

Trwa jubileusz XXV lat *Delty*:
6 czerwca 1973 roku powołano redakcję *Delty*,
8 grudnia odbyło się pierwsze posiedzenie Komitetu Redakcyjnego
Delty, na którym przedstawiono próbną numer miesięcznika,
1 stycznia 1974 roku ukazał się w kioskach w nakładzie 30 tys.
 egzemplarzy, w cenie 5 zł, pierwszy numer *Delty*.

XXV lat powinien zamknąć numer 300 miesięcznika, jednak w okresie parcelacji RSW straciliśmy pięć numerów, tak więc numer taki ukaże się jako 5/1999.

Składając Czytelnikom najserdeczniejsze jubileuszowe życzenia, informujemy, iż od czerwca 1998 do maja 1999 w każdym numerze przypominamy coś z dawnych lat.

Ten okazjonalny dział nazywa się **Stara Delta**.

SPIS TREŚCI NUMERU 2(297)

| | |
|--|--------|
| Dzień i noc na planetach Układu Słonecznego <i>Grzegorz Derfel</i> | str. 1 |
| Zadania | str. 3 |
| Tajemnice brakujących neutrin <i>Danuta Kietczewska</i> | str. 4 |
| Zadania prawie identyczne i prawie rozwiązane | str. 6 |
| Suma pewnego szeregu | str. 7 |
| Mała Delta | str. 8 |
| Aktualności (nie tylko) fizyczne | str. 9 |
| Przygoda w fizyce <i>Marian Danysz</i> | str.10 |
| Klub 44 | str.11 |
| Patrz w niebo | str.16 |
| Luty | str.16 |
| Gammalimatias | str.17 |

W następnym numerze:

Zagadki logiczne R.M. Smullyana

Okładki wykonała
Anna Ludwicka

Wybór artykułów z *Delty*
 ukazuje się w języku angielskim
 w sieci Internet pod adresem

<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 3 zł

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
 Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
 Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichocki
 – wiceprzewodniczący
 Krzysztof Ciesielski
 Jan A. Gaj
 Piotr Goldstein
 Tomasz Hofmokl
 Andrzej Hryniewicz
 Wiesław A. Kamiński
 Marta Kicińska-Habior
 Krzysztof Maślanka
 Andrzej Mąkowski
 Zdzisław Pogoda
 Feliks Przytycki
 Michał Różyczka
 Konrad Rudnicki
 Zbigniew Semadeni
 Grzegorz SitarSKI
 Andrzej Woszczyk
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
 Wiktor Bartol
 Krzysztof Biesaga
 Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nac.
 Tomasz Kwast
 Anna Ludwicka
 Anna Rudnik
 Paweł Strzelecki
 Joanna Udalska
 Anna Wojtyra
 Piotr Zalewski

Adres Redakcji:
 ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
 tel. 843-02-41(-2) wewn. 21
 PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej
 w Warszawie, ul. Mińska 65.
 Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
 prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena
 jednego numeru w 1999 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu
 prenumeraty.
 W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
 cena numeru w 1999 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.
Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje
 dodatkowo jeden egzemplarz pisma.
 Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na II kwartał 1999 r. wynosi 9 zł.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
- Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest równa cenie prenumeraty krajowej plus rzeczywiste koszty wysyłki. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
- Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

| | | |
|---------|----------------------------|-------------------------------|
| krajową | ze zleceniem za granicę | |
| 5 XII | 20 XI | na I kwartał roku następnego, |
| 5 III | 20 II | na II kwartał, |
| 5 VI | 20 V | na III kwartał, |
| 5 IX | 20 VIII | na IV kwartał. |
- Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numer archiwalne (od 1985 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Dzień i noc na planetach Układu Słonecznego

Grzegorz DERFEL

Wędrowkę Słońca po sklepieniu niebieskim traktujemy jako dobrze znany rys codzienności. Jej osobliwości, takich jak wielomiesięczny „dzień polarny” lub fakt, że w południe Słońce znajduje się w północnej części nieba, nie da się wprawdzie doświadczyć na naszych szerokościach geograficznych, lecz zdajemy z nich sobie doskonale sprawę. Bardziej subtelne szczegóły ruchu pozornego Słońca (opisane np. w *Delcie* 3/1987 i 3/1989), a związane z eliptycznością orbity Ziemi, wymagają już uważnych obserwacji i pomiarów.

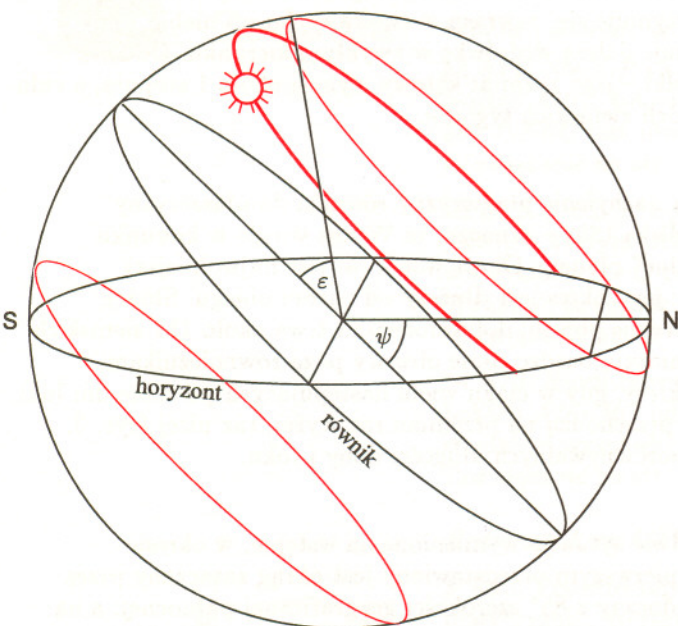
W artykule tym zastanowimy się nad tym, jak ruch Słońca wyglądałby z punktu widzenia obserwatorów przebywających na innych planetach Układu Słonecznego. Przedstawimy go w sposób przybliżony, wystarczający dla zaznaczenia różnic i podobieństw w stosunku do naszych ziemskich doświadczeń. W tym celu założymy, że planety krążą po orbitach kołowych ruchem jednostajnym. (W odniesieniu do Merkurego zrezygnujemy z tego założenia.)

W przypadku czterech gazowych olbrzymów musimy wyobrazić sobie, że obserwator znajduje się w górnych partiach ich atmosfer, skąd Słońce może być widoczne. Pominiemy też różnice w prędkościach obrotu na różnych szerokościach geograficznych tych planet.

W przypadku Wenus przedstawiony niżej opis ma charakter raczej teoretyczny, gdyż tarcza słoneczna nie jest widoczna z powierzchni planety spowitej grubą warstwą chmur.

Pojęcie dnia i nocy traci też swój potoczny charakter w odniesieniu do najdalszych mrocznych globów, Neptuna i Plutona, z których Słońce widoczne jest jako gwiazda (jednak wystarczająco jasna, aby jej światło odbite przez te planety, było dostrzegalne przez ziemskie teleskopy).

Pozorny ruch Słońca po sferze niebieskiej wynika ze złożenia dobowego ruchu obrotowego sfery niebieskiej z ruchem obrotowym związanym z okążaniem Słońca przez planetę. W ogólności Słońce odbywa ten ruch po zawilej linii spiralnej „nawiniętej” na sferę niebieską. Spirala ta mieści się w całości między okręgami wyznaczonymi przez maksymalną i minimalną wartość deklinacji Słońca $\delta = \pm \varepsilon$, gdzie ε jest kątem nachylenia płaszczyzny równika planety względem płaszczyzny jej orbity. (W szczególnym przypadku, gdy $\varepsilon = 0$, spirala staje się okręgiem.) Widoczne za dnia łuki zakreślane przez Słońce są fragmentami tej linii wystającymi nad horyzont. Rysunek 1 pokazuje, jak te łuki powstają z przecięcia sfery niebieskiej płaszczyzną nachyloną pod kątem ψ względem równika, czyli płaszczyzną horyzontu na szerokości geograficznej $\phi = 90^\circ - \psi$. Osobliwy – bo niepodobny do ziemskiego – ruch Słońca ma miejsce wtedy, gdy kąt nachylenia ε przyjmuje wartość znacznie odbiegającą od swojskich 23° lub gdy okresy obu składowych ruchów obrotowych są porównywalne.



Rys. 1

Na powierzchni planety można wyróżnić rejony polarne wyznaczone kołami podbiegunowymi, złożone z miejsc, w których dzień lub noc mogą trwać dłużej niż dobę. Ruchy Słońca widziane z takich punktów różnią się jakościowo od ruchów ograniczonych codziennymi wschodami i zachodami, jakie obserwuje się z miejsc położonych między kręgami polarnymi.

Na kolejnych rysunkach są pokazane tory, jakie Słońce zatacza na niebie kolejnych planet, obliczone dla dni wybranych tak, aby dać przykłady co ciekawszych przypadków. Parametry planet, brane pod uwagę, zgromadzone są w tabelce.

| Planeta | Okres obrotu | Okres obiegu | Kąt ϵ między płaszczyzną orbity i płaszczyzną równika |
|---------|---|---------------------|--|
| Merkury | 58 ^d 15 ^h 30 ^m | 88,027 ^d | 0,00° |
| Wenus | 243 ^d 27 ^m | 224,6 ^d | 177,36° |
| Ziemia | 23 ^h 56 ^m | 365,26 ^d | 23,44° |
| Mars | 24 ^h 37 ^m | 687,05 ^d | 25,19° |
| Jowisz | 9 ^h 55 ^m | 4332,7 ^d | 3,13° |
| Saturn | 10 ^h 39 ^m | 10759 ^d | 25,07° |
| Uran | 17 ^h 14 ^m | 30685 ^d | 97,86° |
| Neptun | 16 ^h 6 ^m | 60187 ^d | 28,31° |
| Pluton | 6 ^d 9,3 ^h | 90474 ^d | 122,51° |

1. Merkury

Ponieważ oś obrotu jest prawie dokładnie prostopadła do płaszczyzny orbity, na Merkurym nie ma pór roku. Słońce wschodzi dokładnie na wschodzie i zachodzi dokładnie na zachodzie (rys. 2, $\phi = 40^\circ$). Na każdej szerokości geograficznej dzień i noc trwają tyle samo. Z powodu działania sił przyptywowych ustalił się rezonans między okresem obrotu planety wokół osi a okresem jej obiegu wokół Słońca, wyrażający się stosunkiem 2 : 3. Doba gwiazdowa Merkurego liczy nieco ponad 58 dób ziemskich, podczas gdy jego rok gwiazdowy – 88. Wskutek tego dzień i noc zajmują następujące po sobie lata merkuriańskie na przemian i doba słoneczna na Merkurym trwa dwa takie lata. Orbita Merkurego ma największy mimośród spośród wszystkich planet Układu Słonecznego, wynoszący $e = 0,206$. Wiąże się z nim znacząco niejednostajny ruch planety po orbicie. W peryhelium prędkość kątowna w ruchu orbitalnym jest większa niż prędkość kątowna w ruchu wirowym. Konsekwencją takiej relacji jest niezwykła anomalia w pozornym ruchu Słońca po sklepieniu niebieskim. W okresie, gdy Merkury zbliża się do peryhelium, Słońce zatrzymuje się, zawraca w swoim ruchu po niebie, znów zatrzymuje się i podejmuje dalszą wędrówkę w zwykłym kierunku. Odcinek ruchu wstecz jest niewielki – jego rozmiar kątowny wynosi około 1 stopnia, a cała ewolucja trwa około dwóch ziemskich tygodni.

2. Wenus

Osobliwością Wenus jest nachylenie płaszczyzny równika do płaszczyzny orbity. Jego wartość – bliska 180° – oznacza, że Wenus wiruje w kierunku przeciwnym niż „normalne” planety. Obrót wokół osi jest najwolniejszy w Układzie Słonecznym: jego okres jest dłuższy od okresu obiegu. Słońce przesuwa się po niebie Wenus powoli: doba słoneczna trwa około 117 ziemskich dni. Kręgi polarne ograniczają bardzo małe obszary poza równoleżnikami $\pm 87,36^\circ$. Zdarzają się okresy, gdy w ciągu wielu następujących po sobie dni łuki, zataczane przez Słońce, przechodzą na przemian raz wyżej, raz niżej (rys. 3, $\phi = 50^\circ$). Jest to efekt porównywalnych długości doby i roku.

3. Ziemia

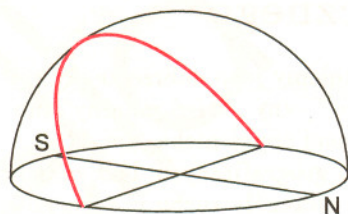
Rysunki 4 i 5 ilustrują dwie sytuacje wymienione na wstępie, w okresie przesilenia letniego. Na pierwszym przedstawiony jest okrąg zataczany przez Słońce w ciągu doby, widoczny z 85° szerokości geograficznej północnej, a na drugim łuk, widoczny z 40° szerokości geograficznej południowej ze Słońcem przemierzającym północną połowę nieba.

4. Mars

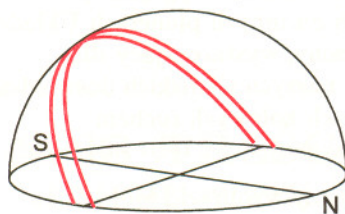
Kąt ϵ Marsa jest bliski kątowni dla Ziemi. Z jego powierzchni widzielibyśmy bardzo „ziemski” w charakterze ruch Słońca.

5. Jowisz

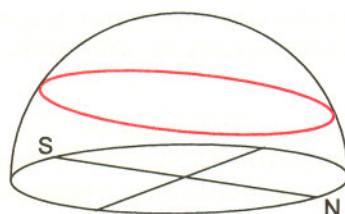
Małe nachylenie płaszczyzny równika względem płaszczyzny orbity i najszybszy w Układzie Słonecznym ruch wirowy to dwie cechy decydujące o charakterze ruchu Słońca na niebie Jowisza. Nawet w okresie przesilenia punkty wschodów i zachodów nie są znacząco odsunięte od kierunków E i W (rys. 6, $\phi = 0^\circ$).



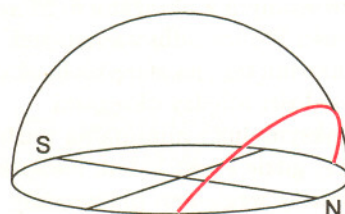
Rys. 2



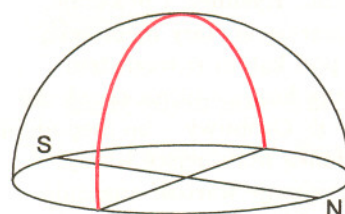
Rys. 3



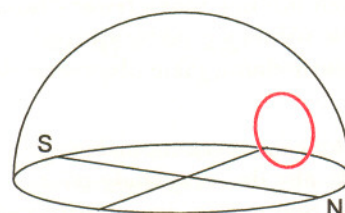
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

6. Saturn i Neptun

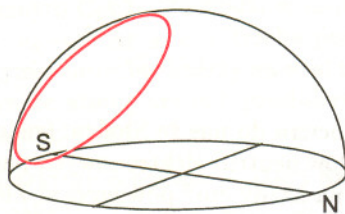
Planety te charakteryzują się kątami ϵ nieco tylko większymi od ziemskiego. Rozkład łuków zakreślanych przez Słońce jest więc podobny, lecz cała linia spiralna jest „nawinięta” znacznie ściślej.

7. Uran

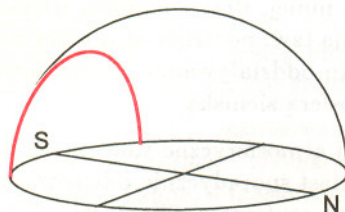
Uran wyróżnia się kątem nachylenia ϵ bliskim 90° . Kręgi polarne nie odpowiadają swojej nazwie, ponieważ są nimi równoleżniki $\pm 7,86^\circ$, a więc bliskie równika. Oznacza to, że na prawie całej planecie mogą występować dnie i noce polarne. Rysunki 7 i 8 przedstawiają przykłady okręgów zataczanych przez Słońce w ciągu doby podczas trwających kilkadziesiąt ziemskich lat dni polarnych, odpowiednio dla 20° szerokości północnej i 40° szerokości południowej. Zwrotniki Urana przesunięte są w okolice biegunów. Dzięki temu nad przeważającymi obszarami zdarza się górowanie Słońca w zenicie.

9. Pluton

W przypadku Plutona kręgi polarne wypadają na nieco mniejszej szerokości niż na Ziemi. Doba jest stosunkowo długa. Rysunek 9 pokazuje widok z równika w okresie przesilenia „zimowego”.



Rys. 8



Rys. 9



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

Wbrew pozorom, w tym miesiącu wszystkie zadania są o jednokładności.

M 871. Niech R i r będą promieniami okręgu opisanego i wpisanego w dany trójkąt ABC . Udowodnić, że $R \geq 2r$ i równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\triangle ABC$ jest równoboczny.

Rozwiązanie na str. 10

M 872. Niech K będzie okręgiem opisanym na trójkącie równoramiennym ABC , w którym $|AB| = |BC|$, a S – okręgiem stycznym do boków AB i BC w punktach P i Q odpowiednio, oraz wewnątrz do okręgu K w punkcie D . Wykazać, że środek odcinka PQ jest środkiem koła wpisanego w $\triangle ABC$.

Rozwiązanie na str. 11

M 873. Niech czworokąt $ABCD$ będzie kwadratem. Punkty P i Q leżą na bokach AB i BC odpowiednio, przy czym $|BP| = |BQ|$. Niech H będzie spodkiem wysokości trójkąta PBC opuszczonej z B . Wykazać, że $\angle DHQ = 90^\circ$.

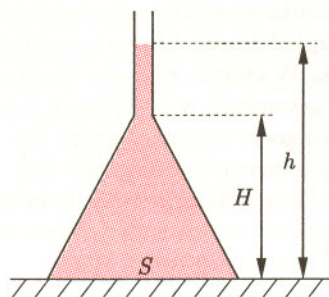
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 493. Przewrócony stożkowy lejek postawiono na równej poziomej płaszczyźnie. Węższy otwór lejka zakończony jest cienką rurką, przez którą można do wnętrza nalewać wodę. Okazuje się, że woda zaczyna wyciekać spod lejka, gdy wysokość jej poziomu w rurce wynosi h . Znaleźć masę m lejka, jeśli pole przekroju jego szerszego otworu wynosi S , a wysokość lejka równa jest H .
Rozwiązanie na str. 8

F 494. Dwie kulki jednakowej wielkości, jedną lekką, a drugą ciężką, przymocowano do cienkiego pręta. Cięższa kulka znalazła się w środku pręta, a lekka na jednym z jego końców. Po zanurzeniu w niezbyt głębokiej wodzie swobodny koniec pręta opiera się o dno, a z wody wystaje tylko n -ta część lekkiej kulki. Czy układ ten będzie pływał, czy też utonie po przeniesieniu do głębszego miejsca? Można zaniedbać masę lżejszej kulki oraz pręta.

Rozwiązanie na str. 16



Tajemnice brakujących neutrin

Danuta KIEŁCZEWSKA

Neutrino nie przestają nas zadziwiać. Obserwacje z kolejnych eksperymentów sugerują, że z neutrinami, które pokonują duże odległości pomiędzy ich źródłem a detektorem, dzieje się coś, czego nie przewiduje Standardowy Model cząstek elementarnych – potrafią zmieniać się jedne w drugie. To tajemnicze zachowanie zauważono najpierw u neutrin pochodzących ze Słońca, a dla znacznie bardziej energetycznych neutrin, które powstają w wyniku bombardowania atmosfery ziemskiej przez promienie kosmiczne, efekt uznano za udowodniony („Aktualności”, *Delta* 9/1998). Również neutrino wyprodukowane w akceleratorze w Los Alamos wydają się przechodzić pewną metamorfozę. Wszystkie te obserwacje coraz bardziej przekonują fizyków, że neutrino nie są cząstkami bezmasowymi, tak jak dotąd sądzono, a Model Standardowy wymaga pewnych korekt.

Neutrino w Modelu Standardowym

Elementarnymi składnikami materii są kwarki i leptony. Budulcem jąder atomowych są właściwie tylko dwa spośród sześciu kwarków. Mówimy, że tworzą one pierwszą z trzech generacji. W każdej generacji jest para kwarków, które różnią się masą i ładunkiem elektrycznym ($+\frac{2}{3}e$, $-\frac{1}{3}e$).

Leptony, na ogół lżejsze od kwarków, też grupują się w trzech generacjach, w każdej generacji po 2 cząstki. Elektron, mion oraz taon to leptony naładowane (ładunek $-e$) kolejnych generacji. Ich partnerami są obojętne elektrycznie neutrino: elektronowe ν_e , mionowe ν_μ i taonowe ν_τ . W Modelu Standardowym przyjmuje się, że ich masy są równe zeru.

Oprócz 6 kwarków i 6 leptonów jest jeszcze 6 antykwarków i 6 antyleptonów. Każda antycząstka ma masę identyczną, jak cząstka, ale przeciwny ładunek.

Po co ich aż tyle?

Tym bardziej że, skoro ν_e , ν_μ i ν_τ nie mają ani masy, ani ładunku elektrycznego, to właściwie niczym się nie różnią. Różni je wyłącznie przynależność do innych generacji. I tak: tylko neutrino mionowe może w oddziaływaniu z kwarkiem wyprodukować mion, a w wyniku rozpadu taonu musi zawsze powstać neutrino taonowe. Nie znamy odpowiedzi na pytanie, po co w naturze aż tyle pozornie jednakowych cząstek. Być może jednak ich masy nie są takie same, a tylko tak małe, że dotychczas nie udało się ich zmierzyć. Naturalną konsekwencją niedużych różnic mas byłaby, według mechaniki kwantowej, możliwość przemiany neutrin jednego rodzaju w inny.

Skąd się biorą neutrino?

Wprawdzie otaczająca nas materia składa się tylko z kwarków i elektronów, lecz natura obfituje w źródła neutrin wszelkiej maści i bardzo różnych energii.

Najwięcej neutrin dociera do nas ze Słońca: średnio kilkadziesiąt miliardów neutrin elektronowych pada w każdej sekundzie na każdy cm^2 powierzchni Ziemi. Ich energie wynoszą kilka MeV (masa protonu to prawie 1000 MeV/ c^2). Podobne energie mają też neutrino z rozpadów pierwiastków promieniotwórczych, ale jest ich znacznie mniej. Przy energiach większych niż 20 MeV dominują tzw. neutrino atmosferyczne, powstające w wyniku oddziaływania promieniowania kosmicznego z atmosferą ziemską.

Neutrino słoneczne i atmosferyczne towarzyszą nam bezustannie. Natomiast sporadycznie odwiedzają nas w większych ilościach neutrino z odległych źródeł kosmicznych. W 1987 roku przybyły po trwającej ponad 170 tysięcy lat podróży rozpoczętej wybuchem supernowej w Wielkim Obłoku Magellana. Spośród 6×10^{16} neutrin, które trafiły na swej drodze na 3 wielkie detektory, tylko 24 udało się zaobserwować. I nie wynikało to z ułomności detektorów, lecz z bardzo małego prawdopodobieństwa oddziaływania tych cząstek z materią.

Jak je obserwować?

Aby móc podpatrywać neutrino, musimy umieć obserwować bardzo duże ilości materii. I to w sposób możliwie tani. Najlepiej użyć do tego ogromnych zbiorników wody. Najnowszy detektor o nazwie Super-Kamiokande, zbudowany w kopalni niklu w Japonii, zawiera 50 tysięcy ton wody. Padające neutrino, acz niechętnie, oddziałują czasem z nukleonami lub elektronami w cząsteczkach wody, produkując na ogół cząstki naładowane elektrycznie. Większość z tych cząstek porusza się szybciej niż światło w wodzie i jest w stanie emitować tzw. promieniowanie Czerenkowa. Znaczna część tego promieniowania przypada na światło widzialne, które w bardzo czystej wodzie może przebyć kilkadziesiąt metrów do ścian zbiornika, gdzie jest rejestrowane. Super-Kamiokande ma kształt walca o wysokości i średnicy około 40 metrów. Na ścianach umieszczono prawie 12 tysięcy fotopowielaczy, każdy o średnicy 50 cm (tło okładek tego numeru *Delty*). Promieniowanie Czerenkowa emitowane jest pod stałym kątem 41° względem osi wyznaczonej przez kierunek lotu cząstek. W efekcie pojawia się sygnał w fotopowielaczach, zawartych w pierścieniu o grubości proporcjonalnej do długości fragmentu toru cząstki i promieniu proporcjonalnym do odległości tego fragmentu od ściany fotopowielaczy (rys. 1 na okładce).

Neutrino słoneczne

Dotychczas zbudowano 5 detektorów do obserwacji neutrin słonecznych. Od ponad 25 lat strumień ν_e powyżej 0,81 MeV mierzony jest w kopalni złota Homestake w Colorado w detektorze wypełnionym 610 tonami środka czyszczącego o składzie

chemicznym C_2Cl_4 . Zachodzi w nim reakcja:
 $^{37}Cl + \nu_e \rightarrow ^{37}Ar + e^-$. Trzeba podziwiać sprawność eksperymentatorów, którzy są w stanie zliczać pojedyncze atomy argonu, produkowane średnio jeden na dwa dni.

Dwa detektory o nazwie Gallex i Sage oparte są na reakcji: $^{71}Ga + \nu_e \rightarrow ^{71}Ge + e^-$. Ten proces jest czuły na neutrino o energii powyżej 0,23 MeV. Zbiorniki galu o masie 60 ton znajdują się w podziemnych laboratoriach Gran Sasso we Włoszech oraz Baksan w Rosji. Co 3 tygodnie udaje się eksperymentatorom wyodrębnić i zliczyć około 10 atomów wyprodukowanego germanu.

Zupełnie inne podejście zastosowano we wspomnianych już wodnych detektorach Czerenkowa. Pierwszy detektor, Kamiokande, o masie 2500 ton, zbudowano w roku 1983 do poszukiwania rozpadu protonu, a od 1986 roku rejestrował on neutrino słoneczne. Jego znacznie większym następcą jest Super-Kamiokande. Neutrino słoneczne wybijają elektrony z cząsteczek wody, przy czym elektrony zachowują kierunek neutrino, dzięki czemu można go zrekonstruować. Gdy po kilku tygodniach pracy detektora zaobserwowano wyraźny nadmiar zdarzeń skorelowanych z kierunkiem od Słońca, nie ulegało wątpliwości, że jest to istotnie sygnał neutrino słonecznych (rys. 2 na okładce).

We wszystkich pięciu eksperymentach zaobserwowano mniej neutrino niż przewiduje się na podstawie obliczeń teoretycznych. Początkowo sądzono, że przyczyna tkwi w przybliżeniach modeli opisujących wnętrze Słońca. Jednak różnorodność danych eksperymentalnych i ich dokładność pozwala na wyciąganie wniosków, które w niewielkim stopniu zależą od założeń astrofizycznych. Stąd wielu fizyków uważa, że przyczyny „zgubionych” neutrino należy szukać w ich losie w czasie podróży do detektora. Wyniki wszystkich eksperymentów stają się zrozumiałe, jeżeli przyjąć, że neutrino elektronowe oscylują w neutrino mionowe lub taonowe. Przy stosunkowo małych energiach, charakterystycznych dla reakcji termojądrowych, ν_μ i ν_τ oddziałują jeszcze rzadziej niż elektronowe i dlatego rejestrujemy znacznie mniej zdarzeń, niż się spodziewaliśmy.

Stwierdzenie, że reakcje termojądrowe charakteryzują się małymi energiami, może wydawać się zaskakujące. Co to za małe energie, które prowadzą do temperatury 15 milionów stopni w samym środku naszej gwiazdy? Jednak faktem jest, że neutrino wyprodukowane w naszej ziemskiej atmosferze mają energie sto albo więcej razy większe.

Neutrino atmosferyczne

I całe szczęście! Bo neutrino atmosferycznych jest znacznie mniej i tylko dzięki temu, że duże energie zwiększają prawdopodobieństwo oddziaływania, możemy je obserwować.

Pochodzą one z rozpadów lekkich cząstek, zwanych mezonami, wyprodukowanych przez promienie

kosmiczne, głównie protony. Mezony rozpadają się przede wszystkim na miony i mionowe neutrino ν_μ lub antyneutrino $\bar{\nu}_\mu$. Z kolei w wyniku rozpadów mionów powstaje po jednym neutrino ν_μ i $\bar{\nu}_e$ lub $\bar{\nu}_\mu$ i ν_e . W efekcie na każdą parę ν_e , $\bar{\nu}_e$ przypadają 2 pary ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$.

Od ponad 10 lat fizycy próbują policzyć, ile neutrino każdego rodzaju dociera do podziemnych detektorów i okazuje się, że znów coś się nie zgadza, bo obserwujemy mniej więcej tyle ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$, ile ν_e , $\bar{\nu}_e$. Ponadto w Super-Kamiokande zaobserwowano niedawno, że ten deficyt dotyczy neutrino mionowych przybywających do detektora z antypodów.

Wygląda na to, że znów mamy do czynienia z metamorfozą neutrino, która zachodzi na długiej drodze przez Ziemię. Sądzi się, że neutrino mionowe ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$) oscylują w neutrino taonowe ν_τ ($\bar{\nu}_\tau$), które oddziałują znacznie rzadziej i nie są rejestrowane. Sugerowałoby to, że masa ν_τ różni się od masy ν_μ . Deficyt nadlatujących z antypodów neutrino mionowych został zmierzony przez Super-Kamiokande z dokładnością wystarczającą do ogłoszenia w czerwcu 1998 roku odkrycia niezerowej masy neutrino.

Nadzieja w akceleratorach

Jeżeli różnica mas nie jest zbyt mała, to metamorfoza neutrino może nastąpić w krótkim z konieczności czasie, jaki upływa od produkcji cząstki w akceleratorze do jej detekcji. Wydaje się, że zaobserwowano oscylacje ν_μ i $\bar{\nu}_\mu$ wyprodukowanych w akceleratorze w Los Alamos w ν_e i $\bar{\nu}_e$. Weryfikacji tego wyniku może wkrótce dostarczyć grupa fizyków z laboratorium Rutherforda w Anglii.

Planowane są kolejne eksperymenty korzystające z wiązek neutrino akceleratorowych. Aby jednak potwierdzić lub odrzucić efekt obserwowany w neutrino atmosferycznych, trzeba detektor umieścić w odległości kilkuset kilometrów od źródła. Przygotowywane są dwa takie eksperymenty.

W pierwszym detektor Super-Kamiokande będzie rejestrował neutrino wyprodukowane w odległym o 250 km akceleratorze pod Tokio. W drugim neutrino powstałe w akceleratorze pod Chicago będą obserwowane w stanie Minnesota z odległości 730 km.

... i nie tylko

Intensywnie analizując bieżące dane eksperymentalne i budując następne detektory, fizycy liczą też na kolejny łut szczęścia: na krótki błysk neutrino z supernowej. Ocenia się, że w naszej Galaktyce takie wybuchy zdarzają się raz na 20–50 lat. Na ogół światło z wybuchu grzęźnie w obłokach międzygwiazdnych. Neutrino one nie przeszkadzają. Na pewno lecą już do nas z różnych zakątków Drogi Mlecznej. Oby tylko dotarły na Ziemię, gdy detektory będą gotowe na ich przyjęcie. Pozwoliłyby jeszcze raz zajrzeć do wnętrza gwiazd oraz być może ujawniłyby, jakim to metamorfozom podlegają w czasie bardzo długich wędrówek.

Zadania prawie identyczne i prawie rozwiązane

Symetralna odcinka to jego oś symetrii, podobnie jak dwusieczna jest osią symetrii kąta. Proponuję kilka zadań o nich.

Zadanie ♣. Na płaszczyźnie dane są trzy proste k, l, m przechodzące przez punkt O . Znaleźć trójkąt, dla którego proste te są symetralnymi boków.

Jeden ze sposobów na rozwiązanie zadania ♣ jest taki. Rysujemy prostą n prostopadłą do k i odbijamy ją symetrycznie względem l (otrzymując prostą l') i względem m (otrzymując prostą m'). Następnie punkt P , będący punktem wspólnym l' i m' , odbijamy symetrycznie względem l i m , otrzymując odpowiednio punkty Q i R (oczywiście na prostej n – rys. 1). Trójkąt PQR , jak też każdy jednokładny z nim względem środka O , stanowi rozwiązanie zadania.

Dlaczego? – przyjemność uzasadnienia pozostawiamy Czytelnikowi, a sami rozwiązujemy następne

Zadanie ♠. Na płaszczyźnie dane są trzy proste k, l, m przechodzące przez punkt O . Znaleźć trójkąt, dla którego proste te są dwusiecznymi kątów.

Jeden ze sposobów na rozwiązanie zadania ♠ jest taki. Obieramy punkt N na prostej k i odbijamy go symetrycznie względem l (otrzymując punkt L') i względem m (otrzymując punkt M'). Następnie prostą p , łączącą L' i M' , odbijamy symetrycznie względem l i m , otrzymując odpowiednio proste q i r (oczywiście przechodzące przez N – rys. 2). Trójkąt wyznaczony przez p, q, r , jak też każdy jednokładny z nim względem środka O , stanowi rozwiązanie zadania.

Dlaczego? – podobnie jak poprzednio, przyjemność uzasadnienia pozostawiamy Czytelnikowi.

A teraz satysfakcja dla Czytelnika Leniwego, tym większa i bardziej złośliwa, im więcej jego koleżanek i kolegów znalazło te uzasadnienia. Spójrzmy na rysunek 3, na którym przećwiczyliśmy jeszcze raz rozwiązania zadania ♠. Najwyraźniej k, l, m nie są tutaj dwusiecznymi kątów otrzymanego trójkąta. Cóż więc ze znalezionymi uzasadnieniami? Trudno mi ręczyć za przyjaciół Leniwego, ale najprawdopodobniej znalezione przez nich uzasadnienia były poprawne. Przeoczony był tylko, ale nie przez nich, lecz przeze mnie, pewien szczegół.

Otóż, o ile każde trzy przecinające się w jednym punkcie proste mogą być symetralnymi boków pewnego trójkąta, to nie zawsze mogą być dwusiecznymi. Mianowicie zachodzi

Twierdzenie * Wszystkie kąty, na które dzieli płaszczyznę dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta, są ostre.

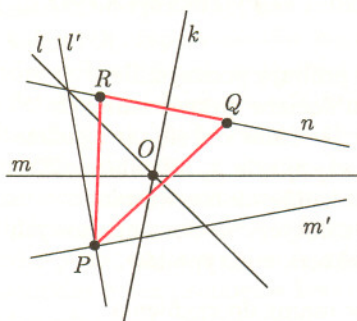
Oto uzasadnienie. Niech k, l i m będą dwusiecznymi kątów wewnętrznych trójkąta PQR (dalsze oznaczenia jak na rys. 4). Gdyby kąt QOA miał co najmniej 90° , to mielibyśmy

$$\angle RPQ + \angle RQP = 2\angle OPQ + 2\angle OQP = 2\angle QOA \geq 180^\circ,$$

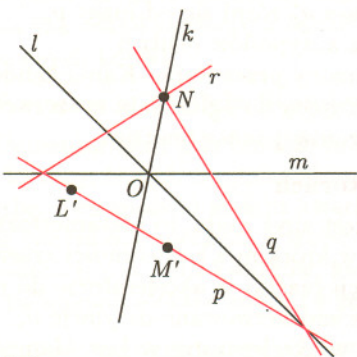
co kątom w trójkącie się nie zdarza. Przypuszczenie nasze było więc fałszywe, co kończy dowód.

Co zatem skonstruowaliśmy na rysunku 3? Został tam znaleziony trójkąt, w którym jedna z danych prostych jest dwusieczną kąta wewnętrznego, a pozostałe dwie – dwusiecznymi kątów zewnętrznych. Jeżeli w podawanych poprzednio uzasadnieniach wykorzystywano tylko fakt, że dwusieczna jest osią symetrii prostych, w których są zawarte boki trójkąta, to uzasadnienie to pasuje i tutaj.

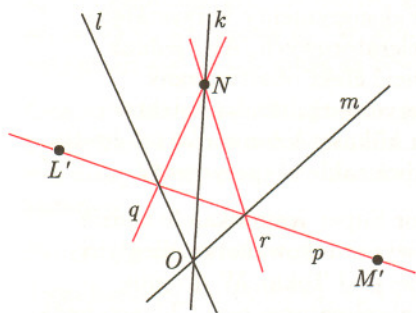
No to sprawdźmy jeszcze raz, tym razem rozwiązanie ♣ na rysunku 5. Co się okazuje? – nie ma punktu P . Ale rozwiązanie jest. Można je znaleźć albo zaczynając od innej osi niż k , albo prostą n prowadzącą przez O . Proponuję



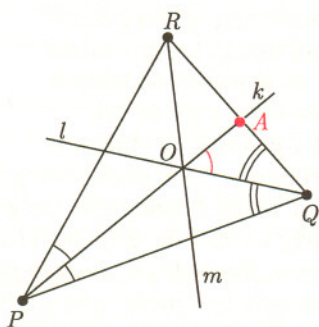
Rys. 1



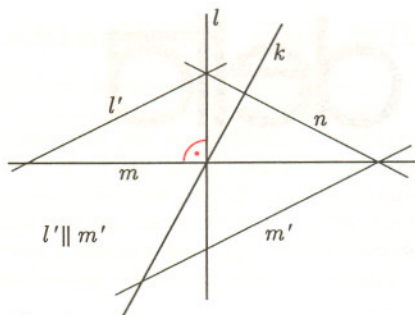
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

zapędzić Leniwego do wyjaśnienia powstałej sytuacji. Podpowiedzmy, że sytuacja ta dotyczy trójkąta prostokątnego.

A co będzie, gdy sprawdzimy znów rozwiązanie ♠, dla danych z rysunku 5? Tym razem nic nam z tego nie wyjdzie – dlaczego? Bo nigdy dwie dwusieczne – wszystkie jedno, czy wewnętrznych, czy zewnętrznych kątów – przy różnych wierzchołkach trójkąta nie bywają prostopadłe.

Jak widać, zadania, mające praktycznie identyczne rozwiązania w sytuacji ogólnej, mogą się diametralnie różnić w szczególnych przypadkach.

Marek KORDOS

Richard Suisseth – uczonek z Merton College w Oksfordzie – autor dzieła *Liber calculationum* powstałego w drugiej ćwierci XIV wieku. Nazywany był Calculatorem – lub jednym z Calculatorów – z uwagi na osobliwe obliczenia na szeregach nieskończonych, przedstawianych zazwyczaj jako pola figur nieograniczonych. Kinematyczne motywacje tych obliczeń przeszły wraz z terminologią fluent i fluksji do analizy Newtona, która w elementarnych partiach do dzisiaj nosi w języku angielskim nazwę Calculus.

Suma pewnego szeregu

W *Historii rachunku różniczkowego i całkowego i rozwoju jego pojęć* (1949; wyd. polskie 1964) Carl Boyer pokazuje (str. 116–118), w jaki sposób żyjący w XIV wieku Suisseth, nazywany Calculatorem, obliczał sumę szeregu

$$(1) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

To obliczenie nie sprawi kłopotu Czytelnikowi, który bez trudu obliczy sumy częściowe szeregu i przejdzie do granicy; pokażemy to później. Ale Suisseth liczył inaczej. Nie wchodząc w motywacje kinematyczne jego rachunku, ograniczymy się do uwagi, że szereg (1) interesował go jako pole figury schodkowej na rysunku poniżej.

Liczył w tym celu pola p_n prostokątów wyciętych z tej figury pasami $n - 1 \leq y \leq n$, otrzymując szereg

$$(2) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

o oczywiściej sumie równej 2.

Sumy częściowe $P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ tego szeregu są niczym innym niż polami pod wykresami funkcji prostych aproksymujących całkę Lebesgue'a, wyrażającą liczbowo pole figury.

Obliczając sumę szeregu (1) jako granicę jego sum częściowych, liczymy to samo pole jako całkę (niewłaściwą) Riemanna. Sumy częściowe $S_n = 1/2 + \dots + n/2^n$ szeregu (1) wyrażają się wzorem $S_n = 2 - (n + 2)/2^n$. Wymaga to odgadnięcia wzoru i przeprowadzenia dowodu przez indukcję:

$$S_1 = 2 - \frac{1+2}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+2) - (n+1)}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}.$$

Ponieważ ciąg $(n + 2)/2^n$ jest zbieżny do zera, otrzymaliśmy więc i tą drogą liczbę 2 jako pole (tej samej) figury.

Całka Lebesgue'a okazała tu jednak swoją wyższość nad całką Riemanna, prowadząc szybciej do celu.

Nie wyciągamy stąd jednak wniosku, że Suisseth był prekursorem Lebesgue'a. Było mu po prostu wszystko jedno, jakim sposobem liczyć pola. Nasz drugi sposób mógł być zresztą na tamte czasy za trudny.

Ponieważ nam nie jest wszystko jedno, zauważmy, że sumy S_n nie przekraczają co do wielkości sum P_n . Konsekwencją rachunku Lebesgue'owskiego jest zatem $\lim S_k \leq 2$. Ale łatwo uzyskujemy równość, wobec $\lim S_k \geq P_n$ dla każdego n .

Liczenie „trudnej” sumy Riemannowskiej jest więc niepotrzebne.

Jerzy MIODUSZEWSKI

Jak pisze Łuzin – odnośnik do artykułu „Sowremiennoje sostoianije teorij funkcij diejstwitielnogo pieriemiennogo” na str. 525 tomu 2 *Dzieł Zebranych* – podział osi rzędnych był używany przez inżynierów do całkowania funkcji – jeśli te miały wykres zbyt falisty na to, by sposób Cauchy'ego był praktycznie opłacalny – jeszcze przed pojawieniem się prac Lebesgue'a. Stąd, próby kwestionowania priorytetu Lebesgue'a. A więc nie tylko czternastowieczny Suisseth!



Tajemnicza liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

Czy to liczba wymierna, czy nie? Nie widać prostego sposobu, aby się o tym przekonać. A może prawdziwe jest twierdzenie, że
 (★) *liczba niewymierna podniesiona do niewymiernej potęgi jest liczbą niewymierną*
 (które to twierdzenie sprawę by załatwiało)?

Okazuje się, że nie. I w odkryciu tego pomoże nam tytułowa liczba, mimo że nie wiemy, jak z nią jest. Gdyby bowiem była sama liczbą wymierną, to od razu obalałaby zdanie (★), bo $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Gdyby jednak okazała się liczbą niewymierną, to przykład obalający (★) uzyskalibyśmy, podnosząc ją do potęgi o wykładniku $\sqrt{2}$. Rzeczywiście, ponieważ

$$(a^b)^c = a^{(b \cdot c)},$$

więc

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Udowodniliśmy zatem, że
istnieją liczby niewymierne, które podniesione do pewnej potęgi niewymiernej są wymierne.

Taki dowód, jaki został przedstawiony, nazywa się dowodem nieefektywnym. Nie wszyscy matematycy zgadzają się na takie dowody. Matematyka, w której takich dowodów się zakazuje, nazywana była *intuicjonistyczną* (co wydaje się mało trafną nazwą), a potem *konstruktywistyczną* (co zdecydowanie lepiej ją charakteryzuje). W takiej matematyce dowód, że coś istnieje, musi kończyć się wskazaniem tego czegoś. Taką właśnie matematykę preferuje *computer science*.

Jak jednak jest z liczbą $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$? Odpowiedź na to pytanie została uzyskana przy okazji rozwiązywania problemu ogólniejszego. Pytano o liczby *przestępne*, czyli takie, które nie są pierwiastkami żadnego wielomianu o współczynnikach wymiernych (te, które są pierwiastkami jakiegoś takiego wielomianu, to liczby *algebraiczne*). Pytanie o warunek wystarczający, by a^b było liczbą przestępną, gdy a i b są algebraiczne, postawione zostało jeszcze w XVIII wieku. Odpowiedź na nie została uzyskana dopiero w latach trzydziestych naszego stulecia i brzmi ona tak: *jeśli liczby a i b są obie algebraiczne, liczba b zaś jest dodatkowo niewymierna, to liczba a^b jest przestępna.*

Liczba przestępna jest, oczywiście, niewymierna – każda liczba wymierna $\frac{p}{q}$ (gdzie p i q są całkowite) jest pierwiastkiem wielomianu stopnia 1, a mianowicie $x - \frac{p}{q}$. Liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą algebraiczną, jako pierwiastek wielomianu $x^2 - 2$, a zatem tytułowa liczba $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną, bo przestępną.

Małą Deltę opracował Marek KORDOS

Liczba wymierna to taka, którą można przedstawić jako iloraz liczb całkowitych; gdy nie można – liczba jest niewymierna.

To, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, można uzasadnić tak. Gdyby bowiem dla pewnych liczb całkowitych k i m było $\sqrt{2} = \frac{k}{m}$ (możemy założyć, że ułamek ten jest nieskracalny, bo w przeciwnym razie najpierw go skrócimy), to byłoby $2m^2 = k^2$, skąd wynika, że k jest parzyste, czyli $k = 2n$ dla pewnego całkowitego n . Mielibyśmy wobec tego $2m^2 = 4n^2$, czyli $m^2 = 2n^2$, co oznacza, że m też jest parzyste, wbrew założonej nieskracalności ułamka $\frac{k}{m}$.



Rozwiązanie zadania F 493.

W chwili oderwania lejka całkowita siła działająca na lejek, będąca sumą siły ciężkości działającej na lejek mg i na wodę w lejku ρgV , równa jest sile parcia słupa o wysokości h na powierzchnię S :

$$mg + \rho gV = \rho ghS,$$

gdzie ρ jest gęstością wody, a V objętością wody zawartej w lejku i rurce. Jeśli rurka jest bardzo cienka, to możemy zaniedbać objętość wody w rurce w porównaniu z objętością wody w lejku. Wtedy $V = \frac{1}{3}HS$ i z poprzedniego równania dostajemy:

$$m = \rho S \left(h - \frac{1}{3}H \right).$$

Aktualności (nie tylko) fizyczne

Podczas pisania tych aktualności (przełom listopada i grudnia) zapanowały w Polsce silne mrozy. Z drugiej strony nie jest wykluczone, że lekturze artykułu towarzyszyły lutowa odwilż, taka, jaką mieliśmy okazję obserwować poprzedniej zimy. Choć ani jedno, ani drugie nie jest dla nas niczym niezwykłym, to takie nagłe odmiany pogody budzą wątpliwości co do ewentualnych zmian klimatu dokonujących się na naszych oczach.

Od kilkudziesięciu lat jesteśmy straszeni tzw. efektem cieplarnianym. Według zwolenników tego poglądu klimat Ziemi będzie się stawał coraz cieplejszy ze względu na wzrastające w atmosferze stężenie dwutlenku węgla wywołane działalnością człowieka, głównie spalaniem paliw kopalnych. Większe stężenie CO₂ potęgowałoby normalne działanie atmosfery, która (upraszczając) działa jak szklarnia: przepuszcza światło słoneczne, a zatrzymuje podczerwone promieniowanie Ziemi. Nasza planeta pozbawiona atmosfery byłaby średnio o kilkanaście stopni zimniejsza. (Oczywiście gdyby zachowała to samo albedo, czyli stosunek natężenia światła odbitego do padającego. Jeżeli wraz z atmosferą pozbawilibyśmy Ziemię wody, to albedo zmalałoby i spadek temperatury mógłby być dużo mniejszy.)

Rzeczywiście, od mniej więcej stu lat średnia temperatura na Ziemi wykazuje trend wzrostowy. Czy jest to jednak dowodem obserwowania efektu cieplarnianego? Zwolennicy podkreślają, że od sześciuset lat nie było tak ciepło jak teraz. To prawda, ale dlaczego równie głośno nie przypominają, że dużo cieplej było od połowy XI do połowy XIV wieku, czyli w okresie odpowiadającym szczytowej ekspansji Wikingów docierających m.in. do Grenlandii (czyli Ziemi Zielonej w wolnym tłumaczeniu)? Obecne ocieplenie równie dobrze wygląda na powrót do normalności po tzw. małej epoce lodowcowej przełomu wieków XVI i XVII. Zimno było też w wieku XV, trochę cieplej (mniej więcej jak teraz) w późnym Renesansie i w okresie poprzedzającym Rewolucję Francuską. Rozbiory Polski przypadają na kolejną fazę ochłodzenia (z cieplejszym okresem Wiosny Ludów). W naszym stuleciu średnia temperatura rosła do końca lat pięćdziesiątych, po czym trend odwrócił się na kilkanaście lat.

W jaki sposób wyluskać z obserwowanej zmienności wpływ działalności człowieka? Specjaliści, zarówno zwolennicy, jak i przeciwnicy efektu cieplarnianego uważają, że jest to zadanie bardzo trudne, głównie z powodu złożoności oddziaływania atmosfery z biosferą i oceanami. Stawia to pod znakiem zapytania użyteczność symulacji wykorzystywanych do przewidywania zmian klimatycznych. Wydaje się, że jedynym rozsądnym podejściem jest zbieranie danych i poszukiwanie czynników mogących wpływać na klimat, wśród których stężenie CO₂ jest tylko jednym z wielu.

Statystycznie istotną współzmienną średniej temperatury udało się ustalić dla stężenia CO₂, aktywności wulkanicznej, rytmu *El Niño - La Niña* oraz aktywności Słońca mierzonej np. liczbą plam słonecznych lub długością cyklu słonecznego. Tylko ostatnia z wymienionych współzmienności oraz „zakłócenia” związane z potężnymi wybuchami wulkanów są udokumentowane na przestrzeni dłuższej niż kilkadziesiąt lat. W szczególności znanym historycznym faktem jest bardzo mała liczba plam słonecznych w okresie małej epoki lodowcowej. Jak wiadomo, cykl słoneczny ma okres około 11 lat, ale jego długość zmienia się w granicach od kilku do kilkunastu lat, przy czym krótszym okresem odpowiada

większa liczba plam i, jak wiadomo od niedawna, większa aktywność Słońca wyrażająca się większą intensywnością wiatru słonecznego oraz większą tzw. stałą słoneczną, określającą strumień energii docierający z naszej gwiazdy na Ziemię. Po raz pierwszy związek między zmiennością Słońca a zmianami klimatycznymi zauważono na początku wieku XIX, obserwując jej korelację z cenami płodów rolnych. Ostatnie, ponowne jej odkrycie nastąpiło w 1991 roku [1].

Wydawałoby się, że jesteśmy w domu. Uwzględnienie *El Niño*, wulkanów, a zwłaszcza zmienności Słońca pozwala na bardzo dobre wytłumaczenie obserwowanej zmienności średniej temperatury Ziemi, pozostawiając nic lub bardzo niewiele na ewentualny wpływ emisji CO₂ przez człowieka. Dlaczego więc, od niedawna, korelacja między aktywnością Słońca a klimatem była ignorowana przez większość specjalistów? Powód jest bardzo prosty. Amplituda zmian stałej słonecznej okazuje się zbyt mała, aby wytłumaczyć amplitudę zmian średniej temperatury na Ziemi. Tym samym korelacja nabrała charakteru „astrologicznego” i przestała być zauważana przez „poważnych naukowców”.

Ale, kto szuka, ten znajdzie. Od początku lat osiemdziesiątych prowadzi się satelitarny monitoring globalnego zachmurzenia. Nikogo chyba nie zdziwi, że średnie zachmurzenie okazało się odwrotnie skorelowane ze średnią temperaturą. Im więcej chmur, tym większe albedo i niższa temperatura. Dodatkowo okazało się, że średnie zachmurzenie jest jeszcze lepiej (odwrotnie) skorelowane z aktywnością Słońca. Ale w jaki sposób cykl słoneczny może wpływać na zachmurzenie? Gdyby to jednak okazało się prawdą, to byłoby to równoważne odnalezieniu brakującego ogniwa klimatologii, gdyż wielkość zmian zachmurzenia odpowiada amplitudzie zmian średniej temperatury.

Wydaje się, że wyjaśnienie takie zostało znalezione [2]. Okazuje się, że średnie zachmurzenie jest skorelowane z intensywnością strumienia galaktycznego promieniowania kosmicznego, która jest odwrotnie skorelowana z aktywnością Słońca, ponieważ wiatr słoneczny jest naturalną ochroną przed tym promieniowaniem. Dodatkowo, spośród wielu przejawów wzrostu aktywności Słońca właśnie zmniejszanie się strumienia promieniowania kosmicznego najlepiej oddaje zmienność zachmurzenia [3]. Bezpośredni wpływ promieniowania kosmicznego na zachmurzenie nie został jeszcze udowodniony, ale uważa się, że promieniowanie kosmiczne, które jest głównym czynnikiem jonizującym atmosferę, może istotnie wpływać na proces tworzenia się chmur. Fakt zaakceptowania artykułu [3] przez najbardziej renomowane czasopismo fizyczne oraz umieszczenie skrótu informacji w rozsyłanym pocztą elektroniczną biuletynie *Physics News Update*, wydawanym przez American Institute of Physics, wydaje się świadczyć o „zmianie klimatu” wokół zmian klimatu.

W ciągu kilkunastu lat przekonamy się, czy uznanie emisji CO₂ przez człowieka za czynnik wywołujący istotne globalne ocieplenie klimatu nie okaże się największą pomyłką globalnej nauki, niestety również jeżeli chodzi o jej globalne konsekwencje.

Piotr ZALEWSKI

- [1] E. Friis-Christensen, K. Lassen, *Science* **254** (1991) 698; K. Lassen, E. Friis-Christensen, *J. Atm. Terr. Phys.* **57** (1995) 835.
- [2] H. Svensmark, E. Friis-Christensen, *J. Atm. Terr. Phys.* **59** (1997) 1225.
- [3] *Influence of Cosmic Rays on Earth's Climate*, H. Svensmark, *Accepted by Phys. Rev. Lett.* 15th Oct. 98.

Z górą chyba czterdzieści lat temu byłem zatrudniony w Pracowni Radiologicznej w Warszawie, kierowanej przez profesora Ludwika Wertensteina. Głównym wyposażeniem pracowni był właściwie dar Marii Skłodowskiej-Curie w postaci 60 mg radu. Rad ten stanowił źródło wszystkich aktywności, z którymi pracowano w laboratorium. Lata trzydzieste, kiedy pracowałem w laboratorium, były okresem bardzo ciekawym. Wtedy właśnie odkryto neutron, pozyton, a Fryderyk Joliot-Curie odkrył promieniotwórczość wzbudzoną przez naświetlanie rozmaitych materiałów cząstkami α . Pamiętam, że kiedyś zwróciłem się do prof. Wertensteina, mówiąc z pewnym żalem: „Panie Profesorze, to właściwie wszystko wiemy. Wiemy, że cały świat nas otaczający składa się z atomów, atomy z jąder, dookoła których krążą elektrony, jądra z protonów i neutronów. Właściwie to pozostały nam detale”. Wertenstein uśmiechnął się, poklepał mnie po ramieniu i powiedział: „Nie bój się, starczy jeszcze dla Was”.

Ludwik Wertenstein (ur. 16 IV 1887, zm. 18 I 1945) studiował w Paryżu, był asystentem Marii Skłodowskiej-Curie. W jej zastępstwie kierował Pracownią Radiologiczną Warszawskiego Towarzystwa Naukowego.

W kilka miesięcy po odkryciu przez Joliotę promieniotwórczości, wzbudzonej naświetlaniem cząstkami α , pracowałem z Michałem Żywym, używając małego źródelka cząstek alfa.

Przygotowaliśmy je zresztą sami w aparaturze szklanej, w której znajdowało się w roztworze wodnym te 60 mg radu w postaci chlorku radu. Wyciągaliśmy z niego roztworu emanację radu, oczyszczali ją i kondensowali w małej szklanej rurce, w której końcu wtopiona była płytka platynowa. Po jakimś dniu, dwóch dniach pozostawiania płytki w atmosferze radonu powierzchnia jej była aktywowana produktami jego rozpadu. Po usunięciu radonu, odcięciu rurki, wyjęciu płytki i umieszczeniu jej w odpowiedniej osłonie naprzeciwko cienkiego okienka, które przepuszczało cząstki alfa i zatrzymywało jądra odskoku, mieliśmy źródelko cząstek alfa.

Otóż naświetlając różne tarcze cząstkami alfa, stwierdziliśmy bardzo dziwny efekt, którego nie rozumieliśmy. Niezależnie od tego, co naświetlaliśmy, materiał stawał się radioaktywny. Z absorpcji wynikało, że w wyniku rozpadu emitowane są elektrony. Co zaś było najbardziej uderzające – to, że czas połowicznego zaniku, niezależnie od materiału naświetlanego, był zawsze ten sam, około jednej

minuty. Wertenstein nawet sugerował, że może dzieje się coś z cząstką alfa. Otóż kiedyś wieczorem zastanawialiśmy się nad tym i doszliśmy do przekonania, że jeszcze jeden czynnik jest wspólny we wszystkich tych eksperymentach, mianowicie atmosfera powietrza. Myśmy naświetlali w powietrzu – może był to wynik oddziaływania cząstek alfa z jądrami składników powietrza?

No i zaczęliśmy zadawać pytania. Naświetliliśmy tarczę w próżni – efekt zaginął. No dobrze, efekt zależy od powietrza. Naświetliliśmy w atmosferze tlenu – efektu nie było. Po naświetleniu w atmosferze azotu efekt pojawił się. Wiedzieliśmy wobec tego, że jest to oddziaływanie alfa–azot. W tym czasie wiedzieliśmy również, że bombardowane cząstkami alfa substancje, zawierające azot, stają się źródłem neutronów. Można wobec tego było przypuszczać, że mamy tutaj do czynienia z procesem ${}^4_2\alpha + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{17}_9\text{F} + n$. Byłby to fluor, ale trwały fluor ma w jądrze dziewiętnaście nukleonów ${}^{19}_9\text{F}$ – wobec tego byłby to fluor z niedomiarem neutronów. Jeżeli jest niedomiar neutronów, to jest to prawdopodobnie jądro nietrwałe. Jeżeli jądro jest nietrwałe, to prawdopodobnie jeden z protonów przechodzi w neutron, wobec czego fluor zmienia się w trwały tlen ${}^{17}_8\text{O}$. Powinniśmy obserwować aktywność β^+ , a więc emisję dodatnio naładowanych cząstek.

Wzięliśmy wobec tego nasze naświetlone płytki, licznik Geigera (sami go zresztą zrobiliśmy) i umieściliśmy w polu magnetycznym w taki sposób, że przy określonym kierunku pola magnetycznego licznik faworyzował detekcję cząstek ujemnych; przy zmianie pola faworyzowana była detekcja cząstek dodatnich. Pomiary wykazały, że mamy do czynienia z emisją cząstek naładowanych dodatnio. Mieliśmy rację: dziwny efekt powodowało oddziaływanie cząstek alfa z azotem w powietrzu.

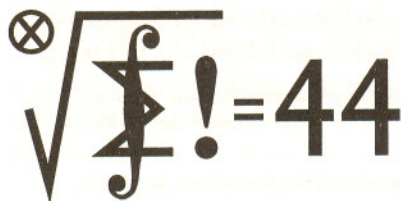
Nasze doświadczenia skończyliśmy koło dziewiątej rano, to znaczy spędziliśmy w laboratorium całą noc. Pamiętam, że kiedy wychodziłem z rana z pracowni, byłem pod niesłychanie silnym wrażeniem możliwości takiego dialogu z przyrodą, zadawania pytań, uzyskiwania odpowiedzi i tego, że w ciągu jednej nocy można było rozwiązać zagadnienie, potwierdzić lub odrzucić taką czy inną hipotezę. Gdy patrzę wstecz na swoje przeżycia z różnych czasów, jeżeli chodzi o pracę doświadczalną, to muszę przyznać, że to była chyba najfantastyczniejsza przygoda, jaka mnie spotkała.



Rozwiązanie zadania M 871.

Niech A_1, B_1, C_1 będą środkami boków BC, AC i AB odpowiednio. Oznaczmy punkt przecięcia środkowych trójkąta ABC przez O . Jednokładność o środku O i skali $-\frac{1}{2}$ przeprowadza okrąg opisany na trójkącie ABC na okrąg opisany na trójkącie $A_1B_1C_1$, który ma promień nie mniejszy niż r , bowiem ma punkt wspólny z każdym

z boków trójkąta ABC . Stąd wynika już, że $\frac{1}{2}R \geq r$. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy okrąg opisany na trójkącie $A_1B_1C_1$ jest równocześnie okręgiem wpisanym w trójkąt ABC , czyli gdy $|AB_1| = |AC_1|$, $|BA_1| = |BC_1|$ i $|CA_1| = |CB_1|$. Z równości tych wynika, że trójkąt ABC jest równoboczny.



Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 1999

375. W trójkącie ABC , mającym kąty ostre przy wierzchołkach A i B , odcinek CD jest wysokością. Prosta przechodząca przez środki okręgów wpisanych w trójkąty ACD i BCD przecina proste CA i CB odpowiednio w punktach P i Q . Dowieść, że jeśli $|CP| = |CQ|$, to trójkąt ABC jest równoramienny lub prostokątny.

376. Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Rozważamy wszystkie pary (k, m) liczb naturalnych spełniające warunki:

$$1 \leq k < m \leq n, \quad k + m > n, \quad \text{NWD}(k, m) = 1.$$

Obliczyć sumę $\sum \frac{1}{km}$, której składniki odpowiadają wszystkim rozważanym parom (k, m) .

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1998

Przypominamy treść zadań:

367. Liczby nieujemne a, b, c, x, y, z spełniają układ równań

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b+y} + \sqrt{c+z} = 1$$

$$\sqrt{a+y} + \sqrt{b+z} + \sqrt{c+x} = 1$$

$$\sqrt{a+z} + \sqrt{b+x} + \sqrt{c+y} = 1.$$

Dowieść, że $a = b = c$ lub $x = y = z$.

368. Niech $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Znaleźć kres dolny zbioru liczb postaci $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

367. Można założyć, że $a \leq b \leq c$. Przypuśćmy, że $a < c$; należy wykazać, że wówczas $x = y = z$. Weźmy pod uwagę funkcje określone dla $t \geq 0$ wzorami

$$f(t) = \sqrt{b+t} - \sqrt{a+t}, \quad g(t) = \sqrt{c+t} - \sqrt{b+t},$$

$$h(t) = \sqrt{c+t} - \sqrt{a+t} = f(t) + g(t).$$

Odejmując równania stronami, dostajemy związki:

$$f(y) + g(z) - h(x) = 0 \quad \text{oraz} \quad f(z) + g(x) - h(y) = 0.$$

Uwzględniając równość $h = f + g$, przepisujemy je w postaci:

$$(*) \quad g(z) - g(x) = f(x) - f(y) \quad \text{oraz} \quad g(x) - g(y) = f(y) - f(z).$$

Jeśli $a < b = c$, to funkcja $f(t) = \frac{b-a}{\sqrt{b+t} + \sqrt{a+t}}$ jest ściśle malejąca, a funkcja g jest stała, więc ze związków (*) wynika natychmiast, że $x = y = z$. Sytuacja jest analogiczna, gdy $a = b < c$. Jeśli wreszcie $a < b < c$, to obie funkcje f i g są ściśle malejące; ze związków (*) wnosimy teraz, że różnice $z - x, x - y, y - z$ są jednocześnie dodatnie, ujemne lub równe zeru. Pierwsze dwie możliwości trzeba jednak wykluczyć, bo suma tych trzech różnic jest zerowa. Zatem $x = y = z$.

368. Przypuśćmy, że kres dolny rozważanego zbioru liczb jest dodatni. Istnieje więc liczba $\varepsilon > 0$, taka, że $\sqrt{p_{k+1}} - \sqrt{p_k} \geq \varepsilon$ dla $k = 1, 2, 3, \dots$. W takim razie

$$\frac{1}{\sqrt{p_k}} - \frac{1}{\sqrt{p_{k+1}}} = \frac{\sqrt{p_{k+1}} - \sqrt{p_k}}{\sqrt{p_k p_{k+1}}} \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{p_k p_{k+1}}} > \frac{\varepsilon}{p_{k+1}} \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots$$

Podstawiamy $k = 1, 2, \dots, n$ i dodajemy te nierówności:

$$\frac{1}{\sqrt{p_1}} - \frac{1}{\sqrt{p_{n+1}}} > \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_{k+1}}.$$

Lewa strona nie przekracza $1/\sqrt{2}$. Wiadomo jednak, że szereg złożony z odwrotności wszystkich liczb pierwszych jest rozbieżny. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że szukany kres dolny jest równy zeru.

Lista uczestników
ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 363 (WT=3,51) i 364 (WT=1,36)
z numeru 6/1998

| | | |
|-------------------------|---|----------|
| Maciej Mostowski | - | 43,90 |
| Tadeusz Józefczyk | - | 2- 41,32 |
| Krzysztof Zapisek | - | 41,22 |
| Zbigniew Skalik | - | 40,28 |
| Witold Bednorz | - | 1- 39,62 |
| Witold Bednarek | - | 39,62 |
| Bogumiła Piotrowska | - | 34,29 |
| Andrzej Józwiak | - | 34,12 |
| Paulina Domagalska | - | 34,09 |
| Tomasz Wietecha | - | 3- 27,87 |
| Krzysztof Jasek | - | 27,47 |
| Nikodem Szpak | - | 26,69 |
| Artur Arciszewski | - | 26,15 |
| Wojciech Maciak | - | 25,46 |
| Mieczysław Jędrzejowski | - | 24,99 |
| Jan Ciach | - | 5- 24,98 |
| Andrzej Daniluk | - | 23,73 |
| Zbigniew Sewartowski | - | 23,65 |
| Michał Lewandowski | - | 22,96 |
| Rafał Pikula | - | 22,73 |
| Marian Lupieżowicz | - | 22,64 |
| Przemysław Gadziński | - | 6- 22,39 |
| Marek Prauza | - | 3- 20,73 |
| Bartosz Patrycz | - | 20,31 |

Legenda (przykładowo): stan konta 6-22,39 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 22,39 punktów.

Zacząć trzeba od karty żałobnej. Nie żyje **Jan Ciach**. Uczestnikiem ligi zadaniowej to nazwisko jest doskonale znane. Pan Ciach był wieloletnim nauczycielem matematyki już w roku 1983, gdy rozpoczął swój udział w lidze. Od tego czasu dał się poznać jako autor wielu ciekawych zadań oraz błyskotliwych rozwiązań, często przytaczanych w dorocznych omówieniach. Zdziwiał erudycją, szczególnie w zakresie tradycyjnej geometrii. Przez kilka lat był stałym korespondentem działu zadań kanadyjskiego miesięcznika *Cruz Mathematicorum*. W naszej lidze wykonał pięć 44-punktowych rund; ostatni list przysłał w roku 1996. Ciężko pogodzić się z myślą, że już nie będziemy rozwiązywać zadań autorstwa pana Jana.

W regulaminie ligi zadaniowej czytamy o spotkaniach jej uczestników. W początkowym okresie istnienia ligi takie spotkania odbywały się dość regularnie, w odstępach mniej więcej półtorarocznych. Potem przyszyły cięższe czasy...

I oto w minionym roku udało się powrócić do tradycji: w dniach 26-27 września 1998 spotkaliśmy się w gronie członków Klubu 44 M, którzy nie przegrali kontaktu z ligą. Jednym z punktów programu spotkania była sesja „szybkiego rozwiązywania zadań”, otwarta dla publiczności i wkomponowana w ciąg imprez II Festiwalu Nauki. Uczestnicy spotkania posłuchali także wykładu Zbigniewa Marciniaka o metodach, którymi zostało udowodnione Wielkie Twierdzenie Fermata. A poza tym – porozmawialiśmy sobie o różnych sprawach związanych (lub nie związanych) z ligą zadaniową, z *Deltą* i z matematyką. Ciekawe, kiedy uda nam się spotkać ponownie...

Przechodzimy do corocznego omówienia; jak zwykle, przedstawiamy rozwiązania odmienne (i zwykle ciekawsze) od naszych „firmowych”, a także znalezione uogólnienia. Odnotowujemy ponadto te zadania, gdzie poprawne rozwiązania były bardzo nieliczne.

Zestawienie na poprzedniej stronie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
- przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1996, 1997 lub 1998.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych lamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Zadanie 346. [min $\{V$: każdy wielościan wypukły, który nie zawiera czworościanu o objętości 1, jest zawarty w czworościanie o objętości $< V\}$ = ?] (współczynnik trudności $WT=3,07$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR=5$). Pełne rozwiązania, zasadniczo identyczne z rozwiązaniem firmowym, podali: **W. Bednorz, A. Daniluk, P. Gadziński, P. Kumor, T. Rawlik.**

Zadanie 351. [max $\{n \in \mathbb{N} : \exists$ zbiory $A_1, \dots, A_n : |A_i| = 4, |A_i \cap A_j| = 1$ dla $i \neq j, A_1 \cap \dots \cap A_n = \emptyset\}$ = ?] ($WT=1,27$; $LPR=10$). Wynik: 13. Jeśli zamiast zbiorów czteroelementowych będziemy rozważać zbiory k -elementowe, wówczas otrzymamy nierówność $\max n \leq k^2 - k + 1$; takie uogólnienie wskazali: **B. Dyda, T. Józefczyk, T. Wietecha** oraz **M. Lewandowski**, który ponadto zwrócił uwagę na związek zadania z bardziej ogólnymi zagadnieniami z teorii skończonych geometrii rzutowych i konfiguracji kwadratowych oraz udowodnił (dowód długi!), że owa nierówność staje się równością (w szczególności) dla liczb k postaci $p^m + 1$ (p - liczba pierwsza).

Zadanie 358. [Niech $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin^2 kx$; czy $(f(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\sum a_k \geq 0)$?] ($WT=1,80$; $LPR=12$). Rozwiązanie firmowe było za długie - prawdziwość rozważanej implikacji wynika natychmiast z równości $\int_0^\pi f(x) dx = (\pi/2) \sum a_k$, zauważonej przez autorów większości rozwiązań.

Zadanie 359. [Czy istnieją funkcje $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o własnościach: $fg(x) = x^2, gf(x) = x^4$?] ($WT=2,38$; $LPR=3$). Przykłady takich par funkcji, nie różniące się istotnie od rozwiązania firmowego, podali **A. Daniluk** i **W. Bednorz**. Całkiem inny przykład znalazł **P. Kumor**: przedziały $J_n = [2^{2^n}; 2^{2^{n+1}})$ w sumie (gdy $n \in \mathbb{Z}$) wypełniają przedział $J = (1; \infty)$; wzór $g(x) = (7x^{2^{-n}} - 12)^{4^n}$ dla $x \in J_n$ określa funkcję odwracalną $g: J \rightarrow J$; przyjmijmy $f(x) = g^{-1}(x^4)$ dla $x \in J$. Tak określone funkcje f i g spełniają zadane równości na zbiorze J - pozostaje tylko rozszerzyć je (jak w rozwiązaniu firmowym) do pełnej dziedziny \mathbb{R} .

Stosunkowo niski współczynnik trudności w zadaniach 359 i 360 jest wynikiem niewielkiej liczby przysłanych w tym miesiącu prac; zestaw zadań okazał się trudniejszy, niż przypuszczaliśmy.

Zadanie 360. [Ciąg (a_1, \dots, a_{2n+1}) ma własność: po odrzuceniu dowolnego wyrazu pozostałe można rozbić na dwie równoliczne grupy o równych sumach $\Rightarrow (a_1 = \dots = a_{2n+1})$] ($WT=2,80$; $LPR=2$). Autorem rozwiązania firmowego jest **P. Kumor**, który zadanie zaproponował. Drugie poprawne rozwiązanie - efektowne, choć odwołujące się do nie całkiem elementarnych faktów z algebry liniowej - przedstawił **W. Bednorz**: wektor $w = (a_1, \dots, a_{2n+1})$ spełnia równanie $Aw = 0$, gdzie A jest macierzą $(2n+1) \times (2n+1)$ mającą zera na przekątnej, a poza tym plus-minus jedyńki, o sumie 0 w każdym wierszu. Jedną z wartości własnych jest 0; każdy wektor postaci (a, \dots, a) jest jej wektorem własnym. Należy dowieść, że innych nie ma, a więc że jest to wartość własna jednokrotna - czyli, że w wielomian charakterystycznym współczynnik przy zmiennej w pierwszej potęgze jest niezerowy; to zaś nietrudno stwierdzić rozważając ów wielomian nad ciałem \mathbb{Z}_2 i wykazując, że współczynnik, o który chodzi, jest liczbą całkowitą nieparzystą. Zgrabne!

Zadanie 362. [Dane okręgi $\omega_i = o(O_i, r)$, $i = 1, 2, 3, 4$; $\omega_i \cap \omega_{i+1} = \{S, P_i\}$; $P_i \in o(Q, R)$, $|QS| = d$; jakie równanie wiąże R, r, d ? czy każda trójka $R, r, d > 0$, spełniająca to równanie, jest „dobra”?] ($WT=2,20$; $LPR=6$). Szukane równanie: $R^2 + d^2 = 2r^2$. **W. Bednorz, P. Gadziński, J. Łazuka, Z. Skalik, T. Wietecha** przedstawili wyprowadzenia „czysto geometryczne”, wszelako wymagające troski o pełną ogólność (niezależność od rysunku), i przez to nie prostsze od rozwiązań za pomocą rachunków: na wektorach (rozwiązanie firmowe) bądź na liczbach zespolonych (**L. Skrzypek**, autor zadania).

Na ostatnie pytanie z zadania rozwiązanie firmowe odpowiada: *tak*. Nie pierwszy to raz, i na pewno nie ostatni, gdy redaktorowi ligi zadaniowej zdarza się coś przeoczyć - tym razem przegapiony został przypadek: $R = r = d$; dla takich liczb nie istnieje odpowiednia czwórka okręgów. Prawidłową odpowiedź *nie* podali wszyscy rozwiązujący, wykazując ponadto, że jest to jedyny przypadek, w którym „coś się psuje”.

Zadanie 363. [$ABCD$ - czworościan foremny; $P \in \text{pł } BCD, Q \in \text{pł } CDA \Rightarrow |AP|, |PQ|, |QB|$ są długościami boków trójkąta] ($WT=3,51$; $LPR=3$). Szybkie rozwiązanie firmowe polegało na wyjściu z rozważaniami w przestrzeni czterowymiarową. Jak to zadanie zrobić w sposób *less sophisticated*, pokazał **P. Gadziński**: niech π_1, ρ_1 będą półpłaszczyznami o krawędzi CD , zawierającymi odpowiednio punkty B i A , i niech π_2, ρ_2 będą półpłaszczyznami uzupełniającymi π_1, ρ_1 do całych płaszczyzn. Z uwagi na symetrię ról P i Q , wystarczy udowodnić dwie nierówności:

$$(1) \quad |AP| + |PQ| > |BQ| \quad \text{oraz} \quad (2) \quad |AP| + |BQ| > |PQ|.$$

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

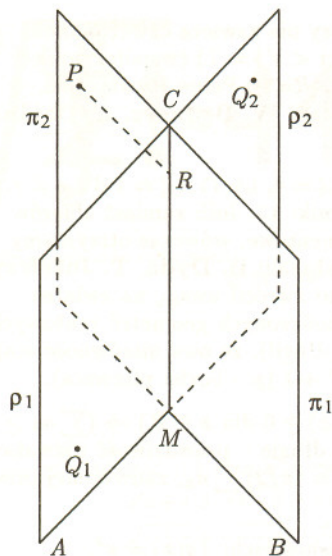
J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Galecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (4), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor (4), P. Gadziński (6), K. Jedziniak, J. Olszewski, L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej):

„dwukrotni”:
Z. Bartold, A. Czornik, P. Jędrzejewicz, M. Kasperski, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, J. Witkowski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”:
T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, B. Dyda, P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Łazuka, J. Mańdziuk, M. Marczak, M. Matłęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, W. Olszewski, K. Patkowski, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawislowski, P. Zmijewski.



Napis $[XYZ]$ będzie oznaczał, że korzystamy z nierówności $|XY| + |YZ| > |XZ|$ dla trójkąta XYZ .

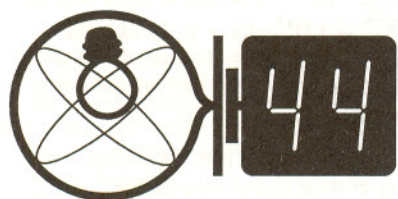
Gdy $P \in \pi_1$, wówczas $|AP| \geq |BP|$ i nierówności (1) oraz (2) są prostymi wnioskami z $[BPQ]$ oraz $[PBQ]$. Dalej zakładamy, że $P \in \pi_2$; niech M będzie środkiem odcinka CD i niech R będzie rzutem punktu P na prostą CD ; kąt między półpłaszczyznami ρ_1 i ρ_2 jest rozwarty, więc

$$(3) \quad |AP| \geq |AR| = |BR| \quad \text{oraz} \quad (4) \quad |AP| \geq |MP|.$$

Jeżeli teraz $Q \in \rho_1$ (na rysunku: punkt Q w położeniu Q_1), to (analogicznie do (3)) $|QP| \geq |QR|$; stąd, z (3) i z $[BRQ]$ wynika teza (1); a teza (2) jest konsekwencją nierówności $|AQ| \leq |BQ|$ oraz $[PAQ]$. Jeśli natomiast $Q \in \rho_2$ (na rysunku: $Q = Q_2$), to (analogicznie do (4)) $|BQ| \geq |MQ|$; stąd, z (4) i z $[PMQ]$ wynika teza (2); a teza (1) jest konsekwencją nierówności $|AQ| \geq |BQ|$ oraz $[APQ]$.

Jak zauważa autor rozwiązania, foremność czworościanu nie jest istotna: korzysta się tylko z tego, że prosta CD leży w płaszczyźnie symetralnej odcinka AB oraz z rozwartości kąta między półpłaszczyznami ρ_1 i ρ_2 .

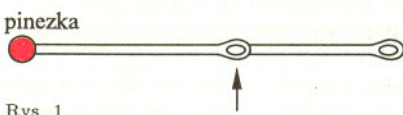
Dość podobne rozwiązanie (dla czworościanu foremnego) podał W. Bednorz; autorem trzeciego dobrego rozwiązania, mocno rachunkowego, jest L. Skrzypek.



Zadania z fizyki nr 272, 273

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 IV 1999



Rys. 1

272. Konferencja była beznadziejnie nudna. Podsekretarz ziewnął i machinalnie zaczął się bawić dwoma patyczkami pozostawionymi przez kogoś na stole. Były różnej długości, a na każdym z końców miały ucha. Podsekretarz włożył pinezkę w ucho jednego z patyczków, wbił ją w stół i pchnął patyk. „Lekko się kręci” – zauważył i stracił resztkę zainteresowania referatem. „A gdyby tak ucho drugiego patyczka przymocować do ruchomego końca?” Zmacał w kieszeni kawałek nitki i związał końce patyczków. Po ustawieniu drugiego na przedłużeniu pierwszego przytknął w miejsce ich połączenia (rys. 1) – trochę mocniej, niż zamierzał, bo stuk zderzających się drewników rozległ się w całej sali. „Ależ co pan wyprawia!” – zawołał Przewodniczący. „Przepraszam” – wyjąkał Podsekretarz – „powinienem być zamienić te patyczki miejscami, wtedy nie narobiłbym tyle hałasu”. Przewodniczący przyjrzał się zestawowi. „Ciekawe... ale wątpię, czy zamiana by coś dała” – oświadczył.

W jakich warunkach rację miały Podsekretarz, a w jakich – Przewodniczący (tzn. jaki związek muszą spełniać masy i długości patyczków, aby na skutek przytknięcia patyczki uderzyły o siebie)? Przyjąć, że są jednorodne i pominąć tarcie o stół.



Rys. 2

273. Tempo przepływu ciepła przez ścianę (moc cieplna na jednostkę powierzchni) jest proporcjonalne do różnicy temperatur między wewnętrzną a zewnętrzną powierzchnią ściany, a stała proporcjonalności k charakteryzuje skuteczność izolacji cieplnej. Jeśli wartość tego współczynnika dla „gołej” ściany wynosi $k_1 = 0,8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, a dla dodatkowej warstwy styropianu – $k_2 = 0,7 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, to ile jest równy współczynnik k dla ściany obłożonej dwiema takimi warstwami, od wewnątrz i od zewnątrz?



Rys. 3

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1998

Przypominamy treść zadań:

264. a) Dwie kulki poruszają się z prędkością równą 1 w stronę trzeciej kulki nieruchomej (rys. 2). Jeśli masy kulek są jednakowe, a zderzenia – centralne i doskonale sprężyste, to zwykle obserwujemy, że kulka A się zatrzyma, a B i C będą po zderzeniu poruszać się z prędkością 1. Załóżmy jednak, że np. zderzenie kulek B i C jest „miękkie”, tzn. odbywa się za pośrednictwem nieważkiej sprężynki, a w trakcie jej ugięcia następuje „twarde” zderzenie kulek A i B (które dotąd poruszały się w pewnej wzajemnej odległości). Ile wynosi maksymalna prędkość, którą może w takim przypadku uzyskać kulka C ?

b) Dla czterech jednakowych kulek, z których początkowo dwie spoczywały, a dwie poruszały się z prędkością 1 (rys. 3) obliczyć

264. a) Oznaczmy prędkości kulek po ustaniu ich wzajemnego oddziaływania przez v_A , v_B i v_C . Z zasad zachowania pędu i energii mamy

$$v_A + v_B + v_C = 2, \quad v_A^2 + v_B^2 + v_C^2 = 2.$$

Nietrudno wykazać, że maksymalna wartość v_C , która jest zgodna z tymi równaniami, wynosi $4/3$ (wtedy $v_A = v_B = 1/3$). Taką prędkość uzyska kulka C , jeśli zderzenia A z B nastąpi w chwili, gdy sprężynka zmniejszy prędkość B do wartości $1/3$ (a prędkość C wzrośnie do $2/3$). Wtedy bowiem A i B wymieniają

maksymalną prędkość, którą może uzyskać kulka D i zaprojektować taki układ sprężynki między kulkami i taki przebieg kolejnych zderzeń, aby w ich wyniku kulka D została rozpędzona do tej prędkości.

265. Cewka czułego galwanometru jest zawieszona na nici kwarcowej mającej właściwości sprężyste, tak że kąt obrotu jest proporcjonalny do momentu siły, a stała proporcjonalności wynosi $0,89 \cdot 10^{-13} \text{ Nm}/\text{rad}$. Na skutek fluktuacji ciśnienia powietrza (przypadkowych niewielkich zgęszczeń i rozrzedzeń) cewka drga, a średnia kwadratowa wartość kąta odchylenia od położenia środkowego wynosi $2,14 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$. Obliczyć temperaturę powietrza.

się prędkościami, a w wyniku „dopchnięcia” sprężynki kulka C ulegnie rozpędzeniu do obliczonej prędkości $4/3$.

b) Maksymalną wartością v_D jest $(1 + \sqrt{3})/2 \approx 1,366$, a jej osiągnięcie wymaga, aby pozostałe trzy kulki poruszały się z jednakową prędkością $v = (1 - 1/\sqrt{3})/2 \approx 0,211$. Aby tak się stało, zderzenie powinno przebiegać według następującego schematu: najpierw „międko” zderzają się środkowe kulki B i C ; gdy B osiągnie prędkość v , następuje „twarde” zderzenie A z B ; sprężynka między B a C ulega rozprostowaniu, a te kulki

oddalają się od siebie; rozpoczyna się „bardzo miękkie” zderzenie C z D ; w momencie, gdy C zwalnia do prędkości v , następuje powtórne zderzenie B z C (uwaga: założenie, że sprężynka między C a D jest bardzo miękka, oznacza, że zderzenia B z C trwa o wiele krócej i w tym czasie oddziaływanie z D można pominąć); sprężynka między C a D ulega rozprostowaniu.

265. Energia sprężystości nici jest dana wyrażeniem $\frac{1}{2}\gamma\alpha^2$, gdzie γ – stała sprężystości. Z drugiej strony zgodnie z prawami fizyki statystycznej (zasada ekwipartycji energii) średnia wartość tej energii wynosi $\frac{1}{2}kT$, gdzie k – stała Boltzmanna, równa $1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K. Przyrównując oba wyrażenia znajdujemy $T = 295$ K = 22°C .

Jedną z imprez II Festiwalu Nauki w Warszawie we wrześniu zeszłego roku był Turniej Rozwiązywania Zadań z Fizyki, będący w pewnym stopniu przedłużeniem ligi zadaniowej Klubu 44F. Spośród nazwisk znanych z czołówki ligowej pojawili się (specjalnie zaproszeni) Andrzej Idzik i Marek Wójcicki; ponadto przybył początkujący w lidze Tomasz Rudny. Pierwsze trzy miejsca zajęli kolejno: A. Idzik, T. Rudny i Paweł Bajurko, a pierwsi dwaj wygrali nagrody w postaci elektronicznych mierników uniwersalnych. Oto niektóre z zadań turniejowych (rozwiązań nie podajemy, żeby nie psuć Czytelnikom zabawy):

1. Soczewkę skupiającą przecięto na pół i nieco rozsunięto połówki, zasłaniając szparę nieprzezroczystą przesłoną. Narysuj obraz rzeczywisty przedmiotu o kształcie cyfry 1, uzyskany za pomocą takiego zestawu.

2. Ktoś strzela do Ciebie z pistoletu. Możesz osłonić się deską, którą jednak pocisk przebija. Co lepiej: a) trzymać deskę nieruchomo, b) w chwili strzału wykonać gwałtowny ruch, szybko odsuwając ją od siebie, c) szybko zbliżać ją do siebie, d) nie ma to znaczenia?

3. Czy energię można spalić? Brzmi to niedorzecznie, ale... rozważmy taką sytuację. Zakładając obóz u podnóża góry, zebraliśmy wiązkę chrustu, potem jednak zdecydowaliśmy się przenieść obóz na szczyt góry i niesiemy tam przygotowany chrust. Gdy go spalimy, zniknie też energia grawitacyjna chrustu. Gdzie się ona podzieje? (Pomysł zadania został ściągnięty z *Kwanta* sprzed około 20 lat.)

4. Oceń orientacyjnie pracę wykonaną przez mięśnie człowieka przy zabiciu komara ręką. Uzasadnij dane wprowadzane do obliczeń i podaj konkretny wynik liczbowy.

Jak co roku, przegląd rozwiązań przysłanych przez Czytelników nasunął pewne dodatkowe uwagi:

Zadanie 243 [Drgania w rozgałęzionym obwodzie LC] (współczynnik trudności $WT=3,00$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR=2$). Bezblędne wyniki przedstawili A. Idzik oraz T. Wietecha, który zauważył przy tym, że problem został rozpatrzony w rozdziale I podręcznika *Fale* Crawforda. Rozwiązanie naszego zadania wymagało tylko pewnych uzupełnień.

Zadanie 245 [Zamknięcie klucza w obwodzie z żaróweczkami] ($WT=2,54$; $LPR=6$). Chociaż rozwiązania A. Arciszewskiego, P. Gadzińskiego, A. Idzika, A. Surmy, T. Wietechy i M. Wójcickiego zostały ocenione powyżej 0,5, to jednak wszystkie są obarczone wadą polegającą na przyjęciu założenia, że opór żarówek jest stały. Ze względu na nieliniowość żarówek lepiej tego założenia unikać.

Zadanie 246 [Trzy walce ułożone w piramidę, obliczyć współczynniki tarcia] ($WT=1,25$; $LPR=5$). Jak zwrócili uwagę niektórzy Czytelnicy, zadanie to było kiedyś na Olimpiadzie Fizycznej, czego autor nie pamiętał. Bezblędne rozwiązania – A. Arciszewski, A. Idzik, T. Rudny, T. Wietecha i M. Wójcicki.

Zadanie 251 [Oświetlenie różnych punktów powierzchni Ziemi w czasie zaćmienia Słońca] ($WT=3,00$; $LPR=1$). Przyjęte we wzorcowym rozwiązaniu założenie, że krzywiznę powierzchni Ziemi można pominąć, okazało się niedobre – wynikało z niego, że szukany stosunek natężeń oświetlenia wynosi 0,61, podczas gdy według ścisłych obliczeń A. Idzika poprawną wartością było 0,73. Gdyby to p. Idzik wystawiał oceny, trudno byłoby mi liczyć na więcej niż połowę punktów! Całe szczęście, że na razie prowadzący Ligę punktuje prace Czytelników, a nie na odwrot... .

Zadanie 256 [Siła wywierana przez strumień cząstek na kulę pochłaniającą je lub odbijającą] ($WT=2,02$; $LPR=4$). W zasadzie rozwiązanie wymagało całkowania, co wykonali bezblędnie A. Idzik i M. Wójcicki oraz z pewną niedokładnością J. Łazuka. Na szczególną uwagę zasługuje praca G. Miłosia (uczniwa szkoły podstawowej!), który rozwiązując zadanie, poniekąd „wynałazł” rachunek całkowy, tzn. zastąpił całkę po powierzchni przekroju kuli sumą dużej liczby składników. Mimo ostatecznie błędnego wniosku należy pogratulować umiejętności!

Zadanie 259 [Luneta z trzech jednakowych soczewek] ($WT=3,01$; $LPR=2$). Lunety przekształcają równoległą wiązkę światła w wiązkę także równoległą, biegnącą pod większym kątem do osi. Ta podstawowa właściwość okazała się nieznaną części Czytelników – może należało dodać w treści odpowiednią wskazówkę? Dobre rozwiązania – A. Idzik i J. Łazuka.

Zadanie 260 [Zespół filtrów obraca płaszczyznę polaryzacji] ($WT=2,43$; $LPR=4$). We wzorcowym rozwiązaniu brakowało uzasadnienia, dlaczego kąty pomiędzy kolejnymi filtrami powinny być jednakowe. Czytelnicy – m.in. A. Idzik, J. Łazuka, G. Miłós i A. Nowogrodzki – okazali się na ogół staranniejsi.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F po 261 zadaniach

| | | |
|---------------------|---------------|----------|
| Jarosław Łazuka | – Warszawa | 1- 34,24 |
| Marek Wójcicki | – Szczecin | 32,15 |
| Tomasz Wietecha | – Tarnów | 2- 26,49 |
| Andrzej Nowogrodzki | – Chocianów | 1- 25,64 |
| Artur Gawryszczak | – Dubeczno | 1- 16,69 |
| Aleksander Surma | – Myszków | 3- 15,46 |
| Artur Arciszewski | – Kielce | 11,01 |
| Andrzej Idzik | – Bolesławiec | 2- 10,15 |
| Jacek Konieczny | – Poznań | 8,65 |

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1996–1998 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 8 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Jak się okazało, p. Wójcicki rozpoczął swą działalność w lidze fizycznej już na początku 1985 roku, po czym przerwał ją na prawie 13 lat. Jest to z pewnością rekordowo długa przerwa w ciągu istnienia Ligi – tym bardziej cieszymy się z powrotu! Niestety, podczas przekazywania dokumentacji od poprzednio prowadzącego ligę, p. Nadolnego, niektóre dane o uzyskanych wówczas punktach zostały utracone. Prosimy o wybaczenie!

Pozostali członkowie Klubu 44F (alfabetycznie; liczby w nawiasach oznaczają wielokrotność przekroczenia 44 punktów):

P. Bała (3), A. Borowski (1), P. Gadziński (1), A. Gluza (1), P. Gworys (3), W. Kacprzak (1), J. Lipkowski (2), D. Lipniacki (3), B. Mikieliewicz (1), L. Motyka (1), R. Musiał (1), P. Perkowski (2), T. Rawlik (1), R. Repucha (1), A. Sikorski (3), J. Stelmach (1), L. Szalast (1), P. Wach (1).



Rozwiązanie zadania F 494.

Sily działające na układ kulek zanurzonych w niezbyt głębokiej wodzie przedstawione są na rysunku, przy czym przez \vec{F} oznaczono siłę wyporu działającą na cięższą kulkę, $\vec{F}(1 - \frac{1}{n})$ jest siłą wyporu działającą na lżejszą kulkę, \vec{Q} jest siłą ciężkości działającą na cięższą kulkę, a \vec{R} to siła reakcji dna. Zakładając, że masa lżejszej kulki jest znikomo mała, otrzymujemy położenie środka ciężkości układu w środku cięższej kulki. Momenty sił działające na tę kulkę znikają, a więc:

$$\vec{R} = \vec{F} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

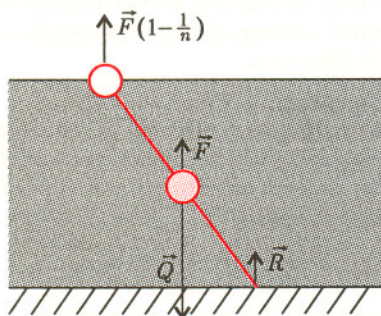
Ponieważ układ jest w równowadze statycznej, więc suma sił nań działających jest równa zeru, stąd:

$$Q = F + 2F \left(1 - \frac{1}{n}\right) = F \left(3 - \frac{2}{n}\right)$$

Po przeniesieniu do głębszej wody układ nie zatonie, jeśli siła ciężkości \vec{Q} będzie mniejsza od sił wyporu działających na kulkę: $Q < 2F$. Korzystając z tej nierówności oraz z poprzedniego równania, otrzymujemy warunek na n :

$$3 - \frac{2}{n} < 2,$$

a więc kulki nie zatoną, jeśli w płytkiej wodzie co najmniej połowa lżejszej kulki jest wynurzona.



Jednymi z najbardziej egzotycznych obiektów na niebie są galaktyki emitujące silne promieniowanie radiowe ze strug (jetów) ciągnących się na setki kiloparseków w obie strony od jądra galaktyki wzdłuż jej osi. Od dawna uważa się, że energia tych strug, a więc i promieniowania radiowego, pochodzi z nieustannego spadku materii, zawartej w galaktyce, na znajdującą się w jej centrum masywną czarną dziurę. Naturalną kolejną rzeczą nasuwa się pytanie, skąd w danej galaktyce bierze się tyle materii, którą mogłaby żywić się centralna czarna dziura. Wydaje się, że grupa astronomów ze Space Telescope Science Institute znalazła poważne argumenty przemawiające za tym, że materia ta może pochodzić z połknięcia innej galaktyki.

By przebadac centralne części odległych radiogalaktyk, astronomowie ci wykonali w podczerwieni za pomocą Teleskopu Hubble'a wiele zdjęć obiektów, które na zdjęciach uzyskanych z powierzchni Ziemi wyglądały jak „nieciekawe” galaktyki eliptyczne nie wykazujące istotnych szczegółów budowy. Okazało się jednak, że zdjęcia w podczerwieni ukazały u tych galaktyk ciemne pasma materii międzygwiazdowej, podlegające ponadto pewnej prawidłowości. Mianowicie, jeżeli galaktyka miała akurat pasma materii głęboko w swoich centralnych częściach, to tworzyły one raczej regularny dysk położony w płaszczyźnie prostopadłej do osi galaktyki. W innych natomiast galaktykach, gdzie materia odległa była od jądra o dziesiątki kiloparseków, tworzyła ona z reguły chaotyczne pasma nie skorelowane z usytuowaniem strug emitujących promieniowanie radiowe.

Jeżeli zdjęcia tych galaktyk uszeregować w kolejności od „chaosu do porządku”, to można wysnuć wniosek, że wygląd danej galaktyki wskazuje na jej zaawansowanie ewolucyjne. W wyniku przypadkowego spotkania dwóch galaktyk ich struktura zostaje zniszczona, obraz jest chaotyczny i dopiero z upływem czasu wygładza się, w miarę jak materia połączonych galaktyk skupia się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora ich zsumowanego momentu pędu. Zarazem towarzyszy temu opadanie materii na centrum nowej galaktyki, powstanie tam czarnej dziury, zasilanie jej w nieustannie opadającą materię i powstanie strug wyrzucanych wzdłuż osi galaktyki. Mechanizm ten dawałby więc w zakresie radiowym charakterystyczny symetryczny obraz, tak często spotykany u pozagalaktycznych radioźródeł.

Tomasz KWAST

Luty

Zdolność rozdzielcza teleskopu zależy od jego średnicy i w przybliżeniu wynosi $\frac{\text{długość fali światłnej}}{\text{średnica obiektywu}}$ – obie wielkości w tych samych jednostkach. Dla teleskopu metrowego daje to kąt rzędu 0",1. Z kolei gwiazda o rozmiarach Słońca (milion km), oglądana z odległości 1 pc (3×10^{16} m), miałaby średnicę kątową w przybliżeniu 0",01. Nic więc dziwnego, że w zasadzie przez żaden teleskop nie da się zobaczyć tarczy właściwie żadnej gwiazdy. Otóż, jednym z nielicznych wyjątków jest doskonale widoczna w lutowe wieczory α Oriona, czyli Betelgeza (jak kto woli – Betelgeuse). Bardzo łatwo jest ją znaleźć na niebie, jest bowiem gwiazdą bardzo jasną i bardzo czerwoną. Rzeczywiście jest to czerwony nadolbrzym o średnicy tysiąckrotnie większej od słonecznej, a odległy o około 120 pc. Dla tej gwiazdy dało się, co prawda dopiero za pomocą dość wymyślnych technik, zmierzyć średnicę, a nawet odtworzyć przybliżony

rozkład jasności na jej powierzchni. Niemal wszystkie inne gwiazdy są dla nawet najpotężniejszych teleskopów punktami.

Wenus w lutym szybko przesuwa się z Wodnika do Ryb i można ją próbować oglądać po zachodzie Słońca. Mars jest w Wadze i widać go w drugiej połowie nocy, Jowisz w Rybach, a Saturn na granicy Ryb i Barana i obie te planety widać krótko po zachodzie Słońca. Pełni Księżyc w lutym nie ma (była 31 I, a będzie 2 III), natomiast nów wypada 16 II. Księżyc zbliży się mocno do Regulusa (2 II) i Aldebarana (23 II) i w obu przypadkach zakryje te gwiazdy, ale z Polski zakryć nie zobaczymy. 16 II zakryje też Słońce, będzie wtedy mianowicie obrączkowe zaćmienie Słońca, ale widoczne z południowej półkuli Ziemi. Wreszcie 23 II wieczorem Wenus zbliży się mocno do Jowisza i warto spróbować to zobaczyć.

T.K.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (12')

Wyjaśnienie oszustwa (12): Sposób obliczenia wartości oczekiwanej wygranej Bazylego jest poprawny pod warunkiem, że ta wartość oczekiwana istnieje! Tymczasem

$$w = -2 + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} - \frac{20}{6} +$$

$$+ \frac{10}{36} + \frac{20}{36} + \frac{30}{36} + \frac{40}{36} + \frac{50}{36} - \frac{200}{36} +$$

$$+ \frac{100}{216} + \frac{200}{216} + \frac{300}{216} + \frac{400}{216} + \frac{500}{216} - \dots - \frac{2 \cdot 10^n}{6^n} +$$

$$+ \frac{1 \cdot 10^n}{6^{n+1}} + \frac{2 \cdot 10^n}{6^{n+1}} + \frac{3 \cdot 10^n}{6^{n+1}} + \frac{4 \cdot 10^n}{6^{n+1}} + \frac{5 \cdot 10^n}{6^{n+1}} - \frac{2 \cdot 10^{n+1}}{6^{n+1}} + \dots$$

Powyższy szereg jest rozbieżny, gdyż zawiera wyrazy dodatnie i ujemne o dowolnie dużej wartości bezwzględnej. Co więcej, szereg ten nie jest rozbieżny ani do $+\infty$, ani do $-\infty$, trudno więc o racjonalne argumentowanie, czy powyższa suma „wygląda” bardziej dodatnio, czy bardziej ujemnie.

Błąd w rozumowaniu Bazylego jest podobny do następującego przykładu: Ile wynosi suma $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \dots$? Jeżeli zignorujemy rozbieżność szeregu geometrycznego o ilorazie 2, to jego sumę obliczymy: $s = 1 + 2s$, skąd $s = -1$. Trochę mało jak na sumę liczb dodatnich. W tym przykładzie potrafimy jednak odpowiedzieć na pytanie o sumę – widać gołym okiem, że suma ta wynosi $+\infty$.

Tymczasem szereg we wzorze na wartość oczekiwaną w bardziej przypomina szereg geometryczny o ilorazie -2 ($1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + \dots$), który nie jest rozbieżny ani do $+\infty$, ani do $-\infty$, ani też nie widać żadnych argumentów przemawiających za tym, by uznać go za bardziej dodatni niż ujemny lub na odwrót. Naiwne wyliczenie jego sumy daje $S = 1 - 2S$, skąd $S = \frac{1}{3}$. To jednak, jak już się przekonaaliśmy, zupełnie o niczym nie świadczy.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (13')

Wyjaśnienie oszustwa (13): Liczba c zależy od x . Zatem $f'(c)$ nie jest stałą i w związku z tym różniczkowanie wzoru (\spadesuit) jest błędne.

JWR

PISZEMY PRACE (2)

Rubryka adresowana jest do uczniów. Wyniki uzyskane w najlepszych pracach zostaną omówione w Gammalimatiasie. Najlepsze prace wezmą udział w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki.

KRZYWE DRUGIEGO STOPNIA W GEOMETRII

Krzywa płaska drugiego stopnia to zbiór o równaniu

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Zbiór taki jest zazwyczaj elipsą, parabolą lub parą hiperbol. Czasami degeneruje się on do czegoś prostszego: prostej, pary prostych, punktu, zbioru pustego lub całej płaszczyzny. Interesują nas zagadnienia geometryczne, w których pojawiają się wyżej opisane krzywe. Każda z tych krzywych oprócz definicji analitycznej ma też definicję czysto geometryczną.

Elipsa to zbiór punktów, których suma odległości od dwu ustalonych punktów zwanych ogniskami jest stała. Szczególnym przypadkiem elipsy jest okrąg.

Zbiór punktów o stałej różnicy odległości od ognisk to **hiperbola**.

Parabola to zbiór punktów, których odległość od ogniska jest równa odległości od ustalonej prostej zwanej kierownicą.

A oto przykłady zagadnień geometrycznych, w których mogą pojawić się krzywe drugiego stopnia:

Dane są dwa różne punkty A i B . Czym jest zbiór punktów o stałym ilorazie (lub sumie kwadratów lub różnicy

kwadratów) odległości od punktów A i B ? Jaka jest odpowiedź na podobne pytania gdy dane są punkt i prosta? Czym jest miejsce zbiór punktów o stałej sumie odległości od danych n punktów? A od n punktów i prostej?

Dane są punkty A, B, C i liczba rzeczywista a . Czym może być zbiór punktów P o stałej wielkości $AP^2 + BP^2 - a \cdot CP^2$ w zależności od a i wzajemnego położenia punktów A, B i C ?

Niech A, B, C, D będą kolejnymi wierzchołkami rombu. Czym jest zbiór punktów P o stałym $AP^4 - BP^4 + CP^4 - DP^4$?

Spróbuj przeanalizować te zagadnienia i pomyśl o innych problemach prowadzących do krzywych drugiego stopnia. A może uda Ci się znaleźć pewne uogólnienia w przestrzeni trójwymiarowej?

Prace prosimy przysyłać pod adresem Gammalimatiasu do 15 kwietnia 1999 r. Autorów prosimy o podanie imienia, nazwiska, adresu prywatnego, klasy oraz nazwy i adresu szkoły. Prosimy o zaznaczenie, czy praca była pisana pod kierunkiem opiekuna – jeśli tak, prosimy o podanie jego imienia, nazwiska i adresu.

JWR