



Trwa jubileusz XXV lat *Delty*:

6 czerwca 1973 roku powołano redakcję *Delty*,
8 grudnia odbyło się pierwsze posiedzenie Komitetu Redakcyjnego
Delty, na którym przedstawiono próbny numer miesięcznika,
1 stycznia 1974 roku ukazał się w kioskach w nakładzie 30 tys.
egzemplarzy, w cenie 5 zł, pierwszy numer *Delty*.

XXV lat powinien zamknąć numer 300 miesięcznika, jednak w okresie parcelacji RSW straciliśmy pięć numerów, tak więc numer taki ukaże się jako 5/1999.

Składając Czytelnikom najserdeczniejsze jubileuszowe życzenia, informujemy, iż od czerwca 1998 do maja 1999 w każdym numerze przypomnimy coś z dawnych lat.

Ten okazjonalny dział nazywa się **Stara Delta**.

SPIS TREŚCI NUMERU 12(295)

W numerze przedstawiamy najważniejsze (najciekawsze?) równania różniczkowe zebrane i opisane przez Wojciecha Kopczyńskiego i Pawła Strzeleckiego, opatrzone wstępem przez Wiktora Bartola.

Ponadto

Klub 44	str.11
Mała Delta	str.12
Zadania	str.13
Sondowanie Marsa <i>Marek Demiański</i>	str.14
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str.15
Patrz w niebo	str.16
Grudzień	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:

Wspomnienie o Autorach *Delty*

Okładki i ilustracje wykonała
Anna Ludwicka

Wybór artykułów z *Delty*
ukazuje się w języku angielskim
w sieci Internet pod adresem
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
– wiceprzewodniczący
Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Tomasz Hofmokr
Andrzej Hryniewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda
Feliks Przytycki
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Anna Wojtyra
Piotr Zalewski
Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 843-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65.
Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące. Cena jednego numeru w 1999 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres co najmniej trzech miesięcy) cena numeru w 1999 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1999 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numer archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie. Niestety, nie dysponujemy już numerami z lat 1974–1984.

Zgodnie z listopadową zapowiedzią w tym numerze prezentujemy naszym Czytelnikom wybór równań różniczkowych. Nie ma w nim, oczywiście, wszystkich równań różniczkowych świata: przygotowanie ich listy po pierwsze – przekracza nasze możliwości, po drugie – nie było naszą intencją. Chcieliśmy pokazać Czytelnikom w miarę reprezentatywną garść równań *ważnych*, zarówno z punktu widzenia różnych zastosowań, jak i samej matematyki. Mamy nadzieję, że się to nam choć w części udało.

Redakcja

Matematyka żywi się zmiennością, zmienność wyraża się (najczęściej) funkcją – stąd funkcje są w matematyce bardzo ważne. Często jednak bywa tak, że wiele wiadomo o zachodzących zmianach, ale trzeba dopiero odkryć funkcję, która je opisuje. Można wtedy spróbować ułożyć równanie, w którym owa funkcja będzie niewiadomą. Jeśli w równaniu występują jej pochodne, to mamy do czynienia z *równaniem różniczkowym* (dalej często zapisywanym jako „r.r.”). Gdy poszukiwana funkcja ma tylko jedną zmienną, takie równanie nazywa się *zwyczajnym*, jeśli to funkcja wielu zmiennych (a zatem trzeba mówić o jej pochodnych cząstkowych), mamy równanie różniczkowe *cząstkowe*. Liczne przykłady takich równań można znaleźć na dalszych stronach *Delty*. Jaka funkcja ma tę własność, że jej pochodna jest stała (czyli wartości funkcji zmieniają się w sposób jednostajny)? Równanie $y' = a$ ma, jak wiadomo, nie jedno rozwiązanie, lecz wręcz przeciwnie: nieskończenie wiele (każde postaci $y = ax + b$), i wszystkie one spełniają postawiony funkcji warunek. Aby zatem wyróżnić jedno z nich, trzeba ustalić, czego oczekujemy od wybranego rozwiązania. Jeśli np. funkcja y ma opisać drogę, przebytą przez obiekt w czasie x , to być może zechcemy uznać, że droga zaczyna się w zerowym momencie rozpoczęcia ruchu, czyli $y(0) = 0$. Teraz mamy już tylko jedną funkcję z wykresem przechodzącym przez punkt $(0, 0)$ i jest ona *rozwiązaniem szczególnym* równania. Taki dodatkowy warunek, pozwalający wyróżnić jedno rozwiązanie spośród wielu, nazywa się *warunkiem początkowym* lub *brzegowym*. Jeśli w r.r. (zwyczajnym) występują dalsze pochodne funkcji y aż do pochodnej n -tej, to po pierwsze, mówimy o równaniu *n -tego rzędu*, a po drugie, wyróżnienie jednego rozwiązania wymaga wskazania nie tylko wartości, jaką ma przyjmować funkcja w pewnym punkcie x_0 , ale także wartości każdej pochodnej rzędu nie większego od $n - 1$ w x_0 (taki warunek nazywa się *początkowym*) – lub n punktów, przez które ma przechodzić wykres y

(warunek brzegowy). Czytelnik może zechcieć to zobaczyć na prostym przykładzie równania $y'' = a$. Natomiast *ogólnym rozwiązaniem* r.r. (zwyczajnego lub cząstkowego) jest rodzina funkcji, zależnych od n parametrów (gdy r.r. jest rzędu n), a podstawienie konkretnych wartości za te parametry daje rozwiązanie *szczególne* (choć niekoniecznie wszystkie rozwiązania *szczególne* można tak otrzymać – te pozostałe są rozwiązaniami *osobliwymi*). Jeśli r.r. jest zwyczajne, parametry reprezentują liczby, jeśli cząstkowe – funkcje $n - 1$ zmiennych. Zadanie znalezienia rozwiązania *szczęólnego*, spełniającego dane warunki początkowe, nosi nazwę *zagadnienia Cauchy'ego*. Nie zawsze ma ono jednoznaczne rozwiązanie (może bowiem mieć ich kilka lub wcale). Stąd podstawowe twierdzenia teorii r.r. dotyczą warunków istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego. Na koniec tych przygotowań do lektury niełatwych tekstów, wypełniających nasz atlas równań różniczkowych, należy wspomnieć o pewnym zagadnieniu, zrodzonym z motywacji praktycznych, a mianowicie o *stabilności*. Otóż w zastosowaniach r.r. wartości, występujące w warunkach początkowych, pochodzą często z „życia”, czyli z obserwacji i pomiarów. Są więc zazwyczaj obarczone niedokładnością – ale mimo to na takich właśnie wartościach opiera się poszukiwanie odpowiedniego rozwiązania *szczęólnego*. Byłoby dobrze, gdyby owe niedokładności nie wpływały nadmiernie na rozwiązanie. Wyróżnia się zatem rozwiązania *stabilne*, czyli takie, które ulegają tylko małym zmianom, gdy mało zmieniają się wartości początkowe. Inne są z praktycznego punktu widzenia nieprzydatne. Metody rozwiązywania (*całkowania*) r.r. to tylko jeden z mnóstwa problemów matematycznych z nimi związanych. Wiele miejsca w teorii zajmuje np. zachowanie się rozwiązań. Znaczenie równań bierze się jednak przede wszystkim z ogromu ich zastosowań – których ilustracją mogą być zamieszczone w numerze przykłady.

Równania Newtona

$$(1) \quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t),$$

są wyrazem II zasady dynamiki. Występująca po prawej stronie siła \vec{F} traktowana jest jako zadana funkcja położenia \vec{r} , prędkości $\dot{\vec{r}}$ i czasu t . Jej konkretna postać zależy od warunków fizycznych, w jakich znajduje się cząstka, której ruch równania te opisują. Fizycznie uzasadnione jest założenie, że funkcja \vec{F} jest regularna, tj. ciągła, gładka itp. W takiej sytuacji ruch cząstki, opisany funkcją $\vec{r} = \vec{r}(t)$, jest określony przez zadanie położenia $\vec{r}(t_0)$ i prędkości $\dot{\vec{r}}(t_0)$ w chwili początkowej t_0 – przynajmniej w pewnym otoczeniu tej chwili.



Równanie oscylatora harmonicznego

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

jest ogólnym równaniem wszelkich małych drgań wokół położenia równowagi. Opisuje np. małe drgania wahadła zawieszonego na nieważkiej, nierozciągliwej nici; wtedy ω^2 jest stosunkiem przyspieszenia ziemskiego do długości wahadła, a x – kątem między nitką i kierunkiem pionowym. Z równania wynika, że okres drgań wahadła $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$ nie zależy od amplitudy drgań. Równanie (2) opisuje również drgania kulki zawieszony na sprężynie (wtedy $\omega^2 = k/m$, gdzie k oznacza współczynnik sprężystości sprężyny, a m – masę kulki).

Równanie Hilla

$$(3) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0,$$

w którym współczynnik ω jest okresową funkcją czasu t , opisuje małe drgania pod wpływem okresowo zmiennej siły lub np. drgania wahadła o okresowo zmieniających się parametrach. W astronomii równania tego typu używane są m.in. do analizy ruchu Księżyca.

Okazuje się, że dla równania Hilla może zachodzić tzw. rezonans parametryczny: ze zjawiskiem tym spotykamy się np. wtedy, gdy za pomocą wychyleń o odpowiednio dobranej częstotliwości udaje się nam rozbijać huśtawkę.

Równania Eulera ciała sztywnego

$$(4) \quad \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 &= M_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3, \end{aligned}$$

opisują ruch obrotowy ciała sztywnego. Szukaną wielkością jest tu wektor prędkości kątowej $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, a zadanymi główne momenty bezwładności I_1, I_2, I_3 i wektor momentu siły $\vec{M} = (M_1, M_2, M_3)$. W przypadku $\vec{M} = \vec{0}$ równania te opisują *bąka swobodnego* i wtedy znane są jakościowe cechy rozwiązania, które nie wyraża się na ogół przez funkcje elementarne. Jeśli natomiast $I_2 = I_3$, czyli wtedy, gdy rozważamy przypadek *bąka symetrycznego swobodnego*, nietrudno jest znaleźć rozwiązanie za pomocą funkcji elementarnych.

Równania Hamiltona

$$(5) \quad \dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}, \quad l = 1, \dots, f,$$

opisują ruch układu mechanicznego o f stopniach swobody, rozumiany jako ruch punktu-obrazu w $2f$ -wymiarowej przestrzeni fazowej o współrzędnych q_l (tzw. współrzędnych uogólnionych) i p_l (tzw. pędów uogólnionych). Funkcja $H = H(q_l, p_l, t)$ zwana jest hamiltonianem układu.

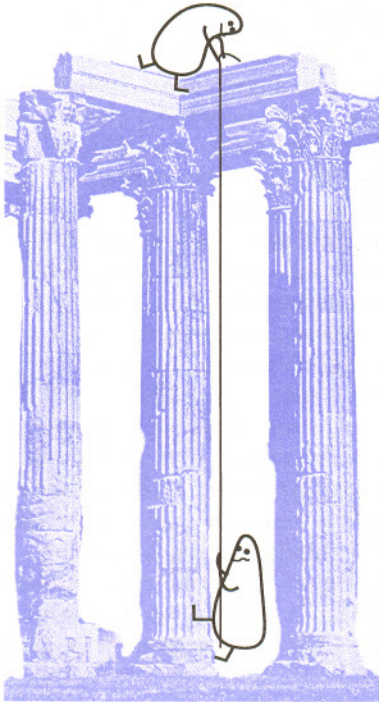
Równanie Hamiltona–Jacobiego

$$(6) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_l, \frac{\partial S}{\partial q_l}, t\right) = 0,$$

jest równaniem różniczkowym cząstkowym, którym często posługujemy się w celu rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych Hamiltona. Interesuje nas przy tym tzw. całka zupełna tego równania, tj. takie jego rozwiązanie $S = S(q_l, t, \alpha_l)$, które zależy w istotny sposób od f parametrów dowolnych α_l , $l = 1, \dots, f$. Jednym z tych parametrów może być energia E , która pojawia się w sytuacji, gdy hamiltonian H nie zależy od czasu, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Szukając rozwiązania równania Hamiltona–Jacobiego w postaci $S = S_0 - Et$, gdzie funkcja $S_0 = S_0(q_l)$ nie zależy od czasu t , otrzymujemy *równanie*

W szczególnym przypadku, gdy $\omega^2(t) = \text{const} \cdot (1 + \epsilon \cos t)$, gdzie $\epsilon \ll 1$, równanie (3) nazywane jest równaniem Mathieu.

Rezonans parametryczny polega na tym, że na skutek okresowych zmian parametrów układu położenie równowagi, które jest stabilne przy każdej ustalonej wartości parametru, staje się niestabilne.



Rozwiązanie zadania F 489.

Opór włókna żarówki znacząco rośnie wraz z temperaturą. Podczas pomiaru oporu omomierzem przez żarówkę przepływa stosunkowo niewielki prąd i temperatura jej włókna jest bliska pokojowej. Oczywiście, w normalnych warunkach pracy żarówki temperatura ta jest znacznie wyższa.



$$H\left(q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}\right) = E.$$

Rozwiązanie zadania F 490.

Wystarczy włączyć na parę minut jeden z wyłączników, wyłączyć go, włączyć drugi i przejść do pokoju z żarówkami. Ta, która się świeci, połączona jest z drugim wyłącznikiem. Z pozostałych dwóch żarówek ciepła połączona jest z pierwszym wyłącznikiem, a zimna – z trzecim.

Równanie hipergeometryczne (Gaussa)

$$(7) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{(1 + \alpha + \beta)x - \gamma}{x(x-1)} \frac{dy}{dx} + \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} y = 0,$$

gdzie α , β i γ są liczbami rzeczywistymi różnymi od zera, a ponadto γ nie jest liczbą całkowitą, pojawia się, podobnie jak równanie Bessela, w licznych zagadnieniach fizyki matematycznej. Całkowanie wielu równań drugiego rzędu można sprowadzić do całkowania równania Gaussa (proszę np. dokonać w równaniu Legendre’a – patrz niżej – zamiany zmiennej niezależnej $x = 1 - 2t$).

Rozwiązania równania Gaussa wyrażają się przez szeregi hipergeometryczne

$$F_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+(k-1))\beta(\beta+1)\dots(\beta+(k-1))}{k! \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+(k-1))} x^k$$

i są zbadane równie dobrze, jak funkcje sinus i cosinus.

Równanie Legendre’a

$$(8) \quad -\left((1-x^2)P'(x)\right)' + \frac{m^2}{1-x^2}P(x) = l(l+1)P(x), \quad x \in [-1, 1],$$

gdzie m i l są nieujemnymi liczbami całkowitymi, pojawia się np. w końcowym etapie całkowania zagadnienia ruchu elektronu w kulombowskim polu sił o symetrii sferycznej (czyli w matematycznym opisie atomu wodoru), gdy określamy „kątową część” funkcji falowej.

Rozwiązania tego równania dla $m = 0$, tzw. wielomiany Legendre’a, dane są wzorem Rodriguesa:

$$P_l(x) = \frac{1}{l!2^l} \frac{d^l}{dx^l} \left((x^2 - 1)^l \right)$$

– proszę sprawdzić, że wzór ten istotnie określa pewien wielomian stopnia l , który znika na końcach przedziału $[-1, 1]$ i spełnia równanie (8) dla parametru $m = 0$. W ogólnym przypadku rozwiązanie wyraża się wzorem

$$P_{m,l}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, 1, \dots, l.$$

Równanie Bessela

$$(9) \quad x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} + (x^2 - \nu^2)u = 0,$$

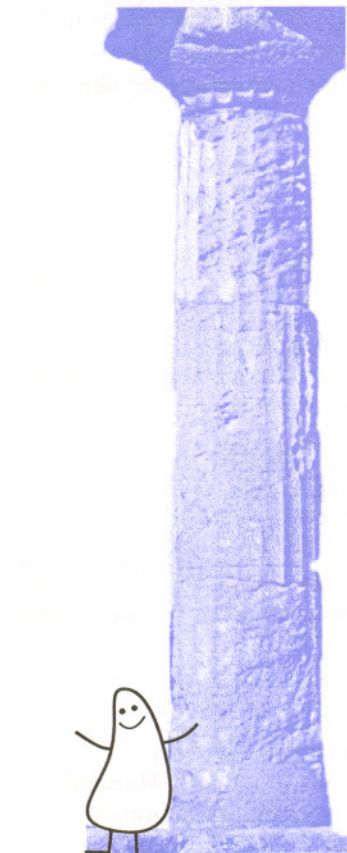
(liczba ν jest parametrem) pojawia się przy okazji rozwiązywania wielu zagadnień w fizyce, astronomii i technice, szczególnie w przypadkach, gdy rozpatrywany problem ma symetrię sferyczną lub cylindryczną. Rozwiązania tego równania, tak zwane funkcje Bessela, są bardzo użytecznymi funkcjami specjalnymi; dzięki nim można wyrazić w jawny sposób np. amplitudę drgającej membrany o kolistym kształcie, wysokość czystych tonów tej membrany czy zmiany temperatury wewnątrz stygnącej, jednorodnej kuli.

Równanie Riccatiego

$$(10) \quad y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

jest jednym z najprostszych równań różniczkowych zwyczajnych, które na ogół nie jest całkowne za pomocą kwadratur. Oznacza to, że jego rozwiązanie nie wyraża się przez całki nieoznaczone z funkcji P , Q , R ani z funkcji, które można z nich uzyskać, dokonując operacji algebraicznych. Jak udowodnił w XVIII wieku Riccati, w szczególnym przypadku, gdy równanie ma postać

$$(10') \quad y' + ay^2 = bx^m,$$



Kwadratura to staroświecka nazwa całkowania. Wzięła się ona stąd, że całki pierwotnie służyły tylko do mierzenia pól. Starożytni zaś, chcąc ustalić pole jakiejś figury, zamieniali ją na kwadrat.

gdzie a , b i m są stałymi, a liczba $m/(2m + 4)$ jest całkowita, rozwiązania równania (10') wyrażają się przez funkcje elementarne. W XIX wieku Liouville wykazał, że przy wszystkich innych wartościach m równanie (10') nie jest całkowne za pomocą kwadratur.

Równanie Riccatiego jest stosowane do opisu kinetyki reakcji chemicznych, a także w biologii populacyjnej (gdzie nosi nazwę równania Verhulsta). W drugim przypadku funkcje P , Q i R są stałe, przy czym $P < 0$, co odpowiada nieliniowym zmianom liczby narodzin i śmierci w dużych populacjach.

Równania Lotki–Volterra

$$(11) \quad \frac{dz}{dt} = \alpha z - \lambda zr, \quad \frac{dr}{dt} = -\beta r + \mu zr,$$

stanowią najprostszy matematyczny model zmian liczebności dwóch rywalizujących ze sobą populacji, rysiów i zajęcy. Zmienna t to czas, r oznacza liczbę rysiów, z – liczbę zajęcy, a α , β , λ i μ są stałymi dodatnimi. Model jest interesujący przede wszystkim z jakościowego punktu widzenia.

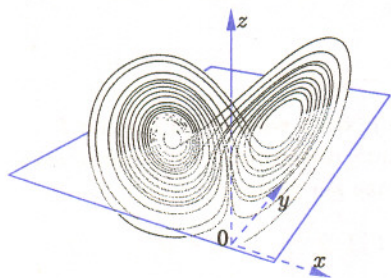
Łatwo widzieć, że gdy wcale nie ma rysiów, równania przewidują wykładniczy wzrost liczby zajęcy; jeśli natomiast wcale nie ma zajęcy, to liczba rysiów maleje do zera, również wykładniczo. Typowe rozwiązania układu Lotki–Volterra odpowiadają sytuacji, w której liczebności obu populacji zmieniają się okresowo w dość stabilny sposób.

Układ równań Lorenza

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\sigma x(t) + \sigma y(t), \\ \dot{y}(t) = -x(t)z(t) + rx(t) - y(t), \\ \dot{z}(t) = x(t)y(t) - bz(t), \end{cases}$$

gdzie σ , r i b są dodatnimi stałymi, był rozważany na początku lat sześćdziesiątych przez amerykańskiego meteorologa, Edwarda Lorenza, podczas jego pionierskich prób numerycznego prognozowania zmian pogody.

Jest to układ dysypatywny: generowany przezeń potok fazowy zmniejsza objętość w przestrzeni fazowej; tzn. jeśli z punktów $(x(0), y(0), z(0))$ zbioru $V_0 \subset \mathbb{R}^3$ „wypuścimy” rozwiązania układu $(x(t), y(t), z(t))$, to dla dowolnego t zbiór $V(t) = \{(x(t), y(t), z(t)) \mid (x(0), y(0), z(0)) \in V_0\}$ będzie miał objętość mniejszą od V_0 . Dla $\sigma = 10$, $r = 28$ i $b = 8/3$ trajektorie układu przyciągane są przez ograniczony zbiór o dziwnym kształcie, tak zwany atraktor Lorenza (patrz rysunek).



Równania Maxwella

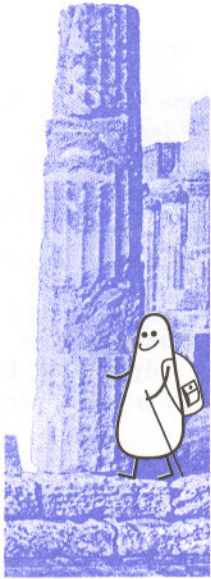
podstawowe równania elektrodynamiki klasycznej, opisujące zjawiska elektromagnetyczne w dowolnym ośrodku, sformułowane przez J.C. Maxwella w latach 60. XIX wieku. Postać równań Maxwella jest następująca (układ jednostek Gaussa):

$$(13) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \\ (b) \quad & \text{div } \vec{B} = 0, \\ (c) \quad & \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ (d) \quad & \text{div } \vec{D} = 4\pi \rho. \end{aligned}$$

Równanie (a) wyraża prawo indukcji Faradaya. Równanie (b) wyraża elementarny fakt empiryczny – brak ładunków magnetycznych. Równanie (c) jest uogólnieniem empirycznego prawa Ampère’a, dotyczącego wzbudzania pola magnetycznego prądem elektrycznym, na pola zależne od czasu; uogólnienie to wyraża przekonanie Maxwella, że zmienne pole elektryczne wzbudza – podobnie jak prąd – pole magnetyczne. Równanie (d), często zwane twierdzeniem Gaussa w formie różniczkowej, jest uogólnieniem prawa Coulomba oddziaływania ładunków elektrycznych.

Ten model matematyczny nazywany jest czasem modelem drapieżnik–ofiara.

Pole elektromagnetyczne w próżni opisane jest dwiema wielkościami wektorowymi zależnymi od czasu i położenia: natężeniem pola elektrycznego \vec{E} i indukcją magnetyczną \vec{B} . Pola te określone są przez swe działanie na ładunki elektryczne, których konfiguracja opisana jest gęstością ładunku ρ (ładunkiem na jednostkę objętości) i gęstością prądu \vec{j} (ładunkiem przenoszonym w jednostce czasu przez jednostkową powierzchnię, prostopadłą do kierunku ruchu ładunków – tzn. prostopadłą do \vec{j}). Dla opisanego procesów elektromagnetycznych w ośrodkach materialnych, oprócz wektorów \vec{E} i \vec{B} , potrzebne są pomocnicze wielkości wektorowe: indukcja elektryczna \vec{D} i natężenie pola magnetycznego \vec{H} .



W próżni, gdy $\vec{D} = \vec{E}$ i $\vec{H} = \vec{B}$, równania Maxwella stanowią układ zamknięty. Należy je rozwiązywać przy zadanych ρ i \vec{j} , spełniających (wynikające z równań Maxwella) równanie ciągłości:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0.$$

Warunki początkowe stanowią pola \vec{E} i \vec{B} zadane w pewnej chwili t_0 i spełniające (w tej chwili) warunki więzów, tj. równania (b) i (d). Równania zawierające pochodne względem czasu (a) i (c) wyznaczają wtedy pola \vec{E} i \vec{B} w pewnym otoczeniu chwili t_0 , przy czym tak wyznaczone pola spełniają warunki więzów (b) i (d) – teraz już wszędzie tam, gdzie są określone.

W ośrodkach materialnych równania makroskopowe (z czterema polami \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} i \vec{H}) są otrzymywane z równań mikroskopowych (z dwoma polami \vec{E} i \vec{B}) przez uśrednienie uwzględniające złożony mechanizm oddziaływania pola elektromagnetycznego z ładunkami ośrodka (teoria elektronowa Lorentza). Związki między polami \vec{D} i \vec{H} a \vec{E} i \vec{B} , zwane związkami materiałowymi (lub równaniami stanu), mają na ogół charakter związków funkcjonalnych, tzn. wartości \vec{D} i \vec{H} w określonym miejscu i czasie zależą nie tylko od wartości \vec{E} i \vec{B} w tym jednym miejscu i w tym jednym czasie, lecz od \vec{E} i \vec{B} rozumianych jako funkcje miejsca i czasu. W związkach tych może np. występować zależność od historii materiału – w takim przypadku mówimy o wystąpieniu zjawiska histerezy, a materiały, które zjawisku temu podlegają, noszą nazwę segnetoelektryków (histereza elektryczna) i ferromagnetyków (histereza magnetyczna). Jednakże dla większości ośrodków izotropowych związki te przybierają prostą funkcyjną (a nie funkcjonalną) postać:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

gdzie $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$ – przenikalność elektryczna ośrodka, a $\mu = \mu(x, y, z)$ – przenikalność magnetyczna ośrodka. Zwykle te związki materiałowe uzupełniają się polowym prawem Ohma, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (gdzie $\sigma = \sigma(x, y, z)$ jest przewodnictwem właściwym materiału), opisującym zdolność przewodzenia prądu przez nośniki związane w materiale.

W relatywistycznym opisie czasoprzestrzennym, gdy $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ i $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$, tworzymy tensor pola elektromagnetycznego $F_{\nu\mu} = -F_{\mu\nu}$ o składowych $F_{01} = E_x, F_{02} = E_y, F_{03} = E_z, F_{12} = -B_z, F_{23} = -B_x$ i $F_{31} = -B_y$ oraz czterowektor prądu j^μ o składowych $j^0 = c\rho$ i $(j^1, j^2, j^3) = \vec{j}$. Równania Maxwella w próżni zapisują się następująco:

$$\begin{aligned} \text{(a) i (b)} \quad & \partial_\mu F_{\nu\epsilon} + \partial_\epsilon F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\epsilon\mu} = 0, \\ \text{(c) i (d)} \quad & \partial_\nu F^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \end{aligned}$$

przy czym $F^{\mu\nu} = g^{\mu\epsilon} g^{\nu\sigma} F_{\epsilon\sigma}$, gdzie $(g^{\mu\epsilon}) = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, jest macierzą metryczną Minkowskiego.

Równanie falowe (d'Alemberta)

$$(14) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 4\pi F(x, t)$$

względnie

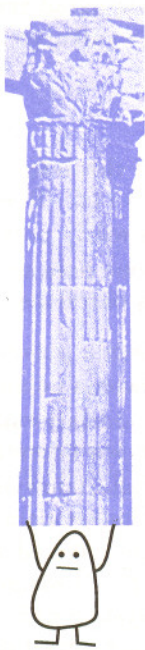
$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu u = 4\pi F,$$

dla $n = 1$ i 2 opisuje (małe) drgania odpowiednio strun, membran, a dla $n = 3$ – fale akustyczne, a także fale elektromagnetyczne. Parametr c jest prędkością rozchodzenia się fali; funkcja F opisuje źródło fal. Operator różniczkowy stojący po lewej stronie równania nazywamy *operatorem d'Alemberta*.

Dla $n = 3$ i dla $F = 0$ rozwiązania równania falowego spełniają zasadę Huygensa: jeśli $u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$ dla wszystkich x spoza pewnego zbioru ograniczonego w \mathbb{R}^3 , to dla dowolnego x_0 istnieje taka chwila t_0 , że $u(x_0, t) = 0$ dla $t > t_0$. Dzięki temu możemy czasem odpocząć w ciszy.

Konwencja sumacyjna i wędrowka wskaźników. Konwencja sumacyjna Einsteina mówi, że jeśli w wyrażeniu jednomianowym pewien wskaźnik występuje dwukrotnie, to rozumie się, iż nastąpiło sumowanie względem tego wskaźnika w całym zakresie, jaki wskaźnik ten przebiega. W naszym atlasie wskaźniki łacińskie przebiegają zakres od 1 do 3, natomiast greckie od 0 do 3. Współrzędne czasoprzestrzenne są oznaczane $x^\mu = ct, x, y, z$. Tensorem metrycznym jest $g_{\mu\nu}$ i (poza hasłem *Równania Einsteina*) różne od zera są tylko jego wyrazy diagonalne, równe odpowiednio: +1, -1, -1, -1. Tensorem odwrotnym jest $g^{\mu\nu}$; jest on zadany równościami $g^{\mu\nu} g_{\nu\epsilon} = \delta_\epsilon^\mu$ (czyli 0 dla $\mu \neq \epsilon$ i 1 dla $\mu = \epsilon$). Tensory te służą do „opuszczania” i „podnoszenia” wskaźników według reguł: $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$ oraz $a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu$.

Dla $n = 2$ jest inaczej: nawet gdy dane początkowe znikają poza pewnym zbiorem ograniczonym, to dla dowolnego punktu płaszczyzny przedział czasu, w którym pojawiają się niezerowe wartości rozwiązania, jest nieograniczony.



Równanie Poissona

$$(15) \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -4\pi\rho,$$

pojawia się m.in. w klasycznej elektrodynamice: jeśli zadana funkcja $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest gęstością rozmieszczenia ładunków w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (zakładamy, że ośrodek otaczający ładunki jest próżnią), to rozwiązanie u jest potencjałem pola elektrycznego, a jego gradient, czyli wektor $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right)$, określa natężenie pola. W podobnym kontekście równanie Poissona występuje również w newtonowskiej teorii grawitacji.

Na zewnątrz obszaru naelektryzowanego funkcja ρ jest równa zero, więc potencjał u spełnia tam *równanie Laplace'a* (patrz niżej). Gdy $\Omega = \mathbb{R}^3$, funkcja $u(x) = 1/|x|$ wyraża potencjał elektrostatyczny wytworzony w próżni przez jednostkowy ładunek znajdujący się w punkcie 0.

Równanie Laplace'a

$$(16) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0,$$

opisuje, ogólnie biorąc, stany stacjonarne różnych procesów (dla $n = 3$ funkcja u może być np. temperaturą wewnątrz ciała znajdującego się w stanie równowagi cieplnej – z tego rodzaju sytuacją mamy do czynienia np. przy ogrzewaniu budynków o grubych ścianach, gdy przez dłuższy czas temperatura na zewnątrz i temperatura wewnątrz nie ulegają większym wahaniom).

Funkcje, które spełniają równanie Laplace'a, nazywa się funkcjami harmonicznymi; wewnątrz obszaru, w którym spełnione jest równanie, nie mogą one mieć lokalnych minimów ani maksimów (dowód tego faktu w przypadku $n = 1$ jest banalny).

Żeby równanie Laplace'a miało sens, wystarczy założyć, że funkcja u ma ciągłe drugie pochodne. Okazuje się, że wówczas u ma pochodne wszystkich rzędów, a nawet jest analityczna (tzn. jest sumą swojego szeregu Taylora).

Układ równań Cauchy'ego–Riemanna

$$(17) \quad u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

stanowi warunek konieczny i zarazem dostateczny na to, żeby dwie funkcje u i v (zależne od dwóch zmiennych rzeczywistych x i y) były, odpowiednio, częścią rzeczywistą i urojoną funkcji holomorficznego zmiennej zespolonej $z = x + iy$.

Obie funkcje u i v są funkcjami harmonicznymi: np. różniczkując obie strony pierwszego równania względem x , a drugiego względem y , otrzymamy równości $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$, z których wynika, że $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Układ Cauchy'ego–Riemanna ma również interpretację hydrodynamiczną. Mianowicie, jeśli rozpatrywać ustabilizowany tzw. płaskorównoległy przepływ cieczy, to wówczas pole prędkości cieczy ma postać $\vec{v} = (u_x, u_y)$, a cząstki cieczy poruszają się wzdłuż linii $v = \text{const}$.

Równanie przewodnictwa cieplnego

$$(18) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + f(x, t),$$

opisuje, dla $n = 3$, zmiany temperatury jednorodnego ciała, w którym gęstość, ciepło właściwe i współczynnik przewodnictwa cieplnego są stałe. Funkcja f jest gęstością rozmieszczenia źródeł ciepła, a poszukiwana temperatura u jest funkcją czasu t i punktu przestrzeni x . To samo równanie opisuje proces dyfuzji gazu oraz zmiany stężenia roztworów.

Rozwiązania równania falowego (patrz wyżej) nie mają tej własności: może się okazać, że ich drugie pochodne są funkcjami ciągłymi nigdzie nieróżniczkowalnymi.

Funkcja holomorficznego zmiennej zespolonej to funkcja, która w każdym punkcie swojej dziedziny jest różniczkowalna w sensie zespolonym, albo – równoważnie – jest sumą zbieżnego szeregu potęgowego o współczynnikach zespolonych.

Słowo *płaskorównoległy* oznacza, że wektory prędkości cieczy są styczne do pewnej rodziny płaszczyzn równoległych.

Ten model matematyczny zjawiska jest mocno wyidealizowany: równanie (18) przewiduje np., że początkowy „impuls cieplny” rozchodzi się wewnątrz ośrodka nieskończenie szybko.



Rozwiązanie zadania M 867.

Niech P, R będą punktami na półprostych AC i AD odpowiednio takimi, że $AP = AR = AB$. Niech Q będzie takim punktem, by czworokąt $APQR$ był kwadratem. Wtedy mamy następujące pary przystających trójkątów: $\triangle ABC$ i $\triangle RQD$, $\triangle ABD$ i $\triangle PQC$, $\triangle BCD$ i $\triangle QDC$. Tak więc suma kątów płaskich przy wierzchołku B jest równa

$$\angle PQC + \angle CQD + \angle DQR = \angle PQR = 90^\circ.$$

Przy badaniu zjawiska rozchodzenia się ciepła w cienkiej płycie lub pręcie przyjmuje się na ogół odpowiednio $n = 2$ lub $n = 1$. Jak zauważył Fourier, w drugim przypadku łatwo jest rozwiązać równanie, zakładając, że funkcja u jest sumą szeregu trygonometrycznego. Wyrosła z tego pomysłu cała teoria szeregów Fouriera.

Okazuje się, że gęstość rozkładu normalnego o wartości oczekiwanej 0 i wariancji $\sqrt{2t}$, czyli funkcja $u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-x^2/4t)$, spełnia równanie przewodnictwa cieplnego – to jedno ze źródeł niebanalnych związków tego równania z teorią prawdopodobieństwa.

Równanie Helmholtza

$$(19) \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + k^2 u = 0,$$

opisuje amplitudę $u(x)$ fali o stałej częstotliwości (proszę sprawdzić, że takie właśnie równanie musi spełniać funkcja u , jeśli $u(x)e^{ickt}$ ma spełniać równanie falowe – patrz wyżej). Równanie to pojawia się w zagadnieniach rozpraszania fal.

W początkach naszego wieku badanie wartości własnych operatora Laplace'a – czyli liczb k^2 , dla których równanie (19) ma w zadanym obszarze Ω niezerowe rozwiązanie, znikające na brzegu tego obszaru – było jednym z motorów rozwoju analizy funkcjonalnej. Okazuje się, że o ile Ω ma gładki brzeg i skończoną objętość, to takie liczby tworzą ciąg, który rośnie do $+\infty$. Ciąg ten jednoznacznie określa np. objętość obszaru Ω , pole powierzchni jego brzegu czy liczbę dziur wewnątrz obszaru, nie określa natomiast kształtu Ω z dokładnością do izometrii. Oznacza to, że nikt nie może określić kształtu bębna wyłącznie ze słuchu.

Równanie telegrafistów

$$(20) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u = 0,$$

gdzie a i b są stałymi, opisuje natężenie prądu, a także natężenie pola elektrycznego postępujących wzdłuż liniowego przewodu.

Równania Eulera dla płynów

$$(21) \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \vec{f},$$

jest jednym z najprostszych i najbardziej podstawowych równań mechaniki ośrodków ciągłych. Wielkościami szukanymi są najczęściej: prędkość płynu \vec{v} , jego gęstość ρ i ciśnienie p , natomiast zadana jest gęstość sił długodystansowych \vec{f} . Równanie Eulera jest rozwiązywane równocześnie z *równaniem ciągłości* (wyrażającym prawo zachowania masy) oraz *równaniem stanu*, $\rho = \rho(p)$. W najprostszym przypadku, gdy płyn się nie porusza, $\vec{v} = 0$, z równań Eulera otrzymujemy *równania hydrostatyki*, $\nabla p = \vec{f}$.

Równania Naviera–Stokesa

$$(22) \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f},$$

opisuje ruch ściśliwego płynu lepkiego. W porównaniu z równaniami Eulera nowym członem jest $\mu \Delta \vec{v}$, gdzie μ jest współczynnikiem lepkości. Równania te należy uzupełnić równaniem ciągłości, wyrażającym prawo zachowania masy, odpowiednimi warunkami początkowymi i brzegowymi, opisującymi zachowanie płynu na brzegu obszaru ruchu, oraz tak zwanym równaniem stanu, które wyraża związek między ciśnieniem i gęstością płynu. Rozwiązania opisują zarówno laminarny, jak i burzliwy ruch płynu.

Równania Naviera–Stokesa są bardzo szeroko wykorzystywane w fizyce atmosfery i hydrodynamicie.

Uwaga: zapis $\vec{v} \cdot \nabla$ oznacza operator różniczkowy

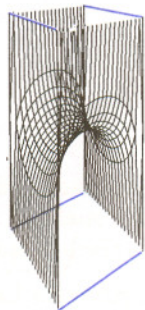
$$(\vec{v} \cdot \nabla) f = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Dla cieczy nieściśliwej równanie stanu ma postać $\rho = \text{const}$, a dla adiabatycznego ruchu gazu mamy $p \rho^{-\kappa} = \text{const}$ (κ jest stosunkiem ciepła właściwego, przy stałym ciśnieniu, do ciepła właściwego, przy stałej objętości, $\kappa = c_p/c_v$).

Równania Cauchy'ego dla płynów

$$(23) \quad \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \operatorname{div} \hat{S} + \vec{f},$$

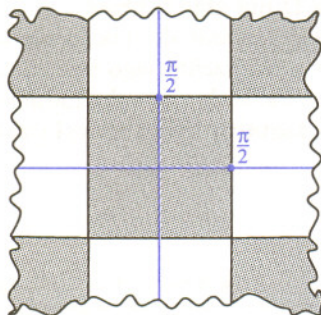
są w teorii ośrodków ciągłych, ze względu na swoją ogólność, odpowiednikami równań Newtona w teorii cząstek. Po ich prawej stronie, obok gęstości sił długodystansowych \vec{f} , występuje dywergencja tensora napięć $\hat{S} = (S_{ij})$, będąca wektorem o składowych $\partial_j S_{ij}$ (konwencja sumacyjna) i reprezentująca gęstość sił kontaktowych. Bogactwo form ośrodków ciągłych odzwierciedlone jest w różnaitości postaci tensora napięć. Gdy tensor napięć jest proporcjonalny do tensora jednostkowego (deltę Kroneckera), $S_{ij} = -p\delta_{ij}$, równania Cauchy'ego przechodzą w równania Eulera. Równania Naviera–Stokesa też są ich szczególnym przypadkiem.



Równanie ciągłości

$$(24) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

jest różniczkowym wyrażeniem prawa zachowania wielkości fizycznej, której gęstością jest ρ , a wektorem gęstości prądu jest \vec{j} . Wielkością tą może być np. nierelatywistyczna masa, ładunek elektryczny, energia czy dowolna składowa pędu. W przypadku masy, a więc w mechanice ośrodków ciągłych (gdzie $\vec{j} = \rho \vec{v}$) równanie ciągłości jest niezależne od innych równań dynamicznych. W przypadku ładunku równanie to jest wnioskiem z równań Maxwella, a zarazem warunkiem ich zgodności. Podobnie, ze zlinearyzowanych równań Einsteina wynika równanie ciągłości zapewniające zachowanie energii i pędu.



Powierzchnia Scherka $z = \log \left(\frac{\cos y}{\cos x} \right)$ składa się z jednakowych kawałków w kształcie stromo wygiętych siodeł, które trzeba rozstawić na czarnych polach nieskończonej szachownicy i gładko skleić, dodając w narożach pół pionowe proste.

Równanie powierzchni minimalnych

$$(25) \quad (1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0,$$

opisuje (lokalnie) kształty baniek mydlanych, rozpiętych np. na pogiętej drucianej ramce – powierzchnia błony mydlanej to $z = u(x, y)$, czyli wykres rozwiązania. Powierzchnie minimalne mają zerową średnią krzywiznę: z grubsza biorąc, w każdym punkcie wyglądają tak, jak siodło, „jednakowo wygięte w obu kierunkach”. Więcej informacji o powierzchniach minimalnych można znaleźć w *Delcie* 10/1996.

Rozwiązanie równania (25) postaci $u(x, y) = f(x) + g(y)$ można znaleźć stosunkowo prosto, całkując dwa równania różniczkowe zwyczajne. Opisuje ono tzw. *powierzchnię Scherka* (patrz rysunek na marginesie).

Równanie Liouville'a

$$(26) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = -2e^u,$$

jest warunkiem na to, by dwuwymiarowa metryka Riemanna $e^u dz d\bar{z}$ miała jednostkową krzywiznę. Mimo że jest to równanie nieliniowe, jest ono całkowicie całkowne. Jego rozwiązaniem ogólnym jest $u = -\ln \left((1 + v\bar{v})^{-2} \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \right)$, gdzie v jest dowolną funkcją holomorficzną zmiennej z .

Równania Einsteina

$$(27) \quad G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu},$$

wiążące tensor Einsteina $G_{\mu\nu}$ metryki czasoprzestrzeni $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ z tensorem energii-pędu materii $T_{\mu\nu}$, są podstawowymi równaniami ogólnej teorii względności. Tensor Einsteina $G_{\mu\nu}$ jest zbudowany z tensora metrycznego $g_{\mu\nu}$, jego pierwszych i drugich pochodnych, a nadto zawiera część informacji o krzywiznie czasoprzestrzeni. Pierwszym nietrywialnym rozwiązaniem tych równań było rozwiązanie Schwarzschilda (1916),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2MG}{c^2 r}} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2),$$



Rozwiązanie zadania M 865.

Niech α będzie kątem między ścianami ABC i BCD , a A' będzie rzutem punktu A na płaszczyznę BCD . Wtedy mamy $S_{ABC} = S_{BCD} \cos \alpha$ oraz $S_{A'BC} = S_{ABC} \cos \alpha$, a po wyrugowaniu $\cos \alpha$ dostajemy $S_{A'BC} = S_{ABC}^2 / S_{BCD}$. Analogicznie wyprowadzamy równości $S_{A'CD} = S_{ACD}^2 / S_{BCD}$ i $S_{A'BD} = S_{ABD}^2 / S_{BCD}$. Dodając trzy otrzymane równości stronami, otrzymujemy, po uwzględnieniu, że $S_{A'BC} + S_{A'CD} + S_{A'BD} = S_{BCD}$, tezę zadania.

będące jedynym rozwiązaniem próżniowym, $T_{\mu\nu} = 0$, w przypadku czasoprzestrzeni sferycznie symetrycznej. W rozwiązaniu tym stała M jest masą gwiazdy będącej źródłem tej sferycznie symetrycznej metryki.

Równania Yanga–Millsa

$$(28) \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} + [A_\nu, F^{\mu\nu}] = 0, \\ F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

są uogólnieniem próżniowych równań Maxwella w teorii pól cechowania. Punktem wyjścia w teoriach pól cechowania jest pewna grupa Liego, a potencjał A_μ i natężenie pola $F_{\mu\nu}$ przyjmują wartości w algebrze Liego tej grupy, natomiast $[,]$ jest komutatorem w tej algebrze. W najprostszym przypadku, gdy grupą Liego jest grupa obrotów w trzech wymiarach $SO(3)$ (albo grupa $SU(2)$), to wtedy A_μ i $F_{\mu\nu}$ przyjmują wartości w trójwymiarowej przestrzeni (nie mającej bezpośredniego związku z przestrzenią fizyczną), a komutator jest iloczynem wektorowym. Standardowy model oddziaływań między cząstkami elementarnymi jest wyrażony w języku teorii pól z cechowaniem.

Równanie Ernsta

$$(29) \quad (u + \bar{u}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2,$$

jest równaniem na funkcję zespoloną u zależną od dwóch zmiennych rzeczywistych ϱ i z . Do rozwiązania tego równania sprowadza się proces rozwiązywania próżniowych równań Einsteina w sytuacji, gdy pole grawitacyjne jest stacjonarne i osiowo symetryczne (tzn. jest polem obracającej się gwiazdy). Okazuje się, że do tego równania sprowadzają się też tzw. antysamodualne równania Yanga-Millsa w przypadku stacjonarności i osiowej symetrii. Równanie to zalicza się do klasy nieliniowych równań eliptycznych.

Równanie Schrödingera

$$(30) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} - V\psi = 0,$$

opisuje ruch cząstki kwantowej o masie m w zewnętrznym polu sił, którego potencjałem jest funkcja V (zależna tylko od x). Rozwiązanie ψ nazywamy funkcją falową cząstki; prawdopodobieństwo, że w chwili czasu t cząstka znajduje się w obszarze przestrzeni A , jest proporcjonalne do całki $\int_A |\psi(x, t)|^2 dx$.

Jeśli energia cząstki ma określoną wartość E , to funkcji falowej poszukujemy w postaci $\psi(x, t) = \phi(x) \exp(-iEt/\hbar)$. Funkcja ϕ spełnia wówczas, jak nietrudno sprawdzić, stacjonarne równanie Schrödingera

$$(30') \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} + V\phi = E\phi.$$

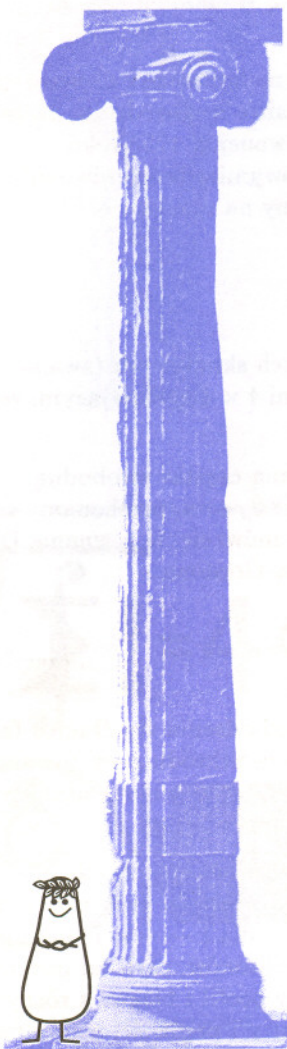
To równanie, podobnie jak równanie Helmholtza, ma nietrywialne rozwiązania na ogół tylko dla niektórych wartości E , co, przynajmniej z matematycznego punktu widzenia, wyjaśnia, dlaczego wartości energii nie zmieniają się w sposób ciągły, tylko są kwantowane.

Równanie Kleina–Gordona

$$(31) \quad (\square + m^2)\psi = 0,$$

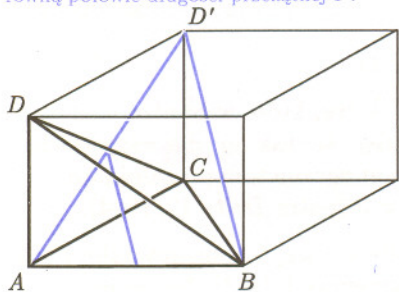
gdzie $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ oznacza operator d'Alemberta (d'Alembertjan),

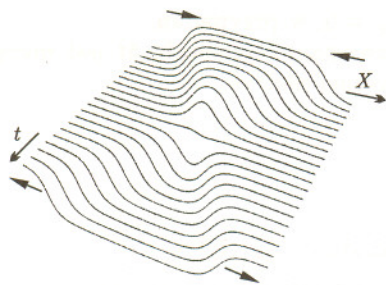
$x_0 = ct$, c jest prędkością światła, było wykorzystywane w pierwszych modelach



Rozwiązanie zadania M 866.

Na czworobocianie zbudujmy prostopadłościan P tak, by A, B, C, D były jednocześnie wierzchołkami P . Niech D' będzie wierzchołkiem P przeciwnym do B . Łatwo zauważyć, że odcinek, łączący środki krawędzi AB i CD , łączy tym samym środki boków trójkąta ABD' , a więc jego długość jest równa połowie długości przekątnej BD' prostopadłościanu. Podobnie stwierdzamy, że pozostałe dwa odcinki, łączące środki przeciwnych krawędzi, mają długość równą połowie długości przekątnej P .





kwantowej teorii pola. Funkcja ψ jest funkcją falową swobodnej cząstki relatywistycznej o masie m .

Zastąpienie liniowego składnika $m^2\psi$ ogólniejszym nieliniowym i okresowym składnikiem $m^2 \sin \psi$ prowadzi do tzw. **równania sine'a-Gordona**, które pojawia się np. w nieliniowej teorii pola zaproponowanej w 1958 roku przez Skyrme'a. Wykres jednego z rozwiązań jednowymiarowego równania sine'a-Gordona, $\psi_{tt} - \psi_{xx} + \sin \psi = 0$, jest pokazany na rysunku obok.

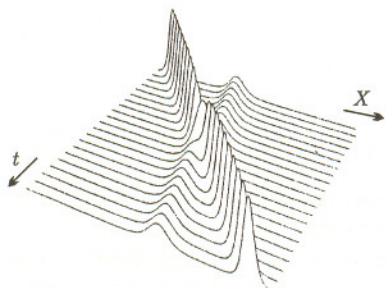
Równanie Diraca

$$(32) \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0,$$

gdzie m jest masą, ψ kolumną o czterech zespolonych składowych (zwaną spinorem), natomiast γ^μ są zespolonymi macierzami 4×4 spełniającymi relacje

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

i zwanymi macierzami Diraca, opisuje relatywistyczną cząstkę swobodną o spinie $\frac{1}{2}$. Działając na to równanie operatorem $i\gamma^\mu \partial_\mu + m$, przekonamy się, że ψ spełnia także równanie Kleina-Gordona, więc mówi się, iż równanie Diraca jest pierwiastkiem kwadratowym z równania Kleina-Gordona.



Laciński termin *soliton* oznacza odosobnioną falę. Solitony po raz pierwszy zaobserwował w 1834 roku John Scott-Russell:

... barka zatrzymała się nagle, a krągły, gładki, ostro zarysowany wodny garb poruszał się wzdłuż kanału, nie zmieniając w widoczny sposób formy ani prędkości. Rzuciłem się za tą falą konno (...) i po jednej czy dwóch milach pogoni straciłem ją z oczu w zakrętach kanału.

Równanie Kortewega-deVriesa

$$(33) \quad u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

zostało zaproponowane w 1895 roku jako model rozchodzenia się długich fal na płytkiej wodzie. Dziś, obok np. nieliniowego równania Schrödingera, równania Burgersa czy równania sine'a-Gordona, równanie (33) stanowi sztandarowy przykład występowania tak zwanej ukrytej symetrii rozwiązań.

Przed około trzydziestu laty w wyniku eksperymentów numerycznych odkryto (a później ściśle udowodniono) zadziwiającą własność tych rozwiązań równania (33), które w nieskończoności dążą do zera: dla $t \rightarrow +\infty$ i $t \rightarrow -\infty$ każde z nich rozpada się na skończoną liczbę tzw. solitonów, czyli fal postaci $u_j(x, t) = \phi(x - c_j t)$, które mają wyraźnie określony profil i biegną z różnymi prędkościami c_j . Mimo nieliniowości równania kształty i prędkości solitonów nie zmieniają się po zderzeniach z innymi solitonami.

Nieliniowe równanie Schrödingera

$$(34) \quad iu_t + u_{xx} + |u|^2 u = 0,$$

pojawia się w fizyce plazmy i tzw. optyce nieliniowej, tzn. w sytuacjach, gdy właściwości optyczne ośrodka zależą od wartości natężenia pola elektrycznego fali świetlnej przechodzącej przez ten ośrodek.

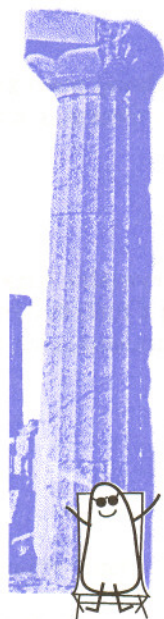
Podobnie jak równanie Kortewega-de Vriesa, nieliniowe równanie Schrödingera również ma rozwiązania solitonowe, postaci $\phi(x - ct)$. Jest ono także jednym z pierwszych równań, dla których w ostatnich latach przeprowadzono stosunkowo dokładną analizę tzw. wybuchów rozwiązań, to znaczy pojawiania się – przy niektórych danych początkowych – osobliwości, które powodują, że rozwiązanie w pewnych punktach przestrzeni nie jest określone dla wszystkich czasów.

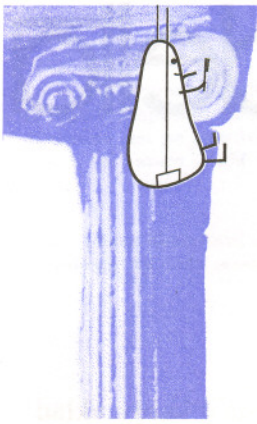
Równanie Mizohaty

$$(35) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + it \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t),$$

to chyba najprostsze równanie różniczkowe cząstkowe, które w bardzo wielu przypadkach nie ma żadnego rozwiązania u – dzieje się tak np. dla wszystkich funkcji f , które są gładkie, znikają poza obszarem ograniczonym, zależą od zmiennej t w sposób parzysty i zerują się dla $t = 0$ (patrz *Delta* 12/1994).

Jeśli chcemy mieć pewność, że rozwiązanie będzie istnieć, to musimy założyć, iż prawa strona, czyli f , jest funkcją analityczną zmiennych (x, t) . Istnienie



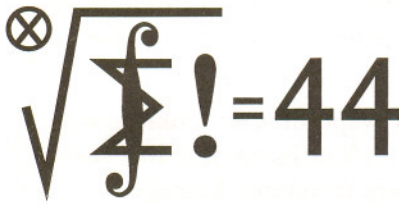


rozwiązania wynika wówczas z twierdzenia Kowalewskiej, a przykład równania Mizohaty dobitnie pokazuje, że w owym twierdzeniu nie można osłabić założeń o analityczności współczynników.

Równanie przekorne Feynmana

$$(36) \quad U = 0,$$

którego lewa strona jest określona według następującego przepisu. Weź x -ową składową równań Newtona i tak ją uporządkuj, aby po prawej stronie występowało zero; U niech będzie chwilowo równe lewej stronie podniesionej do kwadratu. To samo zrób z y -ową składową równań Newtona, dodając odpowiedni kwadrat do U . Powtarzaj tę procedurę dla z -owej składowej równań Newtona, a potem z kolejnymi składowymi równań Maxwella, Einsteina itd., aż wyczerpiesz te równania fizyki, które uznasz za podstawowe. W ten sposób wszystkie prawa przyrody zunifikujesz w jednym równaniu. Czyżby to było właśnie to, o co chodzi?



Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1999

Zadania z matematyki nr 371, 372

Redaguje Marcin E. KUCZMA

371. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$. Znaleźć wszystkie układy liczb rzeczywistych (x_1, \dots, x_n) spełniające warunki $x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ oraz

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} (\sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k+1}}) = 1;$$

w drugiej sumie przyjmujemy $x_{n+1} = 0$.

372. Niech f będzie podobieństwem przestrzeni trójwymiarowej. Dla dowolnego zbioru k zawartego w tej przestrzeni oznaczmy przez k^* zbiór środków wszystkich odcinków XX' , gdzie $X \in k$, $X' = f(X)$. Wykazać, że jeżeli ℓ jest prostą, to zbiór ℓ^* jest zawarty w pewnej prostej oraz że jeżeli π jest płaszczyzną, to zbiór π^* jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.

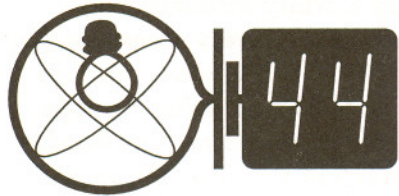
Zadanie **372** zaproponował pan Henryk Kornacki z Augustowa.

Zadania z fizyki nr 268, 269

Redaguje Jerzy B. BROJAN

268. Cienki pierścień w kształcie okręgu o masie M wisi na nierozciągliwej nici, a dwa koraliki – każdy o masie m – jednocześnie zwolniono w punktach położonych symetrycznie i bardzo blisko punktu najwyższego (rys.). Jeśli koraliki ślizgają się bez tarcia, to ile musi wynosić stosunek m/M , aby pierścień podskoczył?

269. Próbkę izotopu promieniotwórczego emituje promienie α o energii $E = 5$ MeV, a z jednej strony jest osłonięta (tak, że w jednej półprzestrzeni promienie wybiegają na zewnątrz, a w drugiej są pochłaniane). Jaka ilość ciepła wydzielalaby się w osłonie w jednostce czasu, jeśli siła odrzutu działająca na próbkę z osłoną wynosiłaby $F = 1$ N? Pominąć oddziaływanie cząstek α z powietrzem, tzn. przyjąć, że urządzenie działa w próżni. Masa cząstki α jest równa $m = 6,64 \cdot 10^{-27}$ kg = 3730 MeV/c².



Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 359 (WT=2,38) i 360 (WT=2,80) z numeru 4/1998

Tadeusz Józefczyk	- Poznań	40,64
Witold Bednarek	- Łódź	38,26
Zbigniew Skalik	- Pyskowice	36,72
Bogumiła Piotrowska	- Zielona Góra	33,83

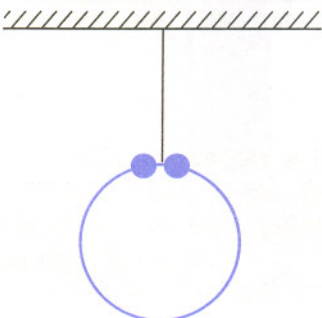
Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 260 (WT=2,43) i 261 (WT=1,68) z numeru 6/1998

Przemysław Gadziński	- Środa Śląska	45,81
Jarosław Łazuka	- Warszawa	34,24
Marek Wójcicki	- Szczecin	32,15
Tomasz Wietecha	- Tarnów	26,49
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	25,64
Aleksander Surma	- Myszków	15,46

Pan Gadziński obok wielokrotnych laurów ligi matematycznej zdobył także członkostwo **Klubu 44 F**.



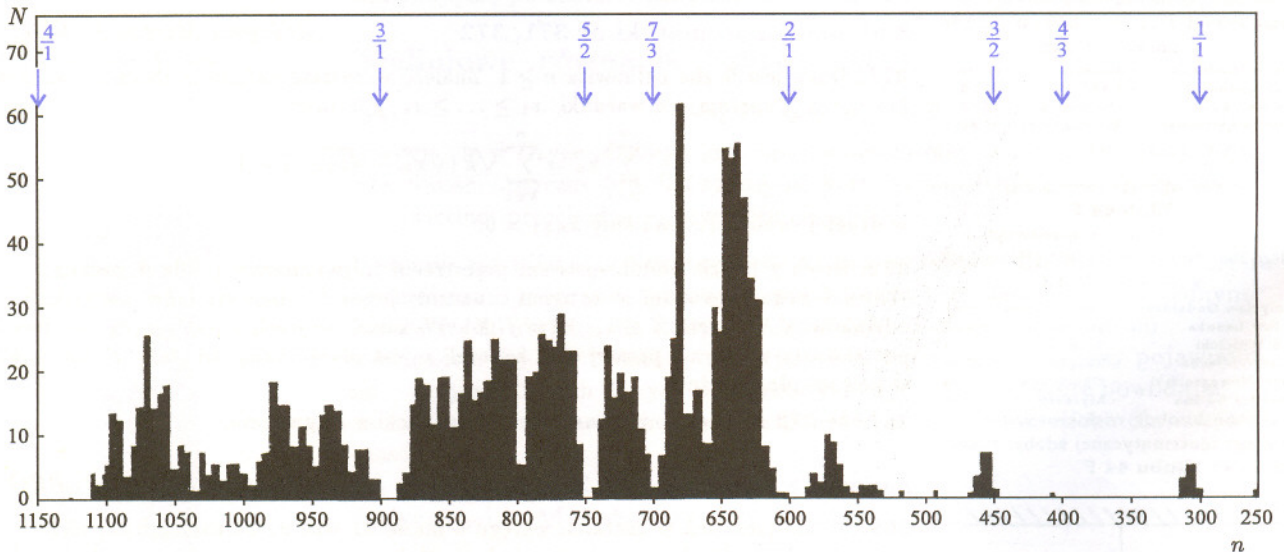
8

mała delta

Rezonans

Rezonans to zjawisko, które bierze się stąd, że niemal każdy układ mechaniczny ma możliwość drgania z charakterystyczną dla siebie częstością (lub częstościami); jeżeli więc popychać go z taką właśnie częstością (lub współmierną z częstością jego drgań własnych), czyli w rezonansie, to małą siłą można wzbudzić duże drgania. Rezonans mechaniczny na ogół jest szkodliwy (wibracje maszyn czy pojazdów), czasem katastrofalny.

Przypuśćmy, że okres obiegu planetoidy jest współmierny z okresem obiegu Jowisza. Doznaje więc ona w tej samej konfiguracji z Jowiszem zawsze takiego samego zaburzenia. Występuje rezonans, którego skutkiem powinno być zepchnięcie planetoidy z orbity rezonansowej. Rzeczywiście, praktycznie nie ma planetoid, których okresy obiegu byłyby z okresem Jowisza w rezonansie 4:1, 3:1, 2:1, 5:2, 7:3 i jeszcze paru innych rezonansach (należy to rozumieć tak, że na 4 obiegi planetoidy wypada 1 obieg Jowisza itd.). Przejawia się to w postaci tzw. przerw Kirkwooda na wykresie przedstawiającym liczebność planetoid w zależności np. od ich prędkości kątowych (rys. 1). Stąd też przerwy w pierścieniach Saturna, bowiem orbity odpowiadające przerwom byłyby orbitami rezonansowymi z satelitami Saturna.

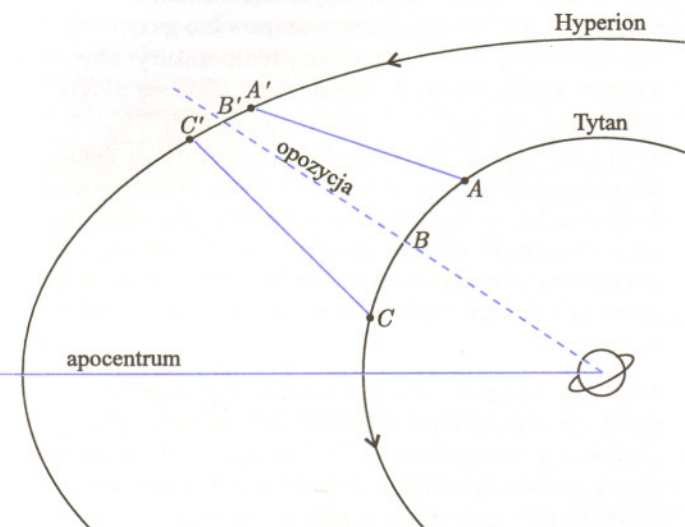


Rys. 1. Rozkład planetoid względem prędkości kątowych

To dlaczego mamy całe grupy innych planetoid w rezonansie z Jowiszem, np. 3:2, 4:3, 1:1? Na Wydziale Fizyki UW cytuje się w takich przypadkach tzw. dziesiątą zasadę dialektyki, która głosi, że „to wszystko nie jest takie proste”. A pokażemy to na dość łatwym do zanalizowania przykładzie dwóch satelitów Saturna: Tytana i Hyperiona (rys. 2).

Opozycja – tu: Hyperiona względem Tytana, to taka konfiguracja satelitów, w której Hyperion jest po przeciwnej stronie Tytana niż Saturn (ciało centralne).

Apocentrum – punkt eliptycznej orbity, najbardziej odległy od ciała centralnego.



Rys. 2

Niech opozycja Hyperiona względem Tytana BB' zachodzi przed osiągnięciem apocentrum przez Hyperiona. W sytuacji AA' Tytan (masywniejszy) hamuje Hyperiona, a w CC' rozpędza. Ale skutek hamowania jest silniejszy, bo w AA' Hyperion biegnie z prędkością bardziej zbliżoną do prędkości Tytana (gdyż jest bliżej Saturna) i hamowanie trwa dłużej, a ponadto jest skuteczniejsze niż rozpędzanie, bo oba satelity dzieli mniejsza odległość niż w CC' . Efekt jest taki, że Hyperion zostaje ściągnięty na niższą orbitę, gdzie musi (zgodnie z prawami Keplera) poruszać się szybciej i jego następna opozycja względem Tytana wypadnie nie w BB' , lecz bliżej apocentrum. Czytelnik może osobiście wykazać, że gdy opozycja wypada po apocentrum Hyperiona, to wpływ Tytana też powoduje jej zbliżenie do apocentrum. Zatem rezonans, polegający na opozycji w apocentrum, sam się podtrzymuje, a nie niszczy. I to się obserwuje!

Inny już mechanizm utrzymuje planetoidy w rezonansie 1:1 z Jowiszem (te „1:1” to, jak wiemy, Grecy i Trojanie), jeszcze inny powoduje, że Księżyc w tym samym czasie obiega Ziemię i obraca się itd. Krótko mówiąc, z rezonansami może być rozmaicie, a całe bogactwo towarzyszących im zjawisk to subtelne skutki podstawowych praw mechaniki.

Małą Deltę opracował Tomasz KWAST



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

Wszystkie zadania dotyczą czworokąta $ABCD$, w którym wszystkie kąty płaskie przy wierzchołku A są proste.

M 865. Wykazać, że dla pól ścian zachodzi następująca równość

$$S_{BCD}^2 = S_{ABC}^2 + S_{ACD}^2 + S_{ABD}^2.$$

Rozwiązanie na str. 8

M 866. Wykazać, że długości odcinków, łączących środki przeciwległych krawędzi, są równe.

Rozwiązanie na str. 9

M 867. Wykazać, że jeśli $AB = AC + AD$, to suma kątów płaskich przy wierzchołku B jest równa 90° .

Rozwiązanie na str. 7

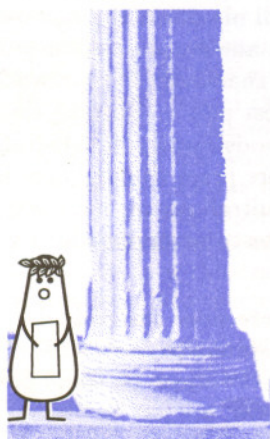
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 489. Opór sześćdziesięciowatowej żarówki mierzony omomierzem wynosi około 65Ω . Wartość ta jest istotnie mniejsza od uzyskanej ze wzoru na moc P wydzielaną na oporze R podłączonym do napięcia przemiennego U , który daje $R = U^2/P = (220^2/60) \Omega \approx 800 \Omega$. Dlaczego?

Rozwiązanie na str. 2

F 490. W jednym pokoju znajdują się trzy żarówki, a w drugim – osobnym – trzy wyłączniki, każdy połączony z jedną z żarówek. Do każdego pokoju można wejść tylko raz. W jaki sposób, nie używając żadnych przyrządów, jedna osoba może ustalić, który wyłącznik odpowiada której żarówce?

Rozwiązanie na str. 3



Właśnie mija sto lat od czasu, kiedy Giovanni Schiaparelli ogłosił światu, że zaobserwował na powierzchni Marsa dziwne kanały. Wielu innych astronomów, między innymi Amerykanin Percival Lowell, potwierdziło te obserwacje. Powstało wiele hipotez wyjaśniających, co to są te kanały i do czego służą. Najbardziej atrakcyjne było przypuszczenie, że kanały są ogromnym systemem nawadniającym (długość niektórych kanałów sięgała 6000 km), zbudowanym przez rozumne istoty zamieszkujące Marsa. O Marsjanach napisano wiele powieści fantastyczno-naukowych, wyobrażając ich sobie czasami jako człekopodobne istoty z sitkiem od konewki zamiast nosa i antenami zamiast uszu.

Dokładniejsze badania, początkowo optyczne, a ostatnio bardziej precyzyjne z sond kosmicznych, całkowicie przekreśliły możliwość istnienia Marsjan i zredukowały praktycznie do zera możliwość występowania jakichkolwiek form życia na Marsie.

Badania Marsa z sond kosmicznych rozpoczęły się w 1965 roku, kiedy to Mariner 4 przekazał na Ziemię 22 obrazy powierzchni Marsa. Powierzchnia planety widziana z bliska nie sprawiała wrażenia zamieszkałej i przypominała raczej krajobraz księżycowy niż bujną sawannę. Przez następne 7 lat dzięki amerykańskim Marinerom i radzieckim Marsom zbadano dokładnie szczegóły powierzchni Marsa. Wnioski, jakie stąd wyciągnięto, były bardzo proste – po pierwsze nie natrafiono ani na ślady kanałów, ani na ślady żadnej działalności istot rozumnych czy też na oznaki istnienia roślinności. Po drugie okazało się, że warunki, panujące na powierzchni, są bardziej surowe niż przypuszczano, a w szczególności marsjańskie ciśnienie atmosferyczne jest bardzo niskie i wynosi zaledwie 0,6% ciśnienia atmosferycznego na powierzchni Ziemi. Duże różnice temperatur (na równiku – od 27°C w ciągu dnia do -70°C w nocy) oraz jedynie ślady tlenu w atmosferze planety nie sprzyjają rozwojowi złożonych form życia. Obserwacje te nie wykluczały jednak możliwości istnienia na Marsie życia w postaci bardzo prymitywnej – wirusów lub bakterii. Problem ten można rozstrzygnąć, przeprowadzając skomplikowaną analizę gruntu marsjańskiego. O sprowadzeniu próbek gruntu marsjańskiego na Ziemię na razie nie ma mowy. Jedyna możliwość uzyskania odpowiedzi na to fascynujące pytanie – to przeprowadzenie tych analiz na powierzchni Marsa.

20 lipca i 3 września 1976 roku sondy kosmiczne, nazwane Wiking 1 i 2, łagodnie osiadły na powierzchni Czerwonej Planety. Sondy te są najbardziej złożonymi aparatami kosmicznymi, jakie dotychczas zbudował człowiek. Posiadają one na swoim pokładzie miniaturowe laboratoria, które badają biologiczną aktywność próbek gruntu marsjańskiego. Oba Wikingi przeprowadziły cztery testy. Pierwszy z nich polegał

na umieszczeniu próbki gruntu w wyjałowionej komorze, którą następnie wypełniono naturalną atmosferą Marsa, wzbogaconą nieznacznie dodatkami dwutlenku węgla i tlenku węgla znakowanych radioaktywnym izotopem ^{14}C oraz okresowo niewielkimi ilościami pary wodnej. Próbkę naświetlano lampą imitującą promieniowanie Słońca. Po 120 godzinach wypompowano gazy, a próbkę podgrzano do wysokiej temperatury, aby uwolnić wszelkie związki organiczne, jakie się mogły wytworzyć. Mierząc ilość zawartego w nich ^{14}C , można wyciągnąć wnioski o tempie asymilacji węgla. Asymilacja węgla jest jednym z głównych procesów zachodzących w żywych, nawet bardzo prymitywnych organizmach. W obu przypadkach otrzymano wynik pozytywny, a znaczący tym bardziej, że próbki, które przed poddaniem analizie sterylizowano, dały wynik negatywny.

Następny test polegał na zbadaniu, czy w próbce gruntu marsjańskiego, do której dodano pożywkę znakowaną radioizotopem ^{14}C , następuje uwalnianie gazów zawierających ten radioizotop. Ku ogólnemu zdziwieniu i ten test dał wynik pozytywny.

Trzeci test służył do badania zmian składu atmosfery znajdującej się nad próbką gruntu zanurzoną w pożywce. Zaobserwowano wydzielanie się dwutlenku węgla, tlenu i niewielkich ilości azotu.

Ostatni test był pomyślany jako próba stwierdzenia, czy na Marsie istniało kiedyś życie. Chodziło mianowicie o to, aby sprawdzić, czy próbki gruntu zawierają choćby najdrobniejsze ślady substancji organicznych. Sądząc z wyników poprzednich trzech testów, można było przypuszczać, że i te badania dadzą wynik pozytywny, a tymczasem bardzo subtelna analiza nie wykazała ani śladu substancji organicznych w próbkach pobranych w pobliżu obu sond. Jak zatem należy wyjaśnić wyniki pierwszych trzech testów? Znowu daliśmy się złapać w kosmiczną pułapkę. Wyniki testów odnosiliśmy do naszych ziemskich warunków, a przecież powierzchnia Marsa jest cały czas naświetlana promieniami ultrafioletowymi, które do powierzchni Ziemi nie docierają, są bowiem niemal całkowicie pochłaniane przez atmosferę. Jak się okazuje, ma to istotne znaczenie. Przeprowadzono bowiem w laboratorium test nad mieszaniną tlenu żelaza i tlenku krzemu – podstawowymi składnikami gruntu marsjańskiego, które przez dłuższy czas były naświetlane promieniami ultrafioletowymi, i otrzymano rezultaty takie same, jak testu przeprowadzonego przez Wikingi.

Sceptycy mogą ciągle jeszcze mieć zastrzeżenia i twierdzić, że na Marsie istnieją prymitywne mikroorganizmy, nie pozostawiające po sobie prawie żadnych organicznych śladów, ale jest to hipoteza bardzo mało prawdopodobna.

Aktualności (nie tylko) fizyczne

W tym roku Nagrodę Nobla z Fizyki odbiorą w Sztokholmie panowie Robert B. Laughlin, Horst L. Störmer i Daniel C. Tsui za *odkrycie nowej formy kwantowej cieczy ze wzbudzeniami o ułamkowym ładunku*, czyli za zaobserwowanie (H.L.S. i D.C.T.) oraz wytłumaczenie (R.B.L.) tzw. anomalnego (ułamkowego) kwantowego zjawiska Halla.

Zacznijmy od końca, to znaczy od początku. W 1879 roku Edwin H. Hall odkrył, że jeżeli płytkę przewodnika umieścimy w polu magnetycznym skierowanym prostopadle do kierunku przepływu prądu, to na bokach przewodnika (w kierunku prostopadłym zarówno do prądu, jak i do pola magnetycznego) wygenerowane zostanie napięcie, noszące dziś jego nazwisko. Efekt związany jest z odchyleniem nośników prądu przez pole magnetyczne. Zamiast napięcia Halla częściej mówi się o oporze Halla R_H zdefiniowanym jako iloraz napięcia Halla i prądu płynącego wzdłuż przewodnika. Zmierzenie tej wielkości pozwala na wyznaczenie koncentracji nośników prądu N (na jednostkę powierzchni prostopadłej do pola magnetycznego) z prostej zależności

$$R_H = B/(Ne),$$

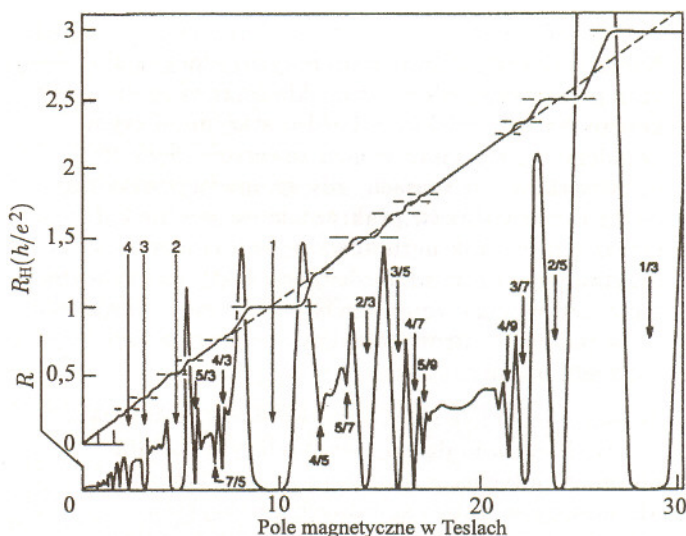
gdzie B jest indukcją pola magnetycznego, a e ładunkiem elementarnym.

W końcu lat siedemdziesiątych okazało się, że powyższe prawo przestaje obowiązywać dla dwuwymiarowych warstw przewodzących, schłodzonych do temperatury bliskiej zera bezwzględnej i umieszczonych w bardzo silnym polu magnetycznym. Warstwy takie można otrzymać na styku dwóch półprzewodników. Zależność oporu Halla od natężenia pola magnetycznego okazała się tylko w przybliżeniu liniowa. W pewnych przedziałach wartości natężenia pola B opór Halla jest w każdym z nich stały i dokładnie równy

$$R_H = (h/e^2)/n,$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \dots$, podczas gdy normalny opór wzdłuż przewodnika jest równy zero. Efekt ten nazwano kwantowym zjawiskiem Halla i w 1985 roku przyznano jego odkrywczy, Klausowi von Klitzingowi, Nagrodę Nobla z Fizyki. Wyjaśnienie tego fenomenu na gruncie mechaniki kwantowej jest stosunkowo proste. Podobnie jak w modelu atomu wodoru Bohra skwantowany jest moment pędu elektronu, tak dla ruchu elektronu w jednorodnym polu magnetycznym skwantowany jest strumień natężenia tego pola przypadający na orbitę elektronu. Dla dwuwymiarowego gazu elektronowego kolejnym orbitom odpowiadają kolejne dyskretne poziomy energetyczne, zwane poziomami Landaua. Kwantowe zjawisko Halla (znikanie normalnego oporu przewodnika) pojawia się, gdy wartość natężenia pola magnetycznego zbliża się do wartości odpowiadającej całkowitemu zapełnieniu n poziomów Landaua. Elektrony są fermionami, tzn. żadne dwa nie mogą być w tym samym stanie kwantowym. Zapełniony poziom Landaua można sobie wyobrazić jako wypełnioną salę kinową. Opór elektryczny znika, gdyż elektrony nie mają się gdzie rozpraszać. Wolne krzesła są tylko na balkonie, a w chłodzie zera bezwzględnej nikt nie ma wystarczająco dużo energii, aby się tam dostać.

W 1982 roku dwóch tegorocznych laureatów zaobserwowało dodatkowe plateau na wykresie zależności oporu Halla od natężenia pola magnetycznego odpowiadające $n = 1/3$, czyli zapełnieniu pierwszego poziomu Landaua w jednej



Zależność oporu Halla R_H oraz zwykłego oporu R od natężenia pola magnetycznego dla dwuwymiarowego gazu elektronowego. Diagonalna linia przerywana odpowiada klasycznemu przewidywaniu $R_H = B/(Ne)$. Każdemu plateau R_H odpowiada minimum zwykłego oporu R . Wartość parametru n , wyliczoną ze wzoru $1/n = R_H/(h/e^2)$, przedstawiono za pomocą liczb ze strzałkami. Szczególnie znaczący jest stan odpowiadający $n = 1/3$ (najbardziej na prawo), pierwszy zaobserwowany anomalny kwantowy efekt Halla.

J.P. Eisenstein, H.L. Störmer, *Science* 22/06/1990 str. 1511.

trzeciej. Gdyby trzymać się analogii z efektem odkrytym przez Klitzinga, odpowiadałoby to obecności nośników prądu o ładunku $e/3$. Odkrywczy anomalnego (ułamkowego) zjawiska Halla wyrazili przypuszczenie, że wyjaśnienie tego całkowicie nieoczekiwanego odkrycia będzie wymagało uwzględnienia kolektywnego zachowania się elektronów w dwuwymiarowej warstwie.

Eleganckie i zaskakujące rozwiązanie podał w 1983 roku trzeci z laureatów. Okazuje się, że elektrony-płaszczaki umieszczone w bardzo silnym polu magnetycznym potrafią zmusić się nawzajem do połączania nieparzystej liczby kwantów strumienia pola magnetycznego, stając się nowym rodzajem cieczy kwantowej, której nadciekłość wyjaśnia znikanie normalnego oporu magnetycznego. Natomiast wzbudzenia tego szczególnego stanu materii rzeczywiście zachowują się jak pseudocząstki obdarzone ułamkowym ładunkiem elektrycznym.

Ich obecność pozwala na wyjaśnienie całej bogatej struktury zależności oporu Halla i normalnego oporu elektrycznego od natężenia pola magnetycznego, ukazanych na rysunku.

Moim zdaniem nie bez wpływu na przyznanie tegorocznej Nagrody Nobla było ogłoszenie w zeszłym roku wyników dwóch prac doświadczalnych dowodzących w prosty i nie budzący wątpliwości sposób realności tych pseudocząstek jako nośników prądu elektrycznego.

Kwantowe zjawisko Halla cały czas jest intensywnie badane zarówno od strony doświadczalnej, jak i teoretycznej. Narzuca się np. pytanie o istnienie analogii między pseudocząstkami Laughlina a kwarkami, innej niż tylko ułamkowy ładunek.

Piotr ZALEWSKI

<http://www.nobel.se/announcement-98/physics98.html> Szum Schottky'ego pseudocząstek Laughlina: *Nature* 11/09/1997 str. 119 wraz z referencjami

Naszą Galaktykę (i mnóstwo innych) otacza halo, którego najlepiej widocznym składnikiem są gromady kuliste. Są one obiektami bardzo starymi, o czym świadczy bardzo niska w nich zawartość ciężkich pierwiastków – w czasach, gdy gromady powstawały, ciężkich pierwiastków praktycznie jeszcze nie było. Obraz ten jest tak ugruntowany, że z trudem przyjmujemy do wiadomości nowe fakty obserwacyjne, z których wynika, że gromady kuliste mogą znajdować się w pobliżu centrów galaktyk i że mogą to być gromady młode.

Teleskop Hubble'a stale odkrywa nowe zaskakujące rzeczy. Niedawno dzięki niemu odkryta została nieznana dotychczas struktura w galaktykach. Mianowicie w dwóch spiralnych galaktykach przegrodzonych, NGC 1097 i NGC 6951, wykryto wąski i stosunkowo niewielki (o promieniu rzędu kiloparseka) otaczający jądro pierścien, w którym intensywnie powstają gwiazdy.

Galaktyka przegrodzona (z poprzeczką) – galaktyka spiralna, której część centralna jest w przybliżeniu elipsoidą trójosiową (zbudowana z gwiazd), obracającą się wokół najmniejszej osi.

Dowodem na to jest silne świecenie pierścienia w czerwonej linii wodoru, co zazwyczaj zachodzi, gdy nowo powstałe gorące gwiazdy jonizują otaczający je międzygwiazdowy wodór. W galaktykach tych dzieje się nawet więcej, oba te pierścienie składają się ze świecących zgęszczeń, które jasnością i rozmiarami odpowiadają gromadom kulistym. Młode gromady kuliste wykryto też w układach zderzających się galaktyk. To akurat nie jest zaskoczeniem, gdyż młode gwiazdy zawsze powstają tam, gdzie ośrodek

międzygwiazdowy zostaje gwałtownie zgęszczony i może się dalej kondensować. Dlaczego jednak w „normalnych” galaktykach przegrodzonych zostaje zgęszczony akurat pierścien materii?

Na to pytanie być może odpowie zwykła w zasadzie mechanika. Od dawna oczekiwano, że w przegrodach galaktyk zachodzi przepływ materii ku centrum. Zarazem w każdej galaktyce spiralnej są dwa miejsca (okręgi o konkretnym promieniu), gdzie obiegająca centrum gwiazda napotykałaby ramiona spiralne z częstością równą częstości zmian odległości od centrum galaktyki, jakich doznawałaby, gdyby obiegała centrum bez przeszkód. Bowiem gwiazdy obiegają galaktykę inaczej, niż robią to ramiona: bliżej centrum gwiazdy doganiają ramiona, a daleko są przez nie doganiane, a gdyby nawet ramion nie było, to tor gwiazdy na ogół byłby jakąś pofalowaną linią wcale nie przypominającą elipsy, bo cały dysk galaktyki działa na gwiazdy bynajmniej nie jak „punktowe” Słońce na planety. Te okręgi, gdzie wspomniane częstości są jednakowe, to tzw. rezonanse Lindblada. Np. w naszej Galaktyce znajdują się one w odległościach 3,2 kpc (wewnętrzny) i 21 kpc (zewewnętrzny) od centrum. Materia międzygwiazdowa spływając w poprzeczce ku środkowi galaktyki, zostaje zapewne przy wewnętrznym rezonansie Lindblada wyhamowana i zgęszczona, stąd właśnie gwałtowne powstawanie tam gwiazd. Co prawda, szczegóły tego mechanizmu nie są do końca poznane, pozostaje też zagadka, skąd ma się brać tyle materii płynącej ku środkowi galaktyki. Na szczęście teleskop Hubble'a działa i będzie jeszcze długo pracował, więc poczekajmy.

Tomasz KWAST

Grudzień

W grudniowe wieczory od zachodu przez zenit do wschodu przebiega Droga Mleczna, są więc najlepsze warunki do jej obserwowania (co prawda, dopiero poza miastem można ją zobaczyć w całej okazałości). Przy jej południowym brzegu, wysoko i lekko ku zachodowi, znajduje się Wielka Mgławica Andromedy, czyli najbliższa „obca” galaktyka (odległa o 700 kpc). Widać ją gołym okiem. Lornetka ukazuje ją jako wyraźną, jasną, owalną plamę, jest jednak przyrządem zbyt małym, by umożliwić dostrzeżenie w tej galaktyce jakiegokolwiek struktury. W samej Drodze Mlecznej również bez pomocy żadnych przyrządów widać przy granicy Perseusza i Kasjopei dwie małe świetlne plamki. To dwie gromady otwarte, h i χ Perseusza (albo NGC 869 i 884, odległe o 2,2 i 2,3 kpc) i na nie lornetkę warto skierować. Widok mrowia gwiazd w tej okolicy nieba jest wspaniały.

Gwiazdą dającą sygnał do rozpoczęcia wigilijnej kolacji może być Jowisz. Jest on teraz wieczorem najjaśniejszą „gwiazdą” na niebie. Ale nie towarzyszy mu żadna inna planeta – w przeciwieństwie do sytuacji sprzed 2000 lat. Wtedy w latach od 7 r. p.n.e. do

początku nowej ery Jowisz kilkakrotnie zbliżał się bardzo do Saturna, Marsa i Wenus (w 7 r. p.n.e. trzykrotnie do Saturna), a w 6 r. p.n.e. w takim zbliżeniu wzięły udział trzy planety: Jowisz, Saturn i Mars. Przypuszcza się, że tego rodzaju zjawiska były brane za Gwiazdę Betlejemską. W tym miesiącu Jowisz nadal jest przy granicy Wodnika i Ryb i wieczorem widać go w południowo-zachodniej stronie nieba. Wenus jest niewidoczna – zbyt blisko Słońca, Mars w Pannie i wschodzi w drugiej połowie nocy, a Saturn na granicy Ryb i Barana i w grudniowy wieczór widać go dość wysoko w kierunku południowym jako czerwono-żółtą, spokojnie świecącą gwiazdkę. Można próbować nad ranem znaleźć Merkurego; 20 XII znajdzie się o 22° od Słońca.

22 grudnia zaczyna się astronomiczna zima i dni stają się już coraz dłuższe. Pełnia Księżycy wypada 3 XII, a nów 19 XII. Księżyc mocno zbliży się do Aldebarana 3 XII, Regulusa 9 XII, Jowisza 25 XII i znowu do Aldebarana 30 XII i wtedy go zakryje, co będzie z Polski widoczne – zjawisko nastąpi w pobliżu północy 30/31 grudnia.

T.K.

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (10')

Wyjaśnienie oszustwa (10): Niech $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\frac{7}{4}n]}{2^n}$. Nietrudno wykazać, że wtedy $T = \frac{44}{15}$.

Ponieważ zaś $\sqrt[8]{88} = 1,7500898 \dots$, to $[\frac{7}{4}n] = [\sqrt[8]{88}n]$ dla małych wartości n . Mówiąc dokładniej, w sumie $S - T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\sqrt[8]{88}n] - [\frac{7}{4}n]}{2^n}$ pierwszy niezerowy składnik występuje dla $n = 2785$.

Dokładne obliczenia pokazują, że
 $S = 2,93333 \dots 33333333789885911304 \dots$,
 gdzie cyfra 7 pojawia się na 839-tym miejscu po przecinku. Liczba S jest zatem trochę większa od $\frac{44}{15}$.
JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (11')

Wyjaśnienie oszustwa (11): Obydwie metody całkowania są poprawne, a uzyskane wyniki różnią się o stałą $\frac{1}{8} \ln 4$, która jest i tak pochłonięta przez stałą całkowania.
JWR

PRAWIE ZAWSZE (3)

TWIERDZENIE: Niech (a_n) będzie ciągiem określonym następująco:
 $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+2} = a_{n+1} + 10a_n$ dla $n \geq 1$.
 Początkowymi wyrazami ciągu są więc 1, 1, 11, 21, 131, 341, 1651, 5061, 21571, 72181, 287891, ..., a każdy kolejny wyraz powstaje przez pisemne dodanie dwóch poprzednich wyrazów, tylko trochę niedbale zapisanych, bo przesuniętych o jedno miejsce dziesiętne względem siebie:

$$\begin{array}{r} 10 \times a_{10} = 72181 \\ + \quad a_{11} = 287891 \\ \hline a_{12} = 1009701 \end{array}$$

Wtedy dla prawie dowolnej liczby pierwszej p zachodzi podzielność $p|a_{p^2-1}$.

Prawie dowolna liczba pierwsza to w tym twierdzeniu liczba pierwsza różna od 2, 5 i 41.

Dowód: Każdy wyraz ciągu (a_n) przy dzieleniu przez 10 daje resztę 1, więc teza rzeczywiście jest fałszywa dla $p = 2$ i $p = 5$.

Można wykazać, że $a_n = \frac{1}{2^n \cdot \sqrt{41}} ((1 + \sqrt{41})^n - (1 - \sqrt{41})^n)$. Niech p będzie liczbą pierwszą różną od 2 i 5. Można wykazać, że jeśli m_p jest taką najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, że $p|a_{m_p}$, to $p|a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m_p|n$. Bezpośrednio obliczamy, że $m_{41} = 41$, zatem $41|a_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $41|n$. Stąd jasno wynika, że teza jest fałszywa również dla $p = 41$.

Niech teraz $p \neq 41$. Możliwa jest jedna z dwóch sytuacji: $41^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ lub $41^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$, bo $p|41^{p-1} - 1 = (41^{\frac{p-1}{2}} - 1)(41^{\frac{p-1}{2}} + 1)$ - małe twierdzenie Fermata.

Pierwszy przypadek ma miejsce, gdy p dzieli się przez 41 z resztą 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 31, 32, 33, 36, 37, 39 lub 40.

Wtedy $(1 + \sqrt{41})^{p-1} = \frac{(1 + \sqrt{41})^p}{1 + \sqrt{41}} = \frac{\sqrt{41}-1}{40} (1 + \sqrt{41})^p \equiv \frac{\sqrt{41}-1}{40} (1^p + \sqrt{41}^p) = \frac{\sqrt{41}-1}{40} (1 + \sqrt{41} \cdot 41^{\frac{p-1}{2}}) \equiv \frac{\sqrt{41}-1}{40} (1 + \sqrt{41}) = 1 \pmod{p}$, gdzie kongruencje wśród liczb postaci $a + b\sqrt{41}$ należy rozumieć następująco: $a + b\sqrt{41} \equiv c + d\sqrt{41} \pmod{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c - a$ i $d - b$ są podzielne przez p . Nie należy się też martwić liczbami względnie pierwszymi z p pojawiającymi się w mianowniku (zob. Prawie Zawsze (2) w Γ -limatiasie (10)).

Podobnie $(1 - \sqrt{41})^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Stąd $a_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$, co daje $p|a_{p^2-1}$.

Drugi przypadek ma miejsce, gdy p dzieli się przez 41 z resztą 3, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 34, 35 lub 38.

Wtedy $(1 + \sqrt{41})^{p+1} = (1 + \sqrt{41})^p (1 + \sqrt{41}) \equiv (1^p + \sqrt{41}^p)(1 + \sqrt{41}) = (1 + \sqrt{41} \cdot 41^{\frac{p-1}{2}})(1 + \sqrt{41}) \equiv (1 - \sqrt{41})(1 + \sqrt{41}) = -40 \equiv 1 \pmod{p}$.

Podobnie $(1 - \sqrt{41})^{p+1} \equiv 1 \pmod{p}$, skąd $p|a_{p+1}$, co daje $p|a_{p^2-1}$.

Widzimy więc, że dla p różnego od 2, 5 i 41 liczba $a_{p \pm 1}$ dzieli się przez p , przy czym znak \pm zależy od tego, czy 41 jest resztą czy nieresztą kwadratową modulo p . Tym samym m_p musi być dzielnikiem liczby $p \pm 1$. Liczby m_p dla początkowych liczb pierwszych p podane są w poniższej tabelce:

p	$p \pm 1$	m_p	p	$p \pm 1$	m_p	p	$p \pm 1$	m_p
3	4	4	101	102	34	227	228	228
7	8	4	103	102	51	229	230	230
11	12	3	107	106	106	233	234	18
13	14	7	109	110	110	239	240	240
17	18	18	113	112	16	241	240	8
19	20	10	127	126	7	251	250	125
23	22	11	131	130	5	257	258	86
29	30	10	137	138	138	263	264	132
31	30	6	139	138	23	269	268	268
37	36	9	149	150	150	271	270	90
41	-	41	151	152	152	277	276	138
43	42	14	157	158	79	281	282	141
47	48	12	163	162	162	283	282	282
53	54	9	167	168	84	293	294	21
59	58	29	173	172	43	307	306	102
61	60	60	179	180	45	311	312	312
67	68	68	181	182	182	313	314	314
71	72	72	191	192	192	317	318	159
73	72	72	193	194	194	331	332	166
79	80	80	197	196	14	337	336	16
83	82	82	199	200	200	347	348	116
89	90	45	211	212	53	349	348	116
97	98	98	223	222	111	353	352	32

JWR