

Trwa jubileusz XXV lat *Delty*:  
 6 czerwca 1973 roku powołano redakcję *Delty*,  
 8 grudnia odbyło się pierwsze posiedzenie Komitetu Redakcyjnego  
*Delty*, na którym przedstawiono próbny numer miesięcznika,  
 1 stycznia 1974 roku ukazał się w kioskach w nakładzie 30 tys.  
 egzemplarzy, w cenie 5 zł, pierwszy numer *Delty*.

XXV lat powinien zamknąć numer 300 miesięcznika, jednak w okresie parcelacji RSW straciliśmy pięć numerów, tak więc dopiero ten numer zamyka jubileusz.

W tym numerze artykułem Karola Borsuka kończymy cykl

*Stara Delta*.

## SPIS TREŚCI NUMERU 5(300)

Ścisłkanie sztywnej ameby <i>Piotr Chrzastowski</i>	str. 1
O geometrii wewnętrznej <i>Karol Borsuk</i>	str. 2
Kąć olimpijski	str. 6
Mała Delta	str. 8
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str.10
Twierdzenie Cevy dla wielokątów <i>Tomasz Żukowski</i>	str.11
Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Maj	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:  
*Środek ciężkości czy masy?*

Okładki i ilustracje wykonała  
*Anna Ludwicka*

Wybór artykułów w języku angielskim  
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,  
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.  
 Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:  
 Andrzej Białynicki-Birula  
 Bogdan Cichocki  
 – wiceprzewodniczący  
 Krzysztof Ciesielski  
 Jan A. Gaj  
 Piotr Goldstein  
 Tomasz Hofmökł  
 Andrzej Hryniewicz  
 Wiesław A. Kamiński  
 Marta Kicińska-Habior  
 Krzysztof Maślanka  
 Andrzej Mąkowski  
 Zdzisław Pogoda  
 Feliks Przytycki  
 Michał Różycka  
 Konrad Rudnicki  
 Zbigniew Semadeni  
 Grzegorz Sitarski  
 Andrzej Woszczyk  
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
 Wiktor Bartol  
 Krzysztof Biesaga  
 Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.  
 Krystyna Kordos – sekr. red.  
 Marek Kordos – red. nac.  
 Tomasz Kwast  
 Anna Ludwicka  
 Anna Rudnik  
 Paweł Strzelecki  
 Joanna Udalska  
 Anna Wojtyra  
 Piotr Zalewski

Adres Redakcji:  
 ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa  
 tel. 843-02-41(-2) wewn. 21  
 PAWELST@MIMUW.EDU.PL  
 Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
 Wydrukowano  
 w Drukarni Naukowo-Technicznej  
 w Warszawie, ul. Mińska 65.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Żuga 12 (tel. 834-65-21)  
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres  
 prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena  
 jednego numeru w 1999 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu  
 prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)  
 cena numeru w 1999 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą  
 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje  
 dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na III kwartał 1999 r. wynosi 9 zł.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe  
 „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa  
 egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się  
 pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
- Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty  
 krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A.  
 Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa  
 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28,  
 czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>.
- Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę
 

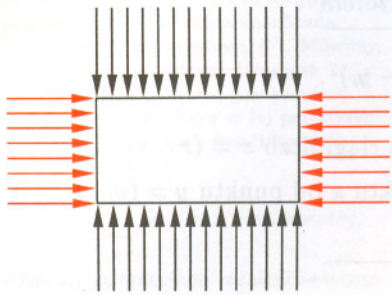
krajową	ze zleceniem za granicę		
5 XII	20 XI	na I	kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II	kwartał,
5 VI	20 V	na III	kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV	kwartał.
- Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,  
 realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem  
 otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.  
 Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71  
 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także  
 tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numerzy archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

# Ściskanie sztywnej ameby

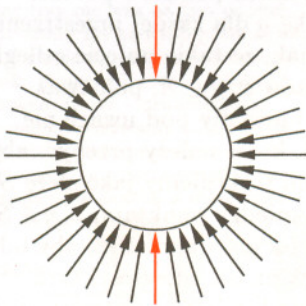
Piotr CHRZĄSTOWSKI



Rys. 1

Wyobraźmy sobie prostopadłościenny klocek, na którego boczne ścianki będziemy działali identycznymi, równomiernie rozłożonymi siłami (kto chce, niech wyobrazi sobie ciśnienie wywierane na ścianki klocka przez otaczający go ośrodek). Dość oczywiste jest, że siły te wzajemnie się zniosą. W każdym bowiem prostopadłym przekroju otrzymamy prostokąt, a jeżeli działamy jednakową siłą na wszystkie punkty obwodu prostokąta (rys. 1), to wypadkowa będzie równa zero. Każdy wektor przyłożony do dowolnego punktu ma na przeciwległym boku swojego kontrpartnera, który anuluje jego działanie.

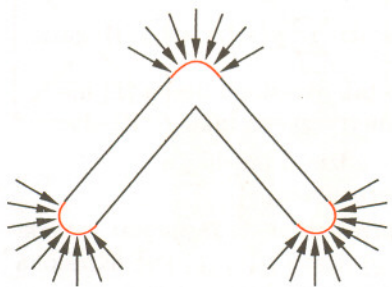
Bez trudu dojdziemy do wniosku, że podobnie będzie dla walca: w przekroju otrzymamy okrąg, w którym przeciwległe wektory będą znosiły swoje działanie (rys. 2). Dla trójkątnego przekroju siły też się wzajemnie zniosą, ale to już nie jest tak oczywiste.



Rys. 2

Zapytajmy, co się stanie, jeśli zaczniemy eksperymentować z powierzchnią przekroju, próbując ją deformować tak, aby uzyskać niezerową wypadkową identycznych sił równomiernie przyłożonych do brzegu z zewnątrz. Wyobraźmy sobie np. figurę w kształcie bumerangu, jak na rysunku 3. Wzdłuż jej prostoliniowych odcinków następuje znoszenie się sił. Pozostają trzy łuki: jeden z góry i dwa z dołu. Czy działanie połączonych sił oddolnych nie może przeważać działania siły przyłożonej od góry?

Okazuje się, że nie! Jakkolwiek będziemy się starali wykrzywić kształt brzegu, zawsze wypadkowa sił wynosi zero. Jest to wniosek ze znanych twierdzeń rachunku całkowego, związanych z nazwiskami Ostrogradzkiego, Gaussa i Stokesa. Twierdzenia są ogólniejsze, ale ten przypadek szczególnie jest na tyle interesujący, że możemy się pokusić o jego niezależne uzasadnienie.

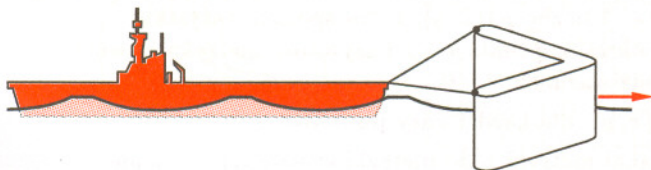


Rys. 3

Świat byłby piękny, gdyby udało się nam taki kształt znaleźć. Mielibyśmy bowiem bardzo proste *perpetuum mobile*. Wystarczyłoby wykonać, na przykład z drewna, klocek o wymyślonym przez nas przekroju i włożyć go do wody (o ile nie wyrwałoby go nam z rąk wcześniej ciśnienie atmosferyczne!). Siły pionowe, spowodowane ciśnieniem hydrostatycznym, byłyby równoważone grawitacją. Na każdej głębokości otrzymalibyśmy natomiast wymyślony przez nas kształt. Działałaby na niego wypadkowa siła proporcjonalna do głębokości zanurzenia. Skumulowane z wszystkich głębokości siły skierowane byłyby w jednym kierunku i nasz klocek zacząłby się w tym kierunku przesuwać. Już sobie wyobrażam holowniki, które ciągnęłyby statki, jak na rysunku 4. I wyobrażam sobie, ile śmiechu byłoby, gdyby się taki klocek urwał!

Ale *perpetuum mobile* nie istnieje, więc okazji do śmiechu musimy szukać gdzie indziej.

\* \* \*



Rys. 4

Tym sposobem udowodniliśmy, że dla dowolnej gładkiej powierzchni  $S$ , która jest brzegiem pewnego obszaru przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , całka z pola wektorów normalnych do  $S$  względem miary powierzchniowej jest równa zero, albo, jeśli kto woli (i lubi) zapis symboliczny,

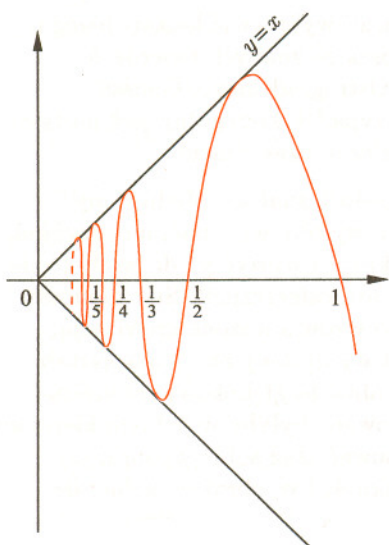
$$\int_S \mathbf{n}(x) d\sigma(x) = 0.$$

Drogi Czytelniku: jeśli akurat jesteś studentem drugiego roku matematyki lub byłeś nim jakiś czas temu i od tamtej pory twierdzenie Stokesa uważasz za, delikatnie mówiąc, średnio przyjemne i średnio zrozumiałe – w razie potrzeby myśl o zanurzonego klocku i wypadkowej siły, a nie o miarach, całkach, powierzchniach itp.

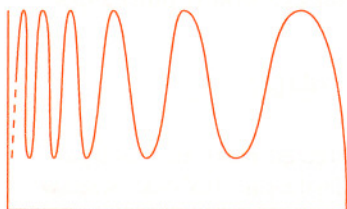
Karol BORSUK

W artykule obok profesor Karol Borsuk, twórca teorii retraktów (patrz *Delta* 3/1979) i teorii kształtu (patrz *Delta* 5/1980), przedstawia nowe podejście do problematyki geometrii wewnętrznej, dotychczas mieszczącej się w ramach geometrii różniczkowej i riemannowskiej.

*Delta* ma zaszczyt przedstawić pierwszą pracę z zakresu stworzonej w ten sposób problematyki. Bardziej szczegółowe opracowanie podanych wyników ukaże się w Biuletynie Polskiej Akademii Nauk (seria nauk matematycznych) w 1981 roku.



Ta przestrzeń nie spełnia warunku (1.4). Długości kolejnych fragmentów „sinusoidy” pomiędzy dwoma kolejnymi grzbietami są większe od odpowiednich wyrazów szeregu harmonicznego  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$ . Z rozbieżności tego szeregu wynika, że długość widocznej na rysunku krzywej jest nieskończona.



Ta przestrzeń nie spełnia warunku (1.5), więc także nie jest geometrycznie dopuszczalna.

**1. Metryka wewnętrzna.** Podstawowym dla geometrii jest pojęcie odległości. W  $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej  $E^n$  odległość dwóch punktów  $x = (x_1, \dots, x_n)$  i  $y = (y_1, \dots, y_n)$  wyraża się wzorem

$$(1.1) \quad \varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

a w przestrzeni Hilberta  $H$ , której punktami są ciągi liczb  $x = (x_1, x_2, \dots)$  spełniające warunek  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ , odległość punktu  $x$  od punktu  $y = (y_1, y_2, \dots)$  wyraża się wzorem

$$(1.2) \quad \varrho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

Wzór (1.2) jest ogólniejszy od wzoru (1.1), ponieważ przestrzeń  $E^n$  możemy uważać za podzbiór przestrzeni  $H$ , złożony ze wszystkich punktów postaci  $x = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ . Wzór (1.2) określa metrykę  $\varrho$  dla każdej przestrzeni  $A$  będącej podzbiorem przestrzeni  $H$ . Zauważmy jednak, że takie pojęcie odległości odbiega od potocznego rozumienia odległości punktów  $x, y \in A$ , ponieważ mówiąc o odległości między  $x$  i  $y$  w przestrzeni  $A$ , bierzemy pod uwagę nie tyle liczbę  $\varrho(x, y)$ , ile długość dróg w przestrzeni  $A$ , które należy przebyć, aby od  $x$  przejść do  $y$ . Tak np., jeżeli powierzchnię Ziemi traktujemy jako sferę  $S^2$  położoną w przestrzeni  $E^3$ , to mówiąc o odległości między punktami  $x, y \in S^2$ , mamy zazwyczaj na myśli długość drogi, którą trzeba na  $S^2$  przebyć, aby od  $x$  przejść do  $y$ , a więc liczbę, która dla  $x \neq y$  jest większa od odległości tych punktów w sensie metryki  $\varrho$ . Przez łuk  $L$  łączący punkty  $x, y$  w przestrzeni  $A$  rozumiemy obraz przedziału liczbowego  $\langle 0, 1 \rangle$  przy homeomorfizmie  $s: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow L \subset A$ , zwanym przedstawieniem parametrycznym łuku  $L$  zawierającego oba punkty  $x$  i  $y$ . Przez długość tego łuku rozumiemy liczbę  $|L|$ ,

którą możemy określić jako kres górny liczb postaci  $\sum_{i=0}^k \varrho(s(t_i), s(t_{i+1}))$ , gdzie

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$ . Wiadomo, że tak określona liczba  $|L|$  nie zależy od sposobu obrania przedstawienia parametrycznego łuku  $L$ . Kładąc

$$(1.3) \quad \begin{cases} \varrho_A(x, y) = \text{kres dolny liczb } |L|, \text{ gdzie } L \text{ przebiega} \\ \text{wszystkie łuki łączące } x \text{ i } y \text{ w przestrzeni } A, \end{cases}$$

otrzymamy pojęcie odległości punktów  $x, y$  w przestrzeni  $A$ . Jasne jest jednak, że nie w każdej przestrzeni  $A$  (o danej metryce  $\varrho$ ) liczba  $\varrho_A(x, y)$  jest określona i skończona dla każdej pary punktów  $x, y \in A$ : potrzeba, by przestrzeń  $A$  spełniała warunek

$$(1.4) \quad \begin{cases} \text{dla każdej pary punktów } x, y \in A \text{ istnieje w } A \text{ łuk } L \\ \text{o skończonej długości, taki że } x, y \in L. \end{cases}$$

Przy spełnieniu przez przestrzeń  $A$  warunku (1.4), wzór (1.3) przyporządkowuje każdej parze punktów  $x, y \in A$  liczbę  $\varrho_A(x, y)$ , która spełnia wszystkie aksjomaty odległości. Tak określoną funkcję  $\varrho_A$  nazywamy metryką wewnętrzną w przestrzeni  $A$ . Spełnia ona warunek

$$\varrho(x, y) \leq \varrho_A(x, y) \text{ dla każdej pary punktów } x, y \in A.$$

Aby jednak przejście od danej metryki  $\varrho$  do metryki wewnętrznej  $\varrho_A$  nie powodowało zmiany topologicznych własności przestrzeni  $A$ , należy jeszcze założyć, że przestrzeń ta spełnia warunek

$$(1.5) \quad \begin{cases} \text{dla każdego punktu } x \in A \text{ i każdej liczby } \varepsilon > 0 \\ \text{istnieje otoczenie } U_{x, \varepsilon} \text{ dla } x \in A, \text{ takie że dla} \\ \text{każdego punktu } y \in U_{x, \varepsilon} \text{ jest } \varrho_A(x, y) < \varepsilon. \end{cases}$$

Powiemy, że przestrzeń  $A$  (z metryką  $\varrho$ ) jest geometrycznie dopuszczalna (w terminologii angielskiej *geometrically acceptable*), w skróceniu  $A \in \mathbf{GA}$ , jeżeli spełnione są oba warunki (1.4) i (1.5).

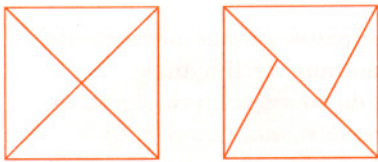
Przestrzeń metryczna nazywa się lokalnie spójna, jeżeli każdy jej punkt ma dowolnie małe spójne otoczenie. Continuum to przestrzeń metryczna zwarta i spójna.

Rozmaitość topologiczna to spójna przestrzeń lokalnie homeomorficzna z przestrzenią euklidesową  $E^n$ . Mówimy, że na takiej rozmaitości dana jest metryka riemannowska, gdy kwadrat różniczki długości łuku w tej przestrzeni w lokalnych układach współrzędnych wyraża się wzorem

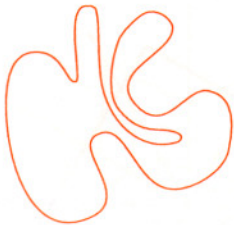
$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x_1, \dots, x_n) dx_i dx_j,$$

gdzie  $g_{ij}$  są funkcjami różniczkowalnymi.

W geometrii elementarnej przez sympleks rozumiemy najmniejszy zbiór wypukły (położony w przestrzeni  $E^n$ ) zawierający  $n+1$  punktów „w położeniu ogólnym” (żadne trzy nie leżą na linii prostej, żadne cztery nie są współpłaszczyznowe itd.). Sympleksy jednowymiarowe to odcinki, dwuwymiarowe – trójkąty, a trójwymiarowe – czworokąty. W topologii nazywamy sympleksem każdy zbiór homeomorficzny z takim sympleksem „elementarnym”. Przez triangulację wielościanu rozumiemy taki jego podział na sympleksy, przy którym każde dwa sympleksy, jeśli się przecinają, to wzdłuż całej wspólnej  $k$ -wymiarowej ściany, krawędzi czy wierzchołka. Na poniższym rysunku widzimy dwa podziały kwadratu na trójkąty, z których tylko pierwszy jest triangulacją.



„Politop” jest pojęciem nieco ogólniejszym od wielokąta czy wielościanu. Rysując na płaszczyźnie siatkę trójkątów równobocznych tak, jak byśmy układali kafelki, otrzymujemy jej triangulację. Płaszczyzna jest więc politopem. Z kolei politopem nie jest przestrzeń przedstawiona na rysunku poniżej, a nawet zwykłe koło.



**Przykłady:** Przestrzenie wypukłe są geometrycznie dopuszczalne, przy czym metryka wewnętrzna  $\varrho_A$  nie różni się od danej w  $A$  metryki  $\varrho$ . Tak jest np. w przestrzeni  $A = E^n$  lub  $A = H$ .

Jasne jest, że każda przestrzeń  $A \in \mathbf{GA}$  jest spójna i lokalnie spójna. Z drugiej strony wiadomo, że każde lokalnie spójne continuum jest homeomorficzne z pewną przestrzenią wypukłą, a więc z przestrzenią  $\mathbf{GA}$ .

Do klasy przestrzeni  $\mathbf{GA}$  należą też wszystkie spójne przestrzenie riemannowskie, jak również wszystkie spójne wielościany w sensie elementarno-geometrycznym, a także ogólniejsze od nich spójne *politopy*, a więc przestrzenie  $P$ , dla których istnieje skończona lub przeliczalna triangulacja  $T$ , której sympleksy są rozumiane w sensie geometrii elementarnej i spełniony jest warunek, że dla każdego punktu  $x \in P$  istnieje w triangulacji  $T$  skończona liczba sympleksów, których suma stanowi otoczenie punktu  $x$  w  $P$ . Zauważmy też, że jeżeli  $A$  i  $B$  są przestrzeniami  $\mathbf{GA}$ , to ich iloczyn kartezjański  $A \times B$  jest też przestrzenią  $\mathbf{GA}$ , jeżeli zaś  $A$  i  $B$  są podzbiórami domkniętymi przestrzeni metrycznej  $X$ , a ich część wspólna nie jest pusta, to  $A \cup B \in \mathbf{GA}$ .

Przez izometrię wewnętrzną rozumiemy taką funkcję  $f$  przekształcającą przestrzeń  $A \in \mathbf{GA}$  na przestrzeń  $A' \in \mathbf{GA}$ , że  $\varrho_A(x, y) = \varrho_{A'}(f(x), f(y))$  dla każdej pary punktów  $x, y \in A$ . Jeżeli taka funkcja istnieje, to mówimy, że przestrzenie  $A$  i  $A'$  są wewnętrznymi izometrycznymi. Jasne jest, że każda izometria (w sensie metryki  $\varrho$ ) jest izometrią wewnętrzną (ale nie na odwrót), natomiast każda izometria wewnętrzna jest homeomorfizmem. Złożenie dwóch izometrii wewnętrznych, jak również odwrócenie izometrii wewnętrznej są izometriami wewnętrznymi. A więc relacja wewnętrznej izometrii jest relacją równoważnościową.

Zauważmy, że w myśl przyjętej tu definicji długości łuku  $L \subset A$ , przy izometrii wewnętrznej  $f: A \rightarrow A'$  łuk  $L$  przechodzi na łuk  $L' \subset A'$ , taki że  $|L| = |L'|$ . Z drugiej strony, każdy homeomorfizm  $f$  spełniający ten warunek jest izometrią wewnętrzną.

Przez geometrię wewnętrzną rozumiemy tu teorię tych własności przestrzeni  $\mathbf{GA}$ , które zachowują się przy wszystkich izometriach wewnętrznych. A więc z punktu widzenia geometrii wewnętrznej dwie wewnętrznymi izometryczne przestrzenie  $A, A' \in \mathbf{GA}$  są jednakowe. Natomiast ich własności geometryczne (tj. własności zależne od pierwotnie przyjętych w nich metryk  $\varrho$  i  $\varrho'$ ) mogą być istotnie różne.

**2. Podzbiory  $\mathbf{GA}$  przestrzeni  $E^n$ .** Podamy tu dowód (w postaci nieco szkicowej) twierdzenia następującego:

(2.1) **Twierdzenie.** *Jeżeli  $A$  jest  $\mathbf{GA}$ -podzbiorem przestrzeni  $E^n$ , to dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje w przestrzeni  $E^{2n}$  zbiór wewnętrznymi izometryczny z  $A$ , który w sensie metryki  $\varrho$  ma średnicę mniejszą od  $\varepsilon$ .*

*Dowód.* Niech  $d$  będzie daną liczbą dodatnią i niech  $D$  będzie kwadratem w płaszczyźnie  $E^2$  o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(d, 0)$ ,  $(0, d)$  i  $(d, d)$ . Przyporządkujmy każdej liczbie całkowitej  $k$  punkt  $a_k = \left(\frac{1}{2}d \cdot \left(1 + \frac{k}{|k|+1}\right), 0\right)$  położony na odcinku  $\overline{(0, 0), (d, 0)}$ . Wówczas  $\varrho((0, 0), a_k) < \varrho((0, 0), a_{k+1})$  dla każdego całkowitego  $k$ . Oznaczmy przez  $b_k$  wierzchołek trójkąta równoramiennego leżącego w  $D$  o podstawie  $\overline{a_k a_{k+1}}$  i bokach  $\overline{a_k b_k}$ ,  $\overline{b_k a_{k+1}}$  o długości  $d$ . Niech teraz  $A_k$  oznacza przedział  $\langle k \cdot d, (k+1) \cdot d \rangle \subset E^1$ . Wówczas  $E^1 = \bigcup_k A_k$ .

Kładąc  $B_{2k} = \overline{a_k b_k}$ ,  $B_{2k+1} = \overline{b_k a_{k+1}}$  dla każdego całkowitego  $k$ , zauważmy, że istnieje przekształcenie  $\varphi$  prostej  $E^1$  na zbiór  $\bigcup_k B_k \subset D$ , takie że dla każdego całkowitego  $k$  przekształcenie  $\varphi$  przeprowadza izometrycznie odcinek  $A_k$  na odcinek  $B_k$  i to tak, że

$$\varphi(2k \cdot d) = a_k, \quad \varphi((2k+1) \cdot d) = b_k.$$

Jasne jest, że  $\varphi$  jest homeomorfizmem przekształcającym całą prostą  $E^1$  na zbiór  $\bigcup_k B_k$ .

Metoda dowodu zamieszczonego obok twierdzenia (2.1) pozwala też na wykazanie, że przestrzeń Hilberta  $H$  może być wewnątrznie izometrycznie zanurzona w dowolnie małą kostkę w niej.

Cała przestrzeń  $E^n$  jest sumą wszystkich  $n$ -wymiarowych kostek postaci

$$D_{\mu_1, \dots, \mu_n} = A_{\mu_1} \times \dots \times A_{\mu_n},$$

gdzie  $\mu_1, \dots, \mu_n$  przebiega wszystkie układy złożone z  $n$  liczb całkowitych. Kładąc

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \quad \text{dla każdego } (x_1, \dots, x_n) \in E^n,$$

otrzymujemy homeomorfizm  $\psi$  przekształcający całą przestrzeń  $E^n$  na pewien podzbiór zbioru  $C$  będącego iloczynem kartezjańskim  $n$  kwadratów  $D$ . Zbiór  $C$  możemy traktować jako kostkę  $2n$ -wymiarową, położoną w przestrzeni  $E^{2n}$ , identyfikując punkty postaci  $((x_1, x_2), (x_3, x_4), \dots, (x_{2n-1}, x_{2n})) \in C$  z punktami  $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$  w przestrzeni  $E^{2n}$ .

Homeomorfizm  $\psi$  przekształca izometrycznie każdą kostkę postaci  $D_{\mu_1, \dots, \mu_n} = A_{\mu_1} \times \dots \times A_{\mu_n}$  na zbiór  $B_{\mu_1} \times \dots \times B_{\mu_n}$ , skąd wynika, że każdy łuk  $L \subset A_{\mu_1} \times \dots \times A_{\mu_n}$  przechodzi izometrycznie na łuk  $\psi(L) \subset B_{\mu_1} \times \dots \times B_{\mu_n}$ . To pozwala okazać, że przy homeomorfizmie  $\psi$  zachowują się długości wszystkich łuków  $L$  położonych w przestrzeni  $E^n$ . A więc, dla każdego zbioru  $A \in \mathbf{GA}$  położonego w  $E^n$ , przekształcenie częściowe  $\psi|_A$  jest izometrią wewnątrznią przekształcającą  $A$  na zbiór  $A' = \psi(A) \subset C$ . Ale średnica kostki  $C$ , będącej iloczynem kartezjańskim  $n$  kwadratów o boku  $d$ , jest równa  $\sqrt{n(\sqrt{2}d)^2} = d \cdot \sqrt{2n}$ . Jeżeli więc, dotychczas dowolną, liczbę dodatnią  $d$  obierzemy tak, by była mniejsza od  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}$ , to średnica zbioru  $A'$  stanie się mniejsza od  $\varepsilon$ . To kończy dowód twierdzenia (2.1).

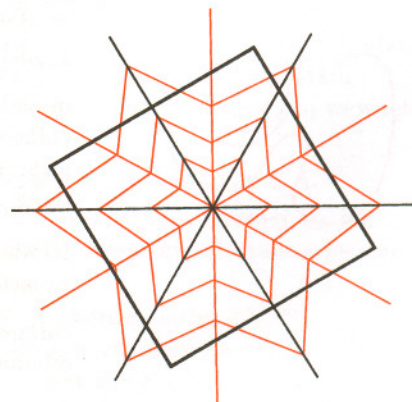
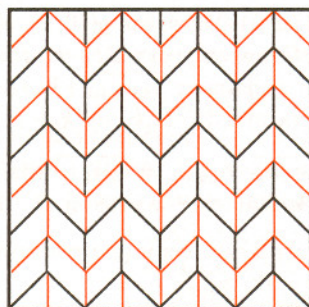
**3. Uwagi w związku z twierdzeniem (2.1).** Z twierdzenia (2.1) wynika w szczególności, że cała przestrzeń  $E^3$  (a więc przestrzeń, którą czasami skłonni jesteśmy uważać za matematyczny schemat naszej przestrzeni kosmicznej) daje się potraktować jako podzbiór przestrzeni  $E^6$  mający dowolnie małą średnicę. Przy takim ujęciu punkty położone w przestrzeni  $E^3$  w dowolnie wielkiej odległości jeden od drugiego stają się w przestrzeni  $E^6$  (w sensie zwykłej metryki  $\rho$ ) dowolnie bliskie.

W kosmologii współczesnej zakłada się zwykle, że rozpatrywane przestrzenie są riemannowskie – co zresztą może być kwestionowane. Jeśli jednak ograniczymy się do przestrzeni riemannowskich i do wewnętrznych izometrii przeprowadzających takie przestrzenie na przestrzenie riemannowskie, to twierdzenie (2.1) nie da się utrzymać, wiadomo bowiem, że np. powierzchnia riemannowska wewnątrznie izometryczna ze sferą  $S^2$  musi być ze sferą tą izometryczna.

Geometria wewnątrzna, ograniczona do zakresu przestrzeni riemannowskich, jest jednym z klasycznych działów geometrii różniczkowej. Gdy ograniczenie to się odrzuci, to konieczna staje się rezygnacja z takich klasycznych niezmienników, jak krzywizna całkowita (gaussowska), natomiast pojawiają się nowe fakty (jak np. twierdzenie (2.1)) i powstaje nowa, obszerna problematyka.

Jednym z podstawowych twierdzeń geometrii przestrzeni riemannowskich jest *Theorema egregium* („Wspaniałe twierdzenie”): krzywizna całkowita powierzchni nie zmienia się przy wewnętrznych izometriach.

Przedstawiamy tu dwa sposoby takiego składania kwadratu, by zmieścił się w dowolnie małej kulce przestrzeni trójwymiarowej. Linia kolorowa oznacza „zagiąć do góry”, czarna – „zagiąć do dołu”. Za pomocą drugiego z tych sposobów można i całą płaszczyznę  $E^2$  przekształcić przez izometrię wewnątrznią na podzbiór przestrzeni  $E^3$  o dowolnie małej średnicy i jest to pozytywne rozwiązanie postawionego w tekście artykułu problemu. Autorem tego rozwiązania jest dr J. Olędzki.



Powstaje pytanie, czy wymiar  $2n$  przestrzeni, w której  $\mathbf{GA}$ -podzbiory przestrzeni  $E^n$  dają się umieścić bez zmiany ich wewnętrznych własności, ale



### Rozwiązanie zadania F 500.

Maksymalne naprężenie liny obciążonej nieruchomą windą wynosi

$$\sigma = \frac{Q}{S_1} = \frac{mg}{\pi d^2/4},$$

gdzie  $m$  jest masą windy, a  $d = 9$  mm średnicą liny. Maksymalna siła, z jaką winda może działać na linę przy gwałtownym zahamowaniu, wynosi  $mg + 8mg = 9mg$ . Osiągane naprężenie liny wynosi wtedy

$$\sigma = \frac{9mg}{\pi d^2/4} = \frac{36mg}{\pi D^2},$$

gdzie  $D$  jest szukaną średnicą. W obu przypadkach maksymalne naprężenie

$\sigma = \frac{F}{S}$  ( $F$  jest siłą działającą na linę) jest takie samo. Stąd otrzymujemy

$$\frac{4mg}{\pi d^2} = \frac{36mg}{\pi D^2}$$

i dostajemy, że średnica liny powinna wynosić co najmniej  $D = 3d = 27$  mm.

z dowolnym zmniejszeniem średnicy, daje się zastąpić przez liczbę mniejszą. Ostatnio S. Nowak i J. Olędzki okazali, że liczba  $2n$  daje się zastąpić przez liczbę  $n + 1$ .

Nie wiadomo też, czy dla każdego  $n$  istnieje w przestrzeni  $E^n$  zbiór  $A \in \mathbf{GA}$  (czy nawet spójny wielościan), który nie może być przez izometrię wewnętrzną przeprowadzony na podzbiór przestrzeni  $E^{2n-1}$  o dowolnie małej średnicy (w sensie metryki  $\varrho$ ). Nasuwa się też naturalne pytanie, czy każda ośrodkowa przestrzeń  $A \in \mathbf{GA}$ , o wymiarze  $\leq n$ , daje się przez izometrię wewnętrzną przeprowadzić na podzbiór przestrzeni  $E^{2n+1}$ . Pozytywne rozwiązanie tego zagadnienia stanowiłoby naturalny odpowiednik twierdzenia Menger–Nöbelinga o tym, że każda ośrodkowa przestrzeń metryczna wymiaru nie większego niż  $n$  jest homeomorficzna z pewnym podzbiorem przestrzeni  $E^{2n+1}$ .

Poniżej podamy twierdzenie, które w zakresie spójnych politopów 1-wymiarowych daje pozytywną odpowiedź na to pytanie.

**4. Spójne politopy 1-wymiarowe.** Podamy ideę dowodu (z pominięciem niektórych szczegółów o charakterze technicznym) twierdzenia następującego:

**(4.1) Twierdzenie.** Dla każdego spójnego 1-wymiarowego politopu  $P$  (położonego w przestrzeni  $H$ ) i każdej liczby dodatniej  $\varepsilon$  istnieje w  $E^3$  politop  $P'$  o średnicy  $< \varepsilon$ , wewnątrznie izometryczny z  $P$ .

*Dowód.* Niech  $T$  będzie triangulacją politopu  $P$  o 1-wymiarowych sympleksach (a więc odcinkach)  $L_1, L_2, \dots$  (może być ich liczba skończona). Możemy przyjąć, że średnica każdego z tych odcinków jest  $< \frac{\varepsilon}{6}$ . Kładąc  $P_k = L_1 \cup \dots \cup L_k$ , mamy  $P_k \subset P_{k+1}$  oraz  $P = \bigcup_k P_k$ .

Każdemu wskaźnikowi  $k$  przyporządkujemy liczbę  $\eta_k < \frac{\varepsilon}{6}$ , taką że każdy odcinek  $L_i$ , którego choć jeden koniec należy do  $P_k$ , ma długość większą od  $\eta_k$ . Obierzmy punkt  $b_0 \in E^3$  i każdemu wskaźnikowi  $k$  przyporządkujemy kulę  $Q_k \subset E^3$  o środku  $b_0$  i promieniu  $r_k < \eta_k$  tak, by  $r_{k+1} < r_k$  dla każdego  $k$ . Ustawmy teraz wszystkie wierzchołki triangulacji  $T$  w ciąg (być może skończony)  $a_1, a_2, \dots$  tak, by wskaźniki wierzchołków należących do  $P_k$  były mniejsze od wskaźników wierzchołków należących do  $P_{k+1} \setminus P_k$ .

Każdemu  $\mu = 1, 2, \dots$  przyporządkujemy punkt  $b_\mu \in E^3$  tak, by spełnione były warunki:

$$(4.2) \quad \text{jeżeli } a_\mu \in P_k, \quad \text{to } b_\mu \in Q_{k+1};$$

$$(4.3) \quad \begin{cases} \text{żadna płaszczyzna położona w } E^3 \text{ nie zawiera} \\ \text{więcej niż 3 punkty z ciągu } b_1, b_2, \dots \end{cases}$$

Zauważmy, że jeżeli odcinek  $a_\mu a_\nu$  należy do triangulacji  $T$  oraz  $a_\mu \in P_k$ , to  $\varrho(a_\mu, a_\nu) > \eta_k$ , a więc oba punkty  $b_\mu, b_\nu$  leżą w kuli  $Q_k$ . Stąd

$$\varrho(b_\mu, b_\nu) < \eta_k < \varrho(a_\mu, a_\nu) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

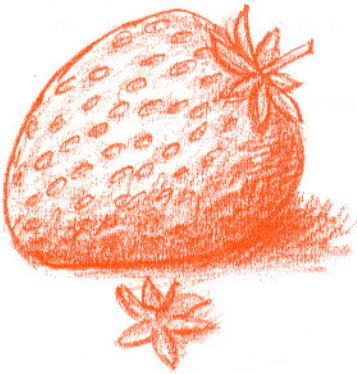
Weźmy teraz pod uwagę elipsoidę obrotową  $M_{\mu,\nu}$  będącą zbiorem wszystkich punktów  $x \in E^3$  spełniających warunek

$$(4.4) \quad \varrho(x, b_\mu) + \varrho(x, b_\nu) = \varrho(a_\mu, a_\nu).$$

Jasne jest, że skończony lub przeliczalny zbiór płaszczyzn położonych w  $E^3$  przecina elipsoidę  $M_{\mu,\nu}$  w zbiorze pierwszej kategorii (w sensie Baire'a). Stosując więc proste rozumowanie indukcyjne, możemy kolejnym odcinkom  $L_j$ , z których każdy ma postać  $a_\mu a_\nu$ , przyporządkować punkty  $b'_j \in M_{\mu,\nu}$  tak, by żadna z płaszczyzn w przestrzeni  $E^3$  nie zawierała więcej niż 3 spośród punktów  $b_1, b_2, \dots$  oraz  $b'_1, b'_2, \dots$ . Ponadto, na odcinku  $L_j = a_\mu a_\nu$  możemy obrać punkt  $a'_j$ , taki że

$$(4.5) \quad \varrho(a_\mu, a'_j) = \varrho(b_\mu, b'_j) \quad \text{oraz} \quad \varrho(a_\nu, a'_j) = \varrho(b_\nu, b'_j).$$

Wprowadzenie na każdym odcinku  $L_j$  postaci  $a_\mu a_\nu$  wierzchołka  $a'_j$  daje podział  $T'$  triangulacji  $T$  politopu  $P$ . Przyporządkowując każdemu  $a_\mu$  punkt  $b_\mu$ , a punktowi  $a'_j$  – punkt  $b'_j$ , otrzymamy wzajemnie jednoznaczne



Zbiór pierwszej kategorii w sensie Baire'a to zbiór będący przeliczalną sumą zbiorów domkniętych o pustym wnętrzu – a także każdy jego podzbiór. Ważne twierdzenie Baire'a głosi, że niepusta zupełna przestrzeń metryczna nie jest pierwszej kategorii.

Przy przekształceniu sympleksyjnym obraz sympleksu jest zawarty w pewnym sympleksie.

przekształcenie zbioru wierzchołków triangulacji  $T'$  na zbiór punktów położonych w przestrzeni  $E^3$ , taki że żadne cztery punkty tego zbioru nie leżą w jednej płaszczyźnie. Przekształcenie to indukuje pewne przekształcenie sympleksyjne politopu  $P$  na politop  $P'$  będący sumą wszystkich odcinków postaci  $b_\mu b'_j$  oraz  $b_\nu b'_j$ , gdzie  $L_j = a_\mu a_\nu$ . Z uwagi na (4.4) i (4.5) przekształcenie to jest izometrią wewnętrzną.

Każdy z punktów  $b_\mu$  leży jednak w kuli  $Q_1$  o środku  $b_1$  i promieniu  $r < \eta_1 < \frac{\varepsilon}{6}$ , a każdy punkt  $b'_j$  leży na obrotowej elipsoidzie  $M_{\mu,\nu}$ , dla której  $b_\mu$  jest ogniskiem, a średnica jest równa  $\varrho(a_\mu, a_\nu) < \frac{\varepsilon}{3}$ . A więc zbiór wszystkich wierzchołków politopu  $P'$  ma średnicę mniejszą niż  $2 \cdot (\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6}) = \varepsilon$ . Więc i średnica całego politopu  $P'$  jest mniejsza od  $\varepsilon$  i dowód twierdzenia (4.1) jest zakończony.

Przeniesienie tego twierdzenia na spójne politopy wymiaru większego niż 1 nastęrcza istotne trudności. nierozstrzygnięte jest nawet proste pytanie, czy każdy spójny wielościan dwuwymiarowy jest wewnątrznie izometryczny z wielościanem położonym w przestrzeni  $E^5$ , a w szczególności z wielościanem o dowolnie małej średnicy. Nie wiadomo również, czy każde 1-wymiarowe continuum należące do klasy  $\mathbf{GA}$  jest wewnątrznie izometryczne z continuum położonym w przestrzeni  $E^5$ . W geometrii wewnątrznej, rozumianej w sensie tu podanym, istnieje wiele zagadnień, które oczekują rozstrzygnięcia. Nie wiem np. czy miara  $k$ -wymiarowa (odpowiednio zdefiniowana w przestrzeni  $\mathbf{GA}$ ) zachowuje się niezmienniczo przy izometriach wewnątrznych. Nie wiadomo też, kiedy izometria wewnątrzna  $f: A \rightarrow A'$  (gdzie  $A$  i  $A'$  są  $\mathbf{GA}$ -zbiorami położonymi w przestrzeni Hilberta  $H$ ) daje się otrzymać przez ciągłą deformację zbioru  $A$ , zachowującą długość krzywych, tj. czy istnieje przekształcenie ciągle

$$\widehat{f}: A \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow H,$$

takie że  $\widehat{f}(x, 0) = x$ ,  $\widehat{f}(x, 1) = f(x)$  dla każdego punktu  $x \in A$  oraz że dla każdego  $t \in \langle 0, 1 \rangle$  przekształcenie  $f_t: A \rightarrow H$  dane przez wzór  $f_t(x) = \widehat{f}(x, t)$  jest izometrią wewnątrzną.

Nie wiadomo też, kiedy zbiór  $A \in \mathbf{GA}$  położony w przestrzeni  $E^n$  daje się przez izometrię wewnątrzną przeprowadzić na zbiór  $A' \subset E^n$ , który nie jest izometryczny z  $A$  w sensie metryki  $\varrho$ .

Lista nierozstrzygniętych pytań geometrii wewnątrznej jest bardzo obszerna.



### Rozwiązanie zadania M 882.

Dla ciągu stałego teza jest oczywista. Niech  $r \neq 0$  będzie różnicą ciągu; dobierzmy liczbę naturalną  $k$  tak, by mieć  $10^{k-1} \leq r < 10^k$ . Niech  $n$  będzie taką liczbą naturalną, że  $10^{n-k} - (n+1) > 0$  i  $a_1 < 10^n$ . Istnienie takiej liczby jest oczywiste, bowiem ciąg  $b_n = 10^{n-k} - (n+1)$  jest rozbieżny do  $\infty$ . Niech  $K$  będzie zbiorem tych wyrazów ciągu, które są zawarte w przedziale  $[10^n, 10^{n+1})$ . Zbiór  $K$  zawiera co najmniej  $9 \cdot 10^{n-k}$  elementów. Wreszcie suma cyfr dowolnego elementu z  $K$  jest nie większa niż  $9(n+1)$ . Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika więc, że spośród elementów zbioru  $K$  można wybrać dwa o tej samej sumie cyfr.

## Kącik olimpijski (23)

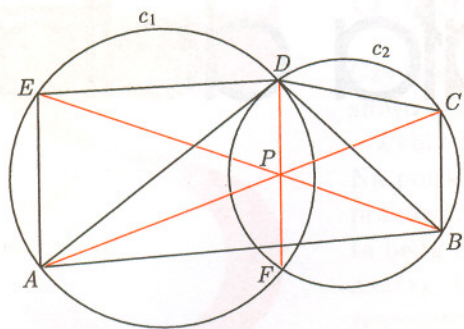
### Trzynaste zadanie

W dniach 6–10 listopada 1998 r. odbyła się w Warszawie IX Olimpiada Matematyczna Państw Bałtyckich *Baltic Way '98*. W konkursie tym brały udział ekipy następujących 10 państw: Danii, Estonii, Finlandii, Islandii, Niemiec, Norwegii, Litwy, Łotwy, Polski, Szwecji oraz miasta Sankt Petersburg. W skład każdej delegacji wchodził uczniowie szkół średnich. Zawody miały charakter drużynowy i polegały na rozwiązaniu 20 zadań w ciągu  $4\frac{1}{2}$  godziny. Każde zadanie było oceniane w skali 0–5 punktów. Drużyna polska z sumą 68 punktów zajęła trzecie miejsce za drużyną Łotwy (72 pkt.) oraz Estonii (70 pkt.).

Zadanie 13. sprawiło uczniom najwięcej trudności – żadnej ekipie nie udało się zdobyć ani jednego punktu za rozwiązanie tego zadania (i jak tu nie być przesadnym...). Niżej zaprezentujemy dwa rozwiązania tego zadania.

**13.** W pięciokącie wypukłym  $ABCDE$  boki  $AE$  i  $BC$  są równoległe oraz  $\angle ADE = \angle BDC$ . Przekątne  $AC$  i  $BE$  przecinają się w punkcie  $P$ . Udowodnić, że  $\angle EAD = \angle BDP$  oraz  $\angle CBD = \angle ADP$ .





Rys. 1

*I rozwiązanie:*

Niech  $c_1$  i  $c_2$  będą odpowiednio okręgami opisanymi na trójkątach  $AED$  i  $BCD$  (rys. 1). Załóżmy, że prosta  $DP$  przecina okrąg  $c_2$  w punkcie  $F$ . Ponieważ  $\angle ADE = \angle BDC$ , więc stosunek długości odcinków  $EA$  i  $BC$  jest równy stosunkowi długości promieni okręgów  $c_1$  i  $c_2$ . Zatem jednokładność o środku  $P$ , przekształcająca  $AE$  na  $CB$ , przekształca okrąg  $c_1$  na okrąg  $c_2$ . Ta sama jednokładność przekształca łuk  $DE$  okręgu  $c_1$  na łuk  $FB$  okręgu  $c_2$ . Stąd wynika, że  $\angle EAD = \angle BDF = \angle BDP$ . Drugą równość dostajemy analogicznie.

Powyższe rozwiązanie to tzw. rozwiązanie oficjalne, dostarczone przez autora zadania. Podczas wyboru zadań niektórzy członkowie międzynarodowego Jury, zapoznawszy się z samym zadaniem i powyższym rozwiązaniem, uznali, że zadanie to jest łatwe...

*II rozwiązanie:*

**Lemat:** Załóżmy, że w sześciokącie wypukłym  $ABCDEF$  zachodzą związki:  $\angle EAF = \angle CAB = \alpha$ ,  $\angle ACB = \angle ECD = \beta$ ,  $\angle CED = \angle AEF = \gamma$ . Wówczas przekątne  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  przecinają się w jednym punkcie.

**Dowód:** Przez  $[XYZ]$  będziemy oznaczać pole trójkąta  $XYZ$ . Niech  $K$ ,  $L$ ,  $M$  będą odpowiednio punktami przecięcia następujących par odcinków:  $AD, EC$ ;  $BE, CA$ ;  $CF, AE$  (rys. 2). Dostajemy następujące równości:

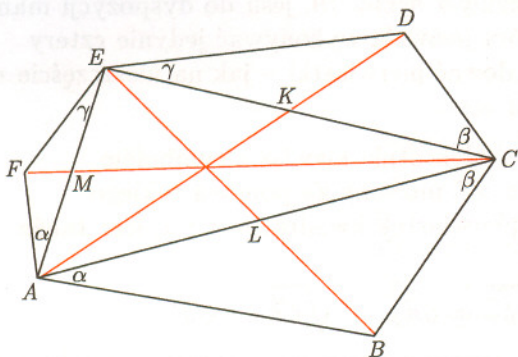
$$\begin{aligned} \frac{AL}{LC} \cdot \frac{CK}{KE} \cdot \frac{EM}{MA} &= \frac{[ABE]}{[CBE]} \cdot \frac{[CDA]}{[EDA]} \cdot \frac{[EFC]}{[AFC]} = \frac{[ABE]}{[AFC]} \cdot \frac{[CDA]}{[CBE]} \cdot \frac{[EFC]}{[EDA]} = \\ &= \frac{AB \cdot AE \cdot CD \cdot CA \cdot EF \cdot EC}{AF \cdot AC \cdot CB \cdot CE \cdot ED \cdot EA} = \\ &= \frac{AB}{CB} \cdot \frac{CD}{ED} \cdot \frac{EF}{AF} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = 1, \end{aligned}$$

skąd, na mocy twierdzenia Cevy, przekątne  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$  przecinają się w jednym punkcie.

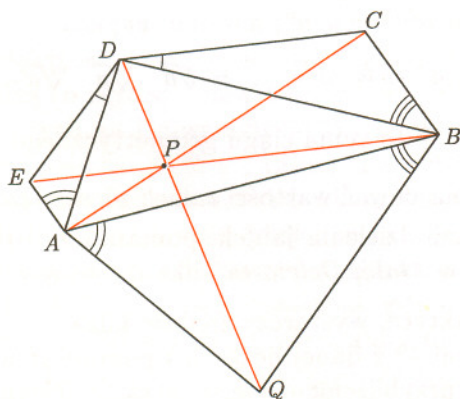
Przystępujemy do rozwiązania naszego zadania. Na boku  $AB$  danego pięciokąta  $ABCDE$  budujemy (po jego zewnętrznej stronie) trójkąt  $ABQ$  tak, aby  $\angle QAB = \angle EAD$  oraz  $\angle QBA = \angle CBD$  (rys. 3). Na mocy lematu, punkty  $D$ ,  $P$ ,  $Q$  są współliniowe. Ponieważ odcinki  $AE$  i  $BC$  są równoległe, więc

$$\begin{aligned} \angle ADB &= \angle EAD + \angle CBD = \angle QAB + \angle QBA = \\ &= 180^\circ - \angle AQB. \end{aligned}$$

Zatem na czworokącie  $AQBD$  da się opisać okrąg, skąd  $\angle EAD = \angle BAQ = \angle BDQ = \angle BDP$ . Drugą równość dostajemy analogicznie.



Rys. 2



Rys. 3

Ciekawe, jak zareagowałyby Jury, gdyby *II rozwiązanie* było rozwiązaniem oficjalnym, dostarczonym przez autora zadania. Najprawdopodobniej osądzono by, że zadanie jest za trudne i nie pojawiłoby się ono na zawodach...

Obszerniejsze sprawozdanie oraz pozostałe zadania z zawodów *Baltic Way '98* można znaleźć w Internecie na stronie Olimpiady Matematycznej: <http://www.impan.gov.pl/~olimp/>, jak również w broszurze: *L Olimpiada Matematyczna, Sprawozdanie Komitetu Głównego*. Broszura ta zostanie rozślana do wszystkich szkół średnich w Polsce we wrześniu 1999 r.



# 5

Przepis na „ręczne” wyciąganie pierwiastka trzeciego stopnia jest podany na str. 13.

## Kalkulator i pierwiastki

Jak obliczyć długość  $a$  krawędzi sześcianu, jeśli znamy jego objętość  $V$ ? To proste: ponieważ  $V = a^3$ , więc  $a = \sqrt[3]{V}$ . No dobrze, ale jak obliczyć pierwiastek sześcienny powiedzmy z liczby 19, jeśli do dyspozycji mamy tylko niewielki kalkulator, który pozwala wykonywać jedynie cztery działania arytmetyczne i znajdować pierwiastki – jak na nieszczęście nie sześciennie, tylko kwadratowe?

Każdy widzi, że przyciskając wielokrotnie klawisz z symbolem pierwiastka, dla danej liczby  $a > 0$  możemy za pomocą takiego kalkulatora znaleźć nie tylko pierwiastek kwadratowy z  $a$ , lecz także każdy z pierwiastków

$$\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}, \quad \sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}, \quad \sqrt{\sqrt[8]{a}} = \sqrt[16]{a}, \quad \dots$$

Żeby np. obliczyć pierwiastek czwartego stopnia, wystarczy dwukrotnie nacisnąć klawisz pierwiastka kwadratowego; trzykrotne naciśnięcie klawisza  $\sqrt{\quad}$  pozwoli uzyskać pierwiastek stopnia 8 itd. Ogólnie, naciskając  $n$ -krotnie klawisz  $\sqrt{\quad}$  możemy, jak łatwo sprawdzić, wyciągać pierwiastki stopnia  $2^n$ .

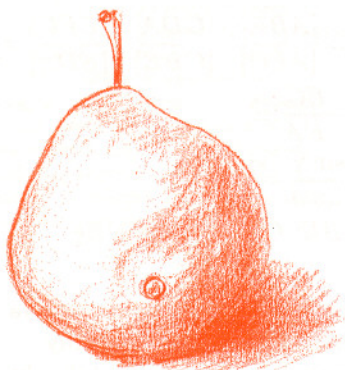
Do pierwiastka sześciennego już niedaleko: wystarczy przypomnieć sobie, że  $\sqrt[n]{a}$  to inaczej potęga liczby  $a$  o wykładniku  $1/n$ ,  $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$  (dla  $n = 2$  i  $3$  tę wiedzę wbija się dziś do głów uczniom starszych klas podstawówki). Chcemy więc znaleźć  $a^{1/3}$ , a potrafimy znajdować  $a^{1/2^n}$ . Stosując wielokrotnie znany wzór  $a^x a^y = a^{x+y}$ , możemy napisać

$$(*) \quad \sqrt[3]{a} = a^{1/3} = a^{1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots} = a^{1/4} \cdot a^{1/16} \cdot a^{1/64} \cdot \dots = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[16]{a} \cdot \sqrt[64]{a} \cdot \dots$$

Druga równość bierze się stąd, że  $\frac{1}{3}$  to suma ciągu geometrycznego  $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots$ . (Znajdować wartości takich nieskończonych sum można się nauczyć przy okazji dzielenia jabłek, pomarańczy i pizzy – będzie można o tym poczytać w *Małej Delcie* za kilka miesięcy.)

Aby wykorzystać wzór  $(*)$  w praktyce, wystarczy znaleźć kilka początkowych pierwiastków stopni  $4^n$  z danej liczby  $a$  i pomnożyć ich wartości. Wynik będzie niezłym przybliżeniem pierwiastka sześciennego z  $a$ , tym dokładniejszym, im więcej czynników weźmiemy. Na przykład dla  $a = 27$ , biorąc  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , otrzymamy przybliżenie  $\sqrt[3]{27} \approx 2,996783$ . Niezbyt to piękna metoda, lepsza jednak od samej kartki i ołówka.

A jak wyciągnąć za pomocą tego samego kalkulatora pierwiastek stopnia 5? Albo 17? Kto chce sam poszukać odpowiedzi, niech zauważy, że w układzie dwójkowym  $1/3$  to  $0,01010101\dots$ , a numery miejsc, na których po przecinku stoi jedynka, mówią, ile razy trzeba nacisnąć klawisz  $\sqrt{\quad}$ , żeby obliczyć mnożone później pierwiastki stopni  $4^n$ .



### Rozwiązanie zadania F 499.

Kablem możemy posłużyć się tylko wtedy, gdy naprężenie podczas rozciągania, wywołane własnym ciężarem kabla, nie będzie większe od granicy wytrzymałości ołowiu. Naprężenie to jest równe

$$\sigma = \frac{Q}{S},$$

gdzie  $Q = ggl$  jest ciężarem liny o gęstości  $g$ , polu przekroju poprzecznego  $S$  i długości  $l$ . Znajdujemy, że

$$\sigma = ggl = 3,3 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2,$$

czyli nie możemy użyć takiego kabla.



## O demokracji, wyborach i większości

Czy wiesz, co to demokracja? Wiesz, to z języka greckiego pochodzące słowo oznacza rządy ludu. A w jaki sposób lud rządzi? Też wiesz – wybiera swoich przedstawicieli, a oni w imieniu ludu sprawują władzę. Na polskich uczelniach w tym roku odbywają się wybory, w których pracownicy i studenci wybiorą swe władze na okres trzech lat. Wybory te będą demokratyczne, ale nie aż tak, jak wybory do Sejmu. To znaczy, że profesorowie będą mieli większe uprawnienia niż studenci, ich reprezentacja we władzach będzie liczniejsza niż reprezentacja studentów. O takim nierównym sposobie traktowania wyborców na uczelniach zdecydował Sejm (wprawdzie był on wtedy kontraktowy, ale nie miały zamiaru zmieniać tego nawet te arcydemokratycznie wybrane) i chyba domyślasz się dlaczego.

Jeśli więc równość nie jest atrybutem demokracji, to co nim jest? Ano to, że zasadnicze decyzje podejmuje większość. Na przykład, po to aby wybrać jakiegokolwiek członka władz uczelni, potrzebne jest uzyskanie przez niego większości ważnie oddanych głosów – tak to rozstrzyga Ustawa o Szkolnictwie Wyższym. Oczywiście, potrzebne jest też spełnienie innych warunków, ale ich określenie (jak i określenie, jaki głos jest ważny) Ustawa pozostawia decyzji poszczególnych uczelni. Prawnicy rozróżniają między bezwzględną większością głosów a zwykłą (głosów „za” więcej niż „przeciw”), w tym przypadku chodzi o większość bezwzględną.

Ale co to jest ta większość? Wydawałoby się, że o tym wie każdy sześciolatek, bo przecież gdy dzieci chętnych do zabawy jest np. troje, a zabaw do wyboru dwie, to o tym, którą zabawę wybrać, decyduje większość, czyli w naszym przypadku co najmniej dwoje (pomijam tu sytuację, w której ten trzeci potrafi zboksować dwóch pozostałych i w ten sposób zmusić ich do wyboru ulubionej przez siebie zabawy). Niemniej jednak okazuje się, że nie wszyscy dorośli Polacy wiedzą, co to jest większość. Często spotykam ludzi, którzy twierdzą (o zgrozo – nawet na zebraniach wyborczych na Uniwersytecie Warszawskim), że większość to „50% + 1 (głos)” i – o dziwo – nie są to tylko zakamieniali „humaniści”. Ta nibydefinicja większości pochodzi zapewne ze słowników języka polskiego (np. Słownik PWN z 1981 roku) i stała się popularna, gdy narodziła się pierwsza Solidarność, i wielu Polakom po ponad 50 latach trzeba było uświadomić czym jest demokracja i czym jest większość. Gdyby autorom tego Słownika przyszło na myśl zajrzenie do Webstera, aby zobaczyć, jakie znaczenie nadają Anglosasi (ach, ta tradycja demokratyczna) słowu *majority*, nie trzeba by kopii kruszyć, o 50% + 1. A jest o co, bo przecież używanie tej nibydefinicji doprowadziło Sejm Najjaśniejszej Rzeczypospolitej

– po wyborze generała Jaruzelskiego na prezydenta w roku 1989 – do podjęcia kompromitującej uchwały, z której niezbitcie wynikało, że większość z 3 ponoć zaczyna się od 3, a nie od 2 (co niechybnie i słusznie stwierdzi każde dziecko z piaskownicy).

Tym więc, którzy w Twojej obecności będą mówić, że większość to pięćdziesiąt procent plus jeden, wytłumacz, proszę, że mówią bzdurę. Części z nich wystarczy powiedzieć:

*wiekszość to więcej niż połowa,*

a tym, którzy domagają się precyzyjnego określenia jej kresu dolnego, powiedz:

*jest to najmniejsza liczba całkowita  
przekraczająca połowę.*

Jeśli zaś lubią oni matematykę przynajmniej na tyle, by odróżniać liczby parzyste od nieparzystych, wytłumacz, że nibydefinicja i poprawne określenie (kresu dolnego) prowadzą do tego samego rezultatu w przypadku liczb parzystych, w przypadku zaś liczb nieparzystych nibydefinicja prowadzi do katastrofy, bo nie tylko wynik jest różny od tego, który wynika z poprawnego określenia, ale przede wszystkim wynik ten nie jest liczbą całkowitą.

*Małą Deltę przygotowali: Paweł STRZELECKI i Wojciech KOPCZYŃSKI*

## Aktualności (nie tylko) fizyczne

Genialne pomysły odznaczają się prostotą i wszechstronnością. Aż ciśnie się na usta sakramentalne „gdybym wiedział, że tak można, to sam bym to zrobił”. Weźmy np. taki *kołowrót*. Słowo to ma obecnie kilka znaczeń. Jako pierwsze wymieniane jest w słownikach urządzenie służące do nawijania liny za pomocą korby. Ta maszyna prosta jest niewątpliwie genialna (z definicji), ale nam tutaj chodzi o pierwotne znaczenie kołowrotu, którego mniej szczegółowe słowniki już nawet nie podają. Jak sama nazwa wskazuje, kołowrót to wrota, które mogą kręcić się w koło. Może uważasz, drogi Czytelniku, że to ja coś kręcę, no bo co w tym genialnego? To zależy od punktu widzenia. Najczęściej taki kołowrót staje nam na drodze i utrudnia przejście, to raczej zawalidroga, a nie świetny pomysł. Z drugiej strony jednak, nie wymyślono lepszego sposobu, żeby zmusić tłum do przechodzenia pojedynczo. Ale to jeszcze nie wszystko. Kołowrót, po przepuszczeniu kogoś lub czegoś, sam ustawia się w stanie umożliwiającym przepuszczenie następnej jednostki. Takich kołowrotów mamy coraz więcej. W sklepach, stacjach narciarskich, metrach (w Polsce tylko jedno metro jest wyjątkiem). Pojawiają się zwłaszcza tam, gdzie trzeba płać za przejście, a nie oplaca się stawić biletera. Tylko że nikt tych bramek nie nazywa kołowrotami. No cóż, takie są reguły rozwoju języka – piękne i adekwatne określenia zastępowane są ogólnymi i opisowymi, jak np. bezduszne „drzwi obrotowe”. W dodatku, gdy już zapomnimy o naszym pięknym słowie, to sprowadzamy sobie takie z zagranicy. Jeżeli więc usłyszycie gdzieś określenie „turnstajl”, to raczcie przypomnieć, że to nazywa się po polsku kołowrót.

A właśnie udało się zbudować, a *single-photon turnstile device* [1], czyli (jak nikt ze specjalistów tego pewnie nie przetłumaczy) „jednofotonowy kołowrót”. Nazwa jest tu wyjątkowo adekwatna. To urządzenie potrafi wysłać na sygnał pojedynczy foton i natychmiast jest w stanie tę operację powtórzyć. A sprawa nie jest prosta. Bardzo trudno ustawić fotony w kolejkę. Wszystkie chciałyby przejść na jeden bilet. Taki owczy pęd umożliwia zbudowanie lasera, ale utrudnia uzyskiwanie strumieni pojedynczych fotonów, które przydałyby się np. do przesyłania informacji kwantowych, techniki przydatnej przy konstruowaniu kwantowych komputerów. Co innego elektrony. Od dziesięciu lat wiadomo [2] o istnieniu złącza półprzewodnikowego umożliwiającego przechodzenie elektronów jeden po drugim. Pomysł polega na wytworzeniu studni potencjału, do której (za pomocą efektu tunelowego) może przejść tylko jeden elektron, gdyż po jego przejściu bariera kulombowska wzrasta na tyle, że efektywnie zamyka taką służę. Aby wprowadzić do niej następny elektron, trzeba ten pierwszy wypuścić. Stwierdzono, że gdyby udało się jednocześnie zrobić służę dla elektronów i dziur, to mogłaby ona wysłać pojedyncze fotony [3].

Zbudowany jednofotonowy kołowrót wykorzystuje jednoczesną blokadę kulombowską dla elektronów i dziur w złączu p-n. Ma trzy, oddzielone barierami studnie kwantowe. Środkową na samym złączu i po jednej w częściach n i p. Po przyłożeniu odpowiedniego

napięcia  $V_0$  spełnione są warunki rezonansowego przejścia  $m$ -tego elektronu do środkowej studni. Po tym przejściu odpychanie kulombowskie jest już wystarczające do powstrzymania następnych elektronów. Z drugiej strony, rezonansowe przejście dziury do środkowej studni jest możliwe dopiero przy napięciu  $V_0 + \Delta V$ . Jeżeli takie przejście nastąpi, to już następna dziura nie może się przedostać z powodu obniżonego przyciągania ze strony kwazicząstek znajdujących się w środkowej studni. Przez modulowanie napięcia pomiędzy  $V_0$  i  $V_0 + \Delta V$  można na zmianę wpuszczać  $m$ -ty (w zbudowanym urządzeniu 10-ty) elektron i pojedynczą dziurę. Jeżeli czas tunelowania i czas rekombinacji pary elektron-dziura są mniejsze od okresu zmian napięcia, to urządzenie wysyła po jednym fotonie na cykl.

Do zbudowania działającego według powyższego przepisu złącza GaAs/AlGaAs wykorzystano technikę epitaksji za pomocą wiązki molekularnej w połączeniu z m.in. litografią elektronową. Gotowe złącze umieszczono w temperaturze 50 mK w celu ograniczenia szumów termicznych (bez czego bariery kulombowskie by nie działały). Zgodnie z przewidywaniami zachowanie urządzenia stwierdzono, obserwując kwantyzację prądu płynącego przez złącze, odpowiadającą przechodzeniu dokładnie jednego, dwóch lub trzech elektronów na cykl, oraz mierząc opóźnienie między podniesieniem napięcia i rejestracją fotonu, wskazujące na wymuszanie emisji przez zmianę napięcia.

W ten sposób zademonstrowano długo poszukiwaną metodę generacji pojedynczych fotonów i serii określonej liczby fotonów. Następnym krokiem będzie obniżenie tła i podwyższenie efektywności urządzenia, w celu zastosowania go w powstającej informatyce kwantowej czy badaniu podstaw mechaniki kwantowej.

Może ktoś pokusi się o przesłanie takich fotonów przez ultra-zimny gaz atomów znajdujących się w stanie kondensacji Bosego–Einsteina. Okazuje się, że można na drodze kwantowej interferencji doprowadzić do tego, że prędkość światła w takim ośrodku może być porównywalna z prędkością dźwięku. Po szczegóły muszę, niestety, odesłać do oryginalnej pracy [4], w której zmierzona prędkość światła była jeszcze trochę większa i wynosiła aż 17 metrów na sekundę! I choć to brzmi nieprawdopodobnie, to nie jest to dowcip o kocie spadającym z prędkością światła (lampy naftowej z nim razem puszczonej). Dodatkowo przechodzenie światła przez taki ośrodek okazuje się być silnie nieliniowe (transmisja zależy np. od intensywności przepuszczanej wiązki), co może w przyszłości znaleźć zastosowanie praktyczne w optoelektronice. A swoją drogą to może do łapania pojedynczych wolnych fotonów wykorzystać odpowiednio szybkiego kota?

Piotr ZALEWSKI

- [1] J. Kim, O. Benson, H. Kan i Y. Yamamoto, *Nature* **397** (1999) 500.
- [2] P. Delsing, K.K. Likharev, L.S. Kuzmin i T. Claeson, *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2691.
- [3] A. Imamoglu i Y. Yamamoto *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 210.
- [4] Lene Vestergaard Hau, S.E. Harris, Zachary Dutton i Cyrus H. Behroozi, *Nature* **397** (1999) 594.

# Twierdzenie Cevy dla wielokątów

Tomasz ŻUKOWSKI

Na podstawie artykułu G.C. Shepharda  
*Pratt sequences and n-gons.*

Przeglądając elementarne twierdzenia dotyczące wielokątów, z pewnością zauważycie, że większość z nich dotyczy trójkątów, dużo mniej czworokątów, bardzo nieliczne pięcio- i sześciokątów, a prawie wcale nie ma ogólnych twierdzeń o dowolnych  $n$ -kątach. Na przykład, mamy całą serię twierdzeń mówiących, że pewne szczególne proste w trójkącie (wysokości, dwusieczne kątów wewnętrznych, środkowe, ...) przecinają się w jednym punkcie. Czy możliwe są uogólnienia tych twierdzeń na dowolne  $n$ -kąty?

Dociekliwy Czytelnik zauważy, że wspomniane wyżej twierdzenia są łatwymi do udowodnienia konsekwencjami klasycznego twierdzenia Cevy (*Delta* 11/1993, *Punkty szczególne trójkąta*). Gdyby tak mieć twierdzenie Cevy dla dowolnych wielokątów...

Przypominamy:

Niech punkty  $P, Q, R$  leżą, odpowiednio, na prostych  $AB, BC, AC$ , przy czym punkty  $A, B, C$  nie leżą na jednej prostej. Wówczas:

**1. Twierdzenie Cevy.** Proste  $PC, QA$  i  $RB$  przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1.$$

**2. Twierdzenie Menelaosa.** Punkty  $P, Q, R$  leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = -1.$$

Ustalmy definicje i oznaczenia:

Wielokątem  $P = [V_0, V_1, \dots, V_{n-1}]$  nazywać będziemy łamaną zamkniętą (dopuszczamy przecięcia boków) o wierzchołkach  $V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$  numerowanych cyklicznie, tzn. dla dowolnej liczby całkowitej  $k$ ,  $V_k$  utożsamiać będziemy z  $V_{k \bmod n}$ . Zakładamy, że żadne trzy kolejne wierzchołki  $V_{k-1}, V_k, V_{k+1}$  nie są współliniowe.

Dla równoległych wektorów  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{CD}$  definiujemy liczbę rzeczywistą

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{|AB|}{|CD|}, \text{ gdy wektory te mają zgodne zwroty i } \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{|AB|}{|CD|},$$

gdy mają zwroty przeciwne. Podobnie, dla dowolnego trójkąta  $[A, B, C]$  określamy pole ze znakiem  $S[A, B, C]$  tak, że  $S[A, B, C] = P[A, B, C]$ , gdy wierzchołki  $A, B, C$  następują w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara i  $S[A, B, C] = -P[A, B, C]$ , gdy wierzchołki  $A, B, C$  następują w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara.

W literaturze, pod nazwą Twierdzenie Cevy dla wielokątów, można znaleźć następujące

**Twierdzenie 1.** Dla nieparzystej liczby naturalnej  $n = 2s + 1$  i wielokąta  $P = [V_0, V_1, \dots, V_{n-1}]$  oraz dowolnego punktu  $O$ , nie leżącego na żadnej z prostych zawierających boki wielokąta  $P$ , niech  $U_i$  będzie punktem wspólnym prostej  $V_iO$  i  $V_{i+s}V_{i-s}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Wtedy

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{V_{i-s}U_i}}{\overrightarrow{U_iV_{i+s}}} = 1$$

**Dowód.** Pomijamy – udowodnimy twierdzenie ogólniejsze. ■

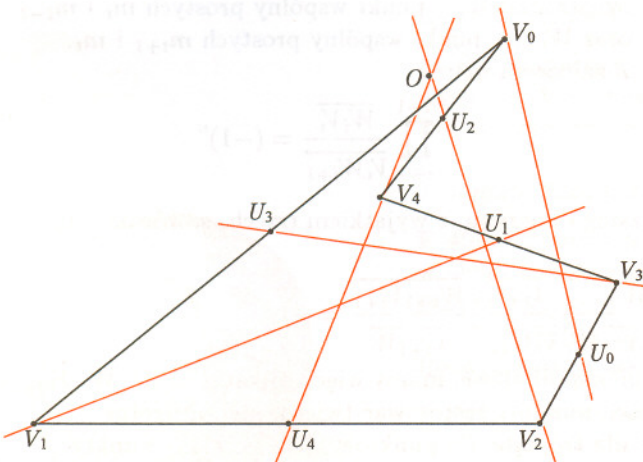
Powyższe twierdzenie jest dla nas bezużyteczne: potrzebujemy implikacji odwrotnej, a prosty przykład (rys. 1) wskazuje, że nie można jej oczekiwać.

**Definicja 1.** Skończony ciąg prostych  $(m_0, m_1, \dots, m_{n-1})$  nazywamy ciągiem Pratta dla wielokąta  $P = [V_0, V_1, \dots, V_{n-1}]$ , gdy:

- proste  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$  są różne,
- prosta  $m_i$  przechodzi przez wierzchołek  $V_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ,
- jeśli  $W_i$  jest punktem wspólnym prostych  $m_i$  i  $m_{i-1}$ , to zachodzi równość

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{W_iV_i}}{\overrightarrow{V_iW_{i+1}}} = 1 \quad (\text{lub } (-1)^n).$$

Liczbę 1 lub  $-1$ , występującą w warunku (c),



Rys. 1. Środkowe pięciokąta nie przecinają się w jednym punkcie.

nazywamy wartością stowarzyszoną z ciągiem Pratta. Dla  $n$  nieparzystych mamy zatem dwa rodzaje ciągów Pratta.

Wybermy liczbę naturalną  $r < \frac{n}{2}$  względnie pierwszą z  $n$ , a punkt wspólny prostych  $m_i$  oraz  $V_{i-r}V_{i+r}$  oznaczmy  $U_i$ .  $W_i$  niech oznacza tym razem punkt wspólny prostych  $m_i$  oraz  $m_{i-r}$ .

**Twierdzenie 2.** Przy wyżej wprowadzonych oznaczeniach

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{W_i V_i}}{V_i W_{i+r}} = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{V_{i+r} U_i}}{U_i V_{i-r}}.$$

**Dowód.** Rozważmy trójkąty  $[V_i, W_i, V_{i-r}]$  i  $[V_{i+r}, W_{i+r}, V_i]$  oraz wybierzmy jako podstawy tych trójkątów odcinki  $[W_i, V_i]$  i  $[V_i, W_{i+r}]$  (rys. 2 dla  $r = 1$ ). Wysokości opuszczone na wyróżnione boki są proporcjonalne do  $[U_i, V_{i-r}]$  i  $[U_i, V_{i+r}]$  (twierdzenie Talesa). Zatem

$$\frac{S[V_i, W_i, V_{i-r}]}{S[V_{i+r}, W_{i+r}, V_i]} = \frac{\overrightarrow{U_i V_{i-r}} \overrightarrow{W_i V_i}}{\overrightarrow{U_i V_{i+r}} \overrightarrow{V_i W_{i+r}}} = -\frac{\overrightarrow{V_{i-r} U_i} \overrightarrow{W_i V_i}}{\overrightarrow{U_i V_{i+r}} \overrightarrow{V_i W_{i+r}}}.$$

Po wymnożeniu  $n$  równań stronami otrzymujemy

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{S[V_i, W_i, V_{i-r}]}{S[V_{i+r}, W_{i+r}, V_i]} = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{V_{i-r} U_i} \overrightarrow{W_i V_i}}{\overrightarrow{U_i V_{i+r}} \overrightarrow{V_i W_{i+r}}}.$$

Lewa strona tej równości jest, oczywiście, równa 1, ponieważ iloczyn liczników różni się od iloczynu mianowników tylko porządkiem czynników. Po prostych przekształceniach otrzymujemy tezę. ■

**Wniosek.** Równość

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{V_{i+r} U_i}}{U_i V_{i-r}} = \pm 1$$

jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby ciąg  $(m_0, m_r, m_{2r}, \dots, m_{(n-1)r})$  był ciągiem Pratta z wartością stowarzyszoną  $\mp 1$ .

**Twierdzenie 3.** Jeżeli  $(m_0, m_1, \dots, m_{n-1})$  jest ciągiem Pratta z wartością stowarzyszoną  $(-1)^n$  dla  $n$ -kąta  $P$  i  $n-1$  spośród prostych  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$  przechodzi przez pewien punkt  $W$ , to  $n$ -ta prosta też przechodzi przez  $W$ . (Oznacza to, między innymi, że ciągi Pratta dla trójkątów składają się z prostych współpękowych.)

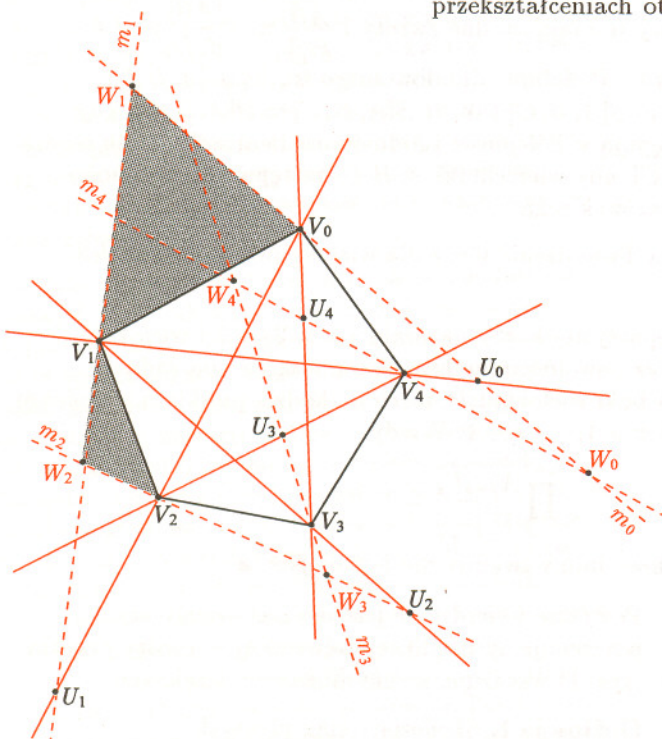
**Dowód.** Niech  $m_t$  będzie tą jedyną prostą nie przechodzącą przez punkt  $W$ . Wprowadźmy oznaczenia:  $W_t$  – punkt wspólny prostych  $m_t$  i  $m_{t-1}$  oraz  $W_{t+1}$  – punkt wspólny prostych  $m_{t+1}$  i  $m_t$ . Z założenia mamy

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{W_i V_i}}{V_i W_{i+1}} = (-1)^n.$$

Wszystkie czynniki powyższego iloczynu, z wyjątkiem trzech, są równe  $-1$ , zatem

$$\frac{\overrightarrow{W V_{t-1}} \overrightarrow{W_t V_t} \overrightarrow{W_{t+1} V_{t+1}}}{\overrightarrow{V_{t-1} W_t} \overrightarrow{V_t W_{t+1}} \overrightarrow{V_{t+1} W}} = -1.$$

Punkty  $W, W_t$  i  $W_{t+1}$  są niewspółliniowe, mamy więc trójkąt  $T = [W, W_t, W_{t+1}]$  i, wobec powyższej równości, możemy zastosować twierdzenie odwrotne do twierdzenia Menelaosa dla trójkąta  $T$  i punktów  $V_{t-1}, V_t, V_{t+1}$ . Punkty  $V_{t-1}, V_t, V_{t+1}$  są więc współliniowe, co przeczy przyjętemu założeniu o niewspółliniowości trzech kolejnych wierzchołków wielokąta  $P$ . ■



Rys. 2



Jesteśmy gotowi do sformułowania tytułowego twierdzenia uogólniającego klasyczne twierdzenie Cevy.

**Twierdzenie 4.** (Cevy dla wielokąta, G.C. Shephard 1998). Niech  $r < \frac{n}{2}$  będzie taką liczbą naturalną, aby  $r$  i  $n$  były względnie pierwsze. Dla każdego  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  wybierzmy punkt  $U_i$  należący do prostej  $V_{i-r}V_{i+r}$  (przekątnej lub boku wielokąta  $P = [V_0, V_1, \dots, V_{n-1}]$ ) i oznaczmy przez  $m_i$  proste  $V_iU_i$ . Wówczas  $(m_0, m_r, m_{2r}, \dots, m_{(n-1)r})$  jest ciągiem Pratta z wartością stowarzyszoną  $(-1)^n$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\overrightarrow{V_{i+r}U_i}}{\overrightarrow{U_iV_{i-r}}} = 1.$$

**Dowód.** Oczywiście. ■

Korzystając z tego twierdzenia, Czytelnik z łatwością sformułuje i udowodni wiele twierdzeń o wielokątach. Zachęcamy do prób.

## Pierwiastki sześcienne na kartce

Dla tych, którzy nie cierpią kalkulatorów itp. urządzeń, podajemy przepis na ręczne obliczanie pierwiastka sześciennego.

Aby wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby naturalnej  $n$ , dzielimy ją na grupy trzycyfrowe, zaczynając od prawej strony (ostatnia grupa z lewej może mieć jedną lub dwie cyfry). Liczba grup jest liczbą cyfr całkowitej części pierwiastka.

Pierwsza cyfra  $c_1$  liczby  $\sqrt[3]{n}$  to pierwiastek sześcienny z największego pełnego sześciangu, który nie przekracza pierwszej grupy. Odejmujemy ten sześciang od pierwszej grupy i spisujemy drugą grupę. Uzyskaną liczbę  $l$  dzielimy przez potrojony kwadrat pierwszej cyfry pierwiastka, a potem przez 100. Całkowita część wyniku jest drugą cyfrą pierwiastka (lub jest od drugiej cyfry pierwiastka o jeden większa).

Następnie od liczby  $l$  odejmujemy sześciang liczby utworzonej przez dwie znalezione cyfry pierwiastka i dodajemy 1000 sześciangów pierwszej cyfry pierwiastka. Z wynikiem postępujemy tak, jak poprzednio z liczbą  $l$ : dzielimy go przez potrojony kwadrat liczby utworzonej przez pierwsze dwie cyfry pierwiastka, a potem przez 100, znajdujemy trzecią cyfrę pierwiastka itp.

Jeśli ktoś chce znać wartość  $\sqrt[3]{n}$  z dokładnością do kilku miejsc po przecinku, musi liczbę  $n$  uzupełnić po przecinku dziesiętnym odpowiednią liczbą grup trzycyfrowych złożonych z samych zer, a potem cierpliwie rachować... Niechęć do urządzeń mechanicznych (albo niemożność ich wykorzystania) wymaga poświęceń – wyciąganie pierwiastków sześciennych przypomina pod tym względem zdobywanie Kasprowego piechotę z nartami na grzbiecie: nudno i ciężko, choć wiadomo, że da się to zrobić.

PS



## Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

**M 880.** Udowodnić, że liczb kończących się cyfrą 5, których cyfry w zapisie dziesiętnym tworzą ciąg niemalejący (idąc od lewej do prawej) i które po podniesieniu do kwadratu zachowują tę własność, jest nieskończenie wiele.  
Rozwiązanie na str. 15

**M 881.** Danych jest  $n$  liczb całkowitych ( $n > 1$ ). Wiadomo, że każda z nich różni się od iloczynu wszystkich pozostałych o liczbę będącą wielokrotnością liczby  $n$ . Udowodnić, że suma kwadratów tych liczb jest podzielna przez  $n$ .  
Rozwiązanie na str. 15

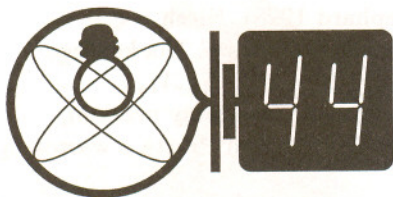
**M 882.** Udowodnić, że w dowolnym ciągu arytmetycznym  $(a_n)$  o wyrazach naturalnych istnieją dwa wyrazy o tej samej sumie cyfr.  
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 499.** Czy można posłużyć się kablem z cienkiego przewodu miedzianego w obudowie ołowianej do połączenia telefonicznego z balonem na uwięzi, który znajduje się na wysokości 300 m? Granica sprężystości ołowiu jest równa  $2 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ , a jego gęstość  $11,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .  
Rozwiązanie na str. 8

**F 500.** Lina stalowa, która wytrzyma ciężar nieruchomej kabiny windy, ma średnicę 9 mm. Jaką średnicę powinna mieć lina, jeżeli kabina windy przy gwałtownym zahamowaniu może uzyskać przyspieszenie do 8 g?  
Rozwiązanie na str. 5





Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VII 1999

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1999.

## Zadania z fizyki nr 278, 279

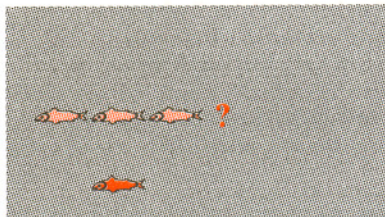
Redaguje Jerzy B. BROJAN



**278.** Oceń orientacyjnie minimalną prędkość jazdy na nartach wodnych. Przyjąć masę narciarza równą 70 kg, a łączną powierzchnię nart równą 0,4 m<sup>2</sup>.

**279.** Jak wiadomo, dla obserwatora patrzącego z nad wody obraz przedmiotów położonych w głębi wody znajduje się płycej. W podręcznikach ten efekt bywa jednak ilustrowany różnie. Czy dla obserwatora patrzącego ukośnie obraz ten jest:

- przesunięty względem przedmiotu tylko w pionie, czy również w poziomie, a jeśli tak, to w stronę obserwatora, czy w przeciwną (rys. 1)?
- położony głębiej, niż dla patrzącego z góry, płycej, czy dokładnie na tej samej głębokości?



Rys. 1

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1999

Przypominamy treść zadań:

**270.** Końce lekkiego, nierozciągliwego sznurka o wytrzymałości 50 N i długości 1 m są przywiązane do haczyków umocowanych na tym samym poziomie i odległych o 0,87 m. Ile wynosi maksymalna wartość ciężaru, który można zawiesić na tym sznurku i w którym miejscu należy go zaczepić? Ile wynosi maksymalna wartość ciężaru, który można zawiesić w dowolnym miejscu na tym sznurku i w którym miejscu zerwania jest największe?

**271.** Dane jest źródło stałego napięcia  $U$  i  $n$  jednakowych kondensatorów, które można łączyć w dowolny obwód, ładować ze źródła, rozłączać, łączyć ponownie, znów ładować itd. dowolną liczbę razy. Jakie maksymalne napięcie (maksymalne w sensie kresu górnego) można uzyskać w ten sposób?

**270.** Oznaczmy zawieszony ciężar przez  $P$ , a kąty nachylenia odcinków sznurka do poziomu przez  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 2). Z warunku równowagi sił w punkcie zawieszenia obliczamy siły napinające każdy z tych odcinków

$$N_1 = P \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad N_2 = P \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Na podstawie twierdzenia cosinusów można wyrazić kąty  $\alpha$  i  $\beta$  przez parametr  $x$  opisujący położenie punktu zaczepienia ciężarka. Numeryczna analiza tych zależności pozwala stwierdzić, że przy podanych wartościach liczbowych maksymalny ciężar można zaczepić w punkcie  $x = 0,148$  (lub też w symetrycznym punkcie  $x = 0,852$ ), a wartość tego ciężaru wynosi 50,71 N. Największe ryzyko zerwania wystąpi natomiast w punkcie  $x = 0,366$  (lub  $x = 0,634$ ), a dopuszczalna wartość ciężaru wynosi 47,32 N. (Autor nie potrafił ustalić, czy możliwa jest dalej idąca dyskusja analityczna lub geometryczna tego problemu – ale może poradzi sobie z tym problemem któryś z Czytelników? Były już w historii Ligi takie przypadki. . .)

**271.** Rozwiążemy zadanie metodą rekurencji.

Dla  $n = 0$  dysponujemy tylko danym źródłem, czyli  $U_0 = U$ .

Dla  $n = 1$  maksymalne napięcie osiągniemy, ładując kondensator ze źródła, a następnie dołączając go do źródła szeregowo – łączne napięcie będzie więc równe  $U_1 = 2U$ .

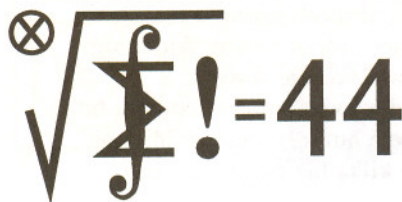
Podobnie postępujemy dalej: aby znaleźć napięcie  $U_{n+1}$ , skonstruujemy ze źródła i  $n$  kondensatorów baterię o napięciu  $U_n$  i dołączmy do niej następny kondensator. Oczywiście, bateria częściowo się rozładuje – zatem trzeba będzie ją odłączyć, naładować ponownie, znów przyłączyć do ostatniego kondensatora i powtórzyć tę operację odpowiednią liczbę razy. Ostatecznie naładujemy go do napięcia dowolnie bliskiego  $U_n$ , a po ponownym naładowaniu zespołu pozostałych do napięcia  $U_n$  możemy całość zestawzić szeregowo. Stąd  $U_{n+1} = 2U_n$ , czyli  $U_n = 2^n \cdot U$ .

Czołówka ligi zadaniowej

### Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 266 ( $WT=2,65$ ) i 267 ( $WT=2,73$ )  
z numeru 11/1998

Jarosław Łazuka	- Warszawa	42,31
Marek Wójcicki	- Szczecin	41,14
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	27,31
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	22,08
Aleksander Surma	- Myszków	18,07



Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 VII 1999

## Zadania z matematyki nr 381, 382

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**381.** Mamy dwie identyczne talie po  $n$  kart ( $n \geq 3$ ); na kartach każdej talii są napisane liczby od 1 do  $n$ , po jednej na każdej karcie. Przy okrągłym stole siedzi  $n$  osób; każda trzyma dwie karty. Co sekundę każda osoba podaje kartę z większą liczbą sąsiadowi z prawej strony (ruch jest wykonywany jednocześnie przez wszystkie  $n$  osób). Zabawa się kończy, gdy któraś z osób ma w ręce dwie jednakowe karty. Wyznaczyć wszystkie wartości  $n$ , dla których opisany proces może trwać nieskończenie. (Nie bierzemy pod uwagę czynników „niematematycznych”, jak np. śmierć uczestnika, zaśnięcie lub odmowa dalszego uczestnictwa w owej rozrywce, itp.)

**382.** Ciąg  $(a_n)$  jest określony wzorami:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = a_2 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_n = -\frac{3}{7}a_{n-1} - \frac{3}{7}a_{n-2} + \frac{4}{7}a_{n-3} \quad \text{dla} \quad n \geq 3.$$

Czy szereg  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  jest zbieżny?

Zadanie **382** zaproponował pan Mirosław Matłega ze Skoczowa.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1999

Przypominamy treść zadań:

**373.** Niech  $J$  będzie zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych większych od 1. Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f: J \rightarrow J$  spełniające warunek

$$(f(x^p y^q))^4 \leq f(x)^{1/p} f(y)^{1/q} \quad \text{dla} \quad x, y > 1 \quad \text{oraz} \quad p, q > 0.$$

**374.** Czy istnieje liczba całkowita  $k \geq 1$ , dla której iloraz  $\frac{5^5 k^{10} - 1}{5k^2 - 1}$  jest liczbą pierwszą?

**373.** Niech  $f$  będzie jedną z szukanych funkcji. Przyjmijmy:  $h(t) = \ln f(e^t)$ .

W podanej nierówności podstawiamy  $x = e^s$ ,  $y = e^t$  ( $s, t > 0$ ) i sprowadzamy warunek nałożony na funkcję  $f$  do równoważnej postaci

$$(*) \quad 4h(ps + qt) \leq \frac{h(s)}{p} + \frac{h(t)}{q} \quad \text{dla} \quad s, t, p, q > 0.$$

Podstawiając teraz  $p = 1/2$ ,  $q = s/2t$ , otrzymujemy nierówność

$$sh(s) \leq th(t) \quad \text{dla} \quad s, t > 0.$$

Wobec symetrii ról zmiennych  $s, t$  nierówność ta musi być faktycznie równością, co oznacza, że funkcja  $t \mapsto th(t)$  jest stała. Tak więc  $h(t) = c/t$  dla pewnej stałej  $c > 0$ . Na odwrót, jeśli  $h$  jest funkcją takiej postaci, to warunek (\*) jest po prostu nierównością między średnią harmoniczną i średnią arytmetyczną liczb  $c/ps$  i  $c/qt$  – jest więc spełniony.

Wzór  $h(t) = c/t$  ( $c > 0$ ) przedstawia zatem ogólne rozwiązanie nierówności (\*).

Wobec tego ogólna postać funkcji  $f$  spełniającej warunek zadania jest dana wzorem  $f(x) = a^{1/\ln x}$ , gdzie  $a = e^c$  jest dowolną stałą większą od 1.

**374.** Niech  $k \geq 1$  będzie dowolną liczbą naturalną. Oznaczmy:  $5k^2 = m$ .

Przekształcamy rozważany iloraz:

$$I = \frac{m^5 - 1}{m - 1} = m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = A^2 - B^2,$$

gdzie  $A = m^2 + 3m + 1$ ,  $B = (m + 1)\sqrt{5m} = 5k(m + 1)$ .

Otrzymujemy rozkład na czynniki całkowite:

$I = (A + B)(A - B)$ ; przy tym  $A - B > 1$ , bo  $m^2 \geq 5km$ ,  $3m > 5k$ . Zatem iloraz  $I$  nigdy nie jest liczbą pierwszą.

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 365 (WT=2,08) i 366 (WT=2,17)  
z numeru 9/1998

Maciej Mostowski	- Warszawa	47,09
Witold Bednorz	- Tychy	43,87
Zbigniew Skalik	- Pyskowice	42,45
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	42,19
Witold Bednarek	- Łódź	41,70
Bogumila Piotrowska	- Zielona Góra	37,24

Nowa twarz w **Klubie 44 M**: pan Maciej Mostowski.



### Rozwiązanie zadania M 880.

Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  niech  $a_n = \underbrace{3 \dots 3}_n 5$ . Cyfry liczb  $a_n$  tworzą ciąg

niemalejący. Poza tym,  $a_n = \frac{10^{n+1} + 5}{3}$ . Łatwo sprawdzić, że

$$\left(\frac{10^{n+1} + 5}{3}\right)^2 = (10^{2n+1} + 10^{2n} + \dots + 10^{n+2}) + 2(10^{n+1} + \dots + 10) + 5,$$

czyli  $a_n^2 = \underbrace{1 \dots 1}_n \underbrace{2 \dots 2}_{n+1} 5$ . Liczby  $a_n$  spełniają więc warunki zadania.



### Rozwiązanie zadania M 881.

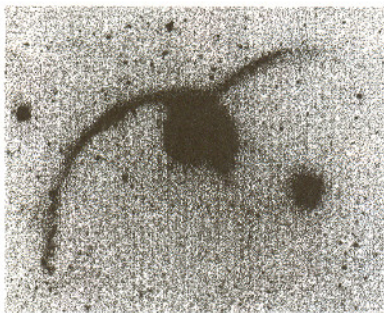
Oznaczmy dane liczby przez  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

Niech  $c_1 \dots c_n = k$ . Z treści zadania wynika, że  $c_i - \frac{k}{c_i} = k_i n$ , gdzie liczby  $k_i$  są całkowite ( $i = 1, \dots, n$ ). Zatem, mamy  $c_i^2 = k + k_i n c_i$ .

Po zsumowaniu stronami wszystkich  $n$  równości dostajemy

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 = nk + n \sum_{i=1}^n k_i c_i = n \left( k + \sum_{i=1}^n k_i c_i \right).$$





Przedstawiliśmy już kiedyś (*Delta* 9/1985) parę galaktyk przenikających się wzajemnie; były to NGC 4038 i 4039, tworzące zespół zwany Antenami. Ich wzajemne działanie pływowe spowodowało wyrzucenie dwóch charakterystycznych strug gwiazd i materii międzygwiazdowej i nawet udało się przebieg tego zderzenia galaktyk wymodelować numerycznie. Ponieważ prezentowaliśmy to dość dawno, przypominamy kilka faz przebiegu tego zjawiska.

Po roku 1985 okazało się jednak, że to wszystko nie jest takie proste. Mianowicie sprawa skomplikowała się, gdy grupa badaczy z University of California postanowiła wymodelować to samo zjawisko z uwzględnieniem obecności w galaktykach niewidocznej materii, której ilość – jak się obecnie uznaje – wielokrotnie przekracza ilość materii widocznej. Okazało się, że tak długie i cienkie strugi „anten” powstają, gdy ilość ciemnej materii jest nie większa niż 10 razy tyle, co widocznej. Jeżeli jest jej 15–30 razy więcej, to przy zderzeniu galaktyk strugi są grube i krótkie oraz szybko opadają na zderzające się galaktyki. Np. ilość ciemnej materii w naszej Galaktyce jest prawdopodobnie w tym drugim przedziale, dlatego przy domniemanym spotkaniu jej z M 31 (Wielką Mgławicą Andromedy) 3 miliardy lat temu nic podobnego do „anten” nie powinno powstać.

Wierzmy, że nasza Galaktyka jest galaktyką typową, M 31 raczej też. Nic więc dziwnego, że w ich przypadku oraz w wyniku losowych spotkań innych typowych galaktyk struktury podobne do „anten” nie powstają. Widocznie w przeważającej liczbie przypadków powstają strugi krótkie, rozmyte i szybko zanikające, przez co przebiegu tych zderzeń nie daje się tak łatwo odtworzyć. Z drugiej jednak strony obecność Anten dowodzi, że istnieją też galaktyki o nietypowo niskiej zawartości ciemnej materii. Jeżeli to wszystko jest prawdą, to byłibyśmy w dość dziwnej sytuacji, mając pierwsze informacje o rozkładzie ciemnej materii, nie mając natomiast ciągle żadnych informacji o jej naturze fizycznej.

Tomasz KWAST

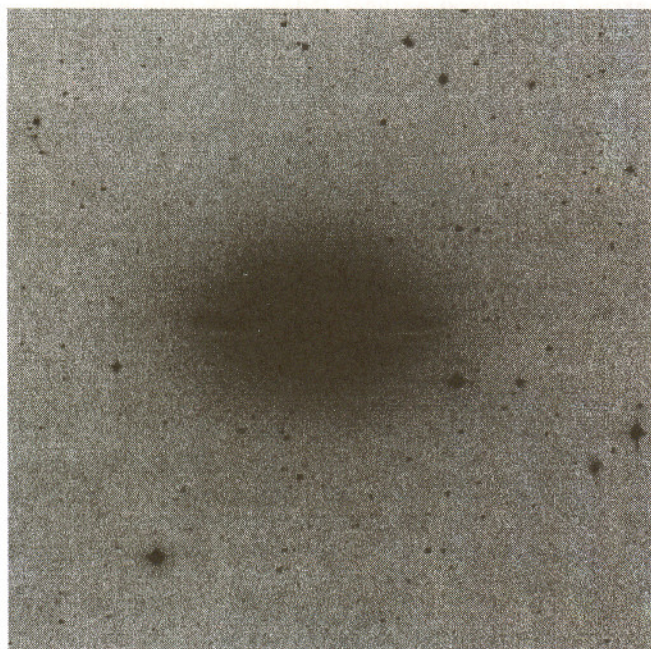
## Maj

Wieczorem nadal prawie w zenicie widzimy Wielką Niedźwiedzicę. Przedłużając w kierunku południowo-wschodnim łuk utworzony przez jej ogon, trafiamy w dwie bardzo jasne gwiazdy, najpierw

w Arktura, alfę Wolarza, a przedłużając ten łuk jeszcze dalej – w Spikę, alfę Panny. Między Wielką Niedźwiedzicą a Panną leżą dwa gwiazdozbiory: Psy Gończe i Warkocz Bereniki, oba trudne do rozpoznania, gdyż nie zawierają jasnych gwiazd. Obszar ten wygląda przez to nieciekawie i nawet lornetka nie zmieni tej opinii. Tymczasem jest to jeden z najwytrwalej badanych obszarów nieba, ponieważ w Warkoczu Bereniki znajduje się odległa o 100 Mpc dość bogata gromada galaktyk (gromada Coma licząca około 1000 członków), a w Pannie jeszcze bliższa i jeszcze bogatsza (gromada Virgo), na której peryferiach leży nasza Galaktyka. Mając przynajmniej mały teleskop, można próbować odszukać najjaśniejsze galaktyki tych gromad. W gromadzie Coma będzie to M 64 (Czarne Oko) o jasności 8,5 mag, a w Virgo M 49 (8,4 mag) i M 104 (Sombrero, 8,3 mag).

Wenus w maju przechodzi z Byka do Bliźniąt, czyli jeszcze bardziej oddala się od Słońca, przez co widać ją wieczorem coraz dogodniej. Mars cofnął się do Panny, ponieważ dogoniła go Ziemia i widać go przez całą noc, a 1 V znajdzie się najbliżej Ziemi. Jowisz jest nadal w Rybach, a Saturn w Baranie, obu więc planet nie widać. Nów Księżyca wypada 15 V, a pełnia 30 V. Księżyc zbliży się mocno do Aldebarana (16 V) i do Regulusa (22 V), ale zakryć nie będzie.

T.K.



Galaktyka Sombrero

## JUBILEUSZ GAMMALIMATIASU

Γ-limatias obchodzi skromny jubileusz – ukazuje się po raz [ $\sqrt{300}$ ]. Z tej okazji małe co nieco o liczbie 300.

1. Zgodnie z małym twierdzeniem Fermata dla dowolnej nieparzystej liczby pierwszej  $p$  zachodzi podzielność  $p|2^{p-1} - 1$ . Natomiast gdy liczba  $p$  jest nieparzystą liczbą złożoną, to zachodzi podzielność  $p|2^{\varphi(p)} - 1$ , gdzie  $\varphi$  jest funkcją Eulera. Dla niektórych liczb złożonych mamy jednak również  $p|2^{p-1} - 1$ . Jeśli  $p$  jest najmniejszą taką liczbą, to  $\varphi(p) = 300$ .

2. Każdy kąt można przy użyciu cyrkla i linijki podzielić na dwa równe kąty. Natomiast konstrukcja  $1/3$  danego kąta przy użyciu cyrkla i linijki w ogólnym przypadku nie jest możliwa. Można jednak skonstruować  $1/5$  kąta, i to bez użycia cyrkla i linijki. Oczywiście pod warunkiem, że dany kąt ma  $300^\circ$ .

3. Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  liczba  $n^{22} - n^2$  dzieli się przez 300.

4.  $300 = 44 + 4^4$ .

5.  $300 = 5(55 + 5)$ .

6.  $300 = \binom{41+\frac{3}{4}}{\sqrt{4}}$ .

7. Cecha podzielności przez 300. Podziel liczbę na grupy 4-cyfrowe, zaczynając od prawej strony (grupa najbardziej na lewo może mieć mniej niż 4 cyfry). Dodaj liczby utworzone przez te grupy. Tak otrzymana suma dzieli się przez 300 z taką samą resztą jak wyjściowa liczba. Pewna niedogodność: to wszystko działa w układzie siódmkowym i odnosi się do liczby  $300_{(10)} = 606_{(7)}$ .

8. Potęga dwójki o wykładniku podzielnym przez 10 lubi rozpoczynać się cyfrą 1. Pierwszy wyjątek:

$$2^{300} = 2037035976334486086268445688409378161051468393665936250636140449354381299763336706183397376.$$

9.  $300 = 99\sqrt{9} + \sqrt{9}$ .

10. W ciągu Fibonacciego ( $F_1 = F_2 = 1$ ,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ) występują wyrazy zawierające w swoim zapisie dziesiętnym ciągi złożone z 4 kolejnych jednakowych cyfr. Pierwszy wyraz, który zawiera takie 2 rozłączne ciągi, to  $F_{300} = 222232244629420445529739893461909967206666939096499764990979600$ .

JWR

## MIEDZY NAMI OSZUSTAMI (14")

*Wyjaśnienie oszustwa (14')*: Kwiecień to miesiąc Prima-Aprilisy, a więc wyjaśnienia oszustw podawane w kwietniowych numerach Γ-limatiasu powinny być czytane ze szczególną uwagą.

W wyjaśnieniu oszustwa nie uwzględniliśmy sytuacji, w której równanie

$$x^2 + ax = 2x^2 + 3x + 1$$

ma dwa rozwiązania, ale tylko dla jednego z nich obie strony są dodatnie, a więc dają rozwiązanie równania danego w zadaniu.

Otóż  $\Delta > 0$  dla  $a \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ . Oznaczając  $b = 3 - a$ , otrzymujemy równanie kwadratowe  $x^2 + bx + 1 = 0$ , przy czym interesuje nas przypadek  $|b| > 2$ . Równanie ma wówczas rozwiązania

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}.$$

Chcemy rozstrzygnąć, dla jakich  $b$  dokładnie jedna z liczb

$$L_{1,2} = x_{1,2}^2 + (3 - b)x_{1,2}$$

Zauważmy, że  $L_{1,2} = x_{1,2}(x_{1,2} + 3 - b)$  oraz

$$x_{1,2} + 3 - b = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2} + 3 - b = \frac{6 - 3b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}.$$

Dla  $b < -2$  mamy  $6 - 3b \pm \sqrt{b^2 - 4} > 6 - 2b > 0$  i wobec  $x_{1,2} > 0$  mamy  $L_{1,2} > 0$ , skąd wniosek, że wyjściowe równanie ma dwa rozwiązania.

Natomiast dla  $b > 2$  mamy  $6 - 3b - \sqrt{b^2 - 4} < 0$ , skąd wobec  $x_{1,2} < 0$  jest  $L_2 > 0$ . Ponadto rozwiązując nierówność  $6 - 3b + \sqrt{b^2 - 4} \geq 0$ , otrzymujemy  $6 - 3b \geq -\sqrt{b^2 - 4}$ , co po podniesieniu do kwadratu (obie strony są ujemne, więc zmieniamy zwrot nierówności) daje  $36 - 36b + 9b^2 \leq b^2 - 4$ , i dalej  $0 \geq 8b^2 - 36b + 40 = 4(2b - 5)(b - 2)$ , skąd  $2 < b \leq \frac{5}{2}$ . Wówczas  $L_1 \leq 0$  i wyjściowe równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, a mianowicie  $x_2$ . Pozostaje zauważyć, że  $2 < b \leq \frac{5}{2}$  odpowiada  $\frac{1}{2} \leq a < 1$ . W połączeniu z rozważaniami z poprzedniego numeru Γ-limatiasu otrzymujemy ostateczną i tym razem poprawną odpowiedź: równanie

$$\log_7(x^2 + ax) = \log_7(2x^2 + 3x + 1)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste  $x$  dla  $a \in [\frac{1}{2}, 1) \cup \{5\}$ .

JWR

## GRY (2)

Znajdowanie wygrywającego ruchu w grze Nim wyjaśnimy na przykładzie. Przypuśćmy, że mamy wykonać ruch w sytuacji, gdy przed nami są 4 stosy składające się odpowiednio z 13, 7, 6 i 9 bierek. Obliczamy sumę dwójkową  $13 +_2 7 +_2 6 +_2 9 = 5$ . Cieszy nas, że jest ona różna od 0, bo to oznacza, że jesteśmy na wygrywającej pozycji. Chcemy wykonać taki ruch, aby dwójkowa suma liczb bierek w poszczególnych stosach była równa 0.

Skoro dwójkowa suma liczb bierek jest równa 5, a chcemy z niej zrobić 0, to trzeba do któregoś stosu dwójkowo dodać 5 bierek. Próbujemy kolejno:  $13 +_2 5 = 8$ ,  $7 +_2 5 = 2$ ,  $6 +_2 5 = 3$ ,  $9 +_2 5 = 12$ . Biorąc pod uwagę, że dozwolone są tylko te ruchy, które zmniejszają liczbę bierek, widzimy, że mamy aż 3 ruchy wygrywające: zabrać 5 bierek z I stosu lub 5 bierek z II stosu, lub 3 bierki z III stosu. Gdybyśmy natomiast chcieli wykonać ruch, zmieniając liczbę bierek w IV stosie, to musielibyśmy dołożyć 3 bierki, a na to reguły gry nie pozwalają.

JWR