wpływem) gra na dzwonach nie polega na układaniu ślicznych melodii, lecz na tworzeniu ciągów uderzeń, w stylu zwanym *change ringing*: w n dzwonów, ponumerowanych $1, 2, \dots, n$, uderza się kolejno w różnych permutacjach (w języku dzwonników zwanych *sekwencjami*). Z przyczyn technicznych każde przejście do kolejnej sekwencji (czyli *zmiana*) musi być zadane rozłącznymi transpozycjami sąsiadujących dzwonów: *zmiana prosta* składa się z jednej takiej transpozycji, natomiast *zmiana skrzyżowana* dopuszcza ich więcej (koniecznie rozłącznych).

Transpozycja – permutacja polegająca na tym, że dwa elementy zamienia się miejscami.

Utrzymana w tym stylu kompozycja, zwana *biciem*, jest więc ciągiem następujących po sobie sekwencji, zaczynającym się i kończącym sekwencją *okrągłą* $(1, 2, \dots, n)$; od sekwencji do sekwencji prowadzi zmiana prosta lub złożona. Możemy zatem traktować bicie jako ciąg permutacji $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ zbioru n -elementowego, z których każda jest złożeniem rozłącznych transpozycji, a złożenie wszystkich, czyli $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k$ jest permutacją identycznościową e ; powiemy wówczas, że *biciem* odpowiadającym równości $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_k = e$ jest

$$\begin{array}{l} e \\ \sigma_1 \\ \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_{k-1} \\ e \end{array}$$

Od bicia oczekiwano następujących własności (zwanych przez dzwonników, o dziwo, *aksjomatami*):

- Każde bicie ma się zaczynać i kończyć sekwencją okrągłą (o czym już była mowa).
- Przy przejściu od jednej sekwencji do następnej żaden dzwon nie może się przesunąć o więcej niż jedno miejsce w ciągu.
- Żadna sekwencja nie może wystąpić dwa razy w jednym biciu.
- Żaden dzwon nie może pozostać na tej samej pozycji w trzech kolejnych sekwencjach.
- Całe bicie musi być podzielone na palindromiczne części (zwane *układami*) jednakowej długości (czyli ciąg zmian, czytany od tyłu, jest taki sam, jak w normalnej kolejności).

Fizyczne metody datowania w badaniu prehistorii człowieka

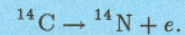
Grzegorz WROCHNA

Homo sapiens to jedyny w przyrodzie gatunek, który stawia sobie pytania o swoją własną przeszłość. Kiedy pojawił się na naszej planecie? Jak do tego doszło? Czy wyodrębnił się spośród innych gatunków w sposób ciągły, na drodze powolnej ewolucji, czy też raczej skokowy, z wyraźnie określonym początkiem? Jeśli ciągły, to jak wyglądały ogniwa pośrednie? Jeśli skokowy, to jaki był mechanizm tego skoku? Te i inne pytania są domeną poszukiwań archeologicznych. Kiedy jednak archeolog znajdzie interesujący obiekt i zadaje sobie pytanie, z jakiego okresu on pochodzi, z pomocą przychodzi fizyka.

Największe usługi oddała tu metoda **radioizotopowa**, oparta na rozpadzie izotopu węgla ^{14}C . Jest on produkowany w atmosferze przez neutrony powstałe wskutek oddziaływania protonów promieniowania kosmicznego z atmosferą



w ilości około 7,5 kg na rok. Rozpada się on samorzutnie z czasem połowicznego rozpadu $\tau_{1/2} = 5730$ lat



Równowaga między produkcją a rozpadem ustala się na poziomie $^{14}\text{C}/^{12}\text{C} = 1,5 \cdot 10^{-12}$. W atmosferze ^{14}C łączy się z tlenem, tworząc radioaktywny dwutlenek węgla $^{14}\text{CO}_2$, który może być absorbowany przez rośliny podobnie jak normalny $^{12}\text{CO}_2$. Stąd może się też przedostawać do organizmów zwierzęcych. Dopóki organizm żyje i odżywia się, zachowuje stały stosunek $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$. Od momentu śmierci przestaje uzupełniać rozpadający się ^{14}C , co powoduje zmniejszanie się stosunku $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$. Mierząc ten stosunek w badanej próbce, możemy zatem określić czas, jaki upłynął od śmierci organizmu.

Pierwszym sprawdzianem opracowanej w 1947 r. metody było porównanie zmierzonego wieku piramid egipskich z zapiskami historycznymi sprzed 2000–5000 lat. Pierwszym odkrywczym jej zastosowaniem było określenie wieku znanego z Biblii miasta Jerycho na 7000–8000 lat, dwa razy więcej niż dotychczas przypuszczano.

Dokładność metody ^{14}C można poprawić, uwzględniając zmiany stosunku $^{14}\text{C}/^{12}\text{C}$ w atmosferze spowodowane zmianami intensywności promieniowania kosmicznego, klimatycznymi, itp. Takie cechowanie można przeprowadzić, porównując zmierzony wiek bardzo starych drzew z liczbą słoń w ich przekroju. Najlepiej do tego celu nadają się sosny *pinus aristata longaeva* rosnące w kalifornijskich górach White-Inyo. Najstarszy żywy okaz ma 4764 lata. Porównując zgęszczenia słoń (spowodowane chłodniejszym klimatem) młodszych i starszych drzew możemy tę metodę rozszerzyć do około 10 000 lat.

Pierwotnie zawartość ^{14}C oceniano mierząc intensywność promieniowania. Od lat 80. liczbę atomów ^{14}C ocenia się, wyodrębniając je z próbki za pomocą akceleratora sprzężonego ze spektrometrem masowym. Spektrometr masowy jest to magnes, który pod różnymi kątami odchyła rozprędkowane w akceleratorze jony o różnych stosunkach masy i ładunku. Próbkę (grafit lub CO_2) jest jonizowana ujemnie (aby uniknąć pomyłki z ^{14}N) przez bombardowanie jonami cezu. Powstałe jony formuje się w wiązkę o energii typowo 25 kiloelektronowoltów i przepuszcza przez spektrometr, który wybiera jony o masie 14: $^{14}\text{C}^-$, $^{13}\text{CH}^-$, $^{12}\text{CH}_2^-$. Wiązka ta jest następnie przyspieszana do energii 1 megaelektronowolta (MeV) i zderzana z cząsteczkami gazu w celu rozbitcia $^{13}\text{CH}^-$ i $^{12}\text{CH}_2^-$. Ostatecznie wiązkę rozpędza się do 8 MeV i spektrometrem wybiera ^{14}C .

Metoda akceleratorowa jest dużo czulsza od tradycyjnej, gdyż do pomiaru wykorzystywane są wszystkie atomy ^{14}C z próbki, a nie tylko te, które się aktualnie rozpadają. Pozwala ona sięgać do 40–50 tysięcy lat wstecz. Ograniczeniem jest zwykle czystość próbki. Po 40 000 lat zawartość ^{14}C zmniejsza się do 1%. Tak więc domieszka 1% „nowego” węgla może dowolnie starą próbkę „odmłodzić” do 40 000 lat.

Aby sięgnąć wstecz jeszcze dalej, można zastosować radioizotopy o dłuższych czasach rozpadu. Do oznaczania wieku skamielin wykorzystuje się szereg uranowo-torowy. Uran rozpuszcza się w wodzie, tor nie. Dlatego skały osadowe w momencie tworzenia zawierają uran, a są wolne od toru. Stosunek ^{238}U o $\tau_{1/2} = 4,47 \cdot 10^9$ lat do powstałego

Ponadto, dobre bicie musiało być odpowiednio długie i zawierać jak najmniej różnych zmian (oczywiście, powtarzanych tyle razy, ile było to konieczne). Bicie, zawierające wszystkie możliwe dla danego zestawu dzwonów sekwencje, nazwiemy *pełnym*. Tak więc pełne bicie n dzwonów zawiera $n! + 1$ sekwencji (łącznie z powtórzoną ostatnią sekwencją okrągłą). Popatrzmy (przykład obok) na bicie z 1621 roku, znane jako „Układ Podstawowy dla czterech dzwonów” i odpowiadające ciągowi 9 sekwencji.

- (1, 2, 3, 4)
- (2, 1, 4, 3)
- (2, 4, 1, 3)
- (4, 2, 3, 1)
- (4, 3, 2, 1)
- (3, 4, 1, 2)
- (3, 1, 4, 2)
- (1, 3, 2, 4)
- (1, 2, 3, 4)

Jeśli przyjmiemy $\sigma_1 = (1, 2)(3, 4)$ i $\sigma_2 = (2, 3)$, to zmiany, wykonywane w tej kompozycji, są następujące (w podanej kolejności):

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_2,$$

bicie odpowiada zatem równości $(\sigma_1\sigma_2)^4 = e$ w S_4 . Nie jest ono szczególnie długie (S_4 ma przecież 24 elementy, a σ_1 i σ_2 generują podgrupę D_4), ale spełnia wszystkie pozostałe warunki. Zauważmy, na przykład, że powtarzanie zmiany σ_1 zapewnia, iż żaden dzwon nie pozostanie na swoim miejscu przez trzy kolejne sekwencje. Bicie zawiera tylko jeden układ (stąd nazwa „Układ podstawowy”), widoczny zwłaszcza po odrzuceniu ostatniej zmiany σ_2 , która ma doprowadzić do powrotu do sytuacji wyjściowej.

S_n , tzw. grupa symetryczna zbioru n -elementowego, jest grupą wszystkich permutacji tego zbioru, w której \circ oznacza składanie permutacji.

D_n , grupa wszystkich izometrii własnych n -kąta foremnego (podgrupa grupy S_n , jako że każda taka izometria jest jednoznacznie wyznaczona przez pewną permutację wierzchołków n -kąta).

We wstępie do *Campanalogii* Stedman zapowiada wyjaśnienie „sztuki zmian, czysto matematycznej, lecz prowadzącej do zadziwiających efektów”. Popatrzmy na dwa przykłady z tej książki.

Jeśli we wspomnianym wyżej Układzie Podstawowym zastąpimy ostatnią zmianę σ_2 przez $\sigma_3 = (3, 4)$, to możemy zbudować bicie pełne, zwane *Plain Bob Minimus*, następującej postaci (każda kolumna opisuje jeden układ):

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| (1, 2, 3, 4) | (1, 3, 4, 2) | (1, 4, 2, 3) |
| (2, 1, 4, 3) | (3, 1, 2, 4) | (4, 1, 3, 2) |
| (2, 4, 1, 3) | (3, 2, 1, 4) | (4, 3, 1, 2) |
| (4, 2, 3, 1) | (2, 3, 4, 1) | (3, 4, 2, 1) |
| (4, 3, 2, 1) | (2, 4, 3, 1) | (3, 2, 4, 1) |
| (3, 4, 1, 2) | (4, 2, 1, 3) | (2, 3, 1, 4) |
| (3, 1, 4, 2) | (4, 1, 2, 3) | (2, 1, 3, 4) |
| (1, 3, 2, 4) | (1, 4, 3, 2) | (1, 2, 4, 3) |
| | | (1, 2, 3, 4) |

Pierwsza kolumna to podgrupa D_4 izometrii kwadratu, odpowiadająca Układowi Podstawowemu, druga to warstwa wD_4 dla $w = (\sigma_1\sigma_2)^2\sigma_1\sigma_3$, natomiast trzecia jest warstwą w^2D_4 . Tak więc kolumnowy zapis tego bicia odpowiada podziałowi grupy S_4 na warstwy podgrupy D_4 . Zauważmy przy tym, że w każdej kolumnie występują te same zmiany, co w pierwszej (różne są jedynie wyjściowe sekwencje), stąd wszystkie dziedziczą własności pierwszej, a w szczególności są palindromami.

Warstwa (lewostronna) grupy G względem podgrupy H – każdy podzbiór postaci $aH = \{a \circ h : h \in H\}$. Jeśli $aH \neq bH$, to warstwy aH i bH są rozłączne.

Stedman zauważa, że gdy, tak jak przed chwilą, w danym układzie zastąpimy ostatnią zmianę inną, to otrzymamy kolumny o tej

samej liczbie elementów, a przy tym dwie z nich są albo równe (z dokładnością do kolejności elementów w sekwencji), albo rozłączne. Dziś wiemy, że jest to ogólna własność warstw w grupie. Ponadto dowodząc, że ciąg sekwencji jest istotnie biciem, Stedman korzysta z faktu, że $wx = wy$ implikuje $x = y$, a $w^k x = w^{k+l} y$ pociąga za sobą $x = w^l y$. Z pierwszej własności wynika, że jeśli wszystkie sekwencje w pierwszym układzie są parami różne, to podobnie jest w następnych układach, z drugiej zaś, że także powtórzenia sekwencji mają źródło w pierwszym układzie. Píše też, że w pełnym biciu „dwa dzwony (lub więcej) pozostają na swoich miejscach tyle razy, ile razy pozostałe dzwony mogą swoje miejsce zmieniać”, czyli istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między permutacjami n elementów, które są stałe na k spośród nich, a permutacjami $n - k$ elementów.

Kolejnym ważnym wkładem Stedmana do nauki o dzwonach jest kompozycja na 5 dzwonów (uogólniona na dowolną nieparzystą ich liczbę), znana jako „Stedman Doubles”. Na początku Stedman rozważa zmiany $\sigma_1 = (1, 2)(4, 5)$ i $\sigma_2 = (2, 3)(4, 5)$. Ciągi, odpowiadające słowom $\varphi_1 = (\sigma_1 \sigma_2)^2 \sigma_1$ i $\varphi_2 = (\sigma_2 \sigma_1)^2 \sigma_2$ (wolna szóstka i szybka szóstka), wyznaczają wszystkie permutacje pierwszych trzech dzwonów, przesuując ostatnie dwa spośród nich w celu zachowania reguł bicia; odpowiada to równości $((1, 2)(2, 3))^3 = e$ w S_3 .

Dalej wprowadza się zmianę części $\sigma_3 = (1, 2)(3, 4)$, by połączyć sąsiednie szóstki (na przemian wolne i szybkie). Każde jej występowanie zmienia zbiór pierwszych trzech dzwonów; otrzymuje się bicie (złożone z 60 sekwencji), odpowiadające równości $(\varphi_1 \sigma_3 \varphi_2 \sigma_3)^5 = e$.

Permutacje σ_1, σ_2 i σ_3 są parzyste, więc generują jedynie grupę alternującą A_5 , zatem do otrzymania pełnego bicia wystarczy zastąpić ostatnie σ_3 przez dowolną transpozycję i powtórzyć układ. Odpowiada to podziałowi na warstwy: $S_5 = A_5 \cup \tau A_5$ dla dowolnej transpozycji τ .

Grupa alternująca A_n – podgrupa S_n , złożona ze wszystkich permutacji, które można otrzymać jako złożenie parzystej liczby transpozycji.

Postępując podobnie z siedmioma dzwonami, biorąc dwie szóstki $\sigma_1 = (1, 2)(4, 5)(6, 7)$ i $\sigma_2 = (2, 3)(4, 5)(6, 7)$ i zmianę części $\sigma_3 = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$, mamy

$$((\sigma_1 \sigma_2)^2 \sigma_1 \sigma_3 (\sigma_2 \sigma_1)^2 \sigma_2 \sigma_3)^7 = e,$$

czyli układ początkowy z 84 sekwencjami. Aby otrzymać 5040 permutacji, Stedman proponuje zastosowanie $\sigma_4 = (1, 2)(3, 4)(6, 7)$ i $\sigma_5 = (1, 2)(3, 4)$ zamiast jednego lub obu wystąpień σ_3 w poprzednim wyrażeniu i powtórzenie układu.

Na koniec postawił problem zbudowania pełnego bicia za pomocą jedynie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$. Dziś oznacza to zbudowanie cyklu Hamiltona w grafie grupy S_7 , generowanego przez $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$, utworzonego przez oba rodzaje naprzemiennie ustawionych szóstek, połączonych zmianami σ_3 i σ_4 .

Cykl Hamiltona – ciąg kolejno połączonych ze sobą krawędzi grafu, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz – z wyjątkiem pierwszego, w którym cykl się zaczyna i kończy.

Problem pozostawał nierozwiązany do 1995 roku, kiedy to rozwiązanie przedstawił zespół muzyczny Towarzystwa Absolwentów Uniwersytetu w Cambridge.

Tłumaczenie W.B.

zeń ^{230}Th pozwala więc określić wiek skałamieliny.

Metoda potasowo-argonowa, używana do datowania skał bazaltowych, wykorzystuje rozpad ^{40}K o $\tau_{1/2} = 1,25 \cdot 10^9$ lat na ^{40}Ar . Argon ulatnia się z roztopionej lawy. W momencie zastygnięcia lava zawiera ^{40}K , a jest wolna od ^{40}Ar . Zawartość nowo powstałego ^{40}Ar w skale bazaltowej pozwala określić moment jej zastygnięcia.

Najnowocześniejsze metody datowania wykorzystują zjawiska związane z defektami struktur krystalicznych. W niektórych kryształach (kwarc, kalcyt) elektrony mogą być przeniesione z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa dzięki promieniowaniu naturalnemu lub kosmicznemu. Dyfundując, mogą napotkać defekty sieci, w których zostaną uwięzione. Dostarczenie energii do próbki powoduje ich uwolnienie, po którym może nastąpić emisja fotonu. Tego typu emisję nazywamy luminescencją. W metodzie termoluminescencyjnej energii dostarcza się, podgrzewając próbkę. Metoda ta mierzy więc czas od ostatniego „wyzerowania” próbki, tj. uwolnienia wszystkich elektronów, co zachodzi w temperaturze powyżej 300°C . Mogło do tego dojść np. podczas rozgrzewania krzemienego narzędzia w ogniu bądź podczas wypalania wyrobów garncarskich. Im dłuższy czas minął od wyzerowania próbki, tym więcej elektronów w pułapkach, a więc i tym silniejsza luminescencja. W metodzie wymuszonej fotoluminescencji elektrony uwalnia się, naświetlając próbkę. Metoda ta jest czulsza od termoluminescencyjnej, gdyż uwalniane są w niej jedynie elektrony z płytszych pułapek i do wyzerowania próbki wystarczy silne nasłonecznienie. Dlatego nadaje się do datowania lessu, wydmy, pyłu w lodowcach, dna morskiego itp.

Liczbę elektronów w pułapkach można też mierzyć za pomocą rezonansu spinowego. Próbkę umieszcza się w silnym, statycznym polu magnetycznym rzędu 1 tesla, które powoduje rozszczepienie poziomów energetycznych różnych stanów spinowych elektronów. Próbkę poddaje się następnie działaniu mikrofal o częstotliwości rzędu 1 GHz. Rezonansowe pochłanianie energii mikrofal zachodzi, gdy ich częstość odpowiada rozszczepieniu. Metoda ta ma olbrzymie

zasługi w badaniu prehistorii człowieka, gdyż znakomicie nadaje się do datowania emalii na zębach.

Metody magnetyczne wykorzystują zmienność kierunku ziemskiego pola w przeszłości. Domeny tlenku żelaza w rozgrzanym materiale (lava, glina w piecu garncarskim) układają się zgodnie z polem magnetycznym Ziemi. „Zamrożona” magnetyzacja może być więc wykorzystana do datowania. W ciągu ostatnich 3 milionów lat bieguny ziemskiego magnesu zamieniały się miejscami 6 razy!

Odrębną grupę stanowią metody astro-klimatyczne. Opierają się one na korelacjach zmian położenia Ziemi względem Słońca i długoterminowych zmian klimatycznych oraz ich efektów fizycznych i biologicznych. Przykładowo, poziom oceanów był niższy w okresach zlodowaceń. Bogatsze nagromadzenie pyłków kwiatowych w osadach świadczy o okresach ocieplenia. Przenikalność magnetyczna osadów jest zależna od rozpuszczania magnetytu w procesach biologicznych. Stosunek stężeń izotopów $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ jest czuły na temperaturę, stosunek $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$ jest zaś zależny od intensywności fotosyntezy. Poszukuje się coraz to nowych korelacji tego typu i choć metody na nich oparte są generalnie bardziej zawodne od metod radioizotopowych czy luminescencyjnych, stanowią często ich sprawdzian i cenne uzupełnienie.

Zobaczmy teraz, jak omówione metody przyczyniły się do poznania prehistorii człowieka. Do początków lat 80. panowało przekonanie, że rozwój biologicznych przodków człowieka zachodził równolegle na kilku kontynentach. *Homo erectus*, który pojawił się w Afryce około 2 mln lat temu, rozprzestrzenił się na całą Europę i Azję. Znalaziono nawet dziecko *homo erectus* na Jawie. „Normalne” namagnesowanie minerałów wokół znaleziska pozwoliło umiejscowić jego wiek między 1,79 a 1,95 mln lat temu. *Homo erectus* przekształcał się stopniowo w *archaic homo sapiens*, by około 100 tys. lat temu dać początek *homo neandertalsis*. W środowiskach odizolowanych *homo erectus* przetrwał niemalże do „naszych czasów”. Świadczą o tym dwa znaleziska na Jawie datowane za pomocą rezonansu spinowego na 53 ± 4 i 27 ± 2 tys. lat!

Neandertalczyk wyginał kilkadziesiąt tysięcy lat temu. Niemal jednocześnie

Arytmetyczne figle

Jarosław GÓRNICKI

Matematyka jest nauką, którą charakteryzuje duży stopień precyzji. Oznacza to, że poruszanie się w ramach tego przedmiotu wymaga przestrzegania określonych reguł. Jak pokazuje historia (piszemy o tym w dalszej części), ich kształtowanie to nie jednorazowy akt, lecz długotrwały proces, w którym ważną rolę odgrywają *paradoksy*. Z jednej strony jaskrawo uwidaczniają one słabości naszych dotychczasowych koncepcji, a z drugiej pozwalają sprawdzić jakość naszej wiedzy i lepiej zrozumieć istotę używanych pojęć i metod. Wielokrotnie potrzeba wyjaśnienia odkrytego paradoksu stawała się impulsem postępu. Paradoksem zawdzięczamy przekonanie o konieczności formalizacji geometrii, teorii mnogości, rozwoju logiki i podstaw prawdopodobieństwa.

Poniżej przypominamy kilka szkolnych figli o charakterze rachunkowym, mając nadzieję, że Czytelnicy bez trudu wskażą w nich błędy prowadzące do fałszywych wniosków. Ostatnie dwa z nich mają swój udział w rygorystyce analizy i mogą być pretekstem do poważniejszych rozważań.

Figiel 1.

Jeżeli $a = b$ i $b \neq 0$, to

$$a \cdot b = a^2,$$

$$a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2,$$

$$b(a - b) = (a + b)(a - b),$$

$$b = a + b,$$

$$b = 2 \cdot b,$$

$$1 = 2.$$

Figiel 2.

Niech $a > b$. Wtedy dla pewnego dodatniego c

$$a = b + c,$$

skąd

$$a(a - b) = (b + c)(a - b),$$

$$a^2 - a \cdot b = b \cdot a + c \cdot a - b^2 - b \cdot c,$$

$$a^2 - a \cdot b - a \cdot c = a \cdot b - b^2 - b \cdot c,$$

$$a(a - b - c) = b(a - b - c),$$

$$a = b.$$

Figiel 3.

Przyjmujemy $i = \sqrt{-1}$. Wówczas

$$\sqrt{x - y} = i \cdot \sqrt{y - x}.$$

Dla $x = a$, $y = b$ otrzymujemy

$$\sqrt{a - b} = i \cdot \sqrt{b - a}.$$

Natomiast dla $x = b$, $y = a$ mamy

$$\sqrt{b - a} = i \cdot \sqrt{a - b}.$$

Zatem

$$\sqrt{a - b} \cdot \sqrt{b - a} = i^2 \cdot \sqrt{b - a} \cdot \sqrt{a - b},$$

$$1 = i^2,$$

$$1 = -1.$$

Figiel 4.

$$i = i,$$

$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1},$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}},$$

$$\frac{\sqrt{1}}{i} = \frac{i}{\sqrt{1}},$$

$$\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = i^2,$$

$$1 = -1.$$

Figiel 5.

(J. Bernoulli;
1667–1748)

$$(-1)^2 = 1,$$

$$\ln(-1)^2 = \ln 1 = 0,$$

$$2 \ln(-1) = 0,$$

$$\ln(-1) = 0,$$

$$-1 = e^0,$$

$$-1 = 1.$$

Figiel 6.

(J.R. d'Alembert; 1717–1783)

$$\text{Jeżeli } a \cdot d = b \cdot c, \text{ to } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Gdy w ostatniej równości $a > b$, to również $c > d$. Przyjmijmy więc: $a = d = 1$,

$b = c = -1$. Spełnione są wówczas warunki

$$a \cdot d = b \cdot c \quad \text{i} \quad a > b,$$

musi więc być

$$c > d, \quad \text{czyli} \quad -1 > 1.$$

Figiel 7.

Wiadomo (Mercator 1668 r. – właściwie Nicolaus Kauffman, 1620–1687), że dla $x \in (-1, 1]$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

Zatem dla $x = 1$

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots, \\ 2 \ln 2 &= 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \\ &= \ln 2, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

Figiel 8.

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots\right) = \\ &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) \right\} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right) = 0, \\ \ln 2 &= \ln 1, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

Wyjaśnienie ostatnich dwóch paradoksów może sprawić pewien kłopot. Nie dość, że dotyczą one wykonywania nieskończenie wielu działań, to pojawia się w nich jeszcze swobodna zmiana kolejności składników (jak pamiętamy ze szkoły, jeśli nie ma nawiasów, to działania $+$, $-$ wykonujemy w kolejności ich występowania). To właśnie zmiana porządku wyrazów w powyższych nieskończonych sumach jest przyczyną paradoksalnych wyników. Ostatnie przykłady wykazują, że nie ma prostego przejścia od „matematyki wielomianowej”, opartej na obliczeniach wykonywanych zawsze na skończonej liczbie wyrazów, do „matematyki różniczkowej”, u podstaw której leżą procesy graniczne i działania nieskończone.

Jeszcze w XVIII wieku matematycy tej miary co L. Euler (1707–1783), G.W. Leibniz (1646–1716), matematycy z rodu Bernoullich, posługiwali się działaniami nieskończonymi bardzo swobodnie, było to niemal entuzjastyczne eksperymentowanie. Choć rozróżniano wówczas szeregi zbieżne i rozbieżne (znano nawet pewne kryteria zbieżności), to dominowało przekonanie, że podstawowe prawa algebry i analizy są jednakowe. Dla ówczesnych matematyków naturalne było, że na każdym szeregu można wykonywać dowolne przekształcenia i działania, podobnie jak na funkcjach wymiernych. Akceptowano nawet argumentację bardziej metafizyczną niż matematyczną. Na przykład Guido Grandi (1671–1742), profesor matematyki w Pizie, uważał (1703 r.), że wzory postaci

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 + \dots &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = \\ &= 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = \\ &= 1 - 0 - 0 - \dots = 1, \\ 0 + 0 + 0 + \dots &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

pojawienie się „nowoczesnego człowieka” (*homo sapiens sapiens*) wydawało się wskazywać, że pochodzi on bezpośrednio od Neandertalczyka. Przełom przyniosły badania szczątków obu tych gatunków znalezionych w kilku jaskiniach izraelskich. Metoda termoluminescencyjna wykazała, że w jaskini Kebara Neandertalczyk przebywali mniej więcej od 62 do 48 tys. lat temu. W pobliskiej jaskini Qafzeh *homo sapiens sapiens* pojawił się już 90–100 tys. lat temu. Metodą rezonansu spinowego poprawiono ten wynik na 120 ± 8 tys. lat i określono wiek czaszek *homo sapiens sapiens* z jaskini Skhul na 110 ± 10 tys. lat. Te i inne nowe odkrycia sugerują, że *homo sapiens sapiens* i *homo neandertalis* to dwie różne gałęzie wywodzące się ze wspólnego pnia *archaic homo sapiens*. Neandertalczyk rozwinął się na Bliskim Wschodzie i w Europie, podczas gdy *homo sapiens sapiens* powstał w Afryce i stamtąd rozprzestrzenił się na wszystkie kontynenty. W Europie pojawił się około 35 tys. lat temu. Szybko wyparł Neandertalczyka i utworzył kulturę zwaną *Cro Magnon* znaną z pięknych malowideł jaskiniowych.

Niespodziewanie silnego poparcia tej hipotezie dostarczyła genetyka. W 1987 r. podjęto próbę wyznaczenia wieku i genotypu wspólnego przodka badanej grupy ludzi poprzez „odtworzenie w tył” mutacji koniecznych do wygenerowania obserwowanej różnorodności. Zrekonstruowane „drzewo genealogiczne” okazało się wyrastać z Afryki 140–290 tys. lat temu i wypuszczać odnogę na inne kontynenty 90–180 tys. lat temu. W następnych latach inne grupy opublikowały podobne rezultaty. Jednej z nich udało się odtworzyć sekwencję (397 par nukleotydów) DNA Neandertalczyka sprzed 40 tys. lat. Porównano ją z DNA 2051 ludzi i 59 szympanсів. Zmierzone średnie liczby różnic

człowiek	– człowiek	8,0
człowiek z Afryki	– Neandertalczyk	27,1
człowiek z Europy	– Neandertalczyk	28,2
człowiek	– szympanś	55,0

są mocnym potwierdzeniem hipotezy pochodzenia *homo sapiens sapiens* z Afryki. Gdyby pochodził od Neandertalczyka, Europejczyk powinien być znacznie bliższy Neandertalczykowi niż Afrykańczyk. Jako najbardziej prawdopodobny rysuje się więc scenariusz

(daty w tys. lat temu):

- 2000 Wyodrębnienie się *homo erectus* w Afryce.
- 1600–800 *Homo erectus* przenosi się na inne kontynenty.
- 500–200 *Homo erectus* przekształca się stopniowo w archaicznego *homo sapiens*.
- 130–100 *Homo sapiens* w basenie Morza Śródziemnego daje początek Neandertalczykowi, który opanowuje Europę i Bliski Wschód.
- 150–120 *Homo sapiens* w Afryce daje początek *homo sapiens sapiens*.
- 110–90 *Homo sapiens sapiens* pojawia się na Bliskim Wschodzie.
- około 35 *Homo sapiens sapiens* gwałtownie opanowuje całą Europę, wypierając Neandertalczyka; eksplozja kulturalna *Cro Magnon*.

To, co stało się 30–40 tys. lat temu, bez cienia przesady można nazwać eksplozją kulturalną. Wprawdzie już na długo przedtem *homo sapiens sapiens* posługiwał się narzędziami, ale nigdy nie były one specjalnie zdobione. Natomiast począwszy od wieku około 35 tys. pojawia się mnóstwo bogato zdobionych narzędzi, rzeźb i malowideł na ścianach jaskiń (fotografia na okładce). W Europie odkryto już ponad 200 jaskiń z malowidłami. Co roku odkrywane są nowe. Żadna z nich jednak nie przekracza magicznej granicy 35 000 lat. Dlaczego *homo sapiens sapiens*, genetycznie i anatomicznie niemal identyczny z nami, od 120 do 35 tys. lat temu nie rozwinął żadnej kultury? Co się wydarzyło 35 000 lat temu? Dlaczego *Cro Magnon* nagle tak bardzo się rozprzestrzenił i całkowicie wyparł Neandertalczyka? Dlaczego zaczął zdobić narzędzia, rzeźbić, malować na ścianach jaskiń? Wydaje się, że dlatego, iż rozwinął język, zaczął używać symboli, myśleć abstrakcyjnie. Ale dlaczego nastąpiło to tak nagle i dlaczego dopiero 35 000 lat temu, a nie np. 80 000 lat wcześniej?

A może istnieją dawniejsze malowidła i rzeźby, które czekają na odkrycie? Albo pomyliliśmy się w datowaniu pierwszych *homo sapiens sapiens* lub przegapiliśmy istotne różnice anatomiczne czy genetyczne? To wszystko mało prawdopodobne, ale nie wykluczone. Odpowiedź może przybliżyć jedynie cierpliwe poszukiwanie oraz dalsze doskonalenie metod fizycznych i genetycznych.

są symbolami „tworzenia czegoś z niczego” (wynik $\frac{1}{2}$ uzyskał, przyjmując $x = 1$ we wzorze

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

i nie zdając sobie sprawy, że ma on sens jedynie dla $|x| < 1$).

Sytuacja ta trwała aż do pierwszej połowy XIX wieku, kiedy to m.in. B. Bolzano (1781–1848), A.L. Cauchy (1789–1857), N.H. Abel (1802–1829) zaczęli budować teorię zbieżności szeregów. Stworzone później teorie sumowania szeregów rozbieżnych pokazały, że pewne metody (idee) stosowane przez Eulera, Bernoullich nie są pozbawione podstaw.

Nie oznacza to jednak, że w XVIII wieku nie dostrzegano żadnych niebezpieczeństw związanych z działaniami nieskończonymi. G. Leibniz w liście z 10 stycznia 1714 r. do J. Bernoulliego (1667–1748) podaje kryterium zbieżności szeregów naprzemiennych (wcześniej pisał o tym 26 czerwca 1705 r. do J. Hermanna (1678–1733)). Dla jednego z takich szeregów (dzisiaj nazywanego *anharmonicznym*) Ch. Goldbach (1690–1764) czyni niebanalne spostrzeżenie: wyrazy ciągu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ można połączyć znakami + i – tak, by suma otrzymanego szeregu była równa dowolnej liczbie rzeczywistej. Komunikuje to Eulerowi (listem z 1 października 1742 r. i latem 1752 r.). Informacja ta przechodzi jednak bez echa. Dopiero w 1853 roku B. Riemann (1826–1866) wykazuje twierdzenie (opublikowane w 1867 r.): **mając dany szereg zbieżny warunkowo, można przez zmianę porządku jego składników uzyskać szereg rozbieżny lub zbieżny do z góry danej granicy.** W tej sytuacji *zbieżność szeregów, które nie są bezwzględnie zbieżne*, jest sprawą bardzo delikatną i wciąż aktualną (dla szeregów bezwzględnie zbieżnych wszystko jest jasne: **szereg bezwzględnie zbieżny nie zmienia swej sumy po dowolnej zmianie porządku wyrazów**).

Szereg $\sum x_n$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym**, jeśli zbieżny jest szereg $\sum |x_n|$. Szereg zbieżny, ale nie bezwzględnie, nazywamy **warunkowo zbieżnym**.

Uzasadnienia obu wspomnianych tu twierdzeń nie są zbyt trudne i można je znaleźć np. w [2]. Przejrzenie książki [1] pozwala zorientować się, jak mocno i głęboko problematyka badania zbieżności szeregów „odpornych” na permutacje składników jest związana ze współczesnymi badaniami w zakresie analizy funkcjonalnej.

Podkreślić należy też, że w wielu fragmentach współczesnej matematyki działania nieskończone (np. szeregi) – już poprawnie zamocowane – odgrywają pierwszorzędną rolę i mają duże znaczenie praktyczne, by wspomnieć o szeregach Fouriera czy funkcjach analitycznych.

Literatura

- [1] V.M. Kadets, M.I. Kadets, *Rearrangement of series in Banach spaces*, AMS, Providence, Rhode Island, 1991.
- [2] W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa, 1982.



Rozwiązanie zadania F 505.

Pod nieobecność siły ciężkości molekuly poruszałyby się chaotycznie i ich zderzenia z dnem i pokrywą naczynia równoważyłyby się. W polu siły ciężkości składowa pionowa prędkości molekul, poruszających się w dół, zwiększa się, a molekul poruszających się do góry – maleje. W rezultacie siła parcia na dno naczynia jest większa od siły parcia na pokrywę o tyle, ile wynosi ciężar gazu.

Aktualności (nie tylko) fizyczne

Najaktualniejszym wydarzeniem miesiąca jest niewątpliwie całkowite zaćmienie Słońca widoczne w Europie w południe 11 sierpnia (str. 16). Wykorzystując zainteresowanie tym, co można zobaczyć na niebie, spróbujmy i my sprawdzić, czy nie dzieje się tam coś ciekawego. Sezon ogórkowy uprawnia do podjęcia sprawy Plutona. Prawie od chwili jego odkrycia wielu astronomów nie było do końca przekonanych o jego przynależności do zbioru planet, a to z uwagi na ekscentryczność (orbity), wyłamywanie się z szyku (płaszczyzny ekliptyki) oraz małe rozmiary w porównaniu do czterech poprzedzających go olbrzymów. Jego obecność miała tłumaczyć nieregularności orbity Neptuna, ale Pluton najpierw okazał się za mały (co uruchomiło poszukiwanie planety transplutonowej), a następnie same nieregularności okazały się błędami pomiarowymi. Poszukiwania transplutona zeszły ze szpał gazet, co nie znaczy, że ich zaprzestano. Wprost przeciwnie – okazały się bardzo owocne. Obecnie znamy kilkadziesiąt sierzantów (nadplutonowych) i kaprali (podplutonowych). Wszystkie one bardziej przypominają planetoidy niż planety, a sam plutonowy wydaje się po prostu ich największym przedstawicielem. Biorąc to pod uwagę Międzynarodowa Unia Astronomiczna postanowiła sprawę uporządkować. Pierwszym krokiem miało być nadanie Plutonowi stosownego numeru w zbiorze sierzantów i kaprali. Czujni zwolennicy Plutona zwiertzyli podstęp – najpierw przyznają medal, a później zdegradować! Pospolite ruszenie w obronie planetarności Plutona przybrało niespotykane rozmiary. Unia ugięła się pod naporem i oficjalnie zrezygnowała z degradacji plutonowego. Nie trzeba chyba wyjaśniać, że z najsilniejszym oporem (aczkolwiek nie otwarcie) wystąpiło środowisko astrologiczne. Dla niewtajemniczonych wyjaśniam, że Pluton jest (między innymi) odpowiedzialny za wywoływanie największych kataklizmów, z końcem świata włącznie. Jak można więc degradować go w tak odpowiednim momencie dla końca świata, jak przełom tysiącleci?

Na tym doniesienia planetarne się nie kończą. Worek z pozasłonecznymi układami planetarnymi, naderwany z końca wypełnionego pulsarami prawie dziesięć lat temu przez Aleksandra Wolszczana, w końcu rozwiązał się i mamy tego całkiem sporo. Co prawda na razie znajduwane są przykłady dość odmienne od naszego rodzinnego ogródka. Odkryto kilka pojedynczych, dużych planet krążących bardzo blisko rodzimych gwiazd (patrz *Delta* 1/1998). Najnowszym osiągnięciem w tej dziedzinie jest wykrycie dwóch dalszych towarzyszy *v* Andromedy (*Nature* **398**, s. 659). Uzupełniony układ nadal nie przypomina naszego, gdyż planety są duże, ekscentryczne i nie wydają się leżeć w jednej płaszczyźnie. Poszukujący pozaziemskiego życia nie mają jednak powodów do obaw. Brak podobieństwa znajdujących planet do Ziemi i jej towarzyszy wynika z używanych metod – analizowania przesunięć dopplerowskich widma gwiazdy, zataczającej się pod wpływem obcowania z nieodpowiednim towarzystwem. Wpływ planet wielkości Ziemi jest – na razie – nie do zauważenia. To jednak ma się w niedalekiej przyszłości zmienić (zobacz np.: <http://ast.star.rl.ac.uk/darwin>).

Popatrzmy jeszcze dalej. Jednymi z najciekawszych obiektów na niebie są czarne dziury. Nie widać ich bezpośrednio, ale za to widać efekty ich żarłoczności. Pożerany gaz (i co tam jest w okolicy) rozgrzewa się i wysyła promieniowanie wysokiej

energii. W ten sposób odkryto już wiele miejsc ukrywających (prawdopodobnie) czarne dziury. Do niedawna jednak wydawało się, że widzimy albo stosunkowo małe, o masie niewiele przekraczającej masę Słońca, albo bardzo masywne osobliwości gnieźdzące się w centrach galaktyk. Przypuszczamy, że te pierwsze powstają w wyniku wybuchów supernowych. Pochodzenie dziur galaktycznych jest natomiast niejasne. Jedną z hipotez zakłada, że są one wynikiem akrecji wielu mniejszych czarnych dziur powstających w galaktykach o wzmożonej działalności gwiazdotwórczej. Jej potwierdzeniem mogłoby być odkrycie czarnych dziur pośredniej wielkości. W kwietniu, na spotkaniu w Charleston Oddziału Astrofizyki Wysokiej Energii Amerykańskiego Towarzystwa Astronomicznego, dwie grupy astrofizyków doniosły o rezultatach dokładnej inspekcji kandydatów na takie obiekty na podstawie danych zebranych w zakresie promieniowania X za pomocą satelitów ASCA i ROSAT. Wydaje się, że udało się uchwycić superciężkie czarne dziury w czasie ich powstawania (*Science* **284**, s. 566).

Na następnej stronie tego samego numeru *Science* można przeczytać o prawdopodobnym odkryciu „głodujących czarnych dziur”. W danych pochodzących z tego samego satelity ASCA wykryto słabe sygnały wysokoenergetycznego promieniowania X przychodzące z sześciu pobliskich galaktyk. Tiziana Di Matteo i Andy Fabian z Anglii uważają, że gigantyczne czarne dziury, zasilające odległe kwazary, nie cichną zupełnie (w miarę jak ustają dostawy żywności – gazu międzygwiazdowego), ale nadal cicho wołają „jeść”, zasysając resztki bardzo gorącego gazu. Nie wszyscy specjaliści są przekonani do takiego obrazka, ale jeżeli okazałby się on prawdziwy, to część tajemniczej poświaty rentgenowskiej, wypełniającej Wszechświat, mogłaby pochodzić od głodujących kwazarów.

Innymi tajemniczymi zjawiskami, charakteryzującymi się promieniowaniem o jeszcze wyższych energiach, są tzw. GRB, czyli błyski promieniowania gamma, o których pisaliśmy już rok temu (*Delta* 7/1998). Wiadomo, że przynajmniej część z nich (jeżeli nie wszystkie) jest pochodzenia pozagalaktycznego i jeżeli docierające do nas promieniowanie wysłane zostało izotropowo (równomiernie we wszystkich kierunkach), to są to najbardziej „wstrząsające” wydarzenia w Kosmosie. Poławiacze GRB mieli swoje święto w styczniu, kiedy wyjątkowo dobrze zarejestrowano wyjątkowo energetyczny przypadek GRB 990123. Po szczegóły odsyłam do literatury i Internetu (np.: <http://www.aip.de/~jcg/grbgen.html>). Dodam tylko, że zaczęto poszukiwać wyjaśnienia fenomenu GRB wśród katastrof zdolnych do wysyłania ukierunkowanego strumienia energii.

W ten sposób zbliżamy się do granic obserwowalnego Wszechświata. Obecnie najdalszym zidentyfikowanym obiektem jest galaktyka o przesunięciu ku czerwieni $z = 6,68$ (*Nature* **398**, s. 586). Wyrafinowana analiza, która umożliwiła tę obserwację, wskazuje na dużą intensywność galaktyki w nadfiolecie, co świadczyłoby o niespotykanym gwałtownym procesach gwiazdotwórczych. A gdzie gwiazdy, tam w przyszłości mogą pojawić się planety, księżyce i zaćmienia. Może ktoś tam teraz, czekając na jedno z nich, obserwuje rumieniącą się prababkę naszej Galaktyki?

Piotr ZALEWSKI



Wielościany foremne w krainie Płaszczków

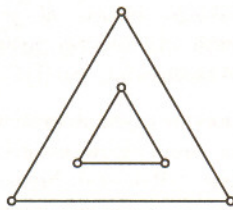
Od dawien dawna (a ściślej od czasów Euklidesa) wiadomo, że istnieje tylko pięć wypukłych brył foremnych: czworościan, sześciąt, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan. Bryły są, rzecz jasna, tworami przestrzennymi, spróbujemy jednak wykazać ów znany od stuleci fakt, nie wychodząc z płaszczyzny.

Wprowadźmy zatem na scenę graf (którym to określeniem będziemy nazywać tu tylko te obiekty, które w prawdziwej teorii nazywają się grafami planarnymi).

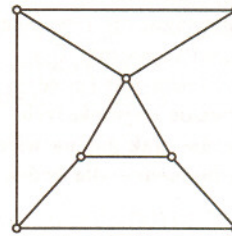
Otóż graf to po prostu pewien zbiór punktów (wystarczą nam zbiory skończone), zwanych *wierzchołkami*, i linii, zwanych *krawędziami*, z których każda łączy dwa wierzchołki. Zakładamy dodatkowo, że owe linie można zawsze narysować na płaszczyźnie tak, by żadne dwie nie miały punktów wspólnych poza wierzchołkami (to jest właśnie owa planarność). Oto parę przykładów:



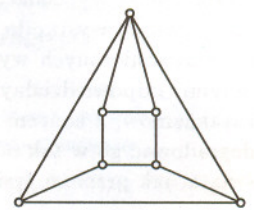
(a)



(b)



(c)



(d)

Rys. 1. Nie rozróżniamy grafów, które – choć narysowane inaczej – realizują ten sam system połączeń między wierzchołkami, jak (c) i (d).

Dla celu, jaki sobie wytyczyliśmy, będziemy rozpatrywać grafy z jeszcze jedną, dodatkową własnością: przyjmujemy mianowicie, że krawędzie grafu tworzą na płaszczyźnie przylegające wielokąty (choć niekoniecznie z prostoliniowymi bokami) i to tak, by żaden z nich nie był całkowicie otoczony przez inny, a z każdego wierzchołka można było dojść po krawędziach do każdego innego. Takie grafy nazwiemy *wielokątnymi*. Na rysunku 1 jest nim tylko graf (c) – czyli (d) – bowiem (a) nie składa się z wielokątów, a w (b) jeden wielokąt otacza drugi. Wśród wielokątów grafu są takie, które nie zawierają w swoim wnętrzu żadnej krawędzi: nazwiemy je *ścianami* grafu – ale to nie wszystko: uznamy, że każdy graf ma jeszcze jedną ścianę (nieskończoną), którą jest cała część płaszczyzny na zewnątrz grafu. Wówczas graf z rysunku 1(c) będzie miał 6 ścian, z których każda jest ograniczona 3 lub 4 krawędziami – nawet ściana nieskończona, którą ograniczają cztery zewnętrzne krawędzie grafu.

Możecie się przekonać, że graf 1(c) można narysować tak – nie zmieniając połączeń między wierzchołkami – by dowolna z jego ścian stała się ścianą nieskończoną.

Ciekawostką jest fakt, że dla grafów wielokątnych zachodzi tzw. wzór Eulera, znany Wam, być może, w wersji dla wielościanów: jeśli przez w oznaczymy liczbę wierzchołków bryły, przez k liczbę jej krawędzi,

a przez s liczbę ścian, to

$$w - k + s = 2.$$

Otóż tak samo jest dla grafów wielokątnych, z czego nie omieszkamy niebawem skorzystać.

Pora wreszcie zająć się zapowiadzianym problemem. Powiemy, że graf G jest całkowicie regularny, jeśli w każdym wierzchołku spotyka się zawsze tyle samo krawędzi oraz każdą ścianę ogranicza też taka sama liczba krawędzi. Ileż to może być takich grafów całkowicie regularnych?

Wdajmy się w obliczenia. Niech m będzie liczbą krawędzi wychodzących z każdego wierzchołka, a m' liczbą krawędzi ograniczających każdą ścianę. Wówczas, jak łatwo się przekonać,

$$2 \cdot k = m \cdot w = m' \cdot s,$$

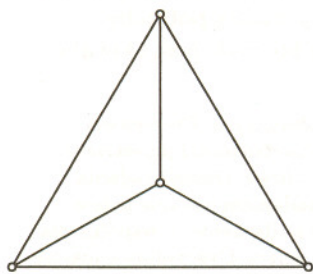
czyli $k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot w$ i $s = \frac{m}{m'} \cdot w$. Podstawmy te wartości do wzoru Eulera (nadszedł jego czas!):

$$w \left(1 - \frac{1}{2}m + \frac{m}{m'} \right) = 2,$$

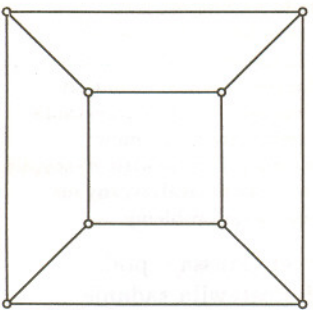
albo inaczej: $w(2m' - mm' + 2m) = 4m'$. Wyrażenie w nawiasie musi być, rzecz jasna, dodatnie, więc (szczegóły prostego obliczenia wspaniałomyślnie zostawiamy Czytelnikowi) mamy warunek

$$(m' - 2) \cdot (m - 2) < 4.$$

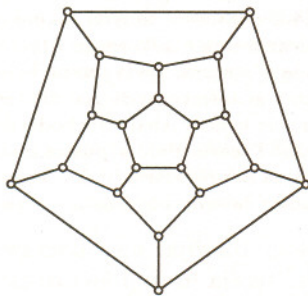
Pamiętając o naszych docelowych wielościanach (nawet Płaszczyzna – wspaniale, choć całkowicie płaskie istoty z książki Edwina Abbotta – słyszały o ich istnieniu), możemy założyć, że każda z liczb m i m' jest większa od 2. Okazuje się, że jedynymi rozwiązaniami ostatniej nierówności są następujące pary wartości tych liczb: (1) $m = 3$ i $m' = 3$, (2) $m = 3$ i $m' = 4$, (3) $m = 3$ i $m' = 5$, (4) $m = 4$ i $m' = 3$ oraz (5) $m = 5$ i $m' = 3$. Z poprzednich wzorów, wiążących liczby w , k i s , łatwo wynika, że w przypadku (1) są one równe odpowiednio 4, 6, 4, dla (2) to 8, 12, 6, dla (3) mamy 20, 30, 12, dla (4) wychodzi 6, 12, 8, a dla (5) 12, 30, 20. Te liczby ścian wydają się coś przypominać... I rzeczywiście:



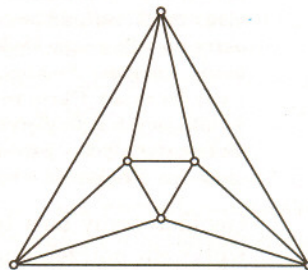
(1)



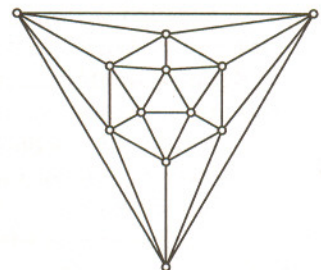
(2)



(3)



(4)



(5)

Rys. 2. (1) czworościan, (2) sześcian, (3) dwunastościan, (4) ośmiościan, (5) dwudziestościan.

Twierdzenie udowodnione (niestety, nie po raz pierwszy). W nagrodę mała zabawa. Co wyjdzie, jeśli w grafie sześcianu narysujemy kropkę wewnątrz każdej ściany, a potem połączymy każdą parę kropek sąsiadujących ścian tak, by łącząca je linia przecięła wspólną dla obu ścian krawędź sześcianu (nie zapomnijmy o ścianie nieskończonej)? A co będzie, gdy zrobimy to samo z ośmiościanem? A z pozostałymi trzema grafami?

Powodzenia!

Mała Delta przygotował Wiktor BARTOL

Aby zainteresować matematyką moją sześciolletnią córkę, sklepiłem pasek papieru we wstęgę Möbiusa. Powiedziała: Tato, tyś się pomylił! Powiedzieliby zapewne tak i starożytni Grecy. W pierwszym rozumowaniu „Elementów” Euklides nie zauważa, że korzysta z faktu rozcinania płaszczyzny przez okrąg. Dopiero w matematyce arabskiej dostrzec można świadome korzystanie z aksjomatu Pascha. Matematyka nie akceptuje bez potrzeby rzeczy zbyt osobliwych i nie zauważa rzeczy zbyt oczywistych.

Wstęga Möbiusa i aksjomat Pascha leżą u początków topologii, dyscypliny matematycznej zdającej sprawę z najogólniejszych zasad geometrii, której potrzebę przeczuwał Leibniz, inspirował Gauss, a której powstanie przypada na drugą połowę XIX wieku.

Jej siostrzycą jest topologia ogólna – nazywana też mnogościową – której motywacje sięgają Arystotelesa i Scholastyków XIV wieku – ale która w matematyce pojawiła się w końcu wieku dziewiętnastego jako zbiór środków dowodowych analizy i geometrii, a z początkiem naszego wieku wyodrębniła się jako dyscyplina samodzielna. Bada obiekty mnogościowe, więc mogłaby być uważana za gałąź teorii mnogości, ale sposób traktowania zadań jest taki, jak w powstałej wcześniej topologii geometrycznej.

Szersze zakresy obu topologii nie tworzą jednak całości. Synkretyczne ich łączenie doprowadziło do mylącego obrazu. Ich źródła są różne, a kierunki rozwoju – w pewnym okresie wspomagające się – odmienne. Łączy je wszakże jeszcze jeden ogólny aspekt. Jedna i druga zaspokajały ważną potrzebę matematyki XIX wieku, która dla swojej imponującej budowli poszukiwała zwieńczenia w postaci metafizycznych uzasadnień.

Metafizyka jest budową myślową dającą ramy dla pojęć najogólniejszych. Problemem metafizycznym jest zastanawianie się nad sensownością myśli o podzielności przestrzeni w nieskończoność. Metafizyka przedyskutuje problem nieskończoności. Określi zadania geometrii. Sformuluje V postulat, ale nie będzie zajmować się zadaniem o sumie kątów w trójkącie. Czerpie z doświadczenia. Ale jest to doświadczenie podstawowe – wspólne dla wszystkiego. Razem składa się na to, co Kant nazwał wiedzą *a priori*. Dyscypliny naukowe mają wbudowane w siebie właściwe sobie zasady metafizyczne. Są okresy w rozwoju nauk, kiedy tworzenie tych zasad daje się obserwować. Matematyka przeszła fazę niepokoju metafizycznego w głębokiej starożytności greckiej, kiedy odkryto niewspółmierności, a aporie Zenona wskazywały konieczność ograniczeń co do poglądu na budowę punktową przestrzeni i w rozumieniu nieskończoności. Innymi takimi okresami były: okres nowożytny, kiedy dzięki rachunkowi różniczkowemu i całkowemu włączono do matematyki ruch, oraz okres po odkryciach Dedekinda i Cantora, kiedy trzeba było adaptować dla matematyki teorię mnogości. Po zbudowaniu metafizycznych ram dla teorii następuje okres korzystania z siły jej zasad. Okres rozwoju się kończy, kiedy dochodzi do rozwiązania problemów wynikających z przyjętych zasad i teoria ginie w pustce metafizycznej. Jest niewiele dyscyplin matematycznych – wśród nich na pewno teoria liczb – których niepokój metafizyczny nie opuszcza. Większość – na przekór twierdzeniu Gödla – rozwiązuje swoje problemy.

Geometryczny nurt topologii rozwijał się – począwszy od Gaussa – pod wpływem potrzeb analizy. Teoria funkcji analitycznych postawiła zadanie wyeliminowania z rozważań funkcji wielowartościowych poprzez zinterpretowanie ich jako funkcji jednowartościowych na powierzchniach nakrywających ich dziedziny. Redukcje tego zagadnienia – nazywanego zagadnieniem uniformizacji – wiodły do twierdzenia nazywanego twierdzeniem o zachowaniu obszaru, które miało orzekać, że podzbiór otwarty przestrzeni euklidesowej, przeniesiony za pomocą homeomorfizmu punktowego w inne jej miejsce, nadal będzie zbiorem otwartym. Twierdzenia dowiódł Brouwer, nie bacząc, że problem uniformizacji został rozstrzygnięty wcześniej przez Koebege na innej drodze. Jeden z wniosków tego twierdzenia orzekał, że przestrzeni euklidesowych różniących się wymiarami nie można odwzorować na siebie homeomorfizmem punktowym. Uprawomocniło to stosowność metod mnogościowych w geometrii. Prace Brouwera zawierały poza tym rozwinięcie procedury aproksymacyjnej łączącej metody istniejącej już wcześniej topologii symplecticznej z metodami mnogościowymi. Dzięki nim i programowej rozprawie Dehna i Heegarda,



Rozwiązanie zadania F 506.

W czasie wypływu z naczynia powietrze rozszerza się i wobec tego ochładza. Następnie pozostałe w naczyniu powietrze ogrzewa się kosztem ciepła przewodzenia i ciśnienie jego zwiększa się.



dotyczącej topologii wielościanów, topologia o ukierunkowaniu geometrycznym określiła się jako dyscyplina niezależna od problemów zewnętrznych.

Jej podkładem stricte geometrycznym była topologia wielościanów – rozumianych jako bryły kompleksów sympleksjalnych – z ich odwzorowaniami kawałkami liniowymi. Tu problemem stała się wkrótce hipoteza podstawowa – Hauptvermutung – według której dwie rozmaitości wielościenne, dające się odwzorować na siebie homeomorfizmem punktowym, miały dać się na siebie odwzorować homeomorfizmem kawałkami liniowym. Wcześniejszym problemem było to, czy rozmaitości – rozumiane jako sumy mnogościowe obszarów euklidesowych tego samego wymiaru – mogą być traktowane jako wielościany, tj. czy są triangulowalne. Hauptvermutung zapewniałaby, że triangulacja jest w określonym sensie jedyna. Zapewniałaby, że charakterystyka Eulera sumująca ze znakami na przemian ilości sympleksów triangulacji – kolejno według ich wymiarów – nie zmienia się, jeśli bryłę triangulacji poddać przekształceniu będącemu homeomorfizmem punktowym. Problem triangulacji został rozwiązany w wymiarze 2 w latach dwudziestych przez Radó, a w wymiarze 3 w latach czterdziestych przez Moise'a, który potwierdził Hauptvermutung do wymiaru 3. Mimo że w wymiarach wyższych Hauptvermutung jest nierozstrzygnięta bądź fałszywa, to charakterystyka Eulera okazała się niezmienna przy homeomorfizmach punktowych; dzięki wykorzystanej – poprzez teorię homologii – metodzie aproksymacji sympleksjalnej, sumowanie ilości sympleksów można zastąpić sumowaniem liczb Bettię, które są niezależne od triangulacji.

Nie sposób wymienić tu dostatecznie dużej części spośród ważnych problemów i rozstrzygnięć topologii geometrycznej, aby dać pojęcie o sile jej rezultatów. Ale wspomnijmy J.H.C. Whiteheada, który przedstawił kostkę euklidesową wymiaru 10 w postaci produktu kostki wymiaru 7 i pewnego wielościanu różnego topologicznie od I^3 , inwolucję ciągłą na sferze S^4 – zbudowaną przez Binga – której zbiór punktów stałych nie jest sferą, nierozstrzygniętą do tej pory hipotezę Poincarégo, oraz to, że dawne metody Koebeego odżyły u Thurstona w jego próbach klasyfikacji rozmaitości trójwymiarowych. Wyraźnie określone i trudne problemy stawiają tę gałąź topologii w centralnym miejscu matematyki. Tendencje algebraizujące z lat sześćdziesiątych osłabły.

Topologia mnogościowa jest nie tylko dlatego inna, że jest mnogościowa, lecz głównie dlatego, iż nie stawia sobie niczego za cel. Jej charakter metafizyczny określił Cantor w swoim manifeście matematyki wyzwolonej. Chociaż początkowo traktowana była przede wszystkim jako pomoc w badaniu własności figur geometrycznych danych punktowo, to już od lat trzydziestych obiekty, takie jak βN , discontinua Cantora, przestrzenie normalne Moore'a, uwolniły topologię mnogościową z więzów użytkowości. Patrząc na ten okres topologii mnogościowej, trudno nie poddać się nostalgii. Zdawało się, że odkrycia mnogościowe Cohena przedłużą w sposób istotny ten imponujący rozwój. Ale nieokreśloność celów – tak początkowo atrakcyjna – doprowadziła do tego, co można porównać z zdeptaniem środowiska naturalnego. Czy musiały powstać przestrzenie motylowe i kosmetyczne, gdzie autorzy jednego z tych pojęć atakowali autorów drugiego – i na odwrót – za udiwnienia? Odegrały rolę niekorzystne warunki zewnętrzne w postaci zasilania środkami materialnymi, co w zakresie dyscyplin mających charakter swobodnej gry myśli nie ma uzasadnienia. Powodowało to szybkie rozwiązywanie zagadnień, co skutkowało poszukiwaniem problemów ciągle nowych, bez oglądania się na ich umotywowanie. Rozwiązania nie zawsze były gruntowne i na pobitewnym polu pozostało wiele skarbów. Wracanie do nich jest przeciwne naturze poszukiwawcy.

Topologowie naszej generacji głoszą, że topologia ginie, że powinna wrócić do swych źródeł w fizyce, którą uznają za oparcie w każdym kryzysie. Chodzi o nieokreśloność problemów, od czego nie jest wolna i geometryczna część topologii, a więc o kryzys zasad metafizycznych. Ale, jeśli fizyka miałaby ten kryzys rozwiązać, musiałaby być sama metafizycznie ugruntowana. Wpadamy w błędne koło – bo fizyka szuka – chociaż z innych przyczyn – oparcia



Rozwiązanie zadania M 890.

Niech $f(x) = x^2 - x + a$,
 $g(x) = x^{13} + x + 90$. Mamy
 $f(0) = f(1) = a$, $g(0) = 90$, $g(1) = 92$,
 a zatem liczba a powinna dzielić
 największy wspólny dzielnik 90 i 92,
 czyli 2. Ponadto, $f(-1) = a + 2$,
 $g(-1) = 88$, skąd wynika, że a nie
 może być równe 1 ani -2 . Wreszcie,
 $f(-2) = a + 6$, $g(-2) = -8104$, więc
 z pewnością $a \neq -1$.

Z tych rozważań wynika, że o ile
 liczba a , o której mowa w treści zadania,
 w ogóle istnieje, to $a = 2$. Bezpośrednim
 rachunkiem sprawdzamy, że $x^2 - x + 2$
 istotnie jest dzielnikiem $x^{13} + x + 90$.



w matematyce, nie wyłączając topologii. Według powszechnego poglądu fizyka to fizyka formalizmów matematycznych algebry i analizy matematycznej. Tymczasem fizyka współlistnieje z matematyką dopiero od Newtona, a więc niewiele więcej niż trzy stulecia. Zapomina się o jej niematematycznej prehistorii sięgającej Arystotelesa, która fizykę ukształtowała metafizycznie. Dwudziesty wiek obarczył fizykę zadaniami, dla których obecnie stosowany formalizm matematyczny staje się nieadekwatny, zarówno na poziomie fizyki cząstek elementarnych, jak i w teoriach kosmologicznych. Ma się nieraz wrażenie, że jest stosowany przez fizyków magicznie.

Mówiąc o wymiarze przestrzeni, myślimy o trzech wzajemnie prostopadłych wektorach, nie zważając na to, że fizyczność reperu trzech wektorów ma uzasadnienie jedynie w naszych warunkach ziemskich, gdzie Ziemia w swojej płaszczyźnie daje dwa z nich, a kierunek ciężaru trzeci. Jeśliby nam przyszło rozwinąć cywilizację w miejscu, gdzie brak grawitacji, skąd wzięłaby się w naszym umyśle prostopadłość? Niech to pytanie będzie sygnałem wątpliwości naszych przesłanek co do wyboru konwencji matematycznych, które są dalekie od uniwersalności. Mimo to wymiarem, opartym na pojęciu reperu wzajemnie prostopadłych wektorów, fizycy posługują się nie tylko w makroświecie, ale i w mikroświecie, o którym już Riemann pisał, że zapewne rządzi się inną geometrią.

Aby wyjść z trudności, weźmy na pomoc topologię. Henri Lebesgue zaproponował w latach dwudziestych widzenie wymiaru takie, w którym każdy element pojęciowy ma sens fizyczny. Przyjmijmy za Lebesguem, że przestrzeń jest wymiaru nie większego niż n , jeśli ma dowolnie drobne pokrycia zbiorami otwartymi, takie, że nie więcej niż $n + 1$ spośród tych zbiorów może się przecinać, i przyjmijmy za wymiar przestrzeni najmniejszą spośród wspomnianych liczb n . Jednym z największych osiągnięć topologii początku naszego wieku był dowód, że dla przestrzeni euklidesowych wymiar Lebesgue'a pokrywa się z ich wymiarem wektorowym. Ale wymiar Lebesgue'a ma sens dla wszelkiego rodzaju przestrzeni, a elementy składające się na to pojęcie – przecinanie się i pokrywanie figur oraz ich rozdrabnianie się ku zeru – mają uniwersalny sens fizyczny. Wymiar przestrzeni w danym jej miejscu jest mały, jeśli sąsiedztwo tego miejsca, złożone z komórek pokryć, jest ubogie przy rozdrabniających się pokryciach. Ustalenie wymiaru można wyobrazić sobie jako czynność fizyczną. Fizycy obserwują, że kwark może kontaktować się naraz z bardzo wielką ilością innych, co znaczy, że jego przestrzeń jest bardzo luźna, tj. że jej wymiar jest duży. Wymiar naszej części makrokosmosu – wynikający z naszych doświadczeń z ciałami sztywnymi – jest 3. Czy utrzymuje się w dalszych jego partiach?

Przed dwudziestu mniej więcej laty wysłano w przestrzeń informację o naszej cywilizacji. Było tam twierdzenie Pitagorasa, uważane przez nas za uniwersalne dla każdej możliwej do pomyślenia matematyki. Tymczasem, wystarczy sobie wyobrazić istoty, których matematyka jest oparta na reagowaniu na dwa symbole: 1 i 0. Wiemy, że ten drobny początek wystarczy, by rozwinąć to w imponujący system liczb dwuadycznych, które można dodawać, odejmować, mnożyć, a nawet dzielić. Nie ma wśród nich jednak liczby, która pomnożona przez siebie daje 2. Posługujący się tą arytmetyką i geometrią na niej opartą nie zapytają o twierdzenie Pitagorasa.

Odgąleniem topologii przestrzeni euklidesowych jest teoria kontynuów, najpierw lokalnie spójnych, które są figurami o dostatecznej regularności. Ale uwagę bardziej przyciągają ich osobliwości. Krzywa trójkątowa Sierpińskiego – przy prostym opisie globalnym – dostarcza nadal trudnych problemów dotyczących jej zachowania się przy odwzorowaniach. Krzywa Menger'a ukazuje swoje różne nieoczekiwane oblicza, zależnie od położenia w przestrzeni. Ale jeszcze osobliwsze jest zachowanie się pseudołuku – kontinuum dziedzicznie nierozkładalnego węzowego. Jest ono homeomorficzne z każdym swoim podkontinuum wielopunktowym, na które można je zretrahować – w czym jest podobne do odcinka – ale – podobnie jak okrąg – jest przestrzenią jednorodną.

Pan Sławomir Cholcha (Podgórze 6, 84-242 Luzino) wymieni lub kupi stare (1974-9) roczniki lub pojedyncze numery *Delty*, także *Problemów i Młodego Technika*.



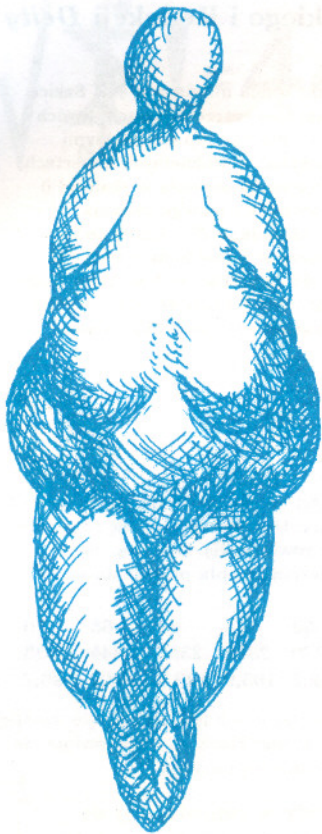
Ma na sobie nietożsamościowe inwolucje ciągle dowolnie bliskie tożsamości. Niektóre z kontynuów węzowych – przy pewnych położeniach na płaszczyźnie – są atraktorami homeomorfizmów płaszczyzny, ale nie wiadomo, czy atraktorem może być pseudołuk. Wspólne brzegi trzech obszarów – jezior Wady – zapoczątkowały tę dyscyplinę, która atrakcyjnością porównywalna jest z teorią liczb.

Wartość teorii matematycznych oceniana bywa ich użytecznością. Topologia – nawet ogólna – wykazała użyteczność, dając ogólniejszy wgląd w inne teorie matematyczne. W XX wieku nastąpiło coś, co można by nazwać topologizacją matematyki.

Ale użyteczność z czasem się wyczerpuje. Przestrzeń βN mówiła coś o problemie ciągłego przedłużania funkcji. Teraz raczej podziwiamy jej strukturę wewnętrzną, problem przedłużania funkcji widząc dla niej jako marginalny. Przyjdzie czas, że nic nowego o tej przestrzeni nie będzie już do powiedzenia. Ale nie przestaniemy jej podziwiać, tak jak nie przestajemy podziwiać Koncertów Brandenburskich Bacha.

Nieefektywnym wydaje się los teorii matematycznej w roli eksponatu muzealnego. Ale pomyślmy, że ten los może spotkać rachunek prowadzący od zasad dynamiki Newtona do praw Keplera. Ruchy planet nie są tak idealne jak opis dany tymi prawami. Odchylenia lepiej odda manipulacja komputerowa niż trud matematyka. Przyjemnie więc będzie dla kontrastu zobaczyć kiedyś w muzealnym otoczeniu elegancki – wygładzony przez upływ wieków – wywód Newtona. Niewdzięczny będzie los dokonań matematycznych, które nie znajdują tam miejsca.

Chcielibyśmy, by nasze dokonania pozostały w matematyce wiecznie. Ale nawet jeśli sama matematyka jest wieczna i jest podobna do drzewa, które stale rośnie, to jego gałęzie śledzone z osobna mogą wieczne nie być. Drzewem – dodajmy, że szczupłym (to ważne!) – które samo jest wieczne – a żadna z jego gałęzi taką nie jest, jest drzewo Suslina. Jednym z dokonań XX wieku – w którym topologia miała swój udział – jest to, że bez sprzeczności można takie drzewo pomyśleć.



Zadania

Przygotował Paweł STRZELECKI

M 889. Udowodnić, że najmniejsza liczba całkowita większa od $(\sqrt{3} + 1)^{2m}$ jest podzielna przez 2^{m+1} .

Rozwiązanie na str. 14

M 890. Dla jakiej liczby całkowitej a wielomian $x^{13} + x + 90$ jest podzielny przez $x^2 - x + a$?

Rozwiązanie na str. 11

M 891. Wykazać, że suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1999^n}$ jest liczbą niewymierną.

Rozwiązanie na str. 15

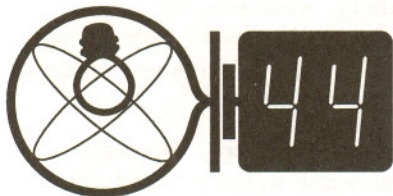
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 505. Odejmując od ciężaru naczynia z gazem ciężar samego naczynia, można znaleźć ciężar gazu. Ale molekuly „latają” po całym naczyniu, w jaki więc sposób można wyznaczyć ciężar gazu?

Rozwiązanie na str. 6

F 506. Naczynie zaopatrzone w manometr napompowano powietrzem. Następnie otwarto kurek łączący naczynie z otoczeniem, aby nastąpiło wyrównanie ciśnień na zewnątrz i wewnątrz naczynia, po czym od razu kurek zamknięto. Po pewnym czasie ciśnienie w naczyniu ponownie wzrosło. Dlaczego?

Rozwiązanie na str. 10



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1999

Przypominamy treść zadań:

276. Izolowane termicznie naczynie jest przedzielone na dwie części: jedna część zawiera 50 g wody o temperaturze 70°C, a w drugiej (o objętości 0,2 m³) jest próżnia. Usunięto przegrodę rozdzielającą obie części. Obliczyć końcową temperaturę wody i pary (w stanie równowagi). Dane są: ciepło właściwe wody $c = 4,19 \text{ J}/(\text{g} \cdot \text{K})$ oraz tabela przedstawiająca zależność ciepła parowania wody q oraz gęstości pary wodnej nasyconej ρ od temperatury:

T (°C)	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
q (J/g)	2471	2460	2448	2437	2425	2414	2402	2391	2379	2368	2357	2345	2333
ρ (g/m ³)	9,40	12,8	17,3	23,0	30,3	39,5	51,0	65,3	82,7	103,9	129,5	160,2	196,7

277. Promień światła pada prostopadle na siatkę dyfrakcyjną o stałej $d = 2 \mu\text{m}$, za którą w pewnej odległości znajduje się ekran (rys. 1). Zaobserwowane na ekranie widmo zostało przedstawione na okładce *Delty* 4/1999. Obliczyć długości fali trzech zaznaczonych linii widmowych.

276. Zamiast rozpatrywać parowanie kolejnych porcji wody w zmieniającej się temperaturze, rozważmy równoważny pod względem energetycznym (a znacznie prostszy) proces, w którym najpierw całą masę $M = 50 \text{ g}$ wody oziębamy do końcowej temperatury T_k , odprowadzając na zewnątrz ciepło, a następnie przy ustalonej temperaturze zwracamy to ciepło, przeprowadzając pewną ilość wody w parę. Bilans ciepła ma postać

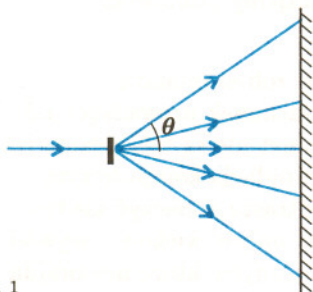
$$Mc(T_0 - T_k) = V\rho(T_k)q(T_k),$$

gdzie $T_0 = 70^\circ\text{C}$ jest temperaturą początkową, a $V = 0,2 \text{ m}^3$ (pomijamy niewielkie zwiększenie tej objętości wynikające ze zmniejszenia się ilości wody oraz z rozszerzalności cieplnej). Widzimy, że należy uzupełnić tabelkę o rubrykę z wartościami iloczynu $\rho \cdot q$ i wyznaczyć (graficznie lub metodą prób i błędów) punkt przecięcia z prostą opisaną wyrażeniem $(Mc/V)(T_0 - T_k)$. Znajdujemy $T_k \approx 22 \div 23^\circ\text{C}$.

277. Oznaczmy zmierzoną odległość danej linii od środka (linii światła białego na rysunku) przez x , a nieznaną odległość ekranu od siatki dyfrakcyjnej przez l – zatem we „wzorze siatkowym” $d \sin \theta = n\lambda$ należy podstawić $\sin \theta = x/\sqrt{x^2 + l^2}$. Pojedynczy pomiar x nie pozwala, oczywiście, wyznaczyć dwóch niewiadomych l i λ . Brakującą informację można jednak uzupełnić na podstawie kilkakrotnego pomiaru x dla różnych rzędów widma tej samej linii. Przekształcając wzór siatkowy, doprowadzamy go do postaci szczególnie wygodnej do analizy graficznej

$$n^2 + \frac{n^2}{x^2}l^2 = \frac{d^2}{\lambda^2}.$$

Odlóżmy na jednej osi wykresu wielkość n^2 , a na drugiej n^2/x^2 (rys. 2). Widzimy, że punkty odpowiadające tej samej długości fali układają się wzdłuż równoległych prostych. Nachylenie tych prostych pozwala wyznaczyć l , a punkt przecięcia z osią n^2 daje wielkość n'^2 odpowiadającą formalnemu podstawieniu $n^2/x^2 = 0$ w powyższym wzorze (czyli kątowi θ równemu 90°). Odczytujemy z wykresu dla linii niebieskiej $n'^2 = 18,5$, $n' = 4,30$, czyli $\lambda = d/n' = 0,465 \mu\text{m}$. W podobny sposób dla linii zielonej znajdujemy $\lambda = 0,53 \mu\text{m}$, a dla linii czerwonej $\lambda = 0,66 \mu\text{m}$.

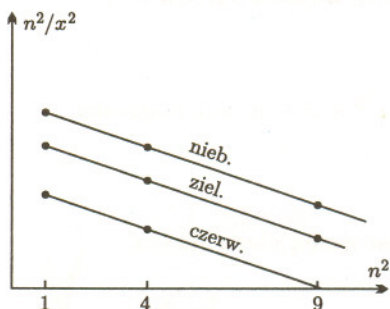


Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 270 ($WT=2,28$) i 271 ($WT=3,14$)
z numeru 1/1999

Andrzej Idzik	- Bolestawiec	29,54
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	29,08
Aleksander Surma	- Myszków	20,83
Artur Arciszewski	- Kielce	15,62



Rys. 2

Rozwiązanie zadania M 889.

Najmniejsza liczba całkowita większa od $a = (\sqrt{3} + 1)^{2m}$ jest równa

$$b = (\sqrt{3} - 1)^{2m} + (\sqrt{3} + 1)^{2m}.$$

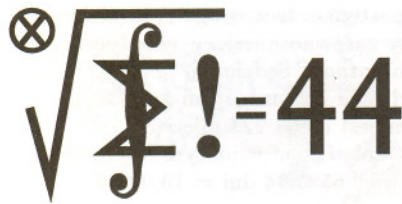
(Liczba b jest całkowita, gdyż składniki z nieparzystymi potęgami $\sqrt{3}$ występują w rozwinięciach obu dwumianów z przeciwnymi znakami; ponadto $\sqrt{3} - 1 < 1$, a więc $b - a < 1$.)

Ponieważ $(\sqrt{3} \pm 1)^2 = 4 \pm 2\sqrt{3}$, więc

$$b = (4 - 2\sqrt{3})^m + (4 + 2\sqrt{3})^m = 2^m [(2 - \sqrt{3})^m + (2 + \sqrt{3})^m].$$

Liczba $(2 - \sqrt{3})^m + (2 + \sqrt{3})^m$ jest całkowita i parzysta (składniki, które nie redukują się, gdy dodajemy rozwinięcia obu m -tych potęg dwumianów, można połączyć w pary). Stąd już wynika teza zadania.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1999



Przypominamy treść zadań:

379. Dla danej liczby naturalnej parzystej $n \geq 2$ znaleźć wszystkie układy liczb (x_1, \dots, x_n) spełniające warunki: $0 \leq x_i \leq 1$ dla $i = 1, \dots, n$ oraz

$$\sum_{i=1}^n x_i(1 - x_{i+1}) = \frac{n}{2} \quad (\text{przyjmujemy } x_{n+1} = x_1).$$

380. Obliczyć maksymalną wartość pola trójkąta równobocznego, którego wszystkie wierzchołki leżą na brzegu prostokąta o bokach długości a, b (dla danych liczb $a \geq b > 0$).

379. Niech (x_1, \dots, x_n) będzie układem liczb spełniającym podane warunki. Przyjmijmy $y_i = 2x_i - 1$ dla $i = 1, \dots, n$; skoro $0 \leq x_i \leq 1$, to $|y_i| \leq 1$. Ponadto

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} &= \sum_{i=1}^n x_i(1 - x_{i+1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1 + y_i}{2} \left(1 - \frac{1 + y_{i+1}}{2}\right) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (1 + y_i)(1 - y_{i+1}) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (1 + y_i - y_{i+1} - y_i y_{i+1}) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (1 - y_i y_{i+1}) = \frac{1}{4} \left(n - \sum_{i=1}^n y_i y_{i+1}\right), \end{aligned}$$

skąd $\sum_{i=1}^n y_i y_{i+1} = -n$. Dla liczb y_i o modułach nie większych od 1 otrzymana

równość oznacza, że każdy z iloczynów $y_i y_{i+1}$ ma wartość -1 , czyli że układ liczb (y_1, \dots, y_n) jest złożony z jedynek i minus jedynek, występujących na przemian. Układ (x_1, \dots, x_n) ma w takim razie postać $(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$ lub $(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0)$. Te dwa układy stanowią pełne rozwiązanie zadania.

380. Weźmy pod uwagę dowolny trójkąt równoboczny wpisany w prostokąt $ABCD$ o bokach długości $|BC| = |DA| = a$, $|AB| = |CD| = b$; $a \geq b$. Na każdym z odcinków BC, DA musi leżeć wierzchołek trójkąta. Łącząc te wierzchołki bok trójkąta jest nachylony do prostych BC i DA pod kątem $\varphi \geq 60^\circ$, a więc jego długość nie przekracza $\frac{2}{3}\sqrt{3}b$. Mamy zatem górne oszacowanie długości boku trójkąta. Będzie ono osiągnięte, gdy $\varphi = 60^\circ$; na jednym z odcinków BC, DA leżą wówczas dwa wierzchołki trójkąta. Warunek na to, aby taki trójkąt istniał – to nierówność $a \geq \frac{2}{3}\sqrt{3}b$, czyli $b \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}a$.

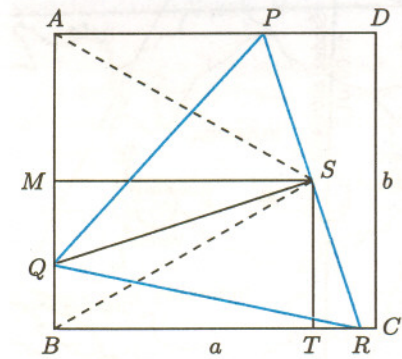
Zajmiemy się teraz przypadkiem, gdy ten warunek nie jest spełniony, czyli gdy $b > \frac{1}{2}\sqrt{3}a$ (prostokąt $ABCD$ ma kształt zbliżony do kwadratu). Oznaczmy wierzchołki trójkąta przez P, Q, R tak, by $P \in DA, R \in BC$; trzeci wierzchołek S leży na jednym z krótszych boków prostokąta – na przykład na boku AB – i nie pokrywa się z żadnym z punktów A, B . Można założyć, że $|AP| \leq |BR|$; wtedy $|AQ| \geq |BQ|$.

Oznaczmy środki odcinków AB i PR odpowiednio przez M i S , i niech T będzie rzutem prostokątnym punktu S na odcinek BR . Trójkąty SMQ i STR (o przyprostokątnych odpowiednio prostopadłych) są podobne, więc $|SM| : |ST| = |SQ| : |SR| = \sqrt{3}$. Stąd $|SM| = \sqrt{3} \cdot |ST| = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}b$, co oznacza, że trójkąt ABS jest równoboczny.

Wykazaliśmy w ten sposób, że – w rozpatrywanym przypadku ($b > \frac{1}{2}\sqrt{3}a$) – wszystkie trójkąty równoboczne PQR ($P \in DA, Q \in AB, R \in BC$) mają wspólny środek boku PR : jest nim wierzchołek S trójkąta równobocznego ABS . Odcinek PR ma maksymalną długość, gdy punkt R pokrywa się z C . Kąt BCS jest większy od 60° (bo $b > \frac{1}{2}\sqrt{3}a$), a więc wierzchołek Q trójkąta równobocznego PQR nie ucieknie z odcinka AB . Prosty rachunek pokazuje, że $|CS| = \sqrt{a^2 - \sqrt{3}ab + b^2}$. Największy trójkąt równoboczny wpisany w prostokąt $ABCD$ (gdy $b > \frac{1}{2}\sqrt{3}a$) ma bok dwukrotnie dłuższy.

Obliczamy pola znalezionych w obu przypadkach trójkątów równobocznych i otrzymujemy odpowiedź:

$$\text{maksymalne pole} = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{3}b^2, & \text{gdy } b \leq \frac{1}{2}\sqrt{3}a; \\ \sqrt{3}(a^2 + b^2) - 3ab, & \text{gdy } b > \frac{1}{2}\sqrt{3}a. \end{cases}$$



Rozwiązanie zadania M 891.

W układzie liczenia o podstawie 1999 suma rozważanego szeregu jest równa $0,1001000010000001\dots$ (kolejne jedynki występują na tych miejscach po przecinku, których numery są pełnymi kwadratami). Rozwinięcie nie jest okresowe, gdyż między dwiema jedynkami

pojawiają się ciągi zer, których długości są kolejnymi liczbami parzystymi. A zatem suma szeregu nie jest liczbą wymierną, bowiem wszystkie liczby wymierne mają (w układzie o dowolnej podstawie całkowitej!) rozwinięcia skończone lub okresowe.

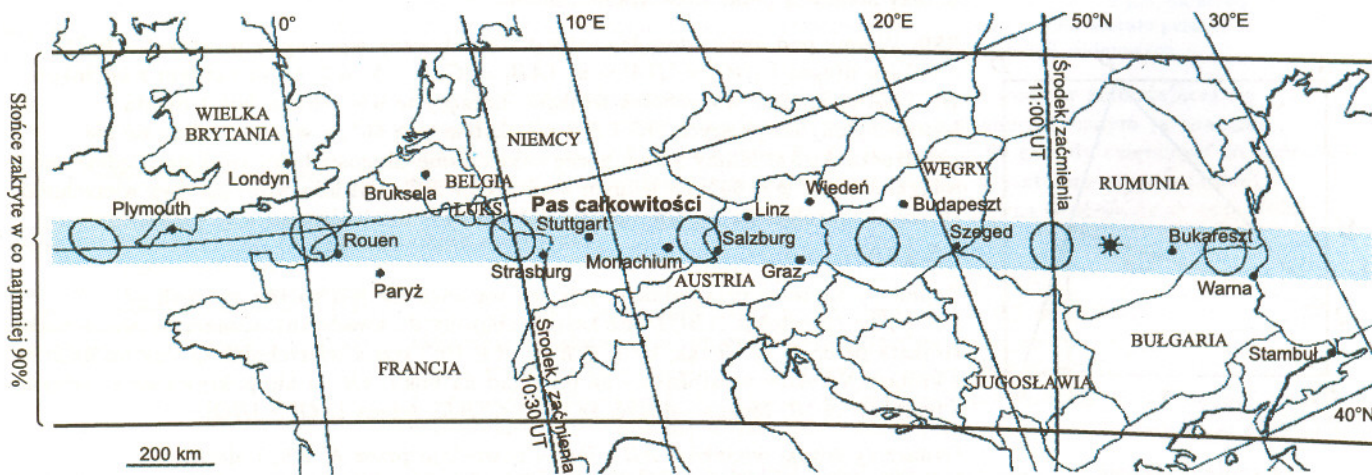
Zaćmienia są generalnie zjawiskami dość rzadkimi. Zwłaszcza rzadko obserwuje się zaćmienia Słońca, gdyż trzeba w odpowiednim czasie znaleźć się w odpowiednim miejscu. Toteż zdumienie budzi fakt, że astronomowie starożytni wiedzieli już o tym, że zaćmienia powtarzają się z pewną regularnością i nawet potrafili je przewidywać. Mając do dyspozycji stosowne dane liczbowe, możemy tę regularność bez trudu wyprowadzić.

Księżyc obiega Ziemię po orbicie nie leżącej w płaszczyźnie orbity Ziemi, dlatego nie co miesiąc może Słońce przesłonić lub nie co miesiąc może dostać się w cień Ziemi. Aby nastąpiło zaćmienie, powiedzmy – Słońca, muszą być spełnione dwa warunki: Księżyc musi być w nowiu oraz musi być dostatecznie blisko płaszczyzny ziemskiej orbity, czyli dostatecznie blisko punktu przecięcia się rzutu na niebo jego orbity z rzutem na niebo orbity Ziemi. Punkt ten (są oczywiście dwa takie punkty) nazywa się węzłem orbity Księżyca. Odstęp czasu, upływający od nowiu do nowiu, to tzw. miesiąc synodyczny, trwający 29,530589 dni, a od przejścia Księżyca przez węzeł do następnego przejścia przez ten sam węzeł to tzw. miesiąc smoczycy, trwający 27,212221 dni. Regularność zaćmień można współczesnym językiem wyrazić następująco: jeżeli kiedyś zaszło

zaćmienie, to inne (nie następne, lecz w ogóle) zajdzie po upływie całkowitej liczby zarówno miesięcy synodycznych, jak i smoczycy. Ta wielokrotność będzie, co prawda, tylko przybliżona, ale właśnie już starożytni zauważyli, że niezłym przybliżeniem jest okres 223 miesięcy synodycznych równy 242 miesiącom smoczycy. Okres ten, zwany sarosem, wynosi więc 6585,34 dni = 18,03 lat.

Myśl tę można rozwijać jeszcze dalej. Skoro saros trwa ileś dni plus 1/3 dnia, to znaczy, że w tym samym miejscu Ziemi zaćmienie Słońca powinno zajść po trzech sarosach, bo po upływie jednego sarosu Ziemia będzie obrócona o 120° względem położenia przy ostatnim zaćmieniu. Przykład. Ostatnie całkowite zaćmienie Słońca w Polsce było 30 VI 1954 r., dodając trzy sarosy (19756 dni), otrzymujemy datę 1 VIII 2008 r. I tu rozczarowanie: tablice zaćmień nie przewidują całkowitego zaćmienia Słońca wtedy w Polsce. Bowiem zaćmienie to zobaczą wtedy obserwatorzy usytuowani w przybliżeniu w tych samych długościach geograficznych, ale w innych szerokościach. Nie wymagamy w końcu za wiele – zauważenie, że w ogóle istnieje coś takiego jak saros, to duże osiągnięcie starożytnych astronomów, ale wykorzystywanie go do przewidywania zaćmień to sprawa dość delikatna. Inaczej mówiąc, „na palcach” nie da się zaćmienia obliczyć.

Tomasz KWAST



Przebieg całkowitego zaćmienia Słońca w Europie 11 sierpnia 1999 r. Owale oznaczają kształt cienia Księżyca. Czas trwania fazy całkowitości wynosi od 2 min na zachodzie Europy do 2 min 23 s w Rumunii – tu zaćmienie będzie najdłuższe. Momenty środka zaćmienia podano w czasie uniwersalnym (UT). Jeżeli w danym kraju obowiązuje czas środkowoeuropejski, do UT należy dodać 1 h, jeżeli letni – dodać 2 h.

Sierpień

Wydarzeniem roku jest niewątpliwie zaćmienie Słońca 11 sierpnia, mimo że oglądane z Polski będzie tylko zaćmieniem częściowym. Jako całkowite można je obserwować z pobliskich krajów Europy – przedstawiamy jeszcze raz mapkę przebiegu zaćmienia. Wybrać się tak niedaleko za granicę, choćby tylko na jeden dzień, to żaden problem. Jeżeli dopisze pogoda, to wrażenia będą niezapomniane!

Kosmicznych atrakcji, poza zaćmieniem, będzie w sierpniu nie za wiele. 20 VIII Wenus znajdzie się w dolnym złączeniu ze Słońcem (niekiedy w tej sytuacji przechodzi przed tarczą Słońca), a zatem w ogóle jej nie widać w słonecznym blasku. Mars jest w Wadze, a więc wieczorem już zachodzi, a Jowisz i Saturn (oba w Baranie) dopiero wschodzą. Nów Księżyca wypada, oczywiście, w dniu zaćmienia Słońca, tj. 11 VIII, a pełnia 27 VIII. Księżyc zbliży się mocno do Aldebarana 6 VIII i nawet go zakryje, ale z Polski tego nie będzie widać.

Widzimy za to w całej okazałości Drogę Mleczną. Niemal w zenicie wieczorem znajduje się jedna z najjaśniejszych gwiazd nieba, mianowicie Deneb, tj. α Łabędzia. To w jej pobliżu znajduje się punkt, ku któremu z prędkością 220 km/s pędzą wszystkie widoczne gołym okiem gwiazdy, uczestnicząc w rotacji Galaktyki. Ale niedaleko Łabędzia, nieco ku zachodowi, leży Herkules, a pisaliśmy już kiedyś i zresztą Czytelnicy mogą wiedzieć skądinąd, że to ku niemu leci Słońce. Nie ma w tym żadnej sprzeczności, bo w ruchu ku Łabędziowi biorą udział praktycznie wszystkie gwiazdy, które każdy widzi na niebie, a względem nich Słońce ma jeszcze dodatkową małą prędkość (tzw. prędkość swoistą) wynoszącą 20 km/s i skierowaną ku Herkulesowi. Wreszcie nisko nad południowym horyzontem widać gwiazdozbiór Strzelca, gdzie znajduje się centrum Galaktyki, które Słońce i towarzyszące mu gwiazdy obiegają w ciągu ćwierci miliarda lat.

T.K.

MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (20)

– Kiedy ten Bazyli wreszcie przyjdzie? – niecierpliw się Celestyn – Miał być pół godziny temu.
 – Pewnie coś go zatrzymało – uspokaja kolegę Ambroży – A co? Masz do niego jakąś sprawę?
 – Właściwie do was obu. Przygotowałem dla was dwie kolejne liczby naturalne i chcę każdemu z was powiedzieć jedną z nich na ucho.
 – I co mamy zrobić z tymi liczbami?
 – Spytałem cię, czy wiesz, jaką liczbę ma Bazyli.
 – A skąd niby mam to wiedzieć? Chyba że powiesz nam, który ma większą liczbę.
 – Tego nie powiem. Ale pomyśl, co będzie, jeśli podam ci jedynekę.
 – Wtedy sprawa jest jasna. Bazyli musi mieć dwójkę, bo przecież zawsze się umawialiśmy, że zero nie jest liczbą naturalną. Ale jeśli podasz mi dwójkę, to nie będę wiedział, co ma Bazyli. Może mieć równie dobrze jedynekę, jak i trójkę.
 – Wtedy spytałem Bazylego, czy wie, jaką ty masz liczbę.
 – Jak będzie miał jedynekę, to powie, że ja mam dwójkę, ale jeśli dostanie trójkę, to nie zgadnie, co ja mam.
 – Wtedy spytałem cię, czy wiesz, co ma Bazyli.
 – Po co? Przecież już raz pytałeś. Zaraz, zaraz... Przecież udzielając pierwszej odpowiedzi, nie wiedziałem, co powie Bazyli. Zatem jego odpowiedź dała mi dodatkowe informacje, których nie miałem na początku zabawy, a które w mojej drugiej próbie pozwalają mi stwierdzić, że ma trójkę. Genialne! A tak w ogóle, to na czym polega ta zabawa?

– Poczynając od ciebie będę was pytał na przemian, czy wiecie, jaką liczbę ma drugi z was, aż któryś powie, że wie.
 – Rozumiem. Nawet jeśli jakiś czas będziemy mówić *Nie wiem, Nie wiem, Nie wiem, ...*, to każda taka odpowiedź będzie przekazywała pewne informacje, które w końcu pozwolą nam odgadnąć przygotowane przez ciebie liczby.
 – Jesteś pewien?
 – Tak mi się wydaje.
 – A jak podam ci liczbę 100?
 – To wtedy na twoje pierwsze pytanie odpowiem *Nie wiem*. Zresztą Bazyli też zaraz powie *Nie wiem*. I ja w drugiej kolejce powiem *Nie wiem*. Ale w międzyczasie dowiem się, że...
 – No, czego się dowiesz?
 – Właściwie niczego... Przecież na samym początku wiedziałem, że pierwsza odpowiedź Bazylego będzie *Nie wiem*. Nie uzyskałem żadnej nowej informacji.
 – A Bazyli?
 – Bazyli ma liczbę 99 lub 101. Wie, że moja pierwsza odpowiedź będzie *Nie wiem*. Wie też, że moja druga odpowiedź będzie *Nie wiem*. Moja druga odpowiedź była mu znana, zanim jej udzieliłem. Nie dowiedział się niczego między swoją pierwszą i drugą odpowiedzią.
 – Jaki stąd morał?
 – Że w drugiej kolejce zarówno ja, jak i Bazyli mamy dokładnie te same informacje, co w pierwszej. Byliśmy w stanie przewidzieć nawzajem swoje odpowiedzi, więc niczego się nie dowiedzieliśmy. Zabawa nie posunęła się do przodu, druga kolejka polega na udzieleniu odpowiedzi opartych na dokładnie tych samych przesłankach, które znaleźliśmy już w pierwszej. Jednak ta gra nie wygląda tak, jak początkowo myślałem. Dla dużych liczb będziemy sobie mówić *Nie wiem* do...
 – Do śmierci. Widzisz, że jeśli podam ci małą liczbę, jak na przykład 1 lub 2, to zabawa się zakończy, a jak dużą, na przykład 100, to nigdy nie odgadniecie swoich liczb.
 – To dla jakiej największej liczby, którą mi podasz, zabawa się zakończy?
 – No, dla jakiej?
 – Dobrze pytanie!

JWR

GRY (5)

Dzisiaj przedstawiamy nową grę. Rozgrywa się ona na bardzo długiej (w poziomie) planszy o szerokości jednego pola. Dla wygody pola będziemy numerować. Na planszy znajduje się pewna liczba bierek, przy czym żadne dwie bierki nie mogą znajdować się na tym samym polu. Ruch polega na przełożeniu dowolnej bierki w lewo o dowolną liczbę pól, przy czym nie wolno przeskakiwać innych bierek. Oczywiście, bierkę możemy przełożyć tylko na wolne pole. Gracze wykonują ruchy na przemian. Gracz, który nie może wykonać ruchu (bo wszystkie bierki są zablokowane w lewym końcu planszy), przegrywa. Popatrzmy na przykładową pozycję w tej grze:

1	2	○	○	5	6	7	○	9	○	11	12	13	14	15	16	17	○	19	20
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----

Na planszy znajduje się pięć bierek. Dozwolonymi ruchami w tej pozycji są:

- przełożenie bierki z pola 3 na pole 1 lub 2,
- przełożenie bierki z pola 8 na pole 5, 6 lub 7,
- przełożenie bierki z pola 10 na pole 9,
- przełożenie bierki z pola 18 na jedno z pól od 11 do 17.

Bierką, znajdującą się na polu 4, ruchu wykonać nie można. Mamy 13 możliwych ruchów. Który z nich jest najlepszy?

A może wszystkie są złe? Gdybyś miał zagrać w tę grę, Drogi Czytelniku, rozpoczynając od powyższej pozycji, czy też okazałbyś wspaniałomyślność (niekoniecznie bezinteresowną), ofiarując przeciwnikowi prawo pierwszego ruchu? A jeśli rozpoczynałbyś grę, to jaki ruch byś wykonał?

I nie mów, że nie znasz tej gry, gdyż jest to w gruncie rzeczy gra *Nim*. Musisz tylko zobaczyć w niej stopy.

JWR

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl