delta $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s $\pi=3{,}141592\ldots$

Trwa jubileusz XXV lat *Delty*:

6 czerwca 1973 roku powołano redakcję *Delty*,

8 grudnia odbyło się pierwsze posiedzenie Komitetu Redakcyjnego *Delty*, na którym przedstawiono próbny numer miesięcznika,

1 stycznia 1974 roku ukazał się w kioskach w nakładzie 30 tys. egzemplarzy, w cenie 5 zł, pierwszy numer *Delty*.

XXV lat powinien zamknąć numer 300 miesięcznika, jednak w okresie parcelacji RSW straciliśmy pięć numerów, tak więc numer taki ukaże się jako 5/1999.

Składając Czytelnikom najserdeczniejsze jubileuszowe życzenia, informujemy, iż od czerwca 1998 do maja 1999 w każdym numerze przypomnimy coś z dawnych lat.

Ten okazjonalny dział nazywa się Stara Delta.

SPIS TREŚCI

NUMERU 10(293)

W następnym numerze:
Piękne brzydkie zadanie

Okładkę wykonał
Krzysztof Biesaga

Na okładce wykorzystano reprodukcje egipskiego papirusu (ok. 1000 r. p.n.e.) i obrazu Pietera Breugela (1565 r.) oraz zdjęcie San Francisco (1996 r.).

Wybór artykułów z *Delty* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 843-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65.
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1999 roku wynosi 3 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1999 r. wynosi 6 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1999 r. wynosi 9 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. $8^{00} - 14^{00}$. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

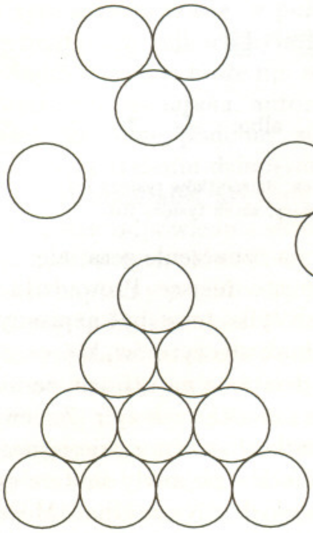
Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

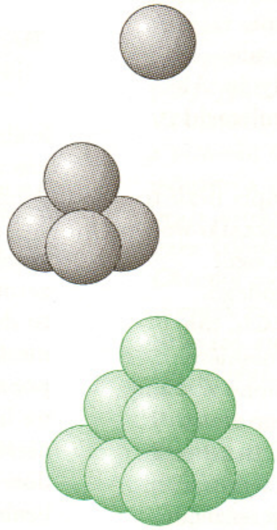
Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie. Niestety, nie dysponujemy już numerami z lat 1974–1984.

Figle z dziesiątką

Michał SZUREK

Najmniejsza liczba dwucyfrowa, **10**, ma dobrą konotację. Kojarzy nam się miło z jubileuszami, rocznicami, obchodami – a więc bankietami, paradami wojskowymi i przypinaniem medali: co kto lubi. Bo to przecież taka „okrągła" liczba!





Tę kolorową figurę Pitagorejczycy nazywali tetraktem i traktowali jak świętą, prawie tak, jak pentagram.

To, czy liczba jest okrągła, czy nie – zależy tylko od podstawy numeracji. Nie zależy zaś od tej podstawy to, czy jest trójkątna, tak jak

$$\mathbf{10} = 1 + 2 + 3 + 4,$$

czy np. czworościenna

$$\mathbf{10} = 1 + 3 + 6.$$

A więc **10** jest jednocześnie trójkątna i czworościenna. Czy są inne liczby o tej własności? Niewiele: cztery. Największa z nich to 1540.

ZADANIE 1. Znaleźć wszystkie pięć liczb, które są jednocześnie trójkątne i czworościenne.

ZADANIE 2 (bardzo trudne). Udowodnić, że innych już nie ma.

Baczność, kapitaliści!
W naszym zaocznym kursie matematyki finansowej wyjaśnimy Wam dzisiaj, że ulubiona przez Was operacja: dopisywanie zera na końcu liczby, wyrażającej stan Waszego konta, to nic innego, jak mnożenie przez 10. Redakcja dysponuje manualem (z dyskietką) wyjaśniającym tajniki tej operacji.

Zadanie kontrolne:
Czy Pan zdoła w swym pojęciu
Odjąć zero od dziesięciu?
(prof. dr hab. Jan Brzechwa, „Sum")
Rozwiązania prosimy nadsyłać na odwrocie podpisanych przez siebie czeków. Gotówki nie przyjmujemy.

Wiemy, że kapitan Kloss poznał działania Abwehry jak swoje *dziesięć* palców i dzięki jego wskazówkom strzały z czołgu „Rudy" *dziesiątkowały* Niemców. Trafię chyba w *dziesiątkę* stwierdzeniem, że obecne spory polityczne w Polsce sprowadzają się do tego, że jedni obawiają się, iż będą musieli płacić *dziesięcinę* do Watykanu i stosować się do wszystkich *dziesięciu* przykazań *dekalogu*, inni pomstują na to, że nie potrzeba już ani *deka* rozumu – wystarczy być spokrewnionym (politycznie bądź rodzinnie) z ... , ot, *dziesiąta* woda po kisielu, żeby wszystko było już wolno. Nawet kopnąć zawodnika drużyny przeciwnej *decymetr* powyżej kostki, żeby musiał zejść z boiska, a drużyna będzie musiała grać w *dziesiątkę*.

Ale nie plećmy już piąte przez *dziesiąte* i wracajmy do matematyki, żeby Dziekan (łac. *Decanus*) nie zarzucił nam, że się zajmujemy głupstwami.

Pierwiastek kwadratowy z 10 jest znośnym przybliżeniem π :

```
N[Sqrt[10],10]
3,16227766
N[Pi,10]
3,141592654
```

ZADANIE 3. Opracować sposób przybliżonej kwadratury koła, wykorzystując przybliżenie $\sqrt{10} \approx \pi$.

10 jest jedną z dwóch liczb całkowitych, które mogą być długością przeciwprostokątnej trójkąta pitagorejskiego, którego pole jest równe długości obwodu:

$$6^2 + 8^2 = 10^2 \quad \text{i} \quad (6 \cdot 8)/2 = 6 + 8 + 10.$$

ZADANIE 4. Jaki jest ten drugi przykład? Wykazać, że innych już rzeczywiście nie ma.

Ciąg dalszy na str. 10

Cyfry: indyjskie czy arabskie?

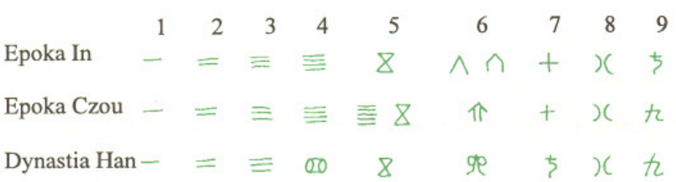
Witold WIĘSŁAW

motto: *Od jednej przyszło aż więc do dziewiąci,*
A człowiekowi mózg się we łbie mąci...
(Jan Kochanowski, *O Doktorze Hiszpanie*)

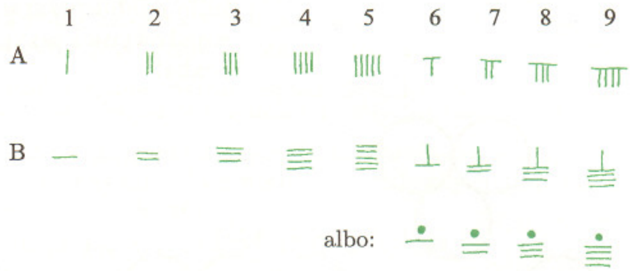
Ma to być opowieść, jak to było z systemem dziesiętnym. Faktów znanych jest niewiele, nie zawsze wiadomo, co jest prawdą, a co tradycją. Ale w coś trzeba wierzyć. Spójrzmy więc w zamierzchłą przeszłość.

Pierwszy odnotowany przez archeologów zapis liczb to kreski i karby na różnych przedmiotach, początkowo pojedyncze, a później łączone w pęczki, na ogół po pięć lub dziesięć. Kość promieniowa młodego wilka, znaleziona w Vestonicach na Morawach, ma regularne nacięcia, zapewne zrobione krzemieniem. Kość ma około 30000 lat. Być może znalezione zostaną starsze przedmioty, na których pozostawiono ślady zliczania czegoś. Początkowo porównywano liczebność zbioru z odpowiednią liczbą palców u rąk, a jeśli ich nie starczało, to i u nóg. W ten sposób najczęściej rachowano za pomocą dziesiątek, dwudziestek lub jednych i drugich. Odbiło się to w rozwoju liczebników w językach indoeuropejskich, które oparte są na wielokrotnościach 10, 20 lub obu tych liczb. W wielu innych językach jest podobnie. Henri Lebesgue, matematyk nie wymagający przedstawienia, miał powiedzieć, że gdyby człowiek miał trzynaście palców u rąk, to zapewne powstałby system trzynastkowy. Zapewne tak.

W drugiej połowie III tysiąclecia p.n.e. semici z Mezopotamii zapożyczyli cyfry klinowe i stopniowo adaptowali je do bazy 10. W pierwszej połowie II tysiąclecia p.n.e. asyryjsko-babilońska dziesiętna numeracja klinowa zaczęła stopniowo wypierać sumeryjski system sześćdziesiątkowy i rozpowszechniać się na Bliskim Wschodzie. W wiekach XVIII–XII p.n.e. pojawiły się na kostkach najstarsze znane cyfry chińskie. Wyroby z brązu epoki Czou (XII–III w. p.n.e.) zawierają zapisy liczb do 30 000, wówczas jeszcze niejednoznaczne. Zapis liczb uległ nieznacznej modyfikacji za panowana dynastii Han (206 p.n.e.–220 n.e.).

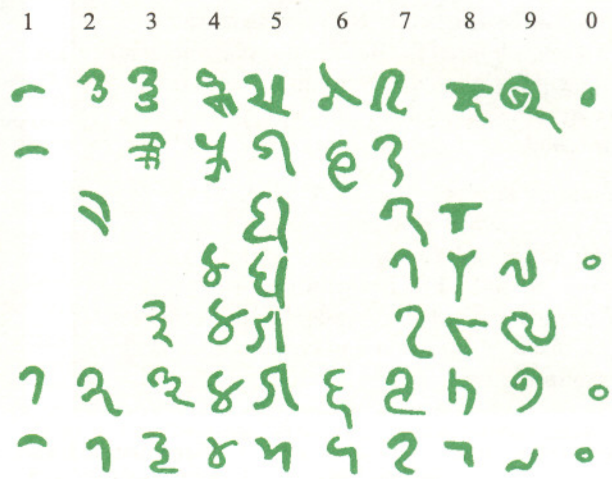


W epoce Tan (618–907) system zapisu liczb był już w miarę konsekwentny. Był to zapis za pomocą dziewięciu znaków (cyfr), zapis poziomy lub pionowy, przy czym na miejscach o numerach parzystych używano innych znaków niż na miejscach o numerach nieparzystych.



A – na miejscach jednostek, setek, dziesiątków tysięcy itd.
B – na miejscach dziesiątek, tysięcy, setek tysięcy itd.

Nie było osobnego znaku na oznaczenie zera, ale zamiast zera zostawiano puste miejsce. Prowadziło to do nieporozumień, jeżeli tylko tekst był napisany niestarannie. Nie było jednak algorytmów, które pozwalałyby wykonywać działania na cyfrach, zamiast na liczbach zapisanych za pomocą tych cyfr. Zapewne, niezależnie od Chin, początków systemu dziesiętnego doszukać się można w Indiach – pojawiły się tam cyfry brahmi w napisach buddyjskich z Nana Ghat. Można tam znaleźć pierwowzory niezerowych cyfr. Nie są one jednak używane zgodnie z zasadą pozycyjną. System dziesiętny, wraz z zerem, odnajdujemy u matematyka i astronoma, Aryabhaty, w VI wieku. W roku 628/29 Bhaskara I ugruntował pozycyjny system dziesiętny – posługiwał się konsekwentnie sanskryckimi znakami cyfrowymi.

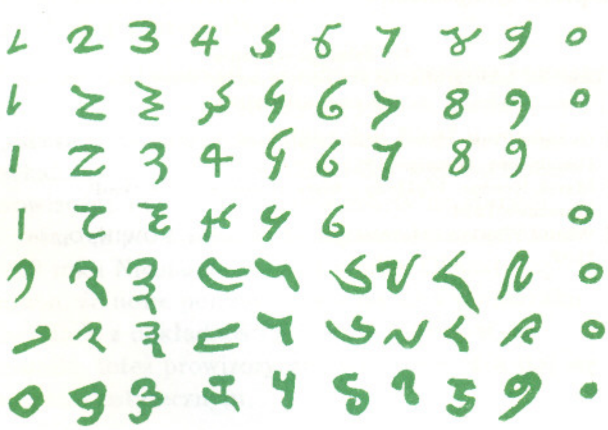


Stopniowa modyfikacja cyfr w Indiach.

Od roku 622 (początek ery muzułmańskiej – hidżry) zaczyna się ekspansja islamu. To zapewne dzięki temu biskup syryjski, Severos Sebokht, z klasztoru Keneszra (w górnym biegu Eufratu) mógł wzmiankować o cyfrach, jak je nazwał – indyjskich. Uczeni islamu szybko przyswoili nowe idee. Al-Chorezmi, ich najwybitniejszy przedstawiciel, pisał już podręczniki na ten temat. Były to podręczniki arytmetyki i nowego kierunku w matematyce – algebry, która uczyła, jak rozwiązywać równania, nie odwołując się, wzorem matematyków kultury hellenistycznej, do geometrycznej interpretacji. Był to przełom VIII i IX wieku. Nie jest jednak prawdą, że system dziesiętny został przyjęty w krajach islamu bez oporu. Uczeni przyjęli go chętnie. Natomiast w praktyce codziennej w użyciu był jeszcze dość długo arabski system zapisu liczb.

W tym samym czasie, w połowie IX wieku, arytmetyka w Indiach była już doskonale rozwinięta. Świadczyć o tym może np. podręcznik matematyki *Ganita-sara-sangraha*, autorstwa Mahaviracaryi. Dzieło to i inne, podobne, stworzyły pewien standard nauczania systemu dziesiętnego. System ten nie został tam wyłożony abstrakcyjnie – liczby symbolizowane były przez odpowiednie słowa, a w tekście używa się skrótów tych słów. To są właśnie pierwsze cyfry. Tekst napisany został w języku południowych rubieży Indii, karonese. Późniejsze i pokrewne teksty, pisane sanskrytem, zawierają odpowiednie symbole sanskryckie. A wszystkie te teksty, aż do pierwszej połowy XIX wieku, pisane są według następującego schematu: cyfry, ich postać, sposób zapisu liczb naturalnych, działania arytmetyczne na liczbach naturalnych, tzn. dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, połowienie, podwajanie, obliczanie pierwiastka kwadratowego, czasami też i sześciennego. Następnie wykładano to samo dla liczb ułamkowych, czyli wymiernych, dołączając na koniec na ogół mętne (z dzisiejszego punktu widzenia) informacje o zapisie dziesiętnym dowolnych liczb, wraz z informacjami, jak obliczać obwód koła i jego pole.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



Różne europejskie i orientalne modyfikacje cyfr systemu dziesiętnego.

Każdy z takich tekstów zawierał przykłady numeryczne. To one były podstawą nauczania systemu dziesiętnego w całym ówczesnym świecie. Jeszcze w II połowie XVIII wieku tak właśnie skonstruowany był podręcznik Simona l'Huilliera *Arytmetyka dla Szkół Narodowych,* zatwierdzony do użytku w Polsce przez Towarzystwo do Ksiąg Elementarnych w 1778 roku. Wróćmy jednak do czasów wcześniejszych. Pierwszym propagatorem systemu dziesiętnego w Europie w X wieku był mnich Gerbert, późniejszy papież Sylvester II (999–1003).

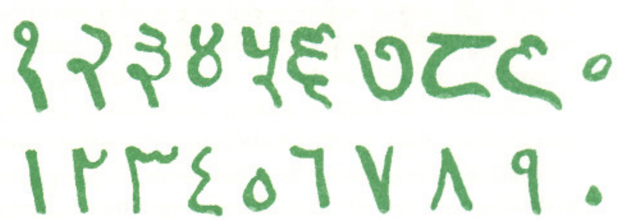
Upowszechnił on abak – liczydło służące do obliczeń w systemie dziesiętnym. Przełom, jeśli można tak powiedzieć, nastąpił na początku XIII wieku. Leonardo z Pizy, nazwany Fibonaccim (filius Bonacci, czyli Fibonacci – syn Bonacciego) przez włoskiego historyka matematyki XIX wieku, Libriego, po licznych podróżach do krajów dzisiejszego Maghrebu, napisał w roku 1202 opasłe dzieło *Liber abbaci* (*Księga abaku*), które z czasem utorowało drogę pozycyjnemu systemowi dziesiętnemu w Europie. W historii matematyki utrwalił się Leonardo nie z powodu tego dzieła, ale ... zadania o królikach, jednego z wielu zadań w tej książce. *Ile par królików może urodzić się w ciągu roku z jednej pary? Jest jedna para królików w pewnym miejscu otoczonym murem. Chcemy wiedzieć, ile par królików urodzi się z tej pary w ciągu roku, jeżeli natura tych królików jest taka, że rodzą one każdego miesiąca jedną parę i zaczynają być płodne w drugim miesiącu po urodzeniu.*

Przełom nastąpił nie bez oporu czynników oficjalnych. Jeszcze w XVIII wieku w podręcznikach matematyki do szkół jezuickich można przeczytać *o cyfrach arabskich i cyfrach kościelnych* (tzn. rzymskich). Przełom jednak został dokonany i było już tylko kwestią czasu, aby system dziesiętny ostatecznie zatriumfował w Europie. Akceptacja dokonywała się poprzez praktykę – system dziesiętny był w użyciu. Jeżeli np. sięgnąć do dzieła Kopernika, ważnego nie tylko z racji naszej narodowej dumy: *De Revolutionibus Orbium Coelestium, Libri VI, Norimbergae, Anno M.D.XLIII,* dzieła nie tak znowu dużego, bo liczącego 196 numerowanych kart, to łatwo spostrzec, że wszystkie tablice, jak też odpowiednie obliczenia, zapisane są w systemie dziesiętnym i to tak, jak to dziś robimy. Symbole cyfr nie różnią się w istotny sposób od współczesnych.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

A

B



Współczesne cyfry: A – sanskryckie, B – arabskie.

Tym, który niejako zamknął okres wprowadzania pozycyjnego systemu dziesiętnego do Europy, był Simon Stevin (1548–1620), a dziełem, które postawiło przysłowiową kropkę nad „i" – *La Disme* (w oryginale *De Thiende,* czyli *Dziesiątka,* w dość wolnym przekładzie). Dzieło wyszło drukiem w 1585 roku. Okazuje się, że (jeszcze) uczeni islamu wiedli prym i w tej dziedzinie. Otóż na początku XV wieku al Kaszi (od miasta Kaszan w północnej Persji – dziś Iranie), wybitny astronom i matematyk, napisał traktat *Klucz arytmetyki,* w którym znajdujemy niemal wszystko to, co napisał później Stevin.

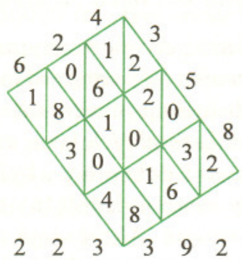
Ale kto w Europie czytał wówczas po arabsku? Wątpliwe jest więc, czy dzieło al Kasziego było w ogóle znane w Europie.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cyfry, których używał al Kaszi.

Jego pierwsze tłumaczenia zaczęły ukazywać się w Europie, jak w przypadku innych tekstów matematycznych z odległej przeszłości, w II połowie XIX wieku i na początku XX wieku. Zapewne więc, gdyby dzieło al Kasziego przetłumaczono wcześniej, to Stevin byłby bezrobotnym matematykiem.

Algorytmy działań na liczbach niekiedy różniły się sposobem zapisu od współczesnych. Na przykład mnożenie $624 \cdot 358$ zapisuje al Kaszi w postaci tabelki:



A oto jak Stevin zapisuje i dodaje ułamki dziesiętne 27,847; 37,675; 875,782: *Liczby dziesiętne dane [są] poniżej; jak je dodać, aby znaleźć ich sumę.*
Są trzy rzędy dziesiętne liczb danych, z których pierwszą jest 27⓪, 8①, 4②, 7③, *drugą* 37⓪, 6①, 7②, 5③, *trzecią* 875⓪, 7①, 8②, 2③.

Schematycznie Stevin zapisuje to w postaci:

		⓪	①	②	③
	2	7	8	4	7
	3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	3	0	4

Na koniec polonica związane z systemem dziesiętnym. Otóż w 1777 roku ukazała się mała, kilkustronicowa broszurka autorstwa pijara, Bernarda Sirucia: *Arytmetyka prostacka czyli Nowy Sposób czynienia Rachunków, którego Nieumiejących czytać nawet, łatwo nauczyć można. Jak to: Gumiennych, Szynkarzów, Włodarzów & c. że sobie kretą lub węglem kresując, albo na kiju nożem karbując porachować, co do nich należy, będą mogli.* Siruć pisał:
Te wszystkie liczby wyrażać się będą laseczkami tylko, a rożnice ich wyznaczać się będą przez krzyżyk nakształt litery x, *zaczynają kreślić zwykłym sposobem od większey liczby do mnieyszey. Litera tedy* x *liczby żadney nie znaczy. Tym sposobem Złotych trzy tysiące dwieście pięćdziesiąt cztery, wyrazi się tak:* III x II x IIIII x IIII, *to jest za trzy tysiące kreślę trzy laseczki y krzyżyk; za dwieście dwie laseczki y krzyżyk; za pięćdziesiąt kreślę pięć laseczek y krzyż; a na ostatku cztery laseczki znaczące prostą liczbę cztery; gdzie znaki* x *dla tego tylko są używane, żeby laseczki znaczące 1ta, dziesiątki, z inszemi się nie pomieszały.*

Piątka pisana jest jako Λ. Przykład rachunku dla szynkarzy:

Miał	III	x	Λ	x	IIII
Zyskał	III	x	III	x	II
Summa	ΛI	x	ΛIII	x	ΛI

Można więc nie umieć czytać ani pisać, a mimo to sprawnie posługiwać się systemem dziesiętnym. W ten sposób wróciliśmy do kresek i karbów, ale jakże inaczej niż przed tysiącleciami.

Do dalszego czytania
(zamiast bibliografii, bo kto zechce czytać teksty starochińskie lub staroarabskie?)

[1] Georges Ifrah, *Dzieje liczby czyli historia wielkiego wynalazku*, Ossolineum, Wrocław 1990.
[2] Marek Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, WSiP, Warszawa 1994.
[3] Witold Więsław, *Matematyka i jej historia*, NOWIK, Opole 1997.

Rewolucyjna reforma miar i wag

Andrzej Kajetan WRÓBLEWSKI

Kilkaset lat temu dobrze ustalone były tylko jednostki pomiaru czasu, ponieważ datujący się od starożytności podział doby na godziny, minuty i sekundy był utrwalony wszędzie. Istniało natomiast mnóstwo miar lokalnych dla długości, powierzchni, objętości i ciężaru, czasem różniących się znacznie mimo tej samej nazwy.

Podejmowano rozmaite próby standaryzacji jednostek miar. Oto, na przykład, stary przepis z 1536 roku, ustalający jednostkę miary długości, polecał wybierać 16 kolejnych mężczyzn wychodzących po niedzielnej mszy z kościoła. Mieli oni ustawiać swe prawe stopy tak, aby ich szesnaście butów było w linii jeden za drugim. Tak otrzymana jednostka – głosił przepis – jest sprawiedliwą i powszechną miarą do pomiarów gruntu.

Miara ta miała szereg zalet. Można ją było w przybliżeniu odtwarzać w każdą niedzielę i łatwo dzielić na dwie, cztery i osiem części, uzyskując miary odpowiednie do różnych okoliczności. Oczywiście między różnymi miejscowościami musiały występować drobne różnice, co jednak nie miało wtedy istotnego znaczenia.

Podjęta po Rewolucji Francuskiej reforma miar i wag miała na celu eliminację wszelkich różnic między miarami lokalnymi we Francji. Rząd rewolucyjny chciał ponadto zniszczyć wszelkie pozostałości starego systemu feudalnego. W 1790 roku Francuskie Zgromadzenie Narodowe przyjęło, że nową jednostką długości powinna być długość wahadła sekundowego. Taka jednostka była proponowana kilkakrotnie już dużo wcześniej, między innymi jej wprowadzenie propagował osiadły w Polsce Włoch Tito Livio Burattini w wydanej w Wilnie w 1675 roku broszurze *Misura universale*. Jednak Francuska Akademia Nauk, której przekazano uchwałę Zgromadzenia, wypowiedziała się przeciw niej, argumentując, że do ustalenia takiej jednostki potrzebna będzie jednostka czasu, sekunda, która nie ma nic wspólnego z odległością, a ponadto należy do układu sześćdziesiątkowego, który chciano zastąpić przez dziesiętny.

Akademicy paryscy zaproponowali własny pomysł nowej jednostki długości – metra. Miała nią być dziesięciomilionowa część długości południka ziemskiego między biegunem a równikiem. Zdaniem akademików, w ten sposób miała zostać wybrana jednostka oparta o zjawiska naturalne. Ustalono więc, że należy zmierzyć dwa równe odcinki południka po obu stronach równoleżnika 45°, południk zaś wybrano przechodzący przez Paryż.

Wielkim nakładem sił i środków rozpoczęto pomiary geodezyjne, które posuwały się jednak bardzo powoli i zakończyły dopiero w 1799 roku. Rząd nie mógł czekać tak długo i już w 1795 roku wprowadzono prowizoryczny wzorzec metra oparty na starych pomiarach południka, które wykonał jeszcze około 1740 roku Nicolas-Louis de Lacaille. Okazało się potem, że nowe pomiary zgadzają się z pomiarami Lacaille'a z dokładnością do dwóch dziesiątych promila, toteż prowizoryczny wzorzec metra stał się wzorcem ostatecznym.

Ustalono także, że wielokrotności i podwielokrotności metra będą oparte na układzie dziesiętnym. Tak pojawił się decymetr – 1/10 metra, centymetr – 1/100 metra, milimetr – 1/1000 metra, dekametr – 10 metrów, hektometr – 100 metrów, kilometr – 1000 metrów itd.

Na nowej jednostce długości zostały też oparte jednostki objętości i masy – gram – ciężar centymetra sześciennego wody w temperaturze 3,5 stopnia Réaumura (ta skala termometryczna wyszła potem z użycia i w definicji grama znalazła się temperatura 4 stopni Celsjusza). Ze względów praktycznych wzorcem jednostki masy został kilogram = 1000 gramów.

W zapale zrywania z przeszłością wprowadzono we Francji także nowy rewolucyjny kalendarz, w którym rok dzielił się na dwanaście równych miesięcy po 30 dni oraz pięć dodatkowych dni świątecznych, zwanych sankiulotydami (w latach przestępnych dochodził jeszcze jeden dzień dodatkowy: Dzień Rewolucji). Początek roku i początek Nowej Ery Republikańskiej ustalono na 22 września 1792 roku – w tym roku wtedy właśnie przypadało jesienne zrównanie dnia z nocą. Miesiące, których nazwy – zresztą piękne – utworzono od sezonowych zjawisk przyrodniczych, zostały podzielone na trzy dekady, po 10 dni. Nazwy tych dni wzięto od łacińskich liczebników z dodatkiem końcówki *di*. Tak więc były to dni: primidi, doudi, tridi, quartidi, quintidi, sextidi, septidi, octidi, nonidi i decadi.

Postanowiono także wprowadzić podział doby na 10 godzin, po 100 minut każda; podobnie minuta miała się dzielić na 100 sekund. Opór przeciw tej ostatniej reformie był jednak niezwykle silny. W muzeach można jednak znaleźć pochodzące z tamtego okresu zegary z tarczą podzieloną na 10 godzin. Kalendarz rewolucyjny przetrwał we Francji do 31 grudnia 1805 roku. W dniu 1 stycznia 1806 roku oficjalnie powrócono do kalendarza gregoriańskiego. Kalendarz rewolucyjny przywrócono jeszcze na bardzo krótko podczas Komuny Paryskiej (od 18 marca do 28 maja 1871 roku).

Jako ciekawostkę warto też podać, że akademicy paryscy zaproponowali konsekwentnie wprowadzenie układu dziesiętnego do geometrii, w której odtąd kąt prosty miał się dzielić na 100 stopni, po 100 minut każdy itd. Ten pomysł jednak szybko został odrzucony.

Rozprzestrzenianiu się nowego systemu miar i wag poza Francją sprzyjały sukcesy militarne Napoleona. Na początku XIX wieku system metryczny był już dość powszechnie przyjmowany w nauce, ale w życiu codziennym posługiwano się jeszcze przez jakiś czas tradycyjnymi miarami. Nawet we Francji musiano dopuścić prawnie do użytku dodatkowe jednostki pozaukładowe: na przykład liczący dwa metry tuaz, dzielący się na sześć stóp. W podręcznikach fizyki i chemii z tamtego okresu musiały być zamieszczane obszerne tablice podające przeliczenia mnogości miar lokalnych na nowe jednostki metryczne.

Dziś dziesiętny system miar i wag opanował świat. Resztki dawnych niedziesiętnych systemów przetrwały jeszcze tylko gdzieniegdzie, np. w niektórych krajach anglosaskich, gdzie obok systemu metrycznego używa się jeszcze mil, jardów, stóp, cali, galonów, funtów, uncji itd. Ale i to ma się ku końcowi. Do 1971 roku w Wielkiej Brytanii panował skomplikowany system monetarny, w którym funt dzielił się na dwadzieścia szylingów po dwanaście pensów każdy. Dziś o tym systemie pamiętają tylko ludzie starszego pokolenia.

Arytmetyka zmiennopozycyjna a dokładność obliczeń

Leszek PLASKOTA

W systemie dziesiętnym liczby całkowite zapisujemy jako skończone ciągi cyfr, czyli symboli ze zbioru $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Jeśli liczba jest ujemna, to taki ciąg poprzedzamy minusem.

Liczby wymierne piszemy zwykle w postaci ułamka p/q, gdzie p jest liczbą całkowitą, a q – naturalną. Jest to wskazówka, że p/q to wynik dzielenia p całości na q równych części. Podobnie możemy patrzeć na „szkolny" zapis liczb niewymiernych: $\sqrt{2}$ np. to nic innego, jak zapis operacji pierwiastkowania. Przedstawia on liczbę, której kwadrat jest równy 2. Podobnie, pisząc π, mamy na myśli stosunek obwodu koła do jego średnicy.

Zapis liczb jako wyników pewnych operacji czy też zapis symboliczny ma niewątpliwe zalety, ale też pewne wady. Główną zaletą jest to, że liczba jest zawsze dokładnie zdefiniowana. Nie znaczy to jednak (i to jest wada), że znamy *wartość numeryczną* danej liczby, czyli kolejne cyfry jej rozwinięcia dziesiętnego.

Liczby niewymierne (i niektóre liczby wymierne) mają rozwinięcia dziesiętne nieskończone. Zapis dziesiętny *musimy* więc gdzieś „uciąć" i zadowolić się pewnym *przybliżeniem*. Jeśli zapiszemy tylko t cyfr po przecinku i ostatnią zaokrąglimy (tzn. zwiększymy o jeden, gdy po niej stoi jedna z cyfr $5,6,7,8,9$), to otrzymamy reprezentację z dokładnością nie mniejszą niż $\delta = 0{,}5 \cdot 10^{-t}$.

Mamy na przykład

$$\frac{1}{1024} = 0{,}0009765625, \quad \sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots, \quad \pi = 3{,}14159265\ldots.$$

Jeśli np. chcemy mieć $t = 6$ cyfr po przecinku, to liczba $1/1024$ będzie reprezentowana przez $0{,}000977$, a π przez $3{,}141593$.

Opisany sposób to tzw. *reprezentacja stałoprzecinkowa*. Jej błąd bezwzględny nie przekracza *stałej* δ, niezależnie od wielkości liczby. Jest to własność niepożądana – w konsekwencji liczby bardzo małe są reprezentowane przez zero! Choć w świecie olbrzymów centymetr długości niewiele znaczy, to w świecie liliputów ten sam centymetr może oznaczać bardzo dużo. Mówiąc mniej obrazowo, wolelibyśmy reprezentować „małe" liczby z „dużą" dokładnością, nawet za cenę zmniejszenia dokładności „dużych" liczb.

Postulat ten spełnia *reprezentacja zmiennoprzecinkowa*, którą teraz opiszemy. Załóżmy najpierw, że $x > 0$, oraz że c_i są kolejnymi cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby x, tzn.

$$x = c_k\,10^k + \cdots + c_1\,10 + c_0 + \frac{c_{-1}}{10} + \frac{c_{-2}}{10^2} + \cdots,$$

przy czym $c_k \neq 0$. Wtedy reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczby x z uwzględnieniem t cyfr znaczących jest równa

$$\mathrm{rd}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{j=k-t+1}^{k} c_j 10^j, & \text{gdy } c_{k-t} \leq 4, \\ \sum\limits_{j=k-t+1}^{k} c_j 10^j + 10^{k-t+1}, & \text{gdy } c_{k-t} \geq 5. \end{cases}$$

(Skrót rd pochodzi od angielskiego *round-off* – zaokrąglać.) Dla $x < 0$ kładziemy $\mathrm{rd}(x) = -\mathrm{rd}(-x)$. Dodatkowo przyjmujemy, że liczba $x = 0$ jest reprezentowana dokładnie: $\mathrm{rd}(0) = 0$. Zauważmy, że w reprezentacji zmiennoprzecinkowej interesuje nas nie tyle t cyfr po przecinku, co t cyfr „najważniejszych".

Często posługujemy się jednolitym zapisem $\mathrm{rd}(x) = z \cdot m_t \cdot 10^c$, gdzie $z \in \{-1, 1\}$ jest *znakiem*, m_t liczbą z przedziału $[0{,}1; 1{,}0)$ zwaną *mantysą*, a c liczbą całkowitą zwaną *cechą* liczby.

W ten sposób można jednoznacznie zapisać każdą liczbę zmiennoprzecinkową różną od zera. Jeśli interesują nas np. $t = 4$ cyfry znaczące, to mamy

$$\mathrm{rd}\left(\frac{1}{1024}\right) = 0{,}9766 \cdot 10^{-3}, \quad \mathrm{rd}\left(\sqrt{2}\right) = 0{,}1414 \cdot 10^{1}, \quad \mathrm{rd}\,(-\pi) = -0{,}3142 \cdot 10^{1}.$$

Piszemy również $0{,}1234 \cdot 10^{-5}$ zamiast $0{,}000001234$ i $0{,}5678 \cdot 10^{9}$ zamiast 567800000.

Bardzo wygodny zapis zmiennopozycyjny stosuje się współcześnie we wszelkich obliczeniach automatycznych. W szczególności, w ten sposób reprezentuje się liczby rzeczywiste w *maszynach cyfrowych*, przy czym tam t zwykle waha się między 8 a 16. Mantysy i cechy używamy też często w obliczeniach „ręcznych", by zaznaczyć rząd wielkości liczby i nie przepisywać wielu zer, gdy liczba jest bardzo mała lub bardzo duża.

Jaka jest dokładność reprezentacji zmiennoprzecinkowej? Czytelnik sprawdzi, że $\mathrm{rd}(x) = x(1+\varepsilon)$, gdzie ε jest liczbą „małą", $|\varepsilon| \leq 5 \cdot 10^{-t}$. Zmiennopozycyjna reprezentacja liczb rzeczywistych daje więc *błąd względny* nie większy niż

$$\nu = 5 \cdot 10^{-t}.$$

Wielkość ν nazywamy *dokładnością reprezentacji*.

Zajmiemy się teraz rachowaniem na *liczbach zmiennoprzecinkowych*, czyli na elementach zbioru $\overline{\mathbb{R}} = \{\mathrm{rd}(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Zauważmy, że jeśli nawet $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, tzn. $\mathrm{rd}(x) = x$ i $\mathrm{rd}(y) = y$, to wynik operacji arytmetycznej na x i y nie musi być wcale liczbą zmiennoprzecinkową.

Jeśli np. $t = 3$ oraz $x = y = 0{,}638$, to

$$x * y = 0{,}407044 \neq \mathrm{rd}(x * y) = 0{,}407.$$

Podobnie,

$$x + y = 1{,}276 \neq \mathrm{rd}(x + y) = 0{,}128 \cdot 10^{1}.$$

Oto bardziej drastyczny przykład. Dla $t = 3$ niech $x = 123$ i $y = 0{,}456$. Wtedy $x + y = 123{,}456$, ale $\mathrm{rd}(x + y) = 123 = x$. Efekt jest taki, jakbyśmy dodali zero!

Aby wykonać jedno z działań arytmetycznych na dwóch liczbach zmiennoprzecinkowych, najpierw wykonujemy owo działanie dokładnie, a potem wynik reprezentujemy zmiennoprzecinkowo. Zbiór $\overline{\mathbb{R}}$ liczb zmiennoprzecinkowych z tak zdefiniowanymi operacjami arytmetycznymi będziemy nazywać *arytmetyką zmiennoprzecinkową* i oznaczać przez fl (od angielskiej nazwy *floating point arithmetic*). Jeśli więc $\Box \in \{+, -, *, /\}$, to wówczas

$$\mathrm{fl}(x\Box y) = \mathrm{rd}(x\Box y) = (x\Box y)(1+\varepsilon), \quad \text{gdzie } |\varepsilon| \le \nu.$$

Zatem, błąd względny pojedynczej operacji arytmetycznej nie przekracza ν. A jak jest przy obliczaniu w fl bardziej skomplikowanych wyrażeń? Rozważmy najpierw mnożenie trzech liczb $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$. Ponieważ wykonanie dowolnej operacji powoduje powstanie błędu względnego na poziomie ν, więc

$$\begin{aligned}\mathrm{fl}(x * y * z) &= (((x * y)(1+\varepsilon_1)) * z)(1+\varepsilon_2) = \\ &= x * y * z(1+\varepsilon),\end{aligned}$$

gdzie $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$. Ponieważ $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \le \nu$, więc $|\varepsilon| \le 2\nu + \nu^2$. Dla dużych t liczba ν^2 jest dużo mniejsza niż ν (np. jeśli $t = 8$, to $\nu = 5 \cdot 10^{-8}$, a $\nu^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-15}$). Możemy więc powiedzieć, że przy mnożeniu trzech liczb otrzymujemy w fl wynik, którego błąd względny jest nie większy niż 2ν. Podobnie, mnożenie n liczb zmiennoprzecinkowych powoduje błąd względny na poziomie nie większym niż $(n-1)\nu$ i jest operacją „bezpieczną" dla n niezbyt wielkich w porównaniu z $1/\nu$.

Zobaczmy teraz, co dzieje się, gdy dodajemy trzy liczby x, y, z. Mamy

$$\begin{aligned}\mathrm{fl}(x + y + z) &= (\mathrm{fl}(x + y) + z)(1+\varepsilon_2) = \\ &= ((x + y)(1+\varepsilon_1) + z)(1+\varepsilon_2).\end{aligned}$$

Stąd, pamiętając o nierównościach $|\varepsilon_i| \le \nu$, łatwo otrzymujemy

$$|\mathrm{fl}(x + y + z) - (x + y + z)| \le (2\nu + \nu^2)(|x| + |y| + |z|).$$

Błąd względny wyniku można więc mniej więcej oszacować jako

$$\frac{|\mathrm{fl}(x + y + z) - (x + y + z)|}{|x + y + z|} \le 2\nu\,\frac{|x| + |y| + |z|}{|x + y + z|}.$$

Zatem, błąd względny reprezentacji ν może być „wzmocniony" współczynnikiem $K = 2(|x| + |y| + |z|)/|x + y + z|$.

Jeśli x, y i z mają ten sam znak, to $K = 2$ i oszacowanie jest podobne do tego przy mnożeniu. Jednak w ogólności K może być dowolnie duże – np. wtedy, gdy suma $x + y + z$ jest bliska zeru, ale poszczególne składniki mają duże wartości bezwzględne. Zatem dodawanie liczb o różnych znakach *może* powodować duży błąd względny wyniku. Pamiętajmy o tym zawsze, gdy wykonujemy obliczenia „ręcznie", zaokrąglając wyniki częściowe.

Oto patologiczny przykład. Niech $t = 4$, $x = y = 0{,}5678$, $z = -1{,}135$. Wtedy $x + y + z = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$, ale $\mathrm{fl}(x + y + z) = 0$. Błąd względny wyniku jest nieskończony!

Ostatnie stwierdzenie brzmi pesymistycznie. Czyżby arytmetykę zmiennopozycyjną można było wyrzucić do kosza? Oczywiście nie. Powyższe oszacowania błędów są zwykle zawyżone (choć bywają osiągane!). W praktyce błędy są zwykle dużo mniejsze, a czasem nawet wzajemnie się redukują. Poza tym, często możemy zabezpieczyć się przed nadmiernym błędem nieco modyfikując arytmetykę. Możemy np. wyniki częściowe otrzymywać w arytmetyce o wyższej precyzji, a dopiero wynik końcowy zaokrąglić do precyzji nas interesującej. Proszę sprawdzić, że gdybyśmy w przykładzie z dodawaniem trzech liczb zastosowali arytmetykę z $t = 5$ zamiast $t = 4$, to otrzymalibyśmy wynik dokładny. Ten prosty pomysł, godny polecenia przy obliczeniach „ręcznych", jest często stosowany w obliczeniach na maszynach cyfrowych i prowadzi do tzw. arytmetyki rozszerzonej.

Innym sposobem uniknięcia nadmiernych błędów jest modyfikacja samego sposobu obliczeń, czyli *algorytmu*. Oto przykład. Wartość wyrażenia $f(x, y) = x^2 - y^2$ dla danych $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ możemy obliczyć dwojako: stosując wzór $f(x, y) = x * x - y * y$, albo $f(x, y) = (x - y) * (x + y)$. Który z nich jest lepszy? W pierwszym przypadku mamy

$$\mathrm{fl}(x * x - y * y) = \big(x^2(1+\varepsilon_1) - y^2(1+\varepsilon_2)\big)(1+\varepsilon_3),$$

gdzie $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ są błędami powstałymi przy podnoszeniu x i y do kwadratu, a ε_3 jest błędem powstałym z odejmowania. Błąd względny, równy

$$\left|\varepsilon_3 + (1+\varepsilon_3)\frac{\varepsilon_1 x^2 - \varepsilon_2 y^2}{x^2 - y^2}\right|,$$

może być bardzo duży (np. dla $|x| \approx |y|$ i ε_1, ε_2 różnych znaków). Natomiast przy drugim sposobie liczenia błąd względny na ogół nie przekracza 3ν.

Dla ilustracji podamy jeszcze przykład numeryczny. Niech $t = 3$, $x = 0{,}567$ i $y = 0{,}566$. Wtedy

$$x^2 - y^2 = 0{,}1133 \cdot 10^{-2},$$
$$\mathrm{fl}(x * x - y * y) = 0{,}1 \cdot 10^{-2},$$
$$\mathrm{fl}((x - y) * (x + y)) = 0{,}113 \cdot 10^{-2}.$$

Błąd względny w drugim sposobie liczenia jest więc prawie 50 razy mniejszy niż w pierwszym.

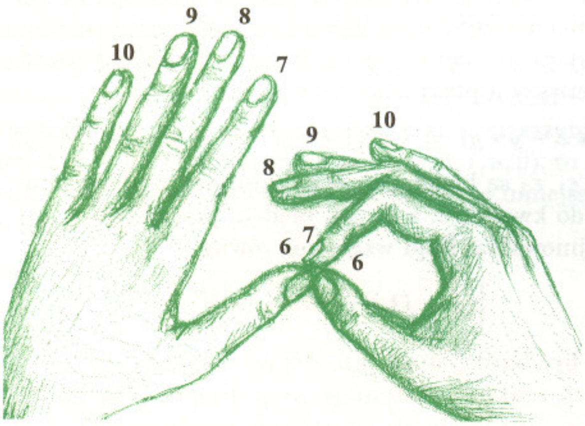
W praktyce, zwłaszcza związanej z obliczeniami na maszynach cyfrowych, spotykamy dużo większe problemy. Arytmetyka maszyny cyfrowej jest w rzeczywistości również bardziej skomplikowana. Ponadto, zanim zaczniemy stosować jakiś algorytm, musimy najpierw przeanalizować liczbę operacji arytmetycznych koniecznych do jego wykonania, a także jego *własności numeryczne* – czyli reakcje na obliczenia prowadzone w arytmetyce zmiennoprzecinkowej. Zajmuje się tym m.in. gałąź matematyki zwana *analizą numeryczną*.

mała delta

10 palców

Przychodzimy na świat z matematyką ... w palcach. To, ile kto ma rąk i nóg – widać. Ile mamy palców? To już trzeba policzyć!

Dla jednych zmorą, dla innych pierwszym łatwym sukcesem jest nabycie umiejętności dodawania i odejmowania bez pomocy palców. Przyszły Wielki Matematyk ma to od razu „w jednym palusku". Odrzuca dziesięciopalczastą kotwicę i wypływa na szerokie morze abstrakcji. Niestety, kotwica wbija się w dno i nie puszcza. Dziesięciopalczaste liczydełko wprowadza układ dziesiętny i każe nauczyć się tabliczki mnożenia. Na pamięć! Co z tego, że Wielki Matematyk potrafi mnożyć bez znajomości tej głupiej, 10 na 10, tabelki, kiedy – dzięki niej – jego nieuabstrakcyjnieni koledzy zaczynają liczyć szybciej od niego.



Nie ma rady, trzeba rwać kotwicę. Ale przeciwnika można pokonać jego własną bronią. Ostatnia ćwiartka tabliczki mnożenia (reszta to prościzna) jest zakodowana w naszych palcach. Na rysunku pokazano, jak działa algorytm na przykładzie mnożenia $6 \cdot 7$. Stykamy tyle palców, o ile mnożone liczby są większe od 5, mnożymy przez 10 i dodajemy iloczyn liczb wolnych palców u rąk:

$$(1+2)\cdot 10 + 4\cdot 3 = 30 + 12 = 42.$$

To działa nawet dla $5\cdot 5$ i $10\cdot 10$, a jeżeli umiemy sobie wyobrazić „ujemne" i dodatkowe palce, to dla dowolnych liczb naturalnych, np.

$$4\cdot 7 = (-1+2)\cdot 10 + 6\cdot 3 = 28,$$
$$11\cdot 7 = (6+2)\cdot 10 + (-1)\cdot 3 = 77.$$

Mamy już algorytm rwania kotwicy, ale na tym nie koniec! Teraz możemy rozwinąć żagle. Na przykład spróbuj obliczyć w pamięci, ile jest $11\cdot 17$. A przecież odpowiedź jest do odczytania z rysunku. Wystarczy mała modyfikacja algorytmu:

$$16\cdot 17 = 200 + 2\cdot (1+2)\cdot 10 + 4\cdot 3 = 272,$$
$$26\cdot 27 = 600 + 3\cdot (1+2)\cdot 10 + 4\cdot 3 = 702.$$

Również wynik mnożenia 11 przez 12 jest na tym rysunku zakodowany

$$11\cdot 12 = 100 + (1+2)\cdot 10 + 1\cdot 2 = 132.$$

(Tu jest trochę inaczej, a mianowicie – mnożymy liczby złączonych palców.)

Odpowiedź na pytanie, czy i dlaczego to działa (ile jest np. $17\cdot 19$?), na ile jest to ogólne (jak np. obliczyć iloczyn $36\cdot 37$?) i czy można wymyślić zupełnie ogólny, prosty algorytm mnożenia na palcach – pozostawiam już Wam, żeglarze.

Małą Deltę przygotował Piotr ZALEWSKI

Niech żyje SI!

Natknąłem się przed laty w jakichś chyba amerykańskich książkach na określenia dwu stałych przyrody: stałej słonecznej i mechanicznego równoważnika ciepła. Wartość pierwszej była tam podana jako 4 690 000 KM na milę kwadratową, a drugiej jeszcze zabawniej (cytuję w tłumaczeniu): „aby ogrzać 1 funt wody o 1°F, potrzeba tyle energii, ile dostajemy, zrzucając 772 funty z wysokości 1 stopy". Zrobiło to na mnie takie wrażenie, że określenia te przepisałem sobie na pamiątkę, choć już nie pamiętam, jakie to były książki. Można się założyć, że definicje te są poprawne (choć nie sprawdzałem), a jednak budzą grozę, prawda?

Chyba nie od dziś dostrzegamy zalety systemu dziesiętnego, aczkolwiek byłoby równie dobrze, gdyby cały świat używał systemu np. dwunastkowego. Do wszystkiego można się przyzwyczaić. Na przykład fizycy i astronomowie (w każdym razie w większości) nie mogą odzwyczaić się od systemu CGS. Jest to w zasadzie też dobry system jednostek, tylko że prowadzi do rozdwojenia jaźni, a ponadto są lepsze. Jest mianowicie na szczęście dziesiętny, ale szkodliwy dla psychiki uczonego, gdyż każe mu mierzyć np. natężenie prądu w $\mathrm{cm}\sqrt{\mathrm{dyna}}/\mathrm{s}$, podczas gdy ten sam uczony w domu to samo natężenie zmierzy zwyczajnie w amperach. Ponadto w CGS zakłada się, że np. natężenie pola elektrycznego i magnetycznego mierzy się w tych samych jednostkach, co jest naturalne dla fizyków, ale utrudnia życie inżynierom. Na ten temat można by jeszcze długo, ale morał jest, według mnie, jeden: niech żyje SI!

A jednak jako astronom będę na koniec usprawiedliwiał uporczywe stosowanie w astronomii niemetrycznych jednostek odległości. Powodem ich stosowania wcale nie są „astronomiczne odległości", lecz po prostu wygoda. Zaproponowano kiedyś jednostkę metryczną, miał to być herszel (na cześć angielskiego astronoma, pioniera astronomii galaktycznej) i miał wynosić 10^{16} m. Propozycja ta absolutnie się nie przyjęła, zapewne dlatego, że mamy już dwie inne jednostki, obie wprawdzie niemetryczne, ale bardzo dobre pod innymi względami. Rok świetlny (bardzo zbliżony do 1 herszla, więc niby co za różnica?) jest jednostką silnie przemawiającą do wyobraźni i przez to chętnie stosowaną w popularyzacji astronomii. A parsek (mający 3,26 lat świetlnych) jest jednostką po prostu bardzo praktyczną, gdyż wiąże się prosto z innymi wielkościami (też niemetrycznymi) stosowanymi w astronomii od wieków. Mianowicie, parsek to odległość, której odpowiada paralaksa heliocentryczna równa $1''$, wobec czego liczy on 206 265 jednostek astronomicznych (odwrotność tej liczby to wartość sinusa lub tangensa $1''$, a jednostka astronomiczna to średnia odległość Ziemi od Słońca, a przy tym bardzo wygodna miara odległości w Układzie Słonecznym). Odległość gwiazdy w parsekach jest odwrotnością jej paralaksy w sekundach łuku, wziętej bezpośrednio z obserwacji. Nic więc dziwnego, że w publikacjach odległości gwiazd podaje się tylko w parsekach, wartości stałych Oorta w $\mathrm{km}/(\mathrm{s}\cdot\mathrm{kpc})$, a wartość stałej Hubble'a w $\mathrm{km}/(\mathrm{s}\cdot\mathrm{Mpc})$.

Na tym nie koniec. Jasność absolutna gwiazdy (oznaczana zazwyczaj przez M) została tak zdefiniowana, by z jasnością obserwowaną m wiązała się zależnością

$$m - M = 5\log r - 5,$$

gdzie r jest odległością gwiazdy, wyrażoną właśnie w parsekach. A określanie jasności gwiazd w wielkościach gwiazdowych (magnitudo) to zwyczaj panujący od ponad dwóch tysięcy lat i zwalczyć go raczej się nie da, zresztą po co? W sumie uważam (i z pewnością nie tylko ja), że te akurat jednostki miar, o których tu wspomniałem (sekunda łuku, jednostka astronomiczna, parsek i magnitudo), choć są niemetryczne, zasługują na szacunek, ponieważ stanowią cały spójny zespół jednostek, bardzo praktycznych, powiązanych prostymi zależnościami i których stosowanie jest uświęcone bardzo długą tradycją.

Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania M 859.
Jeśli ostatnia cyfra liczby a nie jest zerem, to suma jej i ostatniej cyfry liczby b jest równa 10, a pozostałe sumy par odpowiednich cyfr liczb a i b są równe 9. Stąd wynika, że podwojona suma cyfr liczby a wynosi $9\cdot 9 + 10 = 91$, co jest niemożliwe, bo liczba 91 jest nieparzysta.

Rozwiązanie zadania F 486.
Z uogólnionego III prawa Keplera mamy: $T^2 \sim a^3/(M+m)$. W przypadku gdy gęstość ciał się nie zmienia, zarówno a^3, jak i M oraz m skalują się jak ε^3. Zatem okresy obiegu planet pozostaną bez zmian.

Rozwiązanie zadania M 860.
Niech zapisem dziesiętnym danej liczby n będzie $\overline{a_l a_{l-1}\ldots a_0}$. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $a_0 \neq 0$. Weźmy, dla dowolnego $m > l$, liczbę $k = 99\ldots 9$ złożoną z m dziewiątek. Wtedy, jak łatwo się przekonać, w zapisie dziesiętnym

$$nk = n(10^m - 1) = \overline{a_l\ldots a_1(a_0-1)99\ldots 9(9-a_l)\ldots(9-a_1)(10-a_0)},$$

gdzie łącznie mamy $l+1+m$ cyfr. Jak widać, suma cyfr liczby nk jest równa $9m$, czyli sumie cyfr liczby k.

Figli z dziesiątką ciąg dalszy

> *Lepszy jeden wódz głupi*
> *niż mądrych dziesięciu.*
>
> Adam Mickiewicz
> „Jedna wola"

Napiszmy dowolnie dziesięć kolejnych liczb naturalnych. Zawsze znajdzie się wśród nich taka, która jest względnie pierwsza z pozostałymi. Dowód jest prosty, polecamy jako ćwiczenie.

Naprzemienna suma zaczynająca się od **10!**

$$\mathbf{10}! - 9! + 8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 3301819$$

jest liczbą pierwszą. Liczb o podobnej własności jest niewiele, a największą ze znanych jest $19! - 18! + 17! - 16! + \ldots + 1! = 115578717622022981$.

ZADANIE 5. Znaleźć inne takie liczby.

Skoro mowa o silniach, to odnotujmy, że

$$\mathbf{10}! = 6! \cdot 7!$$

jest jedynym znanym rozwiązaniem równania $x! = y! \cdot z!$, oczywiście w liczbach naturalnych – poza wynikającą z definicji zależnością $(n!)! = (n! - 1)! \cdot n!$.

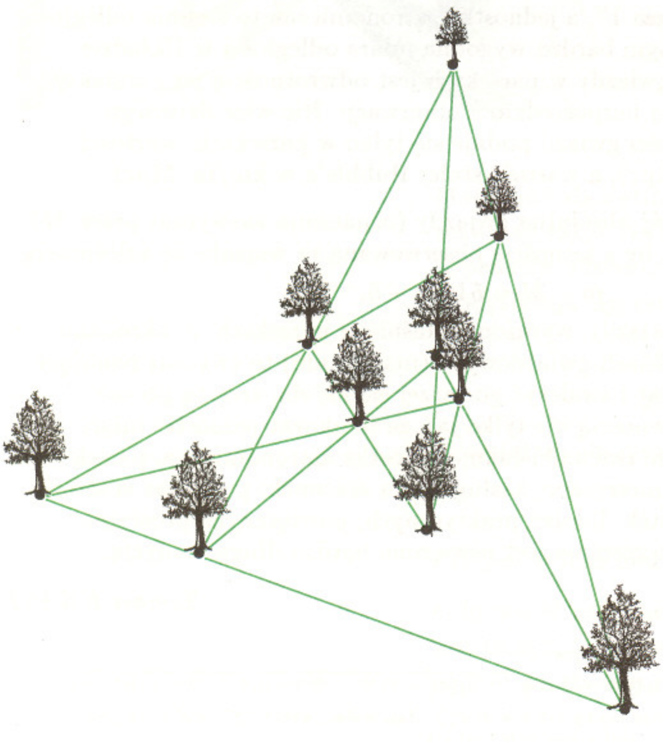
10 często nie jest łaskawa dla matematyków. W 1782 roku Euler postawił przypuszczenie, że nie ma ortogonalnych kwadratów łacińskich rzędu 10 i zadanie to rozwiązano dopiero (obalając przypuszczenie Eulera) w 1959 roku. Liczby Fermata to liczby postaci $F_n = 2^{2^n} + 1$. Znamy dziś rozkłady tych liczb na czynniki pierwsze dla wszystkich n mniejszych od 10 i nawet dla $n = 11$. Rozłożenie na czynniki *dziesiątej* liczby Fermata, równej:

$$2^{2^{10}} + 1 = 179769313486231590772930519078902473361797697894230657273430081157732675805500$$
$$963132708477322407536021120113879871393357658789768814416622492847430639474124$$
$$377767893424865485276302219601246094119453082952085005768838150682342462881473$$
$$913110540827237163350510684586298239947245938479716304835356329624224137217$$

uchodzi za najpoważniejszy problem. . . w zagadnieniach rozkładalności liczb. Wiadomo „tylko", że $F_{10} = 45592577 \times 6487031809 \times$

$$607820568181834328745927047401406785398975700821911559763928675076909152806525747797078707978021962487854849079350770968904705424125269800765765006449689562590686195386366153585734177565092347016126765195631310982002631912943551551593959032889971392442015624176361633631364310142874363629569,$$

ale jak rozłożyć napisaną 291-cyfrową liczbę, nie wiadomo.



Od tak dużych liczb może nam się zaplątać w głowie i może nie pojmiemy, że można posadzić **10** drzew w **dziesięciu** rzędach po trzy w każdym. Ale konfiguracja Desarguesa pokazuje, że to się da zrobić.

W dawnych książkach z kategorii *science fiction* występował od czasu do czasu problem nawiązywania kontaktów z przedstawicielami innych galaktyk. Obecnie okazuje się, że wszyscy oni mówią po angielsku, lecz dawniej uważano, że trzeba się z nimi porozumiewać za pomocą języka matematyki, bo jest on uniwersalny w całym Wszechświecie. Narysujemy na piasku *spodnie Pitagorasowe* i już zielony ufoludek kiwa ze zrozumieniem wszystkimi głowami i odpowiada twierdzeniem Pappusa. *Si, si* – cieszymy się teraz my i strzelamy z grubej rury: „A wiesz, brachu, co u nas jest podstawą numeracji? Popatrz tylko . . . ile jest punktów w konfiguracji Desarguesa, to tak my liczymy, szkoda, że nie mogę ci pokazać na palcach, bo mam skafander . . ." „Moja verstanden" – odpowiada ufoludek, „and now dawaj, brat, wypijom" – i w ten sposób matematyka i liczba **10** pomaga w kontaktach międzyludz. . . ops, międzyistotowych.

Michał SZUREK

Draconidy

Arkadiusz OLECH

Jesień tego roku może być bardzo atrakcyjna dla obserwatorów meteorów za sprawą dużego prawdopodobieństwa wystąpienia dwóch deszczów meteorów, co nie zdarza się często. Oto kilka słów o pierwszym z nich.

Draconidy są zwykle rojem mało efektownym. Ich aktywność trwa od 6 do 10 października z małym maksimum około 8 października. Obserwuje się wtedy nie więcej niż dwa–trzy zjawiska w ciągu godziny. Wyjątkowe są lata, kiedy w najbliższe okolice Słońca powraca macierzysta kometa tego roju 21P/Giacobini-Zinner. Jej kolejny powrót wypada w listopadzie 1998 roku, nic więc dziwnego, że wszystkich obserwatorów meteorów interesuje, co pokażą Draconidy w roku obecnym. A że możliwości mają spore, udowodniły już nie raz.

Aktywność roju meteorów określa się za pomocą tzw. zenitalnej liczby godzinnej ZHR (od ang. *Zenital Hour Rate*). Podaje ona liczbę meteorów, jaką obserwowano by w bardzo dobrych warunkach atmosferycznych (czyli gdyby jako najsłabsze widać było gwiazdy o jasności 6,5 mag) i w sytuacji, gdyby radiant roju był w zenicie. Praktycznie ZHR wyznacza się ze wzoru

$$ZHR = \frac{N_h\ r^{6,5-LM}}{\sin H},$$

gdzie N_h oznacza liczbę meteorów obserwowanych w ciągu godziny, LM średnią graniczną jasność gwiazd podczas obserwacji, H wysokość radiantu, a r pewien współczynnik charakteryzujący rozkład mas cząstek roju – dla większości rojów zawiera się on w przedziale 2,0–3,0, a dla Draconid wynosi 2,6.

Krótkie deszcze Draconid z ZHR rzędu 500 obserwowano w latach 1933 i 1946. Trochę niższą aktywność (ZHR w granicach od 20 do 200) przejawiał rój w jeszcze kilku latach naszego stulecia (ostatnio w 1985 r.). Wysoka aktywność tego roju trwa jednak krótko i ważne jest, aby jej nie przegapić. Jeśli w tym roku maksimum aktywności wystąpi w podobnym momencie, co w roku 1985, to największej liczby meteorów należy oczekiwać około godziny 17 UT (czasu uniwersalnego) dnia 8 października. Jeżeli jednak nastąpi to podobnie jak w roku 1933, to maksimum powinno wystąpić 10 października około godz. 12 UT. Tymczasem Ziemia przejdzie przez węzeł wstępujący orbity komety macierzystej roju 8 października o godz. 21 UT. Tak więc najbardziej prawdopodobny czas wysokiej aktywności roju to okres między godziną 17 a 21 dnia 8 października 1998 r., co jest bardzo korzystne dla obserwatorów w Polsce. Pamiętajmy, że na początku października w Polsce obowiązuje czas letni $=\mathrm{UT}+2^h$.

Radiant roju ma współrzędne $\alpha = 17^h28^m$, $\delta = +54°$ i w Polsce jest obiektem okołobiegunowym, dostępnym obserwacjom przez całą noc. Meteory z roju Draconid łatwo odróżnić od innych, są to bowiem zjawiska powolne (prędkość ciał meteorowych jest rzędu 20 km/s). Pamiętajmy też, że radiant nie jest punktem – w przypadku Draconid jego promień wynosi aż 5°.

Bardzo zachęcam do obserwacji mimo pełni Księżyca, która wystąpi 5 października. Nie należy się też zniechęcać faktem, że maksimum roju występuje około miesiąca przed przejściem komety macierzystej przez peryhelium. Zawsze bowiem kometę poprzedza duża ilość materiału wyrzuconego przez nią podczas wcześniejszych powrotów. Przykładem takiego zachowania mogą być Perseidy, które wysoką aktywność wykazywały już od roku 1988, a ich kometa macierzysta, 109P/Swift-Tuttle, przeszła przez peryhelium dopiero w grudniu 1992 r.

Wszystkich Czytelników *Delty* bardziej zainteresowanych obserwacjami meteorów zachęcam do kontaktu z Pracownią Komet i Meteorów.
Listy prosimy kierować pod adresem: Arkadiusz Olech, ul. Sokolicz 3/59, 01-508 Warszawa,
e-mail: olech@ sirius.astrouw.edu.pl.

Rozwiązanie zadania F 485.
Ruch po elipsie przybliżamy ruchem po okręgu. Z uogólnionego (tzn. uwzględniającego masy przyciągających się ciał) III prawa Keplera mamy:

$$\frac{T_\oplus^2}{T_{\mathrm{Io}}^2} = \frac{r_\oplus^3}{r_{\mathrm{Io}}^3}\frac{(M_{\mathrm{Jowisza}} + m_{\mathrm{Io}})}{(M_\odot + m_\oplus)},$$

gdzie $T_\oplus = 365{,}25$ dni jest okresem obiegu Ziemi dookoła Słońca, $r_\oplus = 1$ jedn. astr. średnim promieniem tej orbity, $M_\odot$ masą Słońca, a $m_\oplus$ masą Ziemi.

Z uwagi na to, że $m \ll M$, masa Jowisza jest:

$$M_{\mathrm{Jowisza}} = \frac{T_\oplus^2}{T_{\mathrm{Io}}^2}\frac{r_{\mathrm{Io}}^3}{r_\oplus^3}M_\odot \approx \frac{1}{1047}M_\odot,$$

czyli jest około 1000 razy mniejsza od masy Słońca.

Czas odwrócony (11/1979)

Michał GAWLIKOWSKI

Czy przeszłość jest poznawalna? W pierwszej chwili wydawać by się mogło, że skoro kierunku biegu czasu odwrócić się nie da, to obserwować i badać możemy tylko teraźniejszość, tylko ona bowiem jest nam bezpośrednio dostępna.

Każdy, kto jest bodaj pobieżnie zapoznany z astronomią, wie jednak, że wszystkie obserwacje tej nauki dotyczą właśnie przeszłości, na skutek skończonej prędkości światła, a właśnie obecny stan dowolnego ciała niebieskiego jest dla nas bezpośrednio niepoznawalny. Natomiast dzięki różnicom odległości od Ziemi dysponujemy obserwacjami z różnych epok, a przyjmując obowiązywanie pewnych praw ogólnych, możemy na tej podstawie budować hipotezy dotyczące zmian zachodzących we Wszechświecie.

Na Ziemi rzecz się ma odwrotnie. Dostępne nam dzisiaj fakty materialne wynikają z procesów, jakie przebiegały w przeszłości bardziej lub mniej od nas odległej. Przyjąwszy istnienie stałych praw fizycznych i chemicznych, można formułować hipotezy dotyczące zakończonych już procesów, a więc właśnie dziejów. Tak powstała geologia. Obecna forma i struktura skał, jakie składają się na ziemską skorupę, pozwala tworzyć modele powstawania tych złóż skalnych, ich wzajemnych relacji w czasie, a także mierzyć w latach odległość tych procesów od chwili obecnej. Również badanie przeszłości społeczeństwa możliwe jest przede wszystkim dzięki temu wszystkiemu, co z niej materialnie pozostało. Pozostały, na przykład, pisane dokumenty, które analizuje historyk. Szczególnym przypadkiem historii jest archeologia, która posługuje się własnymi obserwacjami badacza, jakich ten może dokonywać na reliktach przeszłości, a nie analizą obserwacji cudzych, zawartych w dawnym zapisie.

W odróżnieniu od tak dawniej zwanej historii naturalnej, a więc dziejów Ziemi jako planety oraz dziejów ewolucji biologicznej, dzieje społeczeństwa nie podlegają jednak prawom tak ogólnym i tak powszechnie obowiązującym jak przyroda żywa czy nieożywiona. Mamy za to do czynienia z człowiekiem, a ten, od czasu uformowania się jako gatunek, dostępny jest poznaniu innego typu: znamy z własnego doświadczenia jego psychikę, potrzeby, a także jego niezwykłą, przy niezmienności biologicznej, zdolność przystosowywania się do najróżniejszych warunków. Ta introspektywna wiedza o człowieku jest jedną z podstaw studium historii. Drugą są zachowane ślady jego działalności.

Historyk-archiwista ma do dyspozycji dokumenty pisane, ale żaden nawet najobfitszy ich zbiór nie stanowi jeszcze historii. Pewnie, dokument przekaże informacje o wydarzeniach, obyczajach, poglądach okresu i miejsca swego powstania, ale tylko tak, jak autor je widział i rozumiał (przyjmując oczywiście, że ze swego punktu widzenia pisał prawdę, co nie zawsze miało miejsce). My to musimy przetłumaczyć na język naszej epoki, toteż każde pokolenie musi podejmować tę pracę na nowo. Dlatego historia pisania historii to nie tylko proces kumulacji wiedzy, ale przede wszystkim historia pojęć, jakimi operują badacze. Tak jest zresztą bodaj w każdej dziedzinie nauki.

Archeologia, jak już powiedziałem, jest szczególnym przypadkiem historii; sama bowiem zdobywa swe źródła, które służą jej do rekonstrukcji procesu historycznego. Niekiedy są to po prostu nowe dokumenty pisane czy nowe dzieła sztuki, z którymi postępuje tak samo jak z tymi, które już się znajdują w archiwach czy muzeach. Można jednak uzyskać informacje całkiem innego typu.

Szczątki budowli, przedmiotów codziennego czy odświętnego użytku, domy, groby, pozostałości pól uprawnych, kanałów i inne niezliczone ślady działalności dawnych społeczeństw, nie były stworzone jako źródło informacji dla potomnych. Przekazują za to dane o sprawach, których często ani pisarz, ani artysta nie uwiecznił, bo były dla niego oczywiste lub niegodne wzmianki. Technika wykopaliskowa ma na celu nie samo odkrywanie przedmiotów, ale ich zastosowanie jako źródła informacji o ludziach. Rzadko jednak dowiemy się czegoś o konkretnych osobach. Im dalej od nas na skali czasu, tym wiadomości są bardziej ogólne: można odtworzyć tryb życia myśliwych czy rolników, rzemieślników i mieszkańców miast wedle tego, co zostało z ich narzędzi, mieszkań, ozdób, stroju. Jeśli ci ludzie nie umieli pisać, nie dowiemy się nic o ich języku, imionach, prawie nic o wierzeniach, obrzędach, organizacji ich społeczności. W jakim stopniu można z takich informacji zbudować model przystający do rzeczywistości, jaka niegdyś istniała, czego będzie w takim modelu brakować? Nie dowiemy się z pewnością wielu rzeczy, które były dobrze znane każdemu, ale też ujawnimy sprawy nie uświadomione ówcześnie, ponieważ odległość pozwala właśnie na ogólny punkt widzenia, niedostępny poznaniu współczesnych.

Spróbujmy postawić hipotezę, że któreś z naszych miast zostało nagle opuszczone i stało się po kilku wiekach przedmiotem badań archeologicznych ze strony uczonych, którzy nic już nie wiedzą o naszej cywilizacji. Hipoteza jest bardzo teoretyczna, nie tylko z powodów prawdopodobieństwa historycznego, ale również dlatego, że naukowe zainteresowanie przeszłością jest zjawiskiem typowym właśnie dla naszej cywilizacji, a nie musi cechować innych. Stawiam ją więc tylko dlatego, by uzmysłowić granice poznania z zewnątrz na przykładzie obiektu, jaki znamy najlepiej.

Przyjmujemy oczywiście, że nasi badacze należą do tego samego co my gatunku, a więc dysponują ogólną wiedzą o człowieku z własnego doświadczenia. Przypadku tzw. kosmitów rozpatrywać w ogóle nie warto, nawet teoretycznie, pomijając nikłe prawdopodobieństwo istnienia takowych; sposobów poznania innych niż ludzkie wyobrazić sobie konkretnie nie możemy. Tak modna dziś mitologia o przybyszach z Wszechświata przyjmuje bardzo grubą antropomorfizację, przypisując tym stworom cechy wyłącznie ludzkie. Nic naprawdę oryginalnego pisarze tego nurtu wymyślić nie są w stanie.

Tak więc działanie sił natury obróciło w gruz nasze domy, erozja przykryła je warstwą ziemi. Gdzieniegdzie, być może, betonowa lub ceglana ściana sterczy ponad powierzchnią gruntu.

Ogólny zarys ulic da się zapewne ustalić bez trudu nawet bez prac wykopaliskowych, tam mianowicie, gdzie były ulice w tradycyjnym kształcie. Luźno rozrzucone bloki nowego osiedla to pagórki obłego kształtu i bardzo podobnych rozmiarów. To pierwsza zagadka: jakiemu celowi mogły służyć budowle, nieregularnie rozrzucone na pustej przestrzeni? Wykopaliska ujawnią przede wszystkim piwnice bloków: systemy korytarzy, wzdłuż których rozmieszczono małe, jednakowe wnęki. Niełatwo zresztą ten plan ujawnić, bowiem zwały betonowych płyt utrudniają dostęp. Może to grobowce, katakumby, nad którymi wznosiły się potężne, wysokie pomniki ku czci zmarłych? Mało prawdopodobne, bo kości nigdzie nie znaleziono. Może zatem chodzi o pomieszczenia mieszkalne? Oto jednak w lepiej zachowanym bloku udało się ustalić plan parteru; może nawet piętro się zachowało. Jednakowe zespoły, obejmujące każdy po kilka pomieszczeń, muszą mieć na pewno charakter mieszkalny. W podziemiach były zatem magazyny.

Z mebli nie zostało prawie śladu. Dużo jest odłamków płyt ze szkła, zwłaszcza w pobliżu otworów w ścianach. To jasne. Mamy trochę przedmiotów metalowych, zniszczonych przez korozję, ale kształty dają się uchwycić: łyżki, widelce, klucze... Przechowały się, jak przypuszczam, drobiazgi z plastiku. Z ubrań zostały guziki. Papier naturalnie nie przetrwał, nie ma więc słowa pisanego. Tabliczka mosiężna z nazwiskiem z nie istniejących już drzwi pozwala jednak stwierdzić, że pismo było znane, choć jego odczytanie to inna sprawa. Można przestudiować system rur wodociągowych i kanalizacyjnych, schemat instalacji elektrycznych.

Wydaje się, że szczególnie trudnym problemem będzie ustalenie funkcji urządzeń mechanicznych. Te rozmaite pudła z blachy musiały pełnić określone, wyspecjalizowane zadania. Jeśli jednak w epoce badaczy używa się zupełnie innych środków technicznych, mogą być wielkie kłopoty z identyfikacją np. lodówki; szczęśliwy zbieg okoliczności mógł jednak sprawić, że mieszkańcy zapomnieli wyjąć z jednego z tych pudeł swoich zapasów. Analiza chemiczna ujawni wtedy ślady substancji organicznych, zapewne żywności, która poddawana była w mechanizmie specjalnym procesom, o czym świadczy podłączenie do sieci elektrycznej. Czy jednak zasady elektryczności przewodowej znane są badaczom? Jeśli tak, to rozwikłają również problem sztucznego oświetlenia. Kaloryfery doprowadzały do każdego pomieszczenia jakąś ciecz lub gaz w obwodzie zamkniętym. Wniosek o ich funkcji ogrzewczej zapewne nie umknie przenikliwości uczonych.

Systematyczne badanie obejmie nie tylko domy, ale też ich bezpośrednie otoczenie. Archeolog dzisiejszy dużo ciekawego materiału znajdzie na dawnych śmietnikach. U nas jednak odpadki wywozi się daleko. Będzie więc bardzo mało ceramiki, która tak wielką jest pomocą w pracy wykopaliskowej. Co najwyżej w mieszkaniach znajdzie się trochę skorup fajansowych.

Co z tego wynika, jaki obraz społeczeństwa można uzyskać? Jeśli osiedle stało na miejscu starych, wyburzonych kamienic, to fundamenty tych ostatnich też wyjdą na jaw. Można będzie ustalić, że te budynki zostały zniwelowane, a ich szczątki przecięte przez nowsze budowle. Jasno zatem wyniknie, że nastąpiła rewolucyjna zmiana w budownictwie: epoka cegły kończy się całkowitym zniszczeniem domów, następuje po niej epoka płyt betonowych, o zupełnie odmiennym budownictwie.

Czy ludność pozostała ta sama? Gwałtowność zmiany pozwala mniemać o przybyciu całkiem nowego ludu, mieszkającego w dużych grupach (rachunek płyt betonowych pozwoli oszacować ilość pięter), w bardzo podobnych mieszkaniach, które obsługiwał wspólny system oświetlenia, kanalizacji, ogrzewania. To wszystko zakłada wysoki stopień organizacji, pewien poziom techniki.

Niewątpliwie mieszkańcy jednego domu tworzyli bardzo zwartą grupę społeczną (ale my wiemy, że często nie znamy sąsiadów zza ściany). Czym się jednak trudnili, jak zdobywali środki do życia? O tym nic nie wiadomo. Z pewnością musiał istnieć złożony system organizacji, gdzieś były zakłady produkcyjne, rolnictwo... Sposób tej organizacji pracy oraz podział jej owoców mogą być w tym etapie badań tylko przedmiotem spekulacji. Zagadka licznej ludności osiadłej, która nie ma żadnych widocznych środków utrzymania, długo może poczekać na rozwiązanie. Czy mieszkańcy pracowali w miejscu zamieszkania, a jeśli udawali się do swych zajęć, to jakimi sposobami i dokąd? W każdym razie asfaltowe nawierzchnie ujawnią system drogowy.

W miarę postępu badań można będzie zapewne odpowiedzieć na te pytania. Trzeba jednak wątpić, czy ujawni się istnienie literatury, gazet, filmu... Jedyne ślady tzw. kultury duchowej to kilka tablic pamiątkowych. Większe ilości napisów w trwałym materiale bywają u nas tylko na cmentarzach.

Wnioski naszych hipotetycznych badaczy ograniczą się więc przede wszystkim do planu mieszkań (ciasnych czy obszernych, któż to powie, skoro nie wiadomo, po ile osób w każdym mieszkało), do rekonstrukcji niektórych przedmiotów użytku codziennego, do oceny poziomu techniki. Sprawy techniczne stanowić będą niewątpliwie trzon problematyki badawczej, tu będą największe możliwości pracy. Niektórzy uczeni o nastawieniu syntetycznym będą próbowali tworzyć model społeczeństwa. Będzie on bardzo ogólny i hipotetyczny, ale zajść może znacznie dalej, niż tu naszkicowałem.

Takie właśnie problemy są na ogół dostępne w badaniach, jakie się uprawia rzeczywiście. Dopiero gdy pojawią się zapisy, które przetrwały w kamieniu, na glinianych tabliczkach, jak w Babilonii, na papirusach, jak w sprzyjającym wyjątkowo klimacie Egiptu, czy też dzięki łańcuchowi kopistów, jak w przypadku greckiej i rzymskiej spuścizny literackiej, wtedy dopiero mamy szansę poznania innych dziedzin życia, wtedy opis staje się mniej ogólny. Gdy czytamy książkę historyczną, warto pamiętać, czego o przeszłości jeszcze nie wiemy i co o niej wiedzieć możemy.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

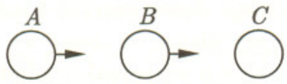
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1998

Skrót regulaminu

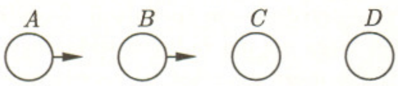
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Zadania z fizyki nr 264, 265

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1



Rys. 2

264. a) Dwie kulki poruszają się z prędkością równą 1 w stronę trzeciej kulki nieruchomej (rys. 1). Jeśli masy kulek są jednakowe, a zderzenia – centralne i doskonale sprężyste, to zwykle obserwujemy, że kulka A się zatrzyma, a B i C będą po zderzeniu poruszać się z prędkością 1. Załóżmy jednak, że np. zderzenie kulek B i C jest „miękkie", tzn. odbywa się za pośrednictwem nieważkiej sprężynki, a w trakcie jej ugięcia następuje „twarde" zderzenie kulek A i B (które dotąd poruszały się w pewnej wzajemnej odległości). Ile wynosi maksymalna prędkość, którą może w takim przypadku uzyskać kulka C?
b) Dla czterech jednakowych kulek, z których początkowo dwie spoczywały, a dwie poruszały się z prędkością 1 (rys. 2) obliczyć maksymalną prędkość, którą może uzyskać kulka D i zaprojektować taki układ sprężynek między kulkami i taki przebieg kolejnych zderzeń, aby w ich wyniku kulka D została rozpędzona do tej prędkości.

265. Cewka czułego galwanometru jest zawieszona na nici kwarcowej mającej właściwości sprężyste, tak że kąt obrotu jest proporcjonalny do momentu siły, a stała proporcjonalności wynosi $0{,}89 \cdot 10^{-13}$ Nm/rad. Na skutek fluktuacji ciśnienia powietrza (przypadkowych niewielkich zgęszczeń i rozrzedzeń) cewka drga, a średnia kwadratowa wartość kąta odchylenia od położenia środkowego wynosi $2{,}14 \cdot 10^{-4}$ rad. Obliczyć temperaturę powietrza.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/1998

Przypominamy treść zadań:

260. Filtr polaryzacyjny przepuszcza 85% światła spolaryzowanego wzdłuż jednej osi, a drugiej składowej nie przepuszcza w ogóle. Jeżeli na zestaw takich filtrów pada światło spolaryzowane liniowo, to ile ich trzeba wziąć i jak je ustawić, aby wiązka przechodząca miała płaszczyznę polaryzacji obróconą o 90° i maksymalne natężenie?

261. W długiej rurze o stałym przekroju znajduje się gaz pod ciśnieniem 10^5 Pa, którego temperatura zmienia się liniowo od 0°C na jednym końcu rury do 200°C na drugim końcu. Ile będzie wynosiło ciśnienie w rurze, jeżeli zamkniemy ją szczelnie i doprowadzimy gaz do jednakowej temperatury 100°C?

260. Ustawmy n filtrów polaryzacyjnych jeden za drugim i obróćmy każdy z nich o kąt $\alpha = 90°/n$ względem poprzedniego. Według prawa Malusa natężenie wiązki przechodzącej przez obrócony filtr ulega przemnożeniu przez $\cos^2\alpha$, a uwzględniając dodatkowe osłabienie o czynnik 0,85, otrzymujemy natężenie wiązki przechodzącej w postaci

$$I = I_0(0{,}85 \cdot \cos^2(90°/n))^n.$$

Metodą prób i błędów znajdujemy maksymalną wartość $I = 0{,}277 I_0$ dla $n = 4$.

261. Oznaczmy początkowe ciśnienie przez p_0, temperatury na końcach rury przez T_0 i T_1, a końcową temperaturę przez T' (temperatury wyrażamy, oczywiście, w skali Kelvina). Liczba moli gazu, znajdująca się początkowo w małym odcinku rury o objętości $\mathrm{d}V$, jest opisana równaniem

$$\mathrm{d}n = \frac{p_0 \mathrm{d}V}{\mathrm{R}T}.$$

Podstawiając liniową zależność T od współrzędnej wzdłuż rury i całkując, otrzymujemy

$$n = \frac{p_0 V}{\mathrm{R}(T_1 - T_0)} \ln \frac{T_1}{T_0}.$$

Szukane ciśnienie w temperaturze T' wynosi

$$p' = \frac{n\mathrm{R}T'}{V} = \frac{p_0 T'}{(T_1 - T_0)} \ln \frac{T_1}{T_0} = 1{,}025 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 256 (WT=2,02) i 257 (WT=2,20) z numeru 4/1998

Andrzej Idzik	– Bolesławiec	45,74
Jarosław Łazuka	– Warszawa	27,16
Marek Wójcicki	– Szczecin	26,45
Tomasz Wietecha	– Tarnów	23,98
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	22,02

Po raz drugi – i to w równie szybkim tempie jak poprzednio – zdobył 44 punkty p. Idzik.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 355 (WT=2,30) i 356 (WT=1,27) z numeru 2/1998

Konrad Patkowski	– Gdańsk	47,55
Piotr Kumor	– Olsztyn	46,67
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	40,64
Witold Bednarek	– Łódź	36,46
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	34,92
Paulina Domagalska	– Zbąszynek	34,09
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	33,83

Pan Patkowski wchodzi do **Klubu 44 M** z numerem osiemdziesiątym piątym, a weteran Piotr Kumor dopisuje czwartą „gwiazdkę" do swojego nazwiska.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 1998

Zadania z matematyki nr 367, 368

Redaguje Marcin E. KUCZMA

367. Liczby nieujemne a, b, c, x, y, z spełniają układ równań

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+y}+\sqrt{c+z}=1$$
$$\sqrt{a+y}+\sqrt{b+z}+\sqrt{c+x}=1$$
$$\sqrt{a+z}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+y}=1.$$

Dowieść, że $a=b=c$ lub $x=y=z$.

368. Niech $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, … będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Znaleźć kres dolny zbioru liczb postaci $\sqrt{p_{n+1}}-\sqrt{p_n}$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Zadanie **368** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/1998

Przypominamy treść zadań:

363. Punkty P i Q leżą odpowiednio na płaszczyznach zawierających ściany BCD i CDA czworościanu foremnego $ABCD$. Dowieść, że z odcinków AP, PQ i QB można zbudować trójkąt.

364. Niech $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ (w określeniu liczby a_n symbol pierwiastka kwadratowego występuje n-krotnie). Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\cdot\sqrt{2-a_n}$.

363. Umieszczamy czworościan $ABCD$ w czterowymiarowej przestrzeni euklidesowej, przyjmując: $A=(1,0,0,0)$, $B=(0,1,0,0)$, $C=(0,0,1,0)$, $D=(0,0,0,1)$; ma on krawędzie długości $\sqrt{2}$. Znajdujemy punkt $E=(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda)$ leżący w odległości $\sqrt{2}$ od każdego z punktów A, B, C, D; wystarczy wziąć jako λ którykolwiek z pierwiastków równania kwadratowego $(\lambda-1)^2+3\lambda^2=2$, czyli $4\lambda^2-2\lambda=1$.

Punkt P leży w płaszczyźnie BCD, więc we współrzędnych ma postać $P=(0,x,y,z)$, gdzie $x+y+z=1$. Zatem

$$|PE|^2=\lambda^2+(\lambda-x)^2+(\lambda-y)^2+(\lambda-z)^2=$$
$$=1+x^2+y^2+z^2=|PA|^2,$$

czyli $|PE|=|PA|$; analogicznie, $|QE|=|QB|$. Trójkąt PQE ma więc boki długości $|AP|$, $|PQ|$, $|QB|$.

364. Ciąg (a_n) spełnia zależność rekurencyjną $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$; $a_1=\sqrt{2}$. Przez indukcję łatwo udowodnić, że $a_n=2\cos(\pi/2^{n+1})$. Stąd

$$2-a_n=2(1-\cos(\pi/2^{n+1}))=4\sin^2(\pi/2^{n+2}),$$

i wobec tego

$$2^n\cdot\sqrt{2-a_n}=2^{n+1}\sin(\pi/2^{n+2})=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sin(\pi/2^{n+2})}{\pi/2^{n+2}}\longrightarrow\frac{\pi}{2}.$$

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 859. Cyfry pewnej liczby naturalnej a zostały przestawione (w dowolny sposób) i tak otrzymaną liczbę b dodano do a. Dowieść, że jeśli suma obu liczb jest równa 10^{10}, to a dzieli się przez 10.
Rozwiązanie na str. 9

M 860. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje nieskończenie wiele liczb k, nie zawierających zer w zapisie dziesiętnym, takich, że k i nk mają jednakową sumę cyfr.
Rozwiązanie na str. 9

M 861. Dana jest liczba naturalna n, podzielna przez 17 i zawierająca w zapisie dwójkowym dokładnie trzy cyfry 1. Dowieść, że w zapisie dwójkowym n składa się z co najmniej 9 cyfr.
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 485. Orbitalny okres obiegu Io, jednego z księżyców Jowisza, jest równy 1,769 dni, a promień orbity ma 421 800 km. Obliczyć masę Jowisza, przyjmując za jednostkę masę Słońca. Jednostka astronomiczna wynosi 149,6 mln km.
Rozwiązanie na str. 11

F 486. Wykonano model Układu Słonecznego, używając materiałów o takiej samej średniej gęstości jak w naturze, ale zmniejszając wszystkie wymiary liniowe o stały czynnik ε. W jaki sposób okresy obiegu planet zależą od ε?
Rozwiązanie na str. 9

Patrz w niebo

Rośnie liczba znanych galaktyk, których różne fragmenty rotują w przeciwnych kierunkach. W *Patrz w niebo* w *Delcie* 5/1996 zwróciliśmy uwagę, że już nasz układ planetarny jest takim właśnie dziwolągiem w małej skali: np. kilka satelitów planet obiega je w kierunku wstecznym, tzn. przeciwnym do większości ruchów w całym Układzie Słonecznym. Zjawisko to nie jest więc tak bardzo rzadkie. Wspomnieliśmy wtedy, że radiowe obserwacje galaktyki M 64 (NGC 4826, zwanej też Czarnym Okiem) wykazały obrót jej małej centralnej części w przeciwną stronę niż obrót całości. Dowodem są tu dopplerowskie zmiany odbieranej długości fali: wydłużenie, gdy obserwowany obszar się oddala, i skrócenie w przypadku przeciwnym.

Niedawno zaobserwowano to samo w dziedzinie optycznej. Grupa astronomów z Padwy stwierdziła, że w widmie galaktyki NGC 3626 w Lwie zespół linii absorpcyjnych, pochodzących od gwiazd, jest przesunięty w przeciwną stronę niż zespół linii emisyjnych, pochodzących od gazu. Już samo zaobserwowanie linii emisyjnych dowodzi, że gazu jest w tej galaktyce wyjątkowo dużo. Nie wiadomo, skąd ten przeciwbieżnie rotujący gaz pochodzi. Galaktyka ma wprawdzie towarzysza, lecz zbyt małego, by mógł stanowić wielki zbiornik gazu.

Nadal jednak uważa się, że tego rodzaju struktury muszą powstawać w wyniku schwytania przez galaktykę innej galaktyki lub obłoku gazowego o przeciwnym momencie pędu i zapewne zdarza się to od czasu do czasu. Jednak bardzo trudne jest zaobserwowanie wczesnego etapu takiego wydarzenia. Zderzenie obłoków gazowych prowadzi do ich gwałtownego zgęszczenia, rozpadu i bardzo szybkiego powstania młodych gwiazd, które giną w tłoku gwiazd tworzących galaktykę od dawna. Obfitość gazu w NGC 3626 sugeruje jednak, że galaktyka ta połknęła obłok gazu stosunkowo niedawno. Zupełnie inaczej wygląda położona w Pannie galaktyka NGC 4550, w której kilka lat temu zaobserwowano dwa przeciwnie rotujące dyski gwiazdowe! Jest ona wobec tego przykładem połączenia się dwóch galaktyk w odległej przeszłości.

Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania M 861.
Z warunków zadania wynika, że $n = 2^k + 2^l + 2^m$ dla pewnych całkowitych $0 \le k < l < m$. Załóżmy, że zapis dwójkowy liczby n składa się z mniej niż 9 cyfr. Wtedy $m \le 7$. Liczby postaci 2^i, dla $i = 0, 1, \ldots 7$, dają przy dzieleniu przez 17 reszty równe odpowiednio 1, 2, 4, 8, 16, 15, 13, 9. Jednak dla żadnej trójki liczb z powyższego zbioru reszt suma nie jest podzielna przez 17. Zatem, musi być $m > 7$, czyli w zapisie dwójkowym liczby n występuje co najmniej 9 cyfr.

Październik

W październikowe wieczory wysoko na niebie widać charakterystyczny czworokąt utworzony przez cztery gwiazdy o bardzo zbliżonej jasności. Jest to tzw. Kwadrat Pegaza, choć dokładnie kwadratem nie jest. W dodatku północno-wschodnia jego gwiazda nie należy do Pegaza, lecz jest alfą Andromedy. Na południowy zachód od Pegaza leży rozległy, lecz mało wyraźny gwiazdozbiór Wodnika. Jest to gwiazdozbiór zodiakalny, czyli położony na ekliptyce, a więc m.in. przez niego przechodzą planety. Nic w tym nowego, jednak właśnie w Wodniku dostrzeżono po raz pierwszy – i trudno określić to inaczej, jak słowem „półświadomie" – Urana. Z zapisów bowiem wiadomo, że niemiecki astronom, Christian Mayer, obserwował w 1756 r. pewną gwiazdę, która najwyraźniej nie wzbudziła u niego większego zainteresowania. Niemal 25 lat później zwrócił już na nią baczniejszą uwagę William Herschel, a to dlatego, że wydała mu się kometą. Ostatecznie jednak sam Herschel w 1781 r. zidentyfikował tajemniczy obiekt jako nową planetę, nazwaną następnie Uranem. W ogóle Urana w sprzyjających okolicznościach można w zasadzie dostrzec gołym okiem, o ile ma się bardzo dobry wzrok i wiadomo, gdzie go szukać. Oczywiście, jego planetarną naturę stwierdzić można dopiero, śledząc jego przesuwanie się na tle gwiazd. Obecnie Uran znajduje się w Koziorożcu, ale nie obiecujmy sobie zbyt wiele. Za to za pomocą niewielkiej lunety można i w Pegazie, i w Wodniku dostrzec dwie bardzo odległe gromady kuliste, jedne z najodleglejszych obiektów należących do naszej Galaktyki. W Pegazie jest nią M 15 (NGC 7078), odległa o 10 kpc, a w Wodniku M 2 (NGC 7089), odległa o 11 kpc – obie o jasności 6,3 mag i średnicy kątowej około 15′.

Z jasnych planet widzielibyśmy Wenus, jak przechodzi z Panny do Wagi, gdyby nie to, że w Wadze jest Słońce i 30 X planeta znajdzie się za nim. Mars jest w Lwie, wschodzi więc po północy, Jowisz na granicy Wodnika i Ryb, a Saturn na granicy Ryb i Barana i obie te planety dobrze widać praktycznie przez całą noc, a Saturna nawet dokładnie przez całą noc, gdyż 23 X wypada jego opozycja. Pełnia Księżyca jest 5 X. Księżyc zbliży się mocno do Jowisza 4 X, Aldebarana 9 X, Regulusa 15 X, Marsa 16 X i znów do Jowisza 31 X. Zakryć tych obiektów z Polski widać nie będzie. O meteorach patrz str. 11.

T.K.

10/98 (10)

Γlimatias

PRAWIE ZAWSZE (2)

TWIERDZENIE: Niech p będzie prawie dowolną liczbą pierwszą. Zapiszmy liczbę

$$\frac{1}{1^{1965599}}+\frac{1}{2^{1965599}}+\frac{1}{3^{1965599}}+\frac{1}{4^{1965599}}+ \\ +\ldots+\frac{1}{(p-1)^{1965599}}$$

w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{q}{r}$. Wtedy q dzieli się przez p^2.

Twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb pierwszych z wyłączeniem następujących 101 wyjątków: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 61, 71, 73, 97, 101, 109, 113, 127, 131, 151, 157, 181, 211, 241, 271, 281, 313, 337, 379, 401, 421, 433, 521, 541, 547, 601, 631, 673, 701, 757, 911, 937, 1009, 1051, 1093, 1171, 1201, 1249, 1301, 1801, 1873, 1951, 2017, 2081, 2161, 2341, 2521, 2731, 2801, 3121, 3361, 3511, 4201, 5851, 6301, 6553, 7561, 8191, 8737, 9829, 11701, 12601, 14561, 15121, 15601, 16381, 17551, 21601, 21841, 24571, 26209, 28081, 30241, 39313, 54601, 65521, 70201, 81901, 93601, 109201, 131041, 140401, 151201, 196561, 218401, 393121 i 982801.
Zauważmy, że wyjątkami są wszystkie liczby pierwsze mniejsze od 50, oprócz 23 i 47.

Dowód: Niech $p>2$ będzie liczbą pierwszą, k liczbą całkowitą nieparzystą. Jeżeli $k>0$, to

$$a^k+(p-a)^k= \\ p\left(a^{k-1}-a^{k-2}(p-a)+a^{k-3}(p-a)^2-\ldots+(p-a)^{k-1}\right)\equiv \\ \equiv p\cdot a^{k-1}\cdot k \pmod{p^2},$$

skąd

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+(p-1)^k\equiv\frac{1}{2}p\cdot k\cdot\sum_{a=1}^{p-1}a^{k-1} \pmod{p^2}.$$

Przy tym wiadomo, że $p|\sum\limits_{a=1}^{p-1}a^{k-1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(p-1)\not|(k-1)$. Zatem $p^2|p\cdot k\cdot\sum\limits_{a=1}^{p-1}a^{k-1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p|k$ lub $(p-1)\not|(k-1)$.

Gdy $k<0$, to możemy dobrać takie $l>0$, że $p(p-1)|(l-k)$ i zastosować powyższe rozumowanie do liczby l. Przy tym wiadomo, że $a^k\equiv a^l \pmod{p^2}$ dla a niepodzielnych przez p.

Wykazaliśmy tu pewną beztroskę, używając kongruencji do liczb wymiernych. Uwierz na słowo lub sprawdź sam, drogi Czytelniku, że przyjęcie definicji $\frac{a}{b}\equiv\frac{c}{d} \pmod{p^2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p^2|(ad-bc)$, pozwala sensownie stosować kongruencje do ułamków o mianownikach niepodzielnych przez p.

W naszym twierdzeniu $k=-1965599$. Wyjątkami są więc $p=2$ oraz te liczby pierwsze nieparzyste p, dla których $(p-1)|1965600$, ale $p\not|1965599$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (8′)

Wyjaśnienie oszustwa (8): Szukana granica wynosi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+\cos x}{e^x-2}=\frac{1}{-1}=-1$.

Stosowanie reguły de l'Hospitala po raz drugi było błędem, gdyż nie mieliśmy do czynienia z wyrażeniem nieoznaczonym.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (9′)

Wyjaśnienie oszustwa (9): Rozwiązanie byłoby poprawne, gdyby szukana granica istniała. Tymczasem $a_n=99\cdot 2^{n-1}-\frac{i(2+i)^{n-1}}{2}+\frac{i(2-i)^{n-1}}{2}$, skąd wynika, że dla dużych n decydujący wpływ na wartość a_n ma liczba $-\frac{i(2+i)^{n-1}}{2}+\frac{i(2-i)^{n-1}}{2}=5^{\frac{n-1}{2}}\sin((n-1)\phi)$, gdzie $\phi=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=26^\circ,565\ldots$.

Zatem ciąg (a_n) zachowuje się dosyć kapryśnie – ma nieskończenie wiele wyrazów dodatnich i nieskończenie wiele wyrazów ujemnych. Dla bardzo dużych n wyrazy te są skupione w grupki po 6–7 kolejnych wyrazów tego samego znaku.

Poniższa tabela pokazuje, gdzie zaczyna się ukazywać prawdziwe oblicze ciągu (a_n).

n	a_n	a_n/a_{n-1}
4	803	2,0075
5	1608	2,00249066
6	3209	1,995646766
7	6380	1,988158305
8	12643	1,981661442
9	25008	1,978011548
10	49489	1,978926743
11	98260	1,985491725
12	196283	1,997588032
13	395208	2,013460157
14	802169	2,02973877
15	1638140	2,042138253
16	3352723	2,04666451
17	6842208	2,040791321
18	13849249	2,024090615
19	27674020	1,99823254
20	54425963	1,966680771
...	...	...
42	251676768682129	3,132795981
43	713877974593300	2,836487366
44	1814831357262203	2,542215087
45	4125342160681608	2,273127001
46	8298025065614009	2,011475592
47	14307015877445180	1,724147103
48	19221191018505043	1,343480093
49	12316190360383008	0,6407610407
50	−32908182303815711	−2,671944923
51	−165347658322822940	5,024515082
52	−441117676383503317	2,667819314
53	−826268323142478792	1,873124491
54	−876556729097559031	1,060862077
55	1070971062431836940	−1,221793213
56	9558380621434501123	8,924966282

Iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nieskończenie wiele razy bywa ujemny, nie może więc dążyć do 2.
Zatem wyrażenie $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ nie ma granicy.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl