

SPIS TREŚCI NUMERU 7(302)

Jak podwoić sześcian
 i podzielić kąt na trzy
*Aleksiej Tretiakow
 i Henryk Żółtek*

Osiągnięcia
 astrofizyki XX wieku
Kazimierz Stępień

Aktualności
 (nie tylko) fizyczne

Mała Delta

Sumy dwóch kwadratów
 i kolejne liczby naturalne
*Lew Kurlandczyk
 i Andrzej Nowicki*

Wszędzie wypukła, jak sfera
Marek Kordos

Klub 44

Zadania

Patrz w niebo

Lipiec

Gammalimatias

W następnym numerze:

Wiek topologii

Okladki i ilustracje
Anna Ludwicka

Rysunki techniczne
Marcin Adamski

Wybór artykułów w języku angielskim

<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichocki
 – wiceprzewodniczący

str. 1

Krzysztof Ciesielski
 Jan A. Gaj
 Piotr Goldstein
 Tomasz Hofmokl
 Andrzej Hryniewicz
 Wiesław A. Kamiński
 Marta Kicińska-Habior
 Krzysztof Maślanka

str. 4

Andrzej Mąkowski
 Zdzisław Pogoda
 Feliks Przytycki
 Michał Różyczka
 Konrad Rudnicki
 Zbigniew Semadeni
 Grzegorz Sitarski
 Andrzej Woszczyk

str. 7

str. 8

Wiesław Żelazko – przewodniczący

str.10

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol
 Krzysztof Biesaga
 Wojciech Kopczyński – z-ca red. nacj.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nacj.
 Tomasz Kwast
 Anna Ludwicka
 Anna Rudnik
 Paweł Strzelecki
 Joanna Udalska
 Anna Wojtyra
 Piotr Zalewski

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
 tel. 853-59-61, 843-02-41(-2) wewn. 21
 BARTOL@MIMUW.EDU.PL
 Skład systemem T_pX wykonała Redakcja.
 Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej
 w Warszawie, ul. Mińska 65.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Żuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1999 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1999 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1999 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numery archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Jak podwoić sześcián i podzielić kąt na trzy

– czyli konstrukcje geometryczne w przestrzeni

Aleksiej TRETIAKOW i Henryk ŻOŁĄDEK

Wszyscy znamy geometryczne zadania konstrukcyjne. Przeważnie chodzi tu o konstrukcje platońskie, czyli wykonywane cyrklem i linijką na płaszczyźnie. Na przykład mając odcinki o długościach a i b , można w taki sposób skonstruować odcinek o długości \sqrt{ab} .

W naszym artykule będzie mowa o konstrukcjach geometrycznych wykonywanych *przestrzennym cyrklem* i *przestrzenną linijką*.

Przestrzenny cyrkiel i przestrzenna linijka

Nietrudno domyślić się, jak działa linijka przestrzenna – daje ona płaszczyznę przechodzącą przez dane trzy punkty nie leżące na jednej prostej.

Objaśnienie działania przestrzennego cyrkla jest bardziej złożone. Wyobraźmy sobie, że zwykły szkolny cyrkiel (z dwiema nóżkami równej długości) obraca się wokół jednej unieruchomionej nóżki, a druga nóżka pozostawia ślad powierzchni bocznej stożka – ostatnio takie stożki można rysować na ekranie komputera. Bardziej precyzyjnie: dla danych trzech niewspółliniowych punktów A, B, C , spełniających warunek $AB = AC$, otrzymujemy (ograniczony) stożek Σ , którego osią jest półprosta AC , odcinek AB jest zaś jedną z jego tworzących (rys. 1).

Tak jak w przypadku konstrukcji platońskich, zarówno linijki przestrzennej, jak i przestrzennego cyrkla możemy używać wielokrotnie i w różnych położeniach, przy czym cyrkiel może także zmieniać kąt rozwarcia nóżek. O długości nóżek cyrkla przestrzennego założymy (co robi się również przy konstrukcjach platońskich), że jest ona wystarczająca do wykonywanych konstrukcji.

Przed wszystkim trzeba się przekonać, że naszymi nowymi środkami można wykonać wszystkie konstrukcje platońskie. Zostawimy jednak tę przyjemność Czytelnikom, sugerując, by zacząć od stwierdzenia, iż za pomocą naszych dwóch przestrzennych narzędzi możliwe jest wykonanie następujących konstrukcji:

- dana jest prosta l i punkt A na niej; skonstruować płaszczyznę przechodzącą przez A i prostopadłą do l ;
- dana jest płaszczyzna Π i punkt A na niej; skonstruować prostą przechodzącą przez A i prostopadłą do Π ;
- dana jest prosta l oraz punkty A i B poza nią; skonstruować płaszczyznę przechodzącą przez A i B oraz równoległą do l .

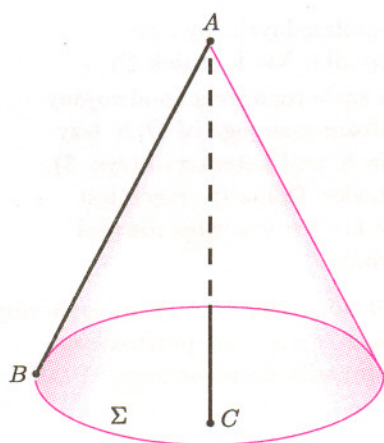
Czy te konstrukcje można przeprowadzić bez założenia o równości ramion cyrkla, tzn. gdy dysponujemy jedynie stożkiem o zmiennym kącie rozwarcia?

Problem podwojenia sześcianu

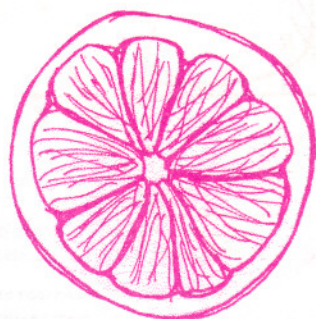
Starożytni Grecy nie potrafili zrealizować wszystkich naturalnych konstrukcji za pomocą zwykłego cyrkla i zwykłej linijki. Jednym z problemów, który sprawił sporo zamyślenia, był *problem podwojenia sześcianu*.

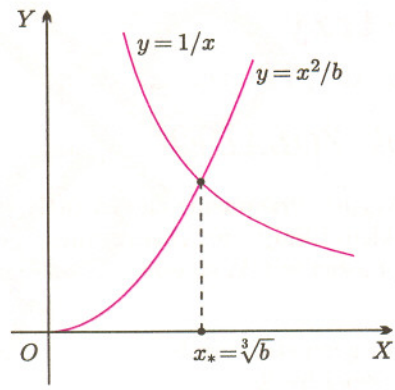
Wedle podania, gdy na wyspie Delos wybuchła epidemia, wysłani do Pytii Delfickiej posłowie przywieźli odpowiedź Apollina, że – aby zaradzić – należy zwiększyć dwukrotnie jego sześcienny ołtarz ofiarny o krawędzi a , nie zmieniając przy tym jego kształtu. Należało zatem skonstruować sześcián o krawędzi $a\sqrt[3]{2}$. Próby znalezienia platońskiej konstrukcji odcinka o długości $a\sqrt[3]{2}$ okazały się bezowocne. A zajmowali się tym problemem tacy uczeni, jak Hipokrates z Chios, Archytas z Tarentu, Eratostenes, Heron i inni. Archytas podał konstrukcję $a\sqrt[3]{2}$ poprzez przecięcie trzech powierzchni w przestrzeni.

W pierwszej połowie IV w.p.n.e. Menaichmos badając przekroje stożka, wykazał, że liczba $a\sqrt[3]{2}$ jest odciętą jednego z punktów przecięcia paraboli $x^2 = ay$ i paraboli $y^2 = 2ax$, jak też paraboli $x^2 = ay$ i hiperboli $xy = 2a^2$.



Rys. 1. Przestrzenny cyrkiel – widok z dołu.





Rys. 2

Dopiero w 1837 roku francuski matematyk, P. Wantzel, wykazał niewykonalność podwojenia sześciangu za pomocą cyrkla i linijki na płaszczyźnie.

Spośród innych starożytnych problemów, których nie da się rozwiązać za pomocą zwykłego cyrkla i linijki, należy wymienić trysekcję kąta oraz konstrukcje siedmiokąta foremnego i dziewięciokąta foremnego. Dla ich rozwiązania Grecy stworzyli nowe, oryginalne instrumenty, np. konchoidograf. Omówimy te problemy w ostatniej części artykułu.

Powróćmy do problemu podwojenia sześciangu. Mając odcinki o długościach 1 i b , będziemy konstruowali odcinek o długości $\sqrt[3]{b}$. Użyjemy do tego paraboli $y = x^2/b$ i hiperboli $y = 1/x$. Odcięta ich punktu przecięcia na płaszczyźnie XOY to $x_* = \sqrt[3]{b}$ (patrz rys. 2).

Zadanie sprowadza się więc do konstrukcji paraboli i hiperboli za pomocą naszych nowych narzędzi.

Konstrukcja paraboli $y = x^2/b$

Ustalmy płaszczyznę Π i obierzmy taki układ współrzędnych, by osie OX i OY leżały na Π , a OZ była do niej prostopadła. Niech stożek Σ_1 , o wierzchołku w punkcie $O_1 = (0, -\frac{1}{2}b, -\frac{\sqrt{3}}{2}b)$ i kącie rozwarcia (podwojony kąt rozwarcia ramion cyrkla) $\pi/3$, będzie tak położony, że jego oś O_1K leży w płaszczyźnie YOZ i przecina oś OY w punkcie K pod kątem $\pi/6$ (rys. 3). Zatem półprosta O_1O jest jedną z tworzących stożka. Dolna tworząca jest równoległa do osi OY . Zauważmy przy okazji, że $O_1O = b$, a więc również $OK = b$ (jako że trójkąt O_1KO jest równoramienny).

Znajdziemy teraz równanie punktów przecięcia $\Pi \cap \Sigma_1$. Dla $M = (x, y)$ oznaczmy przez M_y jego rzut prostokątny na oś OY i przez P – jego rzut prostokątny na oś O_1K . Zatem płaszczyzna MM_yP jest prostopadła do płaszczyzny YOZ . Ponieważ $OM_y = y$, więc $M_yK = b - y$.

Dla trójkąta prostokątnego MPM_y mamy

$$MP^2 = MM_y^2 + M_yP^2 = x^2 + M_yK^2 \sin^2(\pi/6) = x^2 + (b - y)^2/4.$$

Oznaczmy przez N punkt przecięcia tworzącej O_1O z płaszczyzną MPM_y . Trójkąt ONM_y jest równoboczny, co daje $ON = y$ i $O_1N = b + y$. Mamy zatem

$$MP = NP = O_1N \sin(\pi/6) = (b + y)/2,$$

co razem z poprzednim wzorem daje $(b + y)^2/4 = x^2 + (b - y)^2/4$, czyli $y = x^2/b$.

Konstrukcja hiperboli $y = 1/x$

Przy takim samym wyborze płaszczyzny Π i układu współrzędnych niech stożek Σ_2 ma wierzchołek w punkcie $O_2 = (0, 0, -\sqrt{2})$, oś równoległą do dwusiecznej $\angle XOY$ i kąt rozwarcia równy $\pi/2$ (rys. 4).



Rozwiązanie zadania F 504.
Promienie światła padające na granicę woda–powietrze przechodzą z ośrodka bardziej gęstszego optycznie do mniej gęstszego. Na skutek tego promienie, które padają na granicę rozdziela ośrodków pod kątem równym lub większym od granicznego, doznają całkowitego wewnętrznego odbicia. Sinus tego granicznego kąta wynosi

$$\sin \alpha_0 = \frac{1}{n},$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania woda–powietrze.

Na powierzchnię mogą wydostać się jedynie promienie zawarte w stożku o wierzchołku w źródle światła i kącie rozwarcia $2\alpha_0$ oraz średnicy podstawy $2R_0$, takiej że

$$R_0 = h \operatorname{tg} \alpha_0,$$

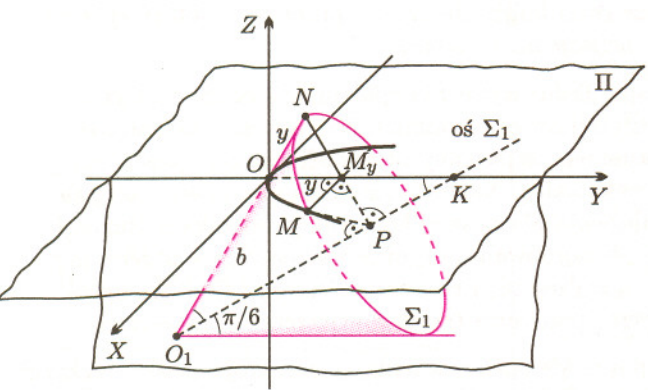
gdzie h jest głębokością wody.

Wyznaczając $\operatorname{tg} \alpha_0$

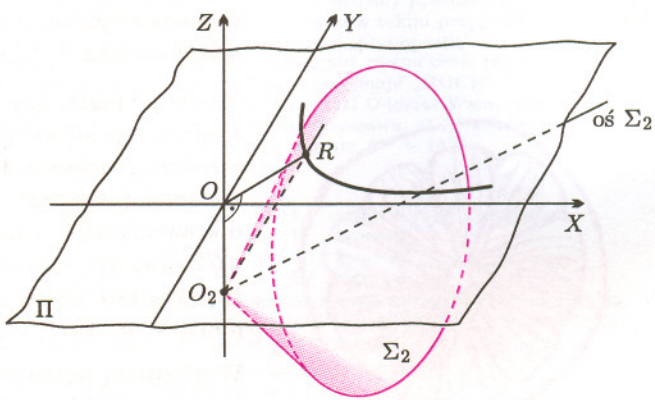
$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

otrzymujemy minimalny promień płytki mogącej zasłonić źródło światła

$$R_0 = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 11,4 \text{ cm}.$$



Rys. 3



Rys. 4



Rozwiązanie zadania M 887.

Różnych od zera reszt z dzielenia przez n jest $n - 1$, więc z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że pewne dwie liczby z naszego ciągu dają tę samą resztę z dzielenia przez n . Ich różnica jest równa kd dla pewnego $1 \leq k < n$. Ponieważ $n|kd$, więc liczby d i n nie mogą być względnie pierwsze – w przeciwnym przypadku byłoby $n|k$, co przeczy nierówności $k < n$.

Ponieważ stożek Σ_2 jest przesuniętym w dół stożkiem z półosiami OX i OY jako tworzącymi i dwusieczną $\angle XOY$ jako osią, więc jego przecięcie z płaszczyzną Π jest hiperbolą z osiami OX i OY jako asymptotami. Ogólne równanie takiej hiperboli ma postać $xy = c$.

Aby pokazać, że $c = 1$, wystarczy sprawdzić, że punkt $R = (1, 1, 0)$ leży w $\Pi \cap \Sigma_2$. Wynika to natychmiast z faktu, że trójkąt OO_2R jest równoramienny i prostokątny.

Chętni mogą również wyprowadzić równanie hiperboli $\Pi \cap \Sigma_2$ w podobny sposób, jak to zrobiliśmy dla paraboli $\Pi \cap \Sigma_1$.

Inne nierozstrzygnięte problemy starożytnych

Do problemu skonstruowania odcinka o długości będącej pierwiastkiem sześciennym z długości danego odcinka prowadzą się liczne inne problemy konstrukcyjne. Dla przykładu rozwiążemy tu zadania wymienione na zakończenie pierwszej części tego artykułu. Wobec tego, co już zostało wykazane, będzie to znaczyło, że można je rozwiązać za pomocą przestrzennej linijki i przestrzennego cyrkla.

Siedmiokąt foremny

W trójkącie równoramiennym ABC , gdzie $AB = BC = R$ i $\angle ABC = \pi/7$, obliczymy długość d boku AC . Mamy $\angle A = \angle C = 3\pi/7$. Jeśli punkty D i E na boku AB są obrane tak, że półproste CD i CE dzielą $\angle C$ na trzy równe części (po $\pi/7$; rys. 5), to wtedy $CD = CA = d$, a z podobieństwa $\triangle ACD$ i $\triangle ABC$ mamy $AD = d^2/R$. Ponieważ trójkąt CBE jest równoramienny, więc $EB = EC = R - d$.

Tu skorzystamy z (niezbyt popularnego) twierdzenia o dwusiecznej kąta, które głosi, że kwadrat jej długości jest równy różnicy między iloczynem długości boków wychodzących z danego wierzchołka i iloczynem długości odcinków, na które dwusieczna dzieli przeciwległy bok (prosimy je udowodnić). Stosując je do trójkąta DBC otrzymujemy

$$EC^2 = DC \cdot BC - DE \cdot BE,$$

czyli

$$(R - d)^2 = dR - (d - d^2/R)(R - d),$$

co daje równanie trzeciego stopnia z niewiadomą d

$$d^3 - Rd^2 - 2R^2d + R^3 = 0.$$

Takie zaś równanie można (za pomocą wzorów Cardano) rozwiązać, gdy umie się wyciągać pierwiastki drugiego i trzeciego stopnia – a to już umiemy. Możemy więc skonstruować trójkąt z rysunku 5, czyli segment czternastokąta foremnego. Łącząc zaś co drugi wierzchołek tego czternastokąta, otrzymujemy siedmiokąt foremny.

Dziewięciokąt foremny

Czytelnik zechce sprawdzić, że przeprowadzając podobne rozumowanie dla trójkąta równoramiennego o kącie $\pi/9$ przy wierzchołku, otrzymamy dla d równanie

$$d^3 - 3R^2d + R^3 = 0,$$

co daje osiemnastokąt, a w konsekwencji i dziewięciokąt foremny.

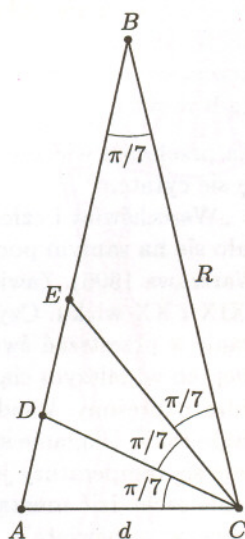
Trysekcja kąta, czyli podział kąta na trzy równe części.

Gdy kąt α jest dany przez jego sinus równy m , to, wobec tożsamości $\sin \alpha = 3 \sin(\alpha/3) - 4 \sin^3(\alpha/3)$, mamy równanie

$$4n^3 - 3n + m = 0,$$

z niewiadomą $n = \sin(\alpha/3)$. Jeśli zaś mamy znaną wartość sinusa (czyli długość przeciwległej przyprostokątnej w trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej równej 1), to mamy i kąt.

Tak więc wszystkie te konstrukcje można wykonać przestrzenną linijką i przestrzennym cyrklem.



Rys. 5

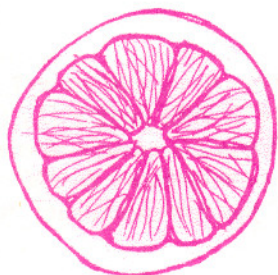
Literatura:

M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.

Хрестоматия по истории математики (А.П. Юшкевич, ред.), Просвещение, Москва 1976.

Kazimierz STEPIEŃ

Artykuł ten rozpoczyna cykl podsumowań osiągnięć matematyki, fizyki i astronomii w XX wieku, który będziemy kontynuować przez 2 lata.
Redakcja



Rozwiązanie zadania F 503.

Człowiek krótkowzroczny, aby poprawić swoją wadę wzroku, nosi okulary z soczewek rozpraszających, by promienie padające od punktów odległych o 30 cm ogniskowały się na siatkówce w tym samym miejscu, w którym ogniskują się promienie padające od przedmiotów odległych o 16 cm bez korekcy dodatkowymi soczewkami.

Dla oka nieuzbrojonego mamy

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

gdzie przez $\frac{1}{F}$ oznaczyliśmy zdolność skupiającą oka, $d_0 = 0,16$ m jest odległością dobrego widzenia dla krótkowidza, a f głębokością oka.

Analogicznie dla oka uzbrojonego mamy

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F_1}$$

gdzie $d_1 = 0,3$ m, a $\frac{1}{F_1}$ jest zdolnością skupiającą okularów. Zrobiliśmy tutaj pewne uproszczenie, zakładając, że zdolność skupiająca jest równa sumie ich zdolności skupiających.

Odejmując powyższe równania stronami znajdujemy, że

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_0} \approx -2,9 \text{ dioptrii}$$

Podobnie jak we wszystkich naukach przyrodniczych, wiek XX przyniósł w astrofizyce więcej odkryć niż wszystkie wcześniejsze razem wzięte. Wybór najważniejszych z nich musi mieć, siłą rzeczy, subiektywny charakter, zwłaszcza że należy je niejako wyrwać z ciągu kolejnych i ściśle ze sobą powiązanych prac i wyników naukowych, które składają się na globalny proces poznawczy. Ja wybrałem dwa takie odkrycia.

Za pierwsze z nich uważam odkrycie reakcji jądrowych prowadzących do syntezy pierwiastków i stanowiących podstawowe źródło energii gwiazd. Odkrycie to pozwoliło zrozumieć, jak ewoluują gwiazdy i jak zmieniają się ich własności obserwacyjne w zależności od wieku, masy i składu chemicznego. Obserwowane na niebie gwiazdy wydawały się wcześniej dziwnym zbiorowiskiem obiektów „bez ładu i składu”, mających wielkie i małe rozmiary, jasnych i słabych, stałych i zmiennych na najróżniejsze sposoby, czasem pojawiających się nagle tam, gdzie ich wcześniej nie było, a potem znikających. Czy wszystkie mają jednakowy wiek? Jak długo żyje gwiazda? Czy jedne są „skazane” na zmienność przez całe życie, a inne, np. Słońce, są stateczne i niezmiennie? Cały ten galimatias stał się jasny i zrozumiały dzięki rachunkom ewolucyjnym. Każda gwiazda znalazła swoje miejsce w układzie ewolucyjnym, tak jakby ktoś ułożył rozsypaną wcześniej układankę. Wszystko to było wynikiem odkrycia podstawowego mechanizmu napędzającego ewolucję gwiazd: reakcji jądrowych.

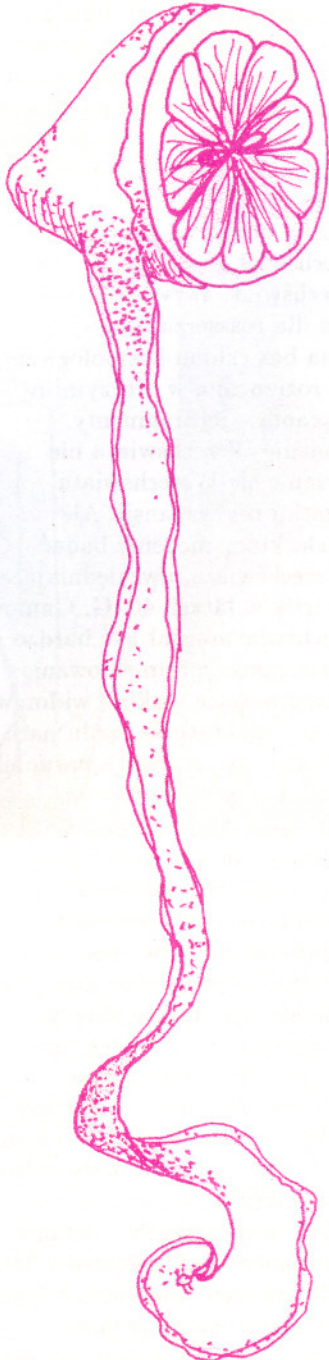
Co na temat źródeł świecenia gwiazd wiadomo było na przełomie wieków? Dla zwięzłej prezentacji ówczesnych poglądów posłużę się cytatem z monumentalnego, 3-tomowego dzieła zbiorowego pt. „Wszczęświat i człowiek”, o objętości ponad 1500 stron formatu A4, które ukazało się na samym początku XX w. pod redakcją Hansa Kramera (wyd. polskie: Warszawa 1906). Zawiera ono podsumowanie wiedzy przyrodniczej z przełomu XIX i XX wieku. Czytamy tam: „... przy ciągłej utracie ciepła przez promieniowanie w przestrzeń świata, następować może powolne ściąganie się bryły słonecznej, co w dalszym ciągu sprządza silniejsze ciśnienie w jej wnętrzu i stan bardzo naprężony. Wiadomo powszechnie, że według poglądu Helmholtza, przez ciągłe takie ściąganie się warstw wierzchnich słońca i wynikające ztąd wzmaganie się temperatury jego, wyrównywane być mogą straty ciepła, jakie nieuniknienie zachodzić muszą skutkiem promieniowania ciepła słonecznego w przestrzeń wszechświata” (pisownia oryginalna). A zatem wierzono, że źródłem energii Słońca (i innych gwiazd) jest energia potencjalna zamieniana na ciepło podczas powolnego kurczenia się tych ciał. Autorzy podkreślają, że wynikające stąd zmniejszenie średnicy Słońca byłoby zauważalne dopiero po wielu tysiącletniach starannych obserwacji. Energia potencjalna (zwana czasem grawitacyjną) jest istotnie jednym z ważnych źródeł energii we Wszczęświecie. Powstająca z rozproszonej materii gwiazda zaczyna świecić, jeszcze zanim rozpoczną się w jej wnętrzu jakiegokolwiek reakcje jądrowe. Kurczenie się porcji gazu prowadzi do wzrostu temperatury, a rosnąca szybko nieprzezroczystość uniemożliwia szybkie wychłodzenie przez wypromieniowanie nadmiaru energii wewnętrznej. Proces wzrostu temperatury trwa do chwili, gdy osiągnie ona wartość wystarczającą do zapoczątkowania reakcji przemiany wodoru w hel (pomijam tu inne, mało znaczące reakcje, które zachodzą nieco wcześniej). Oceny z początku stulecia były poprawne: proces kurczenia się gwiazdy o masie Słońca trwa bardzo długo w porównaniu ze skalą życia ludzkiego, bo około 100 mln lat, ale jest to nadal o wiele krócej niż wiek Ziemi. Wtedy jednak nie dostrzegano tej sprzeczności. Wprawdzie istniał akceptowany do dzisiaj podział na okresy i ery geologiczno-paleontologiczne, ale było to datowanie względne. Dopiero na początku XX w. wprowadzono izotopowe metody datowania dające wiek badanych próbek w latach. I wtedy okazało się, że wiek Ziemi sięga kilku miliardów lat, a Słońce musiało przez cały ten czas świecić podobnie, jak obecnie. Powstała zasadnicza sprzeczność wymagająca znalezienia innego, trwalszego źródła energii. Początek XX w. to również początek badań nad



Rozwiązanie zadania M 888.

Rozpatrzmy ciąg $1, 11, 111, 1111, \dots$

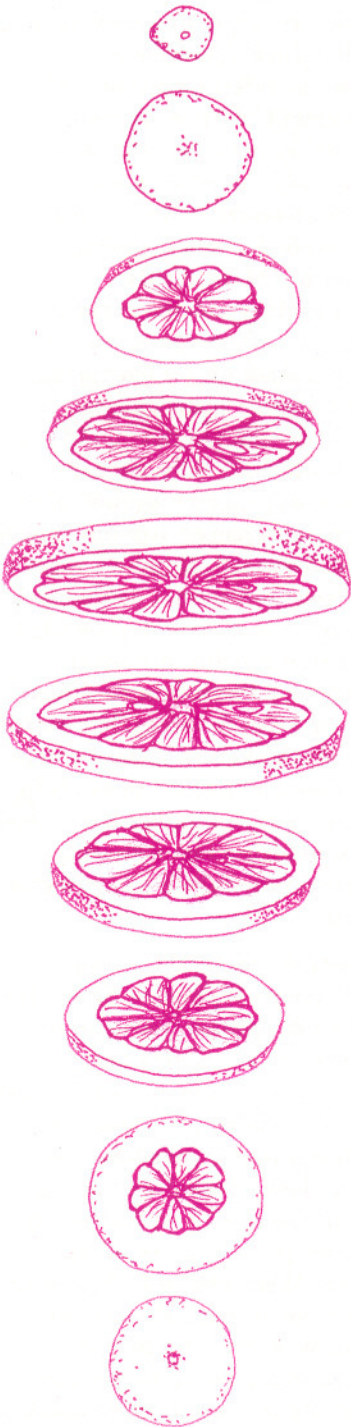
Pewne dwa jego wyrazy dają tę samą resztę z dzielenia przez m . Ich różnica jest szukaną liczbą.



reakcjami jądrowymi przemieniającymi jedne pierwiastki w inne. W 1905 roku A. Einstein opublikował słynny związek między masą i energią: $E = mc^2$. Stało się jasne, że wyzyskanie energii zawartej nawet w bardzo niewielkiej porcji materii może jej dostarczyć w wymaganej ilości. W 1927 roku A. Eddington zauważył, że suma mas czterech jąder wodoru jest nieco większa niż masa jądra helu. Gdyby więc, spekulował, cztery jądra najobficiej w przyrodzie występującego pierwiastka, czyli wodoru, połączyć w jedno jądro helu, a nadwyżkę masy zamienić na dostępnniejszą formę energii, dostalibyśmy niezmiernie obfite źródło energii, wystarczające do podtrzymania świecenia gwiazd przez dostatecznie długi czas. Nie potrafił jednak zaproponować sposobu tej przemiany. Dopiero w 1939 roku H. Bethe odkrył i opisał cykl reakcji, zwany cyklem węglowo-azotowym (lub cyklem CNO), w wyniku którego powstaje hel z wodoru. Zasugerował też, że ten właśnie cykl może zachodzić we wnętrzu Słońca. Następne lata przyniosły odkrycie wielu innych reakcji, w tym reakcji proton-proton, która zachodzi wydajniej niż cykl Bethego w gwiazdach mniej masywnych niż około 1,5 masy Słońca, mających też niższe temperatury w swych wnętrzach. Odkryto cały łańcuch egzotermicznych reakcji prowadzących do syntezy kolejno coraz to masywniejszych pierwiastków aż do żelaza. Wymagają one coraz to wyższych temperatur i ciśnień, osiąganym w zaawansowanych stadiach ewolucyjnych coraz to masywniejszych gwiazd. Reakcje tworzące jeszcze masywniejsze pierwiastki są endotermiczne i zachodzą w warunkach silnie niestacjonarnych, na koszt energii grawitacyjnej zapadającego się gwałtownie jądra gwiazdy supernowej. Wyznaczenie niezbędnych danych jądrowych, przekrojów czynnych, tempa poszczególnych kroków cykli, ich bilansu energetycznego itp. umożliwiło włączenie reakcji jądrowych do ewolucyjnych modeli gwiazd. Burzliwy rozwój technik komputerowych pozwolił na prowadzenie szczegółowych i dokładnych obliczeń modeli w kolejnych stadiach ewolucyjnych, co w efekcie doprowadziło do wyznaczenia całych ewolucyjnych sekwencji gwiazd o różnych masach i początkowych zawartościach ciężkich pierwiastków – od narodzin do śmierci. Modele były stale konfrontowane z obserwacjami, w których szczególnie ważną rolę pełniły obserwacje gromad gwiazdowych – gęstych skupisk gwiazd o tym samym wieku, ale różnych masach. Badania nad ewolucją gwiazd prowadzone były głównie w latach 50. do 70. Obecnie koncentrują się na najbardziej zaawansowanych stadiach ewolucji gwiazd (w tym modelowanie wybuchów supernowych) i różnych nietypowych konfiguracjach, powstałych np. w wyniku wzajemnego oddziaływania dwu lub więcej gwiazd.

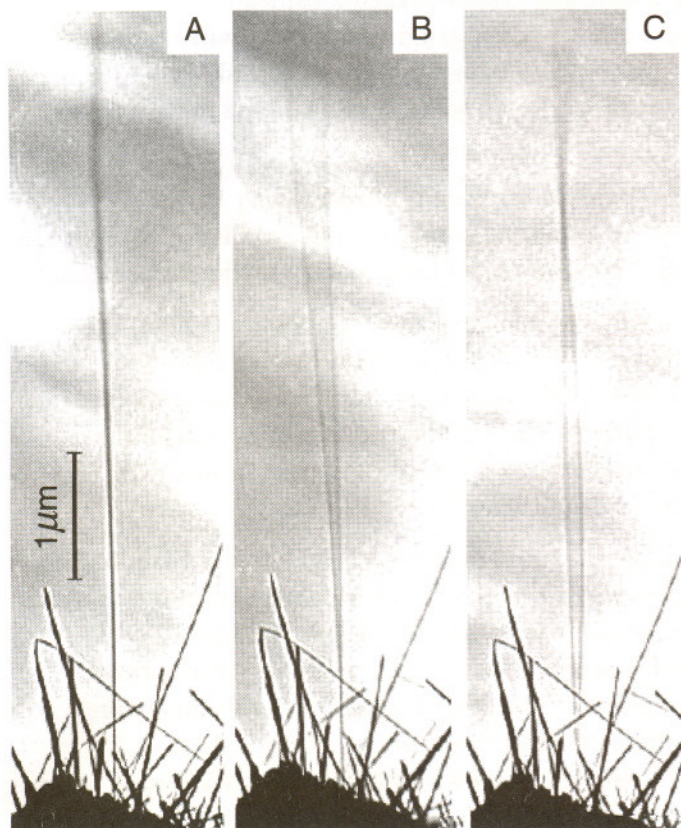
Drugie, najważniejsze, moim zdaniem, odkrycie astrofizyczne XX w., to wykazanie, że Wszechświat powstał w wyniku Wielkiego Wybuchu. Stan wiedzy na temat całego Wszechświata na początku wieku tak opisuje cytowana już książka: „O początek i koniec wszechrzeczy nie troszczy się wiedza przyrodnicza. Wie dobrze, że nieumiarkowane takie dążności, jakby mamidła, uwodziły myśl naszą coraz głębiej w pustynię dogmatów jałowych”. I dalej: „Astronomja odważyła się na zastosowanie praktyczne swych teorii ruchu, jakkolwiek nie wie o pierwszych podniętach ruchów ciał niebieskich i jakkolwiek nie zna zgoła istoty tak zwanych sił, którymi tak pomyślnie operuje, a wprowadzonych dotąd w obrazach matematycznych jedynie”. Cytaty pokazują, jak mierna była podówczas wiedza dotycząca powstania i życia Wszechświata. Wprawdzie akceptowano powstanie Słońca i planet z materii rozproszonej, ale to było wszystko. Podziwiać można dyscyplinę przyrodników, którzy nie mając do dyspozycji żadnych faktów obserwacyjnych dotyczących powstania, ewolucji, obecnego wieku czy rozmiarów Wszechświata, nawoływali do unikania jałowych spekulacji, które albo doprowadziłyby do uznania dogmatów religijnych, albo do stworzenia innych, również nie mających żadnego wsparcia przyrodniczego. Z perspektywy ówczesnego obserwatora Wszechświat wydawał się niezmienny i albo wieczny, albo powstały w wyniku procesów, których nigdy nie poznamy i nie zrozumiemy. Potrzeba było geniuszu Einsteina, by zmierzyć się z zadaniem matematycznego opisu struktury całego Wszechświata. Zaraz po odkryciu w 1916 roku ogólnej teorii względności Einstein zastosował jej równania do opisu

Wszczęświata. Poszukiwał jednak statycznych rozwiązań, zgodnych z powszechnym przekonaniem. Okazało się, że rozwiązania takiego nie można znaleźć. Łatwo to zrozumieć nawet na podstawie potocznej intuicji: zawieszono w przestrzeni masy (np. galaktyki) przyciągają się wzajemnie i przy braku siły równoważącej siłę przyciągania grawitacyjnego Wszczęświat powinien się zapaść. Chcąc mieć model statyczny, trzeba wprowadzić siłę przeciwną grawitacji. Einstein zrobił to, wprowadzając do swych równań słynny człon kosmologiczny opisujący siłę odpychania działającą między dwiema masami, wprost proporcjonalną do odległości między nimi. Dla odległości występujących w Układzie Słonecznym, a nawet w Galaktyce, wielkość tej siły była bardzo mała, nieporównywalnie mniejsza niż siły grawitacji. Ale odległe galaktyki powinny odpychać się wystarczająco silnie, by zrównoważyć grawitację i zapewnić statyczność Wszczęświata. Człon kosmologiczny wprowadzony został ot tak, „z sufitu”, tylko by znaleźć rozwiązanie statyczne. Tymczasem w 1929 r. E. Hubble opublikował przełomową w kosmologii pracę, w której wykazał, że istnieje liniowa zależność między odległością do galaktyki (odległości te nauczono się wyznaczać niewiele wcześniej, też dzięki pracom Hubble’a) i jej prędkością wyznaczoną z dopplerowskiego przesunięcia linii widmowych. Poza najbliższymi galaktykami, które poruszają się względem nas chaotycznie ze stosunkowo niedużymi prędkościami, przesunięcie dopplerowskie występuje zawsze ku większym długościom fal (w części widzialnej widma – ku czerwieni). Prawo Hubble’a mówi, że wszystkie dostatecznie odległe galaktyki oddalają się od nas z prędkościami proporcjonalnymi do odległości. Natychmiast uznano, że to zjawisko, wykryte przecież dla niewielkiej liczby niezbyt odległych galaktyk, jest uniwersalne i oznacza, że cały Wszczęświat rozszerza się. Praca Hubble’a zrewolucjonizowała nasz pogląd na Wszczęświat. Wywołała lawinę prac teoretycznych, które, oczywiście, pokazały, że dla rozszerzającego się Wszczęświata można rozwiązać równania Einsteina bez członu kosmologicznego. Jeżeli np. cała masa Wszczęświata została kiedyś rozrzucona w olbrzymim wybuchu, to – ze względu na istnienie siły przyciągania – jej fragmenty powinny poruszać się ruchem opóźnionym, ale istnienie Wszczęświata nie wymaga żadnej siły odpychającej. Obecne rozszerzanie się Wszczęświata prowadzi do oczywistego pytania, co było na początku tej ekspansji. Ale takie pytanie oznacza, że w ogóle był jakiś początek, który możemy badać metodami przyrodniczymi. Ewolucyjne modele Wszczęświata, uwzględniające zachowanie się wypełniającej go materii, doprowadziły w latach 40. G. Gamowa i współpracowników do wniosku, że wczesny Wszczęświat musiał być bardzo gorący, a pozostałością po tej fazie powinno być izotropowe promieniowanie elektromagnetyczne wypełniające cały Wszczęświat i mające rozkład widmowy taki, jak promieniowanie ciała doskonale czarnego o temperaturze rzędu paru kelwinów. Ponadto, ponieważ we wczesnym Wszczęświecie panowały warunki przypominające wnętrze gwiazdy, powinny były tam też zachodzić reakcje jądrowe. Szybka ekspansja ochłodziła Wszczęświat, więc warunki do zachodzenia tych reakcji (głównie syntezy helu z wodoru) panowały zaledwie przez parę minut. Dokładniejsze rachunki modelowe wykazały, że 25–30% protonów powinno „zdążyć” połączyć się w jądra helu. A zatem, najpierwotniejszy budulec gwiazd to (masowo) siedemdziesiąt kilka procent wodoru i reszta hel, ze śladowymi ilościami deuteru i litu. W 1965 r. przyszło kolejne ważne odkrycie obserwacyjne. A. Penzias i R. Wilson zarejestrowali istnienie mikrofalowego promieniowania tła, dokładnie tak, jak przewidywały to modele teoretyczne. Jego temperatura wynosi 2,73 kelwina. Zauważmy, że o ile obserwacyjne odkrycie ekspansji Wszczęświata wyprzedziło prace teoretyczne, o tyle teraz nastąpiło empiryczne potwierdzenie przewidywań teoretycznych. Tak to często w nauce bywa. Również pierwotną zawartość helu należy uznać za potwierdzoną, choć nie odbyło się to poprzez jedno spektakularne odkrycie, a raczej przez znużone pomiary zawartości helu w różnych, możliwie najstarszych obiektach. Pomiary wskazują, że istotnie istnieje dolna granica pierwotnej zawartości helu, bliska 25%. Oczywiście, nie znamy wciąż odpowiedzi na wiele fundamentalnych pytań dotyczących Wszczęświata. Gwałtowny rozwój kosmologii zachodzi właśnie teraz, na naszych oczach i będzie jeszcze trwał. No, ale o tym napisze ktoś, kto podsumuje odkrycia XXI wieku.



Aktualności (nie tylko) fizyczne

Nadeszły długo oczekiwane wakacje. Wreszcie można uciec z miasta, położyć się w trawie i patrzeć, jak obłoczki leniwie wędrują po niebie. Ciepło, przyjemnie, nic nas nie goni, nie trzeba się nigdzie spieszyć. Tak, lato ma swoje dobre strony. A teraz przewracamy się na brzusek i obserwujemy łączkę. Z bliska widać każde źdźbło kołyszące się na wietrze. Mróweczki, motylki, żuczki, gąsieniczki – pełno tu tego drobiazgu. Ile ruchu, ile gwaru... nie, to nie ta bajka – zostawmy żuczki i zajmijmy się samą trawką. To dopiero cud natury. Widać to na trawkach dużych, jak bambus, ale i na małych, jak te na zdjęciu.



Zaraz, zaraz, ale czy to aby na pewno trawki? Długie na kilka mikronów, grube na kilkadziesiąt nanometrów, a włos ma grubość kilkudziesięciu mikronów. Ależ tak, to nie trawka, tylko nanorurki! Pamiętam, pisałem już o nich rok temu (*Delta* 8/1998). Nanorurka to arkusik ułożonych w sześciokątną siatkę atomów węgla, zwinięty w rurkę o średnicy od kilku do kilkadziesiąt nanometrów, zakończoną węglowymi półsferami. Ta odmiana alotropowa węgla jest bardzo intensywnie badana w laboratoriach na całym świecie. W zależności od szczegółów budowy charakteryzuje się różnorodnymi własnościami elektrycznymi oraz mechanicznymi. Tylko jak te ostatnie mierzyć?

Okazuje się, że można na nich zagrać za pomocą transmisyjnego mikroskopu elektronowego [1].

Na zdjęciu (elektronowym mikrografie) (A) widać termiczne drgania „nanotrawki” o długości $6,25 \mu\text{m}$ i średnicy $14,5 \text{ nm}$, zdjęcie (B) przedstawia rezonansowe wzbudzenie pierwszej harmonicznej (530 kHz) nanorurki, a zdjęcie (C) – drugiej harmonicznej ($3,01 \text{ MHz}$). Wartości stosunku częstości oraz położenia węzła dobrze zgadzają się z obliczeniami przeprowadzonymi dla idealnej rurki. Metoda rezonansowego wzbudzania nanorurek pozwala na precyzyjne mierzenie ich mechanicznych własności, w szczególności modułu Younga, który okazuje się być rzędu biliona paskali dla małych średnic (około 10 nm). Dla grubszych rurek wartość modułu Younga spada o rząd wielkości, co autorzy artykułu [1] tłumaczą zmianą sposobu gięcia się rurki. Zamieszczają zdjęcia nanorurki w dużym powiększeniu, na których widać powstawanie regularnych zmarszczek na ściskanej przy zginaniu stronie rurki.

Okazuje się, że takiej rurki, po jej wyskalowaniu, można użyć jako nanowagi. Wyobraźmy sobie żuczka siedzącego na końcu trawki. Obecność chrząszcza zmieni częstość rezonansową trawki, pozwalając na wyznaczenie jego masy.

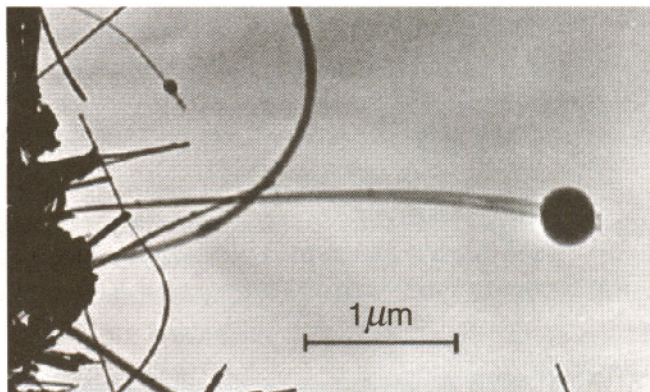
Podobnie pomiar zmiany częstości rezonansowej, spowodowanej doczepieniem do końca nanorurki węglowej kulki (zdjęcie poniżej), umożliwi określenie masy obciążenia. W tym konkretnym przypadku cząstka węgla okazała się mieć masę 22 ± 6 femtogramów ($1 \text{ fg} = 10^{-15} \text{ g}$), co zgadza się z oszacowaniem (30 fg) uzyskanym na podstawie wielkości kulki i gęstości amorficznego grafitu. Autorzy artykułu [1] proponują, aby za pomocą takiej wagi ważyć wirusy.

Wiedziałem, że dziś będzie coś o żyjątkach.

Piotr ZALEWSKI

- [1] *Electrostatic Deflections and Electromechanical Resonances of Carbon Nanotubes*, Philippe Poncharal, Z. L. Wang, Daniel Urgate, Walt A. de Heer, *Science* **283** (1998) 1513.

Zdjęcia: Walt A. de Heer
www.aip.org/physnews/graphics/html/nanobal.htm





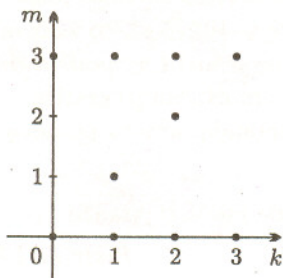
Przeprawy

Wiele starych łamigłówek ma za temat różne przeprawy przez rzekę. Chyba najsłynniejszą z nich jest – pochodzące z ósmego wieku – zadanie mnicha Alkuina: należy przewieźć na drugi brzeg rzeki wilka, kozę i kapustę łodzią, w której (oprócz wiosłującego) mieści się tylko jedno z nich; nie można przy tym zostawić wilka sam na sam z kozą ani kozy sam na sam z kapustą.

Przyjemność rozwiązania zadania Alkuina pozostawimy tym Czytelnikom, którzy go wcześniej nie znali, a sami zajmiemy się inną – również niezłe znaną – łamigłówką: o kanibalach i misjonarzach.

Sytuacja jest następująca: trzech misjonarzy i trzech kanibale chcą przepłynąć się na drugi brzeg rzeki. Mają łódkę, która za jednym razem może przewieźć najwyżej dwie osoby. Jeśli w pewnym momencie na którymkolwiek brzegu rzeki kanibali będzie więcej od misjonarzy, to misjonarze zostaną zabici i zjedzeni. Czy cała szóstka może się bezpiecznie przepłynąć na drugi brzeg?

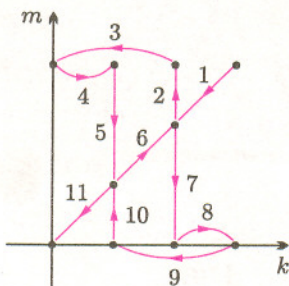
Rozważmy wszystkie możliwe stany liczebności misjonarzy i kanibali na tym brzegu, z którego wyrusza przeprawa. (Każdemu takiemu stanowi odpowiada – jednoznacznie wyznaczone! – liczba kanibali i liczba misjonarzy na drugim brzegu, więc nie musimy oddzielnie rozważać, co dzieje się u celu przeprawy.) Oznaczmy przez m liczbę misjonarzy, a przez k – liczbę kanibali. Możliwe wartości m i k to 0, 1, 2, 3, więc łącznie mamy $4 \cdot 4 = 16$ różnych stanów. Trzeba jednak wykluczyć stany, odpowiadające sytuacjom, w których na jednym z brzegów rzeki kanibali jest więcej od misjonarzy, a więc stany, w których m i k są różnymi liczbami niezerowymi. Zostaje dziesięć stanów *dopuszczalnych*; każdy z nich jest na rysunku 1 oznaczony kropką w układzie współrzędnych.



Rys. 1

Zamiast planować przeprawę, będziemy łączyć kropki strzałkami. Każda strzałka odpowiada jednemu kursowi łódki przez rzekę. Zaczynamy od prawego górnego rogu ($m = 3, k = 3$). Każda strzałka musi obrazować przewiezienie jednej lub dwóch osób przez rzekę. Trzeba też pamiętać, że po każdej strzałce skierowanej w lewo lub w dół musi nastąpić strzałka w prawo lub w górę (czyli powrót łódki z drugiego brzegu).

Metodą prób i błędów dość szybko odkrywamy, że są cztery układy strzałek, które prowadzą do rozwiązania łamigłówki. Jedno z rozwiązań przedstawia rysunek 2. Przewiezienie całej szóstki przez rzekę wymaga jedenastu kursów łódki. Pozostałe trzy rozwiązania Czytelnik z łatwością narysuje sam.



Rys. 2

Zapytajmy teraz, czy w podobnych warunkach, dysponując dwuosobową łódką, przez rzekę może się przepłynąć czterech kanibali i czterech misjonarzy. Odpowiedź tym razem jest przecząca: bezpiecznej przeprawy nie ma. Spróbujmy się przekonać o prawdziwości tego twierdzenia.

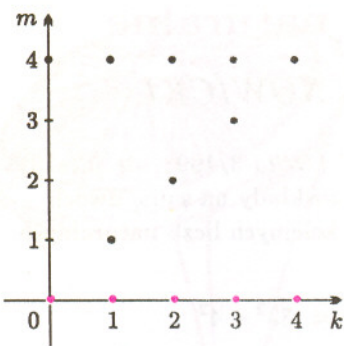
Jak poprzednio, zaznaczmy kropkami w układzie współrzędnych dopuszczalne stany liczebności kanibali i misjonarzy na jednym z brzegów rzeki (rysunek 3). Przypuśćmy, że przeprawa jednak jest możliwa. Rozważmy przeprawę, która wymaga najmniejszej liczby kursów łódki przez rzekę i wyobraźmy sobie układ strzałek odpowiadający takiej przeprawie. Przypatrzmy się bliżej pierwszej strzałce, która kończy się w jednej z kropek oznaczonych kolorem (tzn. rozważmy pierwszy moment, gdy wszyscy misjonarze znaleźli się na drugim brzegu rzeki). Nietrudno stwierdzić, że musiałaby to być jedna z trzech strzałek zaznaczonych na rysunku 4. Gdyby była to strzałka S_1 , łącząca punkty $(1, 1)$ i $(0, 0)$, to poprzednia strzałka musiałaby mieć początek w punkcie $(1, 0)$. Wtedy jednak na linii kolorowych kropek musielibyśmy znaleźć się po raz pierwszy już wcześniej – mamy więc sprzeczność. Gdyby pierwszą strzałką, kończącą się w kolorowym punkcie, była strzałka S_2 , to wówczas zamiast niej moglibyśmy równie dobrze narysować strzałkę S_1 i od razu zakończyć przeprawę, zmniejszając liczbę kursów łódki. Znowu mamy sprzeczność, bo rozważana przeprawa miała być najkrótsza.

Gdyby wreszcie pierwszą strzałką z kolorowym końcem była strzałka S_3 , to poprzednie dwa kursy łódki musiałyby odpowiadać strzałkom, które na rysunku 5 są zaznaczone kolorem. Wtedy jednak obie kolorowe strzałki, tworzące zamkniętą pętelkę, moglibyśmy z zaplanowanego schematu przeprawy usunąć i zmniejszyć liczbę kursów łódki o 2, co kłóci się z tym, że rozważamy przeprawę najkrótszą z możliwych. Po raz trzeci trafiliśmy więc na sprzeczność, a to oznacza, że najkrótsza bezpieczna przeprawa nie istnieje. Nie istnieje więc żadna bezpieczna przeprawa.

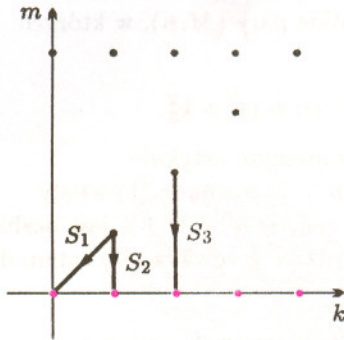
Czy jest na to rada? Okazuje się, że tak. Trzeba zwiększyć łódkę. Jeśli łódka może pomieścić trzech pasażerów, i przyjmiemy, że ani w łódce, ani na brzegu kanibale nie mogą przewyższyć liczebnością misjonarzy, to cała ósemka zdoła się bezpiecznie przepłynąć (rysunek 6).

Pięciu kanibali i pięciu misjonarzy również może się bezpiecznie przepłynąć, dysponując łódką, która mieści trzech pasażerów, lecz sześciu kanibali i sześciu misjonarzy – nie może. Wskazanie rozwiązania w pierwszym przypadku i uzasadnienie, że w drugim przypadku bezpiecznej przeprawy nie ma, pozostawiamy Czytelnikowi.

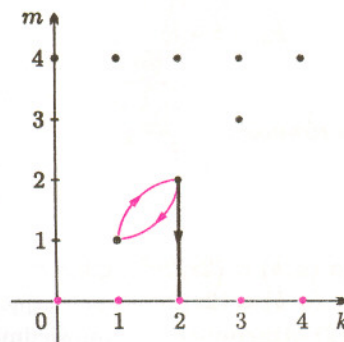
Żeby bezpiecznie przewieźć przez rzekę sześciu kanibali i sześciu misjonarzy, trzeba mieć łódkę czterosobową. I nie ma już co rozważać większych wycieczek: dowolna grupa złożona z jednakowej liczby kanibali i misjonarzy może się bezpiecznie przepłynąć przez rzekę za pomocą łódki, która mieści czterech lub więcej pasażerów. Musimy po prostu wybrać jednego kanibala i jednego misjonarza, którzy zasiądą przy wiosłach, spluną w dłonie i będą przewozić całą resztę parami – za każdym razem jednego kanibala i jednego misjonarza – tak długo, aż cel zostanie osiągnięty.



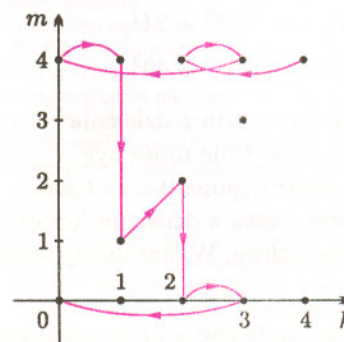
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Sumy dwóch kwadratów i kolejne liczby naturalne

Lew KURLANDCZYK i Andrzej NOWICKI

W artykule „Różne rozkłady na sumy kwadratów” (*Delta* 3/1998, str. 12–13) zajmowaliśmy się liczbami naturalnymi mającymi rozkłady na sumę dwóch kwadratów, w których występują kwadraty trzech kolejnych liczb naturalnych. Przykładem takiej liczby jest 1105. W rozkładach

$$1105 = 31^2 + 12^2 = 32^2 + 9^2 = 33^2 + 4^2$$

występują trzy kolejne liczby naturalne: 31, 32 i 33. Podobną własność mają, na przykład, liczby: 12025, 66625, 252601. Wykazaliśmy, że liczb tego typu jest nieskończenie wiele.

W tym artykule podamy pewien algorytm, za pomocą którego można znaleźć wszystkie takie liczby. Dokładniej, opiszemy wszystkie pary (M, n) , w których $M, n > 1$ są takimi liczbami naturalnymi, że

$$(1) \quad M = (n-1)^2 + k_1^2 = n^2 + k_2^2 = (n+1)^2 + k_3^2,$$

dla pewnych liczb naturalnych k_1, k_2, k_3 . We wspomnianym artykule udowodniliśmy, że liczba M spełnia (dla pewnego $n > 1$) warunek (1) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby naturalne $b > a$, że $a^2 + b^2 + 1$ jest liczbą kwadratową oraz $M = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$. Nasze zadanie sprowadza się zatem do rozwiązania następującego problemu.

Problem. Znaleźć wszystkie pary (a, b) takich liczb naturalnych, że $b > a$ i $1 + a^2 + b^2$ jest liczbą kwadratową.

Jeśli para (a, b) jest taka, jak w tym problemie, to liczby

$$(2) \quad \begin{aligned} M &= (a^2 + 1)(b^2 + 1), & n &= ab, \\ k_1 &= a + b, & k_2 &= \sqrt{a^2 + b^2 + 1}, & k_3 &= b - a \end{aligned}$$

spełniają warunek (1).

Niech $c^2 = a^2 + b^2 + 1$ i niech $t = c - b$. Wówczas z równości $(b+t)^2 = a^2 + b^2 + 1$ otrzymujemy równość

$$(3) \quad a^2 = 2bt + t^2 - 1.$$

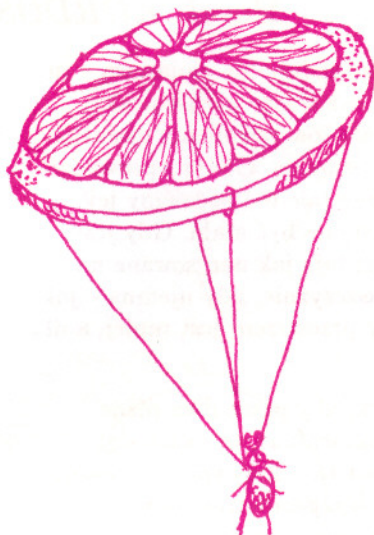
Załóżmy najpierw, że $t = 1$. Wówczas $a^2 = 2b$ i stąd $(a, b) = (2r, 2r^2)$, gdzie r jest liczbą naturalną. Dla każdego $r > 1$ mamy parę $(a, b) = (2r, 2r^2)$, spełniającą warunki podane w problemie. Podstawiając to do (2) otrzymujemy (odpowiednio dla $r = 2, 3, 4, 5$) następujące rozkłady:

$$\begin{aligned} 1105 &= 31^2 + 12^2 = 32^2 + 9^2 = 33^2 + 4^2, \\ 12025 &= 107^2 + 24^2 = 108^2 + 19^2 = 109^2 + 12^2, \\ 66625 &= 255^2 + 40^2 = 256^2 + 33^2 = 257^2 + 24^2, \\ 252601 &= 499^2 + 60^2 = 500^2 + 51^2 = 501^2 + 40^2. \end{aligned}$$

Powróćmy do równości (3) i załóżmy, że $t > 1$. Ponieważ reszta z dzielenia przez 4 liczby kwadratowej a^2 nie może być równa 3, więc t nie może być liczbą parzystą. Zatem t jest liczbą nieparzystą. Zauważmy ponadto, że t nie może być podzielne przez 3. Gdyby tak było, wówczas resztą z dzielenia liczby kwadratowej a^2 przez 3 byłaby liczba 2, a to jest niemożliwe. Wykazaliśmy więc, że $t \neq 2, 3, 4$.

Niech $t = 5$. Wtedy $a^2 = 10b + 24$, skąd łatwo wynika, że liczby a i b są parzyste. Połóżmy $a = 2v$, $b = 2u$, gdzie v, u są liczbami naturalnymi. Wtedy $v^2 = 5u + 6$, a zatem $v = 5s \pm 1$ dla pewnego naturalnego s .





Jeśli $v = 5s + 1$, to $u = 5s^2 + 2s - 1$ i stąd $(a, b) = (10s + 2, 10s^2 + 4s - 2)$. Każda para (a, b) takiej postaci, dla $s > 1$ (jeśli $s = 1$, to $a = b$), spełnia warunki podane w problemie. Podstawiając do (2) otrzymujemy (odpowiednio dla $s = 2, 3, 4, 5$) następujące rozkłady:

$$\begin{aligned} 1026745 &= 1011^2 + 68^2 = 1012^2 + 51^2 = 1013^2 + 24^2, \\ 10251025 &= 3199^2 + 132^2 = 3200^2 + 105^2 = 3201^2 + 68^2, \\ 53438905 &= 7307^2 + 216^2 = 7308^2 + 179^2 = 7309^2 + 132^2, \\ 194286625 &= 13935^2 + 320^2 = 13936^2 + 273^2 = 13937^2 + 216^2. \end{aligned}$$

Jeśli $v = 5s - 1$, to $u = 5s^2 - 2s - 1$ i stąd $(a, b) = (10s - 2, 10s^2 - 4s - 2)$. Każda para (a, b) takiej postaci, dla $s > 1$ (jeśli $s = 1$, to $a > b$), spełnia warunki podane w problemie. Podstawiając do (2) otrzymujemy (odpowiednio dla $s = 2, 3, 4, 5$):

$$\begin{aligned} 292825 &= 539^2 + 48^2 = 540^2 + 35^2 = 541^2 + 12^2, \\ 4534945 &= 2127^2 + 104^2 = 2128^2 + 81^2 = 2129^2 + 48^2, \\ 29138425 &= 5395^2 + 180^2 = 5396^2 + 147^2 = 5397^2 + 104^2, \\ 119825425 &= 10943^2 + 276^2 = 10944^2 + 233^2 = 10945^2 + 180^2. \end{aligned}$$

Z równości (3) wynika, że liczba a jest rozwiązaniem kongruencji:

$$(4) \quad x^2 \equiv -1 \pmod{t}.$$

Do dalszych rozważań potrzebne nam będą pewne dobrze znane fakty dotyczące rozwiązań tej kongruencji. Fakty te znajdziemy, na przykład, w książce Wacława Sierpińskiego *Teoria liczb* (Warszawa-Wrocław 1950) lub w książce Iwana Winogradowa *Elementy teorii liczb* (PWN, Warszawa 1954).

Wiadomo, że jeśli t jest nieparzystą liczbą pierwszą, to kongruencja (4) ma rozwiązanie dokładnie wtedy, gdy t jest postaci $4k + 1$ (wtedy rozwiązaniem jest $x = \pm(2k)!$). W ogólnym przypadku, gdy t jest dowolną liczbą naturalną nieparzystą, kongruencja (4) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy t nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą postaci $4k + 3$. Jeśli $t > 1$, to t musi mieć zatem postać

$$t = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s},$$

gdzie $n_1 > 0, \dots, n_s > 0$ oraz p_1, \dots, p_s są parami różnymi liczbami pierwszymi postaci $4k + 1$. W takim przypadku kongruencja (4) ma dokładnie 2^s rozwiązań modulo t . W przedziale $[1, 100]$ taką liczbą t jest dokładnie jedna z liczb:

$$1, 5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 97.$$

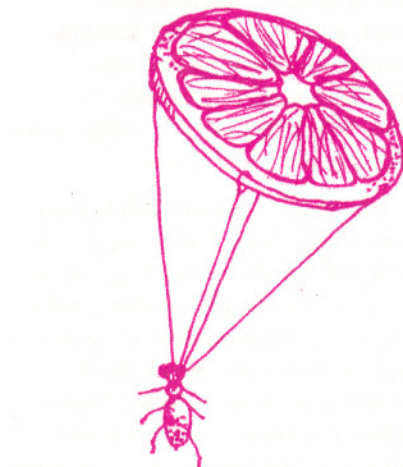
Rozpatrzyliśmy już dwa przypadki $t = 1$ i $t = 5$. Analogicznie postępujemy dla każdego (nieparzystego) t spełniającego opisane warunki.

Na zakończenie rozpatrzmy jeszcze przypadek $t = 13$. Mamy wtedy równość $a^2 = 26b + 168$, z której wynika, że liczby a i b są parzyste. Połóżmy $a = 2v$, $b = 2u$. Wtedy $v^2 = 13u + 42$, więc $v = 13r \pm 4$.

Jeśli $v = 13r + 4$, to $u = 13r^2 + 8r - 2$ i stąd $(a, b) = (26r + 8, 26r^2 + 16r - 4)$. Każda taka para (a, b) spełnia warunki podane w problemie. Podstawiając do (2) otrzymujemy (odpowiednio dla $s = 1, 2, 3$) rozkłady:

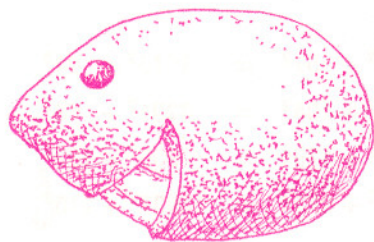
$$\begin{aligned} 1671865 &= 1291^2 + 72^2 = 1292^2 + 51^2 = 1293^2 + 4^2, \\ 62747425 &= 7919^2 + 192^2 = 7920^2 + 145^2 = 7921^2 + 72^2, \\ 571677145 &= 23907^2 + 364^2 = 23908^2 + 291^2 = 23909^2 + 192^2. \end{aligned}$$

Podobnie postępujemy, gdy $v = 13r - 4$.



Rozwiązanie zadania M 886.

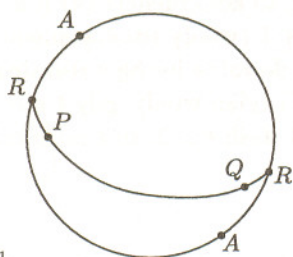
Nasz ciąg jest ciągiem rosnącym. Możemy założyć, że liczby a i b są względnie pierwsze (w przeciwnym przypadku x_i dla $i \geq 1$ będą podzielne przez $NWD(a, b)$). Wtedy a i x_k ($k \geq 1$) będą również względnie pierwsze. Ustalmy k i rozważmy liczby $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+x_k}$. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że istnieją wśród nich takie dwie liczby, np. x_p i x_q ($p > q$), że $x_k | (x_p - x_q)$. Mamy $x_p - x_q = a(x_{p-1} - x_{q-1})$, skąd wynika, że również $x_k | (x_{p-1} - x_{q-1})$ (bo $NWD(a, x_k) = 1$). Zmniejszając dalej wskaźniki w podobny sposób, przekonamy się w końcu, że $x_k | (x_{k+p-q} - x_k)$, skąd wynika, iż $x_k | x_{k+p-q}$, czyli że x_{k+p-q} jest liczbą złożoną. Ponieważ w naszym rozumowaniu k było dowolne, więc teza jest udowodniona.



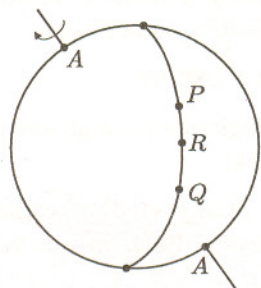
Geometria jednorodna opisuje przestrzeń (wszystko jedno iluwymiarową – tu będzie stałe najprostszy do obserwacji wymiar 2) w każdym miejscu taką samą. Oznacza to tyle, że jeśli wokół dwóch jej punktów weźmiemy małe kółeczka (ogólnie – kulki), to okażą się one nieodróżnialne. Gauss wprowadził ważne pojęcie rozróżniające te geometrie: krzywiznę (ale nie będziemy jej teraz definiować) – dla geometrii jednorodnej musi ona być stała. Gdy jest dodatnia, to kółeczka, o których była mowa, wyglądają jak narysowane na sferze (powierzchni kuli), gdy zerowa – jak na płaszczyźnie, gdy ujemna – jak na siodło. Widać więc, że dla dodatniej krzywizny przestrzeni jest mniej, a dla ujemnej – więcej niż na płaszczyźnie.

Jeżeli do jednorodności dorzucimy jeszcze warunek, aby przez dwa różne punkty przechodziła tylko jedna prosta (linia nieskracalna), to okaże się, że takich geometrii jest trzy. Najbardziej znana jest ta o krzywiznie zerowej, naukowo zwana paraboliczną: jest to zwykła, szkolna geometria nosząca powszechniej znaną nazwę *euklidesowa*, od imienia matematyka, który ją w IV w.p.n.e. skodyfikował. Druga w kolejności pojawiła się na świecie geometria hiperboliczna, bardziej znana jako geometria *Bolyai–Lobaczewskiego*, od nazwisk matematyków, którzy około roku 1830 uparli się przy jej istnieniu. Trzecia wreszcie to geometria eliptyczna, czasami wiązana z nazwiskiem Riemanna, gdyż on stworzył całą mnogość różnych geometrii, wśród których i ona się znajdowała. Tutaj zajmiemy się nią właśnie, a raczej sposobami poglądowego zapoznania się z niektórymi jej twierdzeniami. Poglądowo, to znaczy przez oglądanie modelu, czyli struktury zachowującej się jak płaszczyzna eliptyczna, ale zbudowanej z dobrze nam znanej geometrii euklidesowej.

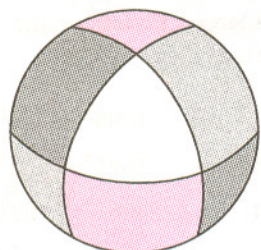
Skoro płaszczyzna eliptyczna jest lokalnie taka, jak sfera, to model zbudujemy ze sfery. Sama sfera nie jest modelem płaszczyzny eliptycznej. Łatwo się o tym przekonać, gdy zauważy się, że liniami nieskracalnymi na sferze są okręgi wielkie (czyli takie, których płaszczyzna przechodzi przez środek sfery), a przez punkty antypodyczne (czyli na końcu jednej średnicy) można przeprowadzić nie jeden, lecz dowolnie wiele takich okręgów (czyli prostych w geometrii sfery). Model płaszczyzny eliptycznej robi się ze sfery, właśnie sklejając końce każdej średnicy. Oczywiście, operacji takiej nie da się przeprowadzić fizycznie – mówi się wobec tego, że płaszczyzna eliptyczna nie jest zanurzalna w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Jak jednak wobec tego obejść coś, czego nie ma?



Rys. 1



Rys. 2



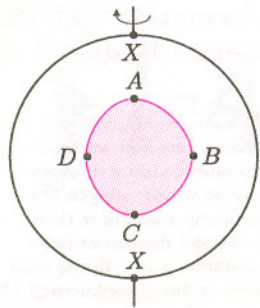
Rys. 3

Model, którym się posłużymy, będzie zbudowany ze sfery, której położenie i rozmiar tak będą dobrane do rozstawu naszych źrenic, że widzieć będziemy dokładnie jej połowę. Z każdej pary punktów antypodycznych będziemy widzieli dokładnie jeden (P i Q na rysunku 1), z wyjątkiem punktów widzianych na brzegu półsfery – te będziemy widzieli „w dwóch osobach” (na rysunku A i R). Oto natychmiastowe spostrzeżenia, czyli twierdzenia geometrii eliptycznej:

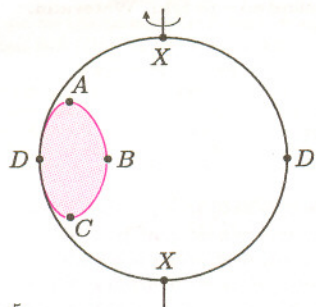
- prosta jest zbudowana tak jak okrąg (można po niej chodzić w kółko: gdy znajdziemy się – idąc w stronę od P do Q – w punkcie R z prawej strony, będziemy tym samym punkcie R z lewej strony i idąc dalej znów dojdziemy do P);
- cała płaszczyzna eliptyczna leży po jednej stronie prostej, inaczej: prosta nie rozcina płaszczyzny (faktycznie, znajdując się nad prostą PQ możemy dojść do punktu A u góry, czyli na dole, i znaleźć się poniżej prostej PQ);
- dwie różne proste mają dokładnie jeden punkt wspólny (bo na sferze dwa okręgi wielkie przecinają się w punktach antypodycznych).

Odległość w naszym modelu mierzy się tak jak na sferze, czyli nitką łączącą punkty z tej strony, z której jest bliżej (albo nie dalej). Tak więc odległość punktów P i Q z rysunku 1, to ten z łuków, który zawiera punkt R . Mamy zatem kolejne twierdzenie:

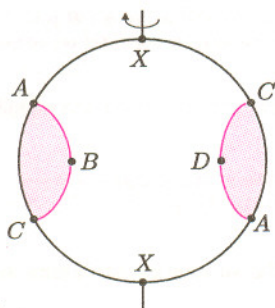
– proste na płaszczyźnie eliptycznej (mierzone w jednostkach równych promieniowi sfery) mają długość π .



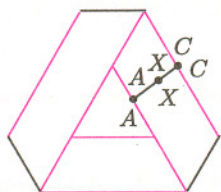
Rys. 4



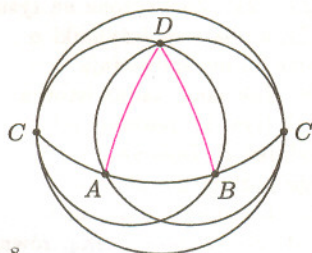
Rys. 5



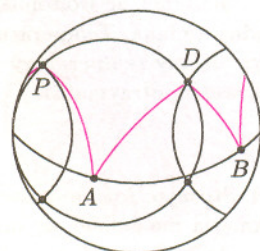
Rys. 6



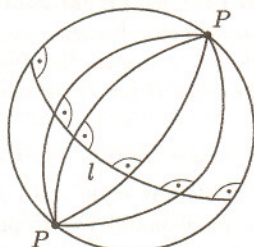
Rys. 7



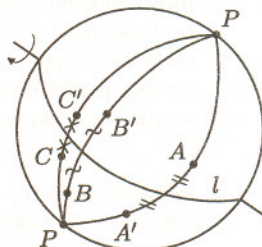
Rys. 8



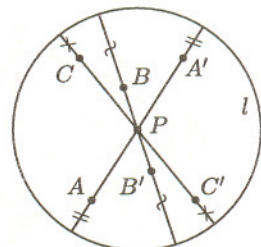
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

Przy okazji można zobaczyć następną ciekawą własność naszego modelu – możemy go, mianowicie, obracać względem dowolnej osi przechodzącej przez środek sfery: gdy jedne punkty będą znikać z naszego pola widzenia, równocześnie pojawią się ich bracia bliźniacy, czyli antypody; w ten sposób stale będziemy widzieli całą płaszczyznę eliptyczną. Zastosowanie tego udogodnienia prezentuje rysunek 2, gdzie przez obrót tego, co widać na rysunku 1, przekonujemy się, że łuk prostej PQ , zawierający punkt R , jest tego samego rodzaju, co łuk go nie zawierający. Proponuję Czytelnikowi, aby zechciał przez odpowiednie obracanie konfiguracji z rysunku 3 przekonać się, że – trzy proste nie przechodzące przez jeden punkt rozcinają płaszczyznę na cztery trójkąty.

Bardzo dziwną własność płaszczyzny eliptycznej prezentują rysunki 4–7. Oto fabuła. Wycięliśmy w płaszczyźnie eliptycznej okrągłą dziurę. Obracanie modelu przekonuje nas, że to, co zostało, to pasek sklejony w taki sposób, że jest wstęgą Möbiusa, a więc powierzchnią jednostronną. Czyli – płaszczyzna eliptyczna jest sklejeniem koła i wstęgi Möbiusa, jest zatem powierzchnią jednostronną, a więc także nieorientowalną.

Kolejne dwa rysunki pokazują, że – na płaszczyźnie eliptycznej nie jest spełniona pierwsza cecha przystawiania trójkątów.

Na rysunkach tych prostą podzielono na trzy równe części punktami A , B i C (każda z części ma więc długość $\frac{\pi}{3}$). Następnie z A i z B zatoczono okręgi promieniem $\frac{\pi}{3}$. Okręgi te przecinają się w trzech punktach: jednym jest C , a jeden z pozostałych oznaczmy D . Trójkąty ABC i ABD spełniają założenia pierwszej cechy przystawiania trójkątów, a nie spełniają jej tezy (choćby dlatego, że punkty A , B i C leżą na jednej prostej, a punkt D na niej nie leży). Rozsuwając punkty A i B (rys. 9), otrzymujemy inny przykład: trójkąty ABD i ABP – tu o tym, że nie mogą być przystające, świadczy fakt, iż łamana ABD rozcina płaszczyznę eliptyczną, a łamana ABP nie.

Ciekawych własności izometrii tej płaszczyzny (czyli przekształceń nie zmieniających odległości) jest więcej. Na przykład – każde podobieństwo płaszczyzny eliptycznej jest izometrią (każde bowiem przekształca proste na proste, a te wszystkie mają tę samą długość; skala podobieństwa musi więc być równa 1).

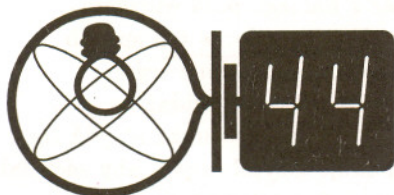
Kolejną osobliwość daje spostrzeżenie, iż – wszystkie prostopadłe do danej prostej przecinają się w jednym punkcie (rys. 10).

Bez większego trudu stwierdzamy wobec tego, że każda symetria osiowa jest symetrią środkową (rys. 11 i 12). Na koniec zadanie trudniejsze dla Czytelników zachęconych modelowym badaniem płaszczyzny eliptycznej:

– każda izometria płaszczyzny eliptycznej jest obrotem (z czego wynika w szczególności, że obracając model, dokonywaliśmy wszelkich możliwych izometrii).

Natychmiast uzyskuje się stąd morał, że – każda izometria ma punkt stały i prostą stałą.

Oczywiście, takich spostrzeżeń można poczynić jeszcze bardzo, bardzo wiele.



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1999

Przypominamy treść zadań:

274. Stała słoneczna, czyli moc promieniowania słonecznego na jednostkę powierzchni prostopadłej, jest w okolicach Ziemi równa $I = 1,35 \text{ kW/m}^2$. W próżni kosmicznej umieszczono prostopadłe do promieni słonecznych czarną płytę z materiału izolacyjnego o współczynniku przewodnictwa cieplnego równym $\lambda = 0,3 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ i grubości $d = 10 \text{ cm}$ (a pozostałych rozmiarach znacznie większych). Obliczyć numerycznie temperaturę, jaką po dłuższym czasie osiągnie każda ze stron płyty. Stała Stefana–Boltzmanna wynosi $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$.

275. Załóżmy, że siła elektromotoryczna termopary zbudowanej z przewodników A i B jest proporcjonalna do różnicy temperatur styków (jest to słuszne dla niedużych wartości tej różnicy):

$$\mathcal{E}_{AB} = \alpha_{AB}(T_1 - T_2).$$

Stałą α_{AB} przypiszemy znak dodatni wtedy, gdy w styku gorącym prąd płynie od przewodnika A do B , a ujemny w przeciwnym przypadku.

1. Udowodnić, że $\alpha_{AB} + \alpha_{BC} = \alpha_{AC}$.
2. W obwodzie składającym się z trzech przewodników A , B i C temperatura styku AB jest równa T_1 , temperatura styku BC jest równa T_2 , a temperatura styku AC jest równa T_3 . Wyznaczyć siłę elektromotoryczną takiej „termotrójki”.

274. Oznaczmy szukane temperatury przez T_1 i T_2 . Z bilansu energii otrzymujemy

$$I = \sigma(T_1^4 + T_2^4),$$

przy czym energia wypromieniowana z chłodniejszej strony musi być równa strumieniowi ciepła dopływającego od strony cieplejszej:

$$\lambda(T_1 - T_2)/d = \sigma T_2^4.$$

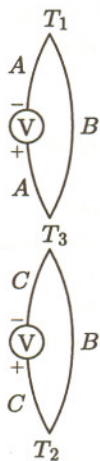
Próba rozwiązania analitycznego prowadzi do równania *bardzo* wysokiego stopnia. Analiza numeryczna daje wynik $T_1 \approx 369 \text{ K}$, $T_2 \approx 269 \text{ K}$.

275. Przyjmijmy, że styki termopary AB mają temperatury T_1 i T_3 , styki termopary BC – temperatury T_2 i T_3 , a odpowiednie woltomierze (rys. 1) mierzą siły elektromotoryczne $\mathcal{E}_{AB} = \alpha_{AB}(T_1 - T_3)$ i $\mathcal{E}_{BC} = \alpha_{BC}(T_2 - T_3)$. Zaznaczone na rysunku znaki napięć odpowiadają sytuacji, gdy $T_1 > T_3$, $T_2 > T_3$, a oba współczynniki α są dodatnie. Zetknięcie styków o jednakowej temperaturze T_3 nie spowoduje – oczywiście – żadnej zmiany we wskazaniach mierników. Tak samo żadna istotna zmiana nie nastąpi, gdy „rozciągniemy” ten wspólny styk (rys. 2); poziomy odcinek przewodu na rysunku może być wykonany np. z przewodnika B . Dokonajmy teraz przeniesienia woltomierza z górnej gałęzi obwodu do tego poziomego odcinka.

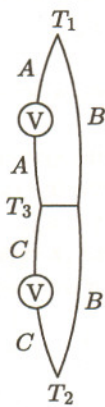
Z II prawa Kirchhoffa wynika, że przeniesiony woltomierz nie zmieni wskazania, natomiast dolny woltomierz zacznie wskazywać łączną siłę elektromotoryczną, równą sumie $\mathcal{E}_{AB} + \mathcal{E}_{BC}$. W następnym kroku usuńmy poziomy odcinek z przeniesionym woltomierzem – ponieważ i tak nie płynął tamtędy prąd (zakładamy, że woltomierze są doskonałe), więc w pozostałym obwodzie nie zajdzie żadna zmiana. Temperatura T_3 staje się w tym momencie istotna tylko dla styku AC , gdyż zmiany temperatury wzdłuż jednorodnego przewodu B nie mają znaczenia. Jak widać, otrzymaliśmy rozwiązanie punktu 2:

$$\mathcal{E} = \alpha_{AB}(T_1 - T_3) + \alpha_{BC}(T_2 - T_3).$$

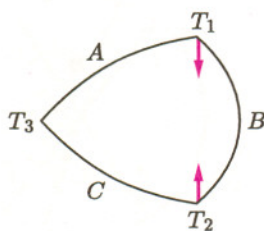
Położmy teraz $T_1 = T_2$ i zetknijmy styki AB i BC (rys. 3). Stosując rozumowanie odwrotne do powyższego, przekonamy się, że podczas zetknięcia nie zmieni się siła elektromotoryczna w części AC , natomiast część B można odrzucić – czyli pozostaje termopara AC . Wynika stąd natychmiast dowód punktu 1.



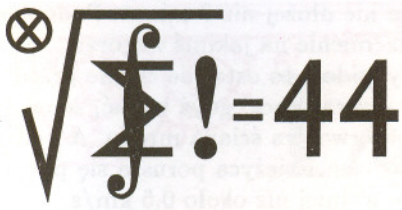
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Przypominamy treść zadań:

377. Rozważamy wielomian $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ zmiennej zespolonej z , o współczynnikach zespolonych. Dowieść, że jeżeli wszystkie pierwiastki wielomianu $P(z)$ są liczbami zespolonymi o module 1, to również wszystkie pierwiastki wielomianu $Q(z) = z^3 + |a|z^2 + |b|z + |c|$ są liczbami zespolonymi o module 1.

378. Wykazać, że dla każdej liczby naturalnej k istnieją dwie kolejne liczby naturalne, z których każda ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

377. Niech z_1, z_2, z_3 będą pierwiastkami wielomianu $P(z)$; $|z_j| = 1$, więc $1/z_j = \bar{z}_j$ dla $j = 1, 2, 3$. W myśl wzorów Viète'a: $a = -(z_1 + z_2 + z_3)$, $c = -z_1 z_2 z_3$,

$$b = z_2 z_3 + z_3 z_1 + z_1 z_2 = -(c/z_1) - (c/z_2) - (c/z_3) = -c(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) = \bar{a}c.$$

Zatem $|c| = 1$, $|b| = |a| \leq 3$; wielomian $Q(z)$ ma postać $Q(z) = z^3 + |a|z^2 + |a|z + 1$; jednym z jego pierwiastków jest liczba -1 .

Dzieląc $Q(z)$ przez dwumian $z + 1$, dostajemy trójmian kwadratowy

$T(z) = z^2 + dz + 1$, gdzie $d = |a| - 1$. Skoro $|a| \leq 3$, to $|d| \leq 2$, więc wyróżnik trójmianu $T(z)$, równy $d^2 - 4$, nie jest dodatni. Wobec tego pierwiastki trójmianu $T(z)$ tworzą parę liczb zespolonych sprzężonych (w szczególnym przypadku może to być podwójny pierwiastek rzeczywisty). Moduły tych pierwiastków są równe, a ich iloczyn wynosi 1 (wzór Viète'a). Stąd wniosek, że oba te pierwiastki są liczbami zespolonymi o module 1.

378. Wybierzmy dowolnie $2k$ różnych liczb pierwszych p_1, \dots, p_{2k} . Liczby $m = p_1 \cdot \dots \cdot p_k$ oraz $n = p_{k+1} \cdot \dots \cdot p_{2k}$ są względnie pierwsze, więc istnieją liczby całkowite x, y spełniające równanie $mx - ny = 1$. Skoro $m, n \geq 2$, liczby mx i ny są jednocześnie dodatnie lub ujemne. Tak więc $|mx|$ i $|ny|$ są dwiema kolejnymi liczbami naturalnymi, a każda z nich ma co najmniej k różnych dzielników pierwszych.

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 369 (WT=1,99) i 370 (WT=3,17) z numeru 11/1998

Witold Bednarek	- Łódź	44,99
Zbigniew Skalik	- Pyskowice	44,04
Witold Bednorz	- Tychy	43,87
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	42,19
Bogumiła Piotrowska	- Zielona Góra	38,82

Witamy nowych członków Klubu 44 M: pana Bednarka i pana Skalika.



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 886. Niech a, b, x_0 będą liczbami naturalnymi. Udowodnić, że w ciągu (x_i) , takim, że $x_n = ax_{n-1} + b$ ($n \geq 1$), jest nieskończenie wiele liczb złożonych. Rozwiązanie na str. 11

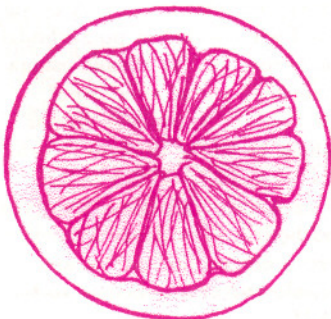
M 887. Wykazać, że jeśli żadna z liczb $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 1)d$ nie dzieli się przez n , to liczby d i n nie są względnie pierwsze. Rozwiązanie na str. 3

M 888. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej m istnieje liczba podzielna przez m , której zapis dziesiętny zawiera tylko zera i jedyńki. Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 503. Krótkowidz po zdjęciu okularów może czytać książkę, trzymając ją w odległości 16 cm od oczu. Jaka jest zdolność skupiająca okularów? Przyjąć, że normalna odległość dobrego widzenia wynosi 30 cm. Rozwiązanie na str. 4

F 504. Na dnie akwarium, napełnionego wodą do wysokości 10 cm, umieszczono punktowe źródło światła. Na powierzchni wody unosi się okrągła nieprzezroczysta płytka tak, że jej środek znajduje się pionowo nad źródłem światła. Jaki jest najmniejszy promień płytki, przy którym ani jeden promień światła nie może wyjść przez powierzchnię wody? Współczynnik załamania woda-powietrze wynosi 1,33. Rozwiązanie na str. 2



Patrz w niebo

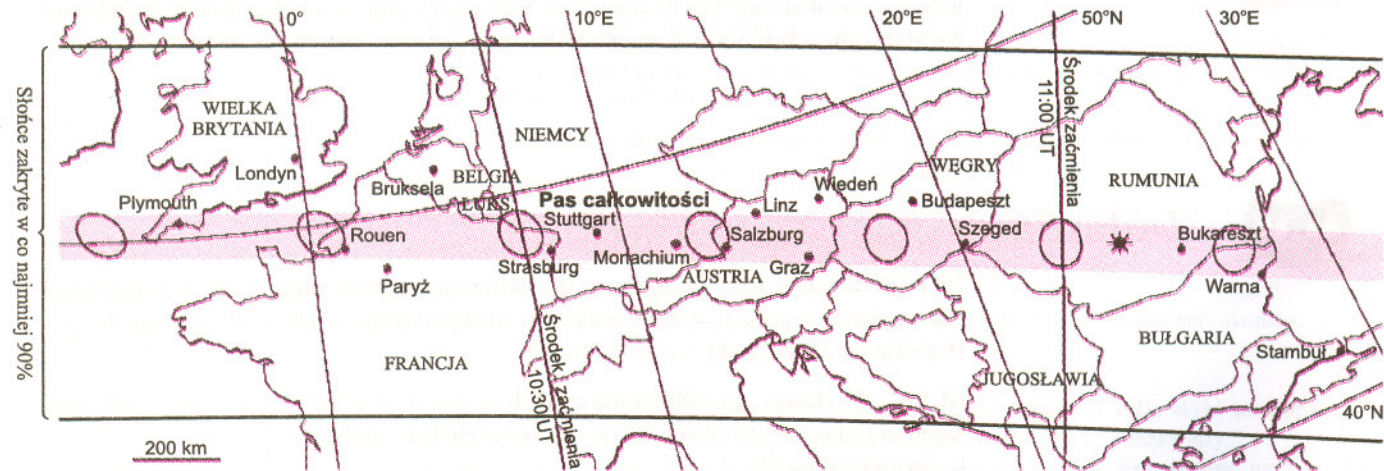
Zaćmienie Słońca będzie wprawdzie za miesiąc, ale już dziś opowiedzmy sobie o zaćmieniach. Wiadomo, że zaćmienie Słońca to skutek przesłonięcia go przez Księżyc. Jest on w niezłym przybliżeniu tyle razy mniejszy od Słońca, ile razy jest bliżej Ziemi niż ono. Dlatego kątowe rozmiary jego tarczy są bardzo zbliżone do rozmiarów tarczy Słońca. Ani okołoziemiska orbita Księżyca, ani okołosłoneczna orbita Ziemi nie jest dokładnie kołowa, wskutek czego rozmiary tarcz obu ciał lekko się zmieniają. Czasem Księżyc zakrywa tarczę Słońca z nadmiarem i mamy zaćmienie całkowite, a w innym przypadku nie jest w stanie zakryć jej całkowicie i mamy zaćmienie obrączkowe.

W sierpniu będzie akurat zaćmienie całkowite. Dostarcza ono niezapomnianych wrażeń, zupełnie innych niż zaćmienie częściowe lub obrączkowe. Podczas tych ostatnich dwóch robi się wprawdzie nieco mroczno, ale właściwie nie ma powodów do włączania oświetlenia (w każdym razie kodeks drogowy nic o tym nie mówi). Natomiast zaćmienie całkowite to zapadnięcie czarnej nocy, tym straszniejsze, że nagle. Zwierzęta lepiej od człowieka wyczuwają, że w przyrodzie dzieje się coś niezwykłego i szykują się do snu, z którego zresztą zaraz będą się budzić, bo

faza całkowitości trwa nie dłużej niż 7 minut. Podobno gdy oczekuje się na zaćmienie na jakimś wzgórzu, z którego jest rozległy widok, to ostatnie chwile przed zaćmieniem są wręcz przerażające, gdyż widać, że od horyzontu pędzi na obserwatora ściana mroku. A pędzi rzeczywiście, ponieważ cień Księżyca porusza się po powierzchni Ziemi nie wolniej niż około 0,5 km/s. Potem zapada jakby normalna noc, gdyby nie to, że w miejscu Słońca widać czarny krąg otoczony promienistą poświatą, którą jest korona słoneczna, normalnie niewidoczna w blasku Słońca. Przed zbudowaniem koronografu właśnie całkowite zaćmienia Słońca stwarzały jedyną możliwość obserwowania jego korony i dlatego organizowano specjalne ekspedycje do miejsc, z których zaćmienie miało być widoczne.

Zaćmienie całkowite jak nagle następuje, tak i nagle się kończy. Jest to moment szczególnie niebezpieczny dla tych, którzy oglądali koronę przez jakąś lunetę. Już pierwszy skrawek tarczy Słońca wyłaniający się zza Księżyca może swym blaskiem spowodować poważne uszkodzenie oka. A szkoda by było, gdyby wycieczka w celu obejrzenia tak rzadkiego zjawiska miała zakończyć się wypadkiem. Życzę obserwatorom dobrej pogody!

Tomasz KWAST



Przebieg całkowitego zaćmienia Słońca w Europie 11 sierpnia 1999 r. Owale oznaczają kształt cienia Księżyca. Czas trwania fazy całkowitości wynosi od 2 min na zachodzie Europy do 2 min 23 s w Rumunii – tu zaćmienie będzie najdłuższe. Momenty środka zaćmienia podano w czasie uniwersalnym (UT). Jeżeli w danym kraju obowiązuje czas środkowoeuropejski, do UT należy dodać 1 h, jeżeli letni – dodać 2 h.

Lipiec

Wysoko w kierunku południowym widzimy gwiazdozbiór Herkulesa, a w nim gołym okiem, choć z trudem, najjaśniejszą na północnym niebie gromadę kulistą gwiazd oznaczoną symbolem M 13. Kilkaset gromad kulistych otacza dość równomiernie naszą Galaktykę, a dwie najwspanialsze znajdują się – niestety – na niebie południowym. Każda to skupisko w przybliżeniu miliona gwiazd, zachowujące swoją tożsamość od najdawniejszych czasów. Gromady kuliste należą bowiem do najdawniejszych obiektów Galaktyki i innych galaktyk. M 13 leży w odległości 6,4 kpc od nas.

Dla niecierpliwych prezentujemy już teraz mapkę przebiegu całkowitego zaćmienia Słońca, które nastąpi 11 sierpnia.

Widać je będzie z miejsc tak bliskich, że warto choćby na ten jeden dzień pojechać do Austrii czy na Węgry i to niecodzienne zjawisko zobaczyć na własne oczy. A co się tyczy lipca, to Wenus jest w Lwie i widać ją po zachodzie Słońca w zachodniej stronie nieba; 14 VII Wenus osiąga największą jasność. Marsa również widać wieczorem w zachodniej części nieba w Pannie. Natomiast Jowisz i Saturn są w Baranie i planety te widać dopiero w drugiej połowie nocy. Nów Księżyca wypada 13 VII, a pełnia 28 VII – wtedy też nastąpi częściowe zaćmienie Księżyca, ale w Polsce niewidoczne, bo będzie to podczas naszego dnia. Księżyc zbliży się jeszcze mocno do Aldebarana 10 VIII (i nawet zakryje go, ale w Europie będzie to też za dnia) i do Regulusa 15 VII.

T.K.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 x^{3/2} dx dy &= \int_{-1}^1 \left. \frac{2}{5} x^{5/2} \right|_{x=y^2}^1 dy = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{5} |y|^5 \right) dy = \\ &= \left(\frac{2y}{5} - \frac{y^5 |y|}{15} \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= \frac{2}{5} - \frac{1}{15} + \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{4}{5} - \frac{2}{15} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (17')

Wyjaśnienie oszustwa (17):

Pierwsza całka została błędnie obliczona: $(y^2)^{5/2}$ nie jest równe y^5 , lecz $|y|^5$.

Poprawny rachunek powinien wyglądać następująco:

GRY (4)

Zanim poznasz dużo ciekawych gier, musisz się uzbroić w trochę cierpliwości, Drogi Czytelniku. Dziś dalej o grze *Nim*. Może pomyślisz, że gra *Nim* jest pępkiem świata, skoro poświęcamy jej tyle uwagi, ale tak jest w istocie: gra *Nim* jest pępkiem świata, oczywiście świata gier. Dopiero gdy znajdziesz się w tym świecie, będziesz mógł w pełni docenić to, o czym mówimy poniżej.

Wprowadźmy do gry *Nim* drobną modyfikację. Oprócz stosów, które brały udział w grze na dotychczasowych zasadach, i które będziemy w razie potrzeby nazywać stosami zwykłymi, wprowadźmy stos rezerwowy, rządzący się następującymi regułami. Na początku rozgrywki znajduje się w nim pewna liczba bierek. W trakcie rozgrywki można wykonywać ruchy na dotychczasowych zasadach, tzn. zabierać bierki ze stosów zwykłych – te bierki nie biorą udziału w dalszej grze. Pojawia się jednak nowy rodzaj dozwolonych posunięć: można przełożyć dowolną liczbę bierek ze stosu rezerwowego na dowolny stos zwykły, który dotąd nie został zlikwidowany. Wygrywa ten gracz, który zabierze wszystkie bierki z ostatniego stosu zwykłego. Reguła mówiąca, że zlikwidowane stosy nie mogą się odradzać, ma charakter czysto porządkowy i jest bez znaczenia dla istoty naszych rozważań.

Jak wygląda strategia wygrywająca w tak zmodyfikowanej grze? Jest taka sama jak w zwykłej grze *Nim*! Należy dążyć do podawania przeciwnikowi pozycji o dwójkowej sumie bierek w stosach zwykłych równej 0. To, co dzieje się ze stosem rezerwowym, jest zupełnie bez znaczenia. Istotne jest tylko to, że reguły gry nie pozwalają, aby gra toczyła się w nieskończoność. Stos rezerwowy daje możliwość wykonywania ruchów „do tyłu”. Nie wpływa to w niczym na fakt, że każdy ruch zmienia dwójkową sumę bierek w stosach zwykłych – jeśli więc podamy przeciwnikowi pozycję o sumie 0, to w odpowiedzi otrzymamy pozycję o sumie dodatniej, niezależnie od tego, czy przeciwnik skorzystał ze stosu rezerwowego, czy też nie. Natomiast zawsze mamy możliwość przejścia od pozycji o sumie dodatniej do pozycji o sumie 0 – dokładnie taką samą, jaka istniała w zwykłej grze *Nim*. Jeżeli jesteśmy na pozycji

wygrywającej, to stosu rezerwowego używać nie musimy! Niech go używa przeciwnik, i tak mu to nie pomoże. Kiedy tylko przełoży on bierki ze stosu rezerwowego na zwykły, to w kolejnym ruchu możemy te bierki odłożyć na bok, niejako cofając ruch wykonany przez przeciwnika.

Popatrzmy na przykład:

7 12 4 Rezerwowy : 5.

Ponieważ $7 +_2 4 = 3$, więc wygrywające posunięcie polega na zabraniu 9 bierek ze stosu drugiego, co prowadzi do pozycji

7 3 4 Rezerwowy : 5.

Jest to jedyne wygrywające posunięcie polegające na usuwaniu bierek ze stosów zwykłych. Jak już powiedzieliśmy, stosu rezerwowego możemy nie dotykać, ale jeśli chcemy... $12 +_2 4 = 8$, to możemy przełożyć 1 bierkę na pierwszy stos, prowadząc do pozycji

8 12 4 Rezerwowy : 4.

Natomiast $7 +_2 12 = 11$, skąd wynika, że wygrywający ruch z użyciem trzeciego stosu nie jest możliwy, gdyż wymagałby dołożenia 7 bierek, a w stosie rezerwowym jest ich tylko 5.

A co by było, gdyby graczowi usuwającemu bierki ze stosu zwykłego przyznać prawo wyboru: wyłączyć bierki z dalszej gry (czyli tak jak dotychczas) lub umieścić je w stosie rezerwowym? Pozornie wydaje się, że taka gra mogłaby się ciągnąć w nieskończoność. Łatwo bowiem wyobrazić sobie sytuację, kiedy jeden z graczy przekłada bierkę ze stosu rezerwowego na zwykły, drugi gracz tę samą bierkę przekłada z powrotem na stos rezerwowy, pierwszy na zwykły, drugi znowu na rezerwowy itd. Taka rozgrywka nie skończy się nigdy. Ale to tylko pozory! W praktyce bowiem ten z graczy, który jest na pozycji wygrywającej, będzie dążył do zakończenia gry i nie będzie przekładał bierek na stos rezerwowy, tylko usuwał je z gry. Jego przeciwnik nie ma możliwości przedłużania gry w nieskończoność. Gra zawsze się zakończy, o ile gracze będą grać w sposób przemyślany.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl