



Trwa jubileusz XXV lat *Delty*:

- 6 czerwca 1973 roku powołano redakcję *Delty*,
- 8 grudnia odbyło się pierwsze posiedzenie Komitetu Redakcyjnego *Delty*, na którym przedstawiono próbny numer miesięcznika,
- 1 stycznia 1974 roku ukazał się w kioskach w nakładzie 30 tys. egzemplarzy, w cenie 5 zł, pierwszy numer *Delty*.

XXV lat powinien zamknąć numer 300 miesięcznika, jednak w okresie parcelacji RSW straciliśmy pięć numerów, tak więc numer taki ukaże się jako 5/1999.

Składając Czytelnikom najserdeczniejsze jubileuszowe życzenia, informujemy, iż od czerwca 1998 do maja 1999 w każdym numerze przypomnimy coś z dawnych lat.

Ten okazjonalny dział nazywa się **Stara Delta**.

## SPIS TREŚCI

### NUMERU 9(292)

- Kiedy dziś  
wschodzi Słońce?  
*Tomasz Kwast* str. 1
- O sile Coriolisa i grawitacji  
*Ewa Czuchry*  
*i Wojciech Kopczyński* str. 3
- Zadania str. 5
- Czy prawo Hooke'a  
zawsze jest słuszne?  
*Stanisław Bednarek* str. 6
- Mała Delta str. 8
- Aktualności  
(nie tylko) fizyczne str. 9
- Czytelnicy piszą str.10
- O piorunach kulistych,  
latających talerzach  
i innych „meteorach”  
*Andrzej K. Wróblewski* str.11
- Klub 44 str.14
- Patrz w niebo str.16
- Wrzesień str.16
- Gammalimatis str.17

**W następnym numerze:**

**System dziesiętny**

Okładki i ilustracje wykonała  
*Anna Ludwicka*

Wybór artykułów z *Delty*  
ukazuje się w języku angielskim  
w sieci Internet pod adresem  
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:  
Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:  
Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
– wiceprzewodniczący

Krzysztof Ciesielski  
Jan A. Gaj  
Piotr Goldstein  
Tomasz Hofmokl  
Andrzej Hrynkiewicz  
Wiesław A. Kamiński  
Marta Kicińska-Habior  
Krzysztof Maślanka  
Andrzej Mąkowski  
Zdzisław Pogoda  
Feliks Przytycki  
Michał Różycka  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz SitarSKI  
Andrzej Woszczyk  
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
Wiktor Bartol  
Krzysztof Biesaga  
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.  
Krystyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Anna Ludwicka  
Anna Rudnik  
Paweł Strzelecki  
Joanna Udalska  
Anna Wojtyra  
Piotr Zalewski  
Adres Redakcji:  
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa  
tel. 843-02-41(-2) wewn. 21  
PAWELST@MIMUW.EDU.PL  
Wydrukowano  
w Drukarni Naukowo-Technicznej  
w Warszawie, ul. Mińska 65.  
Skład systemem  $\text{\TeX}$  wykonała Redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1998 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1998 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

#### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1998 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę
---------	----------------------------

5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numer archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie. Niestety, nie dysponujemy już numerami z lat 1974–1984.



# Kiedy dziś wschodzi Słońce?

Tomasz KWAST

Rektascensja – kąt między płaszczyzną południka niebieskiego punktu Barana i płaszczyzną południka gwiazdy.

Deklinacja – kąt między płaszczyzną równika niebieskiego i kierunkiem na gwiazdę

Astronomia sferyczna to gałąź astronomii zajmująca się elementarnymi zjawiskami zachodzącymi na niebie, np. dlaczego mamy pory roku, jak wyznaczyć współrzędne geograficzne itd. oraz – jak w tytule – kiedy wschodzi jakakolwiek gwiazda (np. Słońce), czy w ogóle wschodzi, jak to jest na innej szerokości geograficznej i in. Odpowiedź na zawarte w tytule pytanie wynika z podstawowych zależności między bokami i kątami pewnego szczególnego trójkąta sferycznego zwanego trójkątem paralaktycznym (choć nie ma on nic wspólnego z paralaksą). Jest to chyba najważniejszy trójkąt w astronomii, a na pewno w astronomii sferycznej. Jego wierzchołkami są: północny biegun nieba, zenit i gwiazda (rys. 1). Aby cokolwiek obliczać, musimy znać współrzędne gwiazdy, tzn. jej rektascensję  $\alpha$  i deklinację  $\delta$  oraz własne współrzędne geograficzne: długość  $\lambda$  i szerokość  $\varphi$ . Własności trójkątów sferycznych określają trzy wzory, a wzór potrzebny (i wystarczający) do uzyskania odpowiedzi na tytułowe pytanie głosi, że

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t,$$

gdzie  $z$  jest odległością zenitalną gwiazdy, a  $t$  jej kątem godzinnym, czyli kątem między płaszczyzną południka lokalnego

(tj. przechodzącego przez lokalny zenit) a płaszczyzną południka gwiazdy. W chwili wschodu (lub zachodu) odległość zenitalna gwiazdy wynosi, oczywiście,  $z = 90^\circ$ , zatem kąt godzinny  $t_0$  wschodu lub zachodu wynika ze związku

$$\cos t_0 = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta.$$

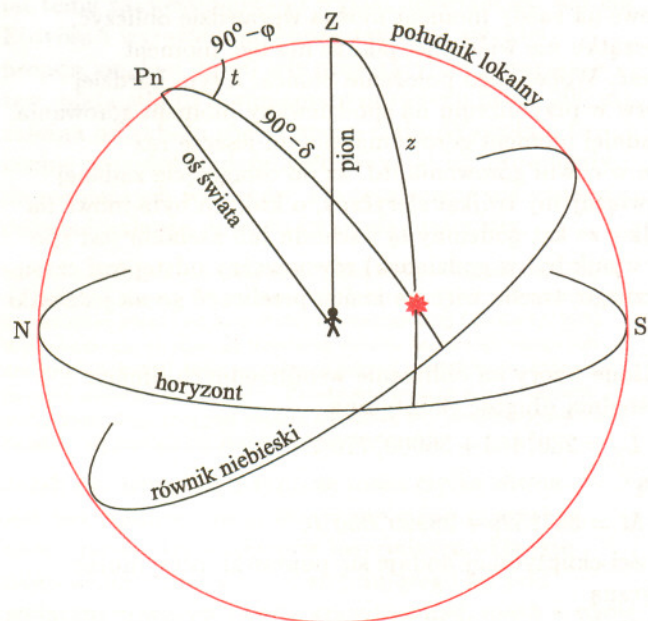
Nawiasem mówiąc, co oznacza iloczyn tangensów większy od 1? W każdym razie obliczony w ten sposób kąt godzinny wschodu lub zachodu pomnożony przez 2 jest czasem przebywania gwiazdy nad horyzontem (co w przypadku Słońca jest w przybliżeniu równoważne długości dnia). Powiedzmy, że jeszcze wypada podać wynik w ogólnie stosowanych jednostkach. Dlatego jeżeli  $t_0$  obliczyliśmy w stopniach, to po podzieleniu przez 15 dostaniemy liczbę godzin (bowiem  $360^\circ$  jest równoważne 24 h).

Potrąfimy więc obliczyć czas widoczności gwiazdy, nie wiemy jednak, o której godzinie gwiazda wschodzi czy zachodzi. Najprościej jest obliczyć moment górowania, gdyż wschód następuje po prostu o  $t_0$  wcześniej, a zachód tyle samo później. Dokonuje się tego za pośrednictwem tzw. czasu gwiazdowego, bardzo ważnego i pożytecznego pojęcia w astronomii sferycznej. Z definicji jest to kąt godzinny punktu równonocy wiosennej (rys. 2), zwanego też punktem Barana, gdyż w Starożytności leżał w gwiazdozbiornie Barana. Zauważamy, że ten szczególny kąt godzinny jest zawsze równy rektascensji gwiazdy górującej, przydałby się jednak poręczniejszy sposób jego określania. Roczniki astronomiczne publikują wartości czasu gwiazdowego o północy w Greenwich ( $T_{*0}$ ) na każdy dzień, ale w przybliżeniu można obliczyć go samemu. Mianowicie

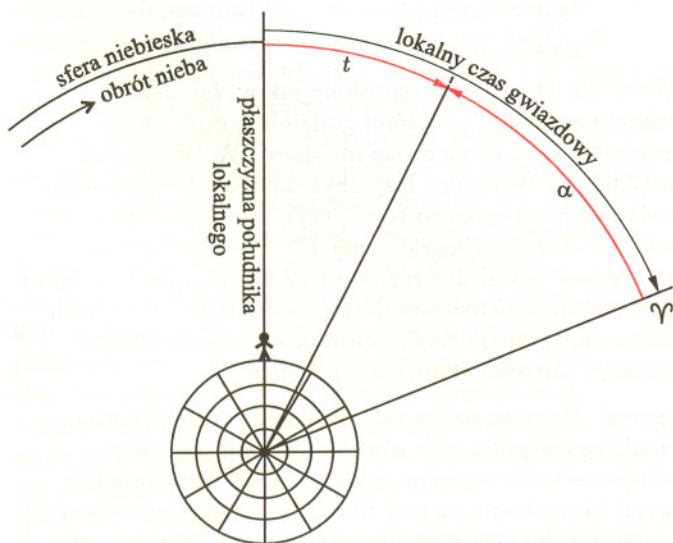
$$T_{*0} = 6^h 41^m 50^s,548 + 8\,640\,184^s,813 T,$$

gdzie  $T$  jest ilorazem liczby dni, jakie upłynęły od północy rozpoczynającej dany dzień do południa 1 stycznia 2000 przez 36525. Tu dwie uwagi:

1. Jeszcze przez dwa lata będzie to liczba ujemna.
2. Liczba dni, o której mowa, musi być połówkowa – w przeciwnym przypadku wynik będzie pozbawiony sensu przyrodniczego.



Rys. 1. Trójkąt paralaktyczny, Pn – północny biegun nieba, Z – zenit.



Rys. 2. Lokalny czas gwiazdowy jest zawsze sumą rektascensji dowolnej gwiazdy i jej kąta godzinnego.





### Rozwiązanie zadania F 483.

Jedyną nierównoważoną siłą, działającą na maszynę, była składowa pozioma siły Coriolisa. Była ona w każdej chwili prostopadła do kierunku prędkości i co do wartości równa  $2mv\omega \sin \phi$ , gdzie  $m$  jest masą maszyny, a  $\omega$  prędkością kątową ruchu obrotowego Ziemi. Siła ta powodowała jedynie zmianę kierunku prędkości, a nie jej wartości. Machina poruszała się więc ze stałą prędkością  $v = 1 \text{ km/h}$  po okręgu o promieniu  $r$ , takim, że

$$\frac{mv^2}{r} = 2mv\omega \sin \phi,$$

czyli  $r = v/(2\omega \sin \phi) \approx 2,5 \text{ km}$ . Machina kręciła się zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara.



Mając więc rektascensję gwiazdy  $\alpha$ , wiemy, że góruje ona o takiej właśnie godzinie lokalnego czasu gwiazdowego (np. u nas). W Greenwich jest w tym momencie czas gwiazdowy o  $\lambda$  wcześniejszy, gdyż różnica czasów (wszystko jedno jakich) jest zawsze równa różnicy długości geograficznych, od północy upłynęło więc tam  $\alpha - \lambda - T_{*0}$  jednostek czasu gwiazdowego. Są one nieco drobniejsze od jednostek czasu słonecznego, a przelicznik wynosi  $k=1,0027379$ . Dzieląc zatem ostatni wynik przez  $k$ , dostajemy odstęp czasu od północy w Greenwich w jednostkach słonecznych, czyli czas uniwersalny UT. U nas normalnie panuje czas środkowo europejski (w każdym razie zimą) o godzinę późniejszy, zatem moment górowania gwiazdy wynosi

$$(\alpha - \lambda - T_{*0})/k + 1 \text{ h}.$$

Niewątpliwie uciążliwa jest tu konieczność częstego przeliczania z układu dziesiętnego na sześćdziesiątkowy. Przy rachunkach ręcznych staje się to zazwyczaj źródłem wielu błędów. Tak czy inaczej, potrafimy samodzielnie obliczyć wyrażony w normalnym cywilnym czasie moment górowania gwiazdy o znanych współrzędnych równikowych.

Ze Słońcem jest więcej kłopotów, ponieważ stale się przemieszcza na niebie. Jego współrzędne równikowe na każdy moment można wprawdzie obliczyć, ale przecież na samym początku nie wiadomo, jaki to ma być moment – dopiero chcemy go znaleźć. Wobec tego położenie Słońca, a tym bardziej Księżycy, oblicza się w pierw w przybliżeniu na spodziewany moment górowania, mając je, obliczamy dokładniej moment górowania, potem jeszcze raz dokładniejsze współrzędne w chwili górowania itd. aż do osiągnięcia żądanej dokładności. Wreszcie rozwiązujemy trójkąt sferyczny, o którym była mowa na początku. Pamiętajmy tylko, że kąt godzinny  $t_0$  wschodu lub zachodu jest (po podzieleniu przez 15, aby wynik był w godzinach) równoważny odstępowi czasu gwiazdowego, a nie słonecznego, trzeba więc na końcu przeliczyć go na jednostki słoneczne, dzieląc przez  $k$ .

Oto dla ciekawych przybliżone wzory na obliczenie współrzędnych Słońca. Najpierw oblicza się jego średnią długość ekliptyczną

$$L_0 = 280^\circ,466 + 36000^\circ,770 T$$

oraz tzw. anomalie średnią

$$M = 357^\circ,529 + 35999^\circ,050 T,$$

po czym do średniej długości ekliptycznej dodaje się poprawki, otrzymując prawdziwą długość ekliptyczną

$$L = L_0 + (1^\circ,915 - 0^\circ,005 T) \sin M + 0^\circ,020 \sin 2M.$$

Teraz jego rektascensję i deklinację dostaje się ze wzorów

$$\operatorname{tg} \alpha = \cos \varepsilon \operatorname{tg} L,$$

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin L,$$

gdzie nachylenie ekliptyki  $\varepsilon = 23^\circ,44$ , a  $T$  jest określone jak wyżej. Jeżeli warszawiak zechce dla treningu sprawdzić, o której godzinie góruje Słońce i wyjdzie mu, że nie w samo południe, to niech się nie dziwi. W Warszawie Słońce nigdy nie góruje o 12:00, bo Warszawa leży zbyt daleko od centralnego południka strefy czasu środkowo europejskiego (o  $6^\circ$ , czyli w czasie o 24 min). Ale nawet ktoś, kto mieszka na długości geograficznej  $15^\circ$ , może otrzymać moment górowania Słońca o ponad kwadrans różny od 12:00. Wynika to z faktu, że Słońce porusza się nie po równiku niebieskim, lecz po ekliptyce, w dodatku niejednostajnie, bo Ziemia po eliptycznej orbicie porusza się niejednostajnie – stąd owe poprawki do średniej długości ekliptycznej Słońca.

Z Księżycem jest jeszcze gorzej. Porusza się on tak szybko, że trzeba metodą kolejnych przybliżeń obliczać jego współrzędne również w chwili wschodu i zachodu. Na szczęście komputer takie mozolne cykle obliczeń wykonuje bez żadnej skargi. Ścisłej mówiąc, za wschód i zachód Słońca czy Księżycy uważa się moment, kiedy na horyzoncie znajduje się górna krawędź tarczy danego ciała, i to przy uwzględnieniu, że atmosfera załamuje bieg promieni świetlnych. Te – zdawałoby się – szczegóły powodują wydłużenie dnia co najmniej o 8 minut.



### Rozwiązanie zadania F 484.

Warunkiem na to, aby składowa pozioma siły Coriolisa była większa od siły odśrodkowej, jest  $2mv\omega \sin \phi > mv^2/r$ , a stąd

$$r > \frac{v}{2\omega \sin \phi}$$

czyli  $r > 12 \text{ km}$ . Warto zauważyć, że w razie spełnienia tego warunku rzeka będzie podmywała prawy, wewnętrzny brzeg zakola, a nie zewnętrzny, jak to się dzieje zazwyczaj.



# O sile Coriolisa i grawitacji

Ewa CZUCHRY i Wojciech KOPCZYŃSKI

W podstawowych prawach fizyki Newtona masa występuje w dwóch rolach. Po pierwsze, jako tzw. masa bezwładnościowa  $m_I$  po lewej stronie II prawa dynamiki,  $m_I \vec{a} = \vec{F}$ . Po drugie, jako tzw. masa ciężka  $m_G$  we wzorze na siłę grawitacyjną,  $\vec{F}_{\text{graw}} = m_G \vec{g}$ , gdzie  $\vec{g}$  jest natężeniem pola grawitacyjnego. Równość  $m_I = m_G$  jest faktem doświadczalnym, na który po raz pierwszy zwrócił uwagę Ioannes Grammaticus w V wieku, a lista badaczy zawiera tu tak świetne nazwiska, jak Galileusz, Newton, Eötvös, Dicke i Braginski – ten ostatni wykazał równość tych mas (w skali astronomicznej) z dokładnością  $2 \times 10^{-12}$ . Kilkanaście lat temu zakwestionowano wyniki doświadczeń barona Eötvösa i wyrażono przypuszczenie, że zwykłej, proporcjonalnej do  $m_I$  sile grawitacyjnej towarzyszy tzw. piąta siła (o domniemanym zasięgu około 200 m) zależna od składu chemicznego ciała. Wywołało to lawinę prac doświadczalnych. Wyniki ich prowadziły do rozbieżnych wniosków, ale ostatecznie nie uznano doświadczalnego dowodu istnienia piątej sily.

Nieporozumieniem jest nazywanie piątą siłą (w skądinąd świetnym artykule w *Gazecie Wyborczej* z 27 lutego 1997) sily związanej z istnieniem różnej od zera stałej kosmologicznej (*Delta* 4/1998). Wprowadzenie do równań Einsteina członu kosmologicznego jest dla einsteinowskiej teorii grawitacji jedyną modyfikacją, która nie narusza istotnie jej struktury. Przeto siła związana z istnieniem stałej kosmologicznej jest częścią składową sily grawitacyjnej (choć Einstein wyparł się tej stałej pod koniec życia).

Jeżeli zgodzimy się z tym, że masa ciężka równa jest bezwładnościowej,  $m_G = m_I =$  (po prostu)  $m$ , to w prawie – zapisanym w inercjalnym układzie odniesienia – ruchu ciała, znajdującego się pod wyłącznym wpływem sily grawitacyjnej, masa w ogóle nie wystąpi,  $\vec{a} = \vec{g}$  (nie wystąpi ona także w tym samym prawie ruchu, ale zapisanym w nieinercjalnym układzie odniesienia). Nie do końca potrafimy wskazać układ odniesienia, który jest inercjalny, ale – koncentrując się na układach związanych z Ziemią – wiemy, że jeśli już, to inercjalny jest raczej ten, w którym Ziemia kręci się z okresem 24 godzin, niż ten, w którym Ziemia spoczywa. W pierwszym układzie potrafimy bez kłopotu objaśnić, na czym polega ruch ciała puszczonego swobodnie z wysokiej wieży. Mianowicie na skutek tego, że liniowa prędkość wierzchołka wieży, spowodowana obrotem kuli ziemskiej, jest większa niż liniowa prędkość podstawy wieży, ciało upadnie nieco na wschód od niej. No dobrze, ale jak objaśnić to samo zjawisko w nieinercjalnym układzie odniesienia związanym sztywno z Ziemią? Przecież w tym układzie wieża się nie porusza.

W uniwersyteckich podręcznikach mechaniki dokonuje się przeliczenia przyspieszenia ciała w jednym układzie odniesienia do drugiego układu, który porusza się

dowolnym ruchem względem pierwszego. Wyniki tego przeliczenia możemy zastosować do przypadku, gdy pierwszym układem odniesienia  $U$  jest układ inercjalny, a drugim  $U'$  jest układ Ziemi:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{\text{tr}} - \omega^2 \vec{r}'_{\perp} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Pierwszy człon w powyższym wzorze stanowi przyspieszenie w układzie  $U'$ . Drugi człon jest przyspieszeniem translacyjnym, czyli przyspieszeniem początku układu  $U'$  względem  $U$ . Trzeci człon jest przyspieszeniem dośrodkowym;  $\vec{\omega}$  jest wektorem prędkości kątowej układu  $U'$  względem  $U$ ,  $\vec{r}'$  jest promieniem wodzącym ciała w układzie  $U'$ , natomiast  $\vec{r}'_{\perp}$  jego składową prostopadłą do  $\vec{\omega}$ . Czwarty człon nie ma swojej nazwy. Wreszcie piąty człon, w którym występuje prędkość  $\vec{v}'$  ciała względem układu  $U'$ , nosi nazwę przyspieszenia Coriolisa. Zatem w nieinercjalnym układzie Ziemi prawo (równanie) ruchu ciała w polu grawitacyjnym wygląda tak:

$$\vec{a}' = \vec{g}_{\text{ef}} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}',$$

przy czym wszystkie człony niezależne od prędkości  $\vec{v}'$  włączyliśmy do efektywnego przyspieszenia grawitacyjnego

$$\vec{g}_{\text{ef}} = \vec{g} - \vec{a}_{\text{tr}} + \omega^2 \vec{r}'_{\perp} - \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'.$$

Włączenie wszystkich tych członów do  $\vec{g}_{\text{ef}}$  nie jest zabiegiem li tylko formalnym, ale wyraża spostrzeżenie, że doświadczalnie nie jesteśmy w stanie rozróżnić poszczególnych składników efektywnego przyspieszenia grawitacyjnego – obserwowaną siłą grawitacyjną jest  $m\vec{g}_{\text{ef}}$ . Siłę Coriolisa  $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$  jesteśmy w stanie odróżnić od grawitacyjnej, używając do tego celu ciała o rozmaitych prędkościach.

Człony drugi, trzeci i czwarty, występujące we wzorze na  $\vec{g}_{\text{ef}}$ , na powierzchni Ziemi, nieznacznie tylko modyfikują wkład pochodzący od członu pierwszego. Wielkość członu drugiego (czyli przyspieszenia translacyjnego ze znakiem minus) możemy obliczyć, przyjmując układ Słońca za inercjalny. Wielkość przyspieszenia dośrodkowego ruchu Ziemi wokół Słońca, pełniącego tu rolę przyspieszenia translacyjnego, wynosi  $6 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$ ; ale odpowiadająca temu przyspieszeniu translacyjna siła bezwładności znosi się niemal dokładnie z siłą odśrodkowej grawitacji („niemal” ma tu pewne znaczenie dla powstawania pływów oceanicznych), można więc człon drugi pominąć. Znacznie mniejszy jest wkład członu czwartego; zmiany wektora prędkości kątowej, spowodowane przemieszczaniem się bieguna kinematycznego Ziemi względem niej samej, dają wkład rzędu  $10^{-10} \text{ m/s}^2$ ; zmiany wywołane precesją osi ziemskiej z okresem 25 700 lat



i systematycznym zmniejszaniem się długości wektora prędkości kątovej dają wkłady rzędu  $10^{-15} \text{ m/s}^2$ . Naprawdę istotny jest tylko człon trzeci, przyspieszenie odśrodkowe daje wkład zależny od szerokości geograficznej; na biegunie wynosi on 0, by na równiku osiągnąć wartość  $3,3 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ . To ono powoduje, że Ziemia jest spłaszczona na biegunach, gdyż zastygła w zamierzchłych epokach w takiej formie, by uśrednione w czasie  $\vec{g}_{ef}$  było wszędzie prostopadłe do jej powierzchni (powierzchnię o tej własności zwiemy *geoidą*). Wektor  $\vec{g}_{ef}$  wyznacza więc kierunek pionu, prostopadły do powierzchni Ziemi, o ile pominąć odchylenia tego wektora od wartości średniej w czasie oraz istnienie gór.

Siłę Coriolisa nie tylko można odróżnić od grawitacyjnej, ale ma ona na ogół składową poziomą. Gdy prędkość ciała jest pozioma,  $\vec{v}' \perp \vec{g}_{ef}$ , wtedy siła Coriolisa rozkłada się na składową poziomą i pionową następująco:  $\vec{F}_C = \vec{F}_{C\perp} + \vec{F}_{C\parallel}$ , przy czym  $\vec{F}_{C\perp} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  i  $\vec{F}_{C\parallel} = -2\vec{\omega}_{\perp} \times \vec{v}'$ , a  $\vec{\omega}_{\perp}$  i  $\vec{\omega}_{\parallel}$  są odpowiednio składową pionową i poziomą prędkości kątovej Ziemi w danym miejscu jej powierzchni. Składowa pozioma siły Coriolisa jest na półkuli północnej zwrócona na prawo od zwrotu prędkości, na półkuli południowej zaś na lewo; jej wartość, jeśli pominąć spłaszczenie Ziemi na biegunach, wynosi  $|\vec{F}_{C\perp}| = 2\omega v' \sin \phi$ , gdzie  $\phi$  jest szerokością geograficzną. Składowa pionowa siły Coriolisa jest zwrócona w górę, gdy prędkość  $\vec{v}'$  jest zwrócona na wschód, w dół zaś, gdy prędkość jest zwrócona na zachód; jej wartość wynosi  $|\vec{F}_{C\parallel}| = 2\omega v' \sin \chi$ , gdzie  $\chi$  jest kątem, jaki tworzy kierunek ruchu z południkiem.

Efekt Coriolisa obserwujemy przede wszystkim w ruchach wielkich mas powietrza i wody. Wielkie, tzw. planetarne wiatry, jak pasaty na szerokościach podzwrotnikowych, czy wiatry zachodnie na średnich szerokościach geograficznych nie mają kierunku południkowego, lecz ulegają odchyleniu. Na półkuli północnej pasaty, przenoszące powietrze znad zwrotnikowych obszarów wyżu atmosferycznego do równikowej strefy niżu, mają kierunek północnowschodni, na półkuli południowej zaś południowowschodni. Ruch wiatrów zachodnich może stać się niestabilny i spowodować stworzenie cyklonów (bądź antycyklonów), charakterystycznych dla średnich szerokości geograficznych. Centrum cyklonu stanowi obszar bardzo niskiego ciśnienia, do niego napływają masy powietrza z obszarów o większym ciśnieniu. Siła Coriolisa powoduje odchylenie kierunku tego ruchu w prawo na półkuli północnej, lub w lewo na południowej. Stąd bierze się charakterystyczna rotacja dookoła centrum cyklonu: w stronę przeciwną kierunkowi ruchu wskazówek zegara na półkuli północnej i zgodną na południowej.

Typowym przykładem odchylenia ruchu wielkich mas wody jest Prąd Zatokowy (Golfsztrom), ciepły prąd wypływający znad równika w okolicach Indii Zachodnich, opływający wschodni brzeg Ameryki Północnej, żeby ją opuścić – na skutek działania siły Coriolisa – koło Florydy i kierując się na północny wschód, ogrzać od zachodu Europę.

Siła Coriolisa odgrywa też istotną rolę w wojskowości. Podczas bitwy morskiej koło Falklandów, będącej fragmentem I wojny światowej, brytyjscy artylerzyści ze zdziwieniem stwierdzili, że ich pociski trafiają około stu jardów na lewo od niemieckich okrętów. Nie było to spowodowane tym, że konstruktorzy celowników nie uwzględnili efektu Coriolisa. Wręcz przeciwnie, uwzględnili, lecz nie wzięli pod uwagę, że bitwy mogą się odbywać na  $50^\circ$  stopniu szerokości geograficznej południowej, zamiast północnej. Obserwowane odchylenie pocisków było więc podwojonym wynikiem działania siły Coriolisa (dla tej szerokości geograficznej).

Siły Coriolisa nie można włączyć do siły grawitacyjnej z uwagi na jej zależność od prędkości ciała. Ale uwaga ta dotyczy tylko takiego opisu tych sił, w którym oddzielnie traktujemy przestrzeń i czas. Stosując opis czasoprzestrzenny, czteroelementowy ciąg  $(t, x, y, z)$  zapisujemy jako  $(x^\mu)$ , przy czym umawiamy się, że wskaźniki  $\mu, \nu, \dots$  przebiegają wartości 0, 1, 2, 3. Wtedy równanie ruchu pod wyłącznym wpływem pola grawitacyjnego w dowolnym (inercjalnym bądź nieinercjalnym) układzie odniesienia możemy zapisać jako

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho = 0;$$

zastosowaliśmy przy tym konwencję sumacyjną Einsteina: w wyrażeniach jednomianowych sumujemy względem wskaźnika, który występuje raz u dołu i raz u góry, mimo że znaku  $\Sigma$  explicite nie wypisujemy. W inercjalnym układzie odniesienia różne od zera są tylko te składowe  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ , które są postaci  $\Gamma^i_{00} = -g^i$  (gdzie  $i, j, \dots = 1, 2, 3$ ), a więc reprezentujące natężenie właściwego pola grawitacyjnego  $\vec{g}$ . W nieinercjalnym układzie odniesienia, oprócz składowych tej postaci (reprezentujących tym razem  $\vec{g}_{ef}$ ), pojawiają się składowe postaci  $\Gamma^i_{0j}$  lub  $\Gamma^i_{j0}$ , reprezentujące siłę Coriolisa. Przy założeniu, że współczynniki  $\Gamma$  są symetryczne,  $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \Gamma^\mu_{\rho\nu}$ , wszystkie one są jednoznacznie wyznaczone przez pole grawitacyjne i układ odniesienia.

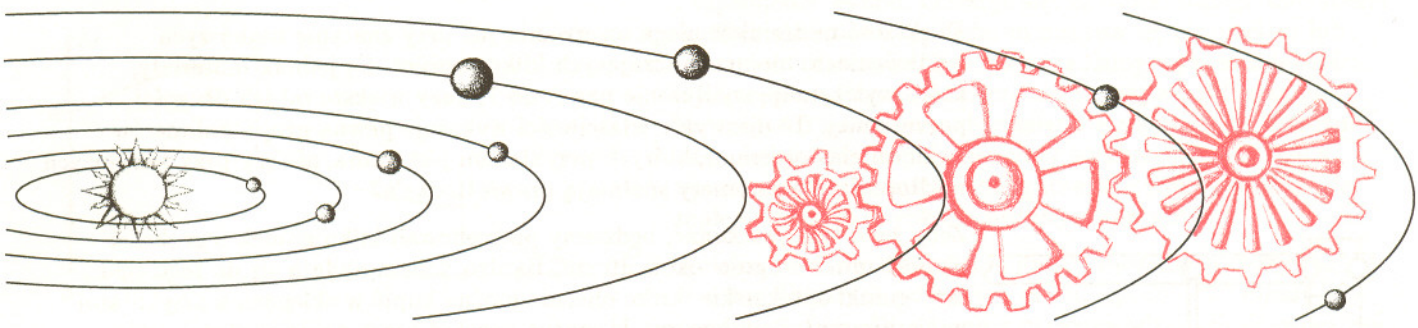
W przestrzeni euklidesowej równanie powyższej postaci opisuje proste – w dowolnym układzie współrzędnych (ale w szczególnej, tzw. afinicznej parametryzacji). Rozsądnie więc jest powyższe równanie czasoprzestrzenne nazywać równaniem linii najprostszych (autoparaleli), zwłaszcza że obowiązuje ono także w dowolnym układzie współrzędnych w czasoprzestrzeni (przy czym parametrem, względem



którego różniczkujemy, jest czas absolutny  $t$ , który nie musi być jedną ze współrzędnych wybranego układu). Linie najprostsze nie są tu prostymi, bo w nietrywialnym polu grawitacyjnym nie istnieje układ współrzędnych czasoprzestrzennych, w którym znikają współczynniki  $\Gamma$ , a to znaczy, że czasoprzestrzeń jest zakrzywiona.

To, że Newtonowskie równanie ruchu w polu grawitacyjnym jest równaniem linii najprostszych, odkrył Elie Cartan w latach dwudziestych XX wieku, a więc już po stworzeniu relatywistycznej teorii grawitacji. Czy można się dziwić, że najpierw stworzono trudniejszą teorię relatywistyczną – od razu w postaci

geometrycznej, a dopiero później zgeometryzowano łatwiejszą teorię przedrelatywistyczną? Nie, dlatego że Einstein, tworząc ogólną teorię względności, bazował na geometrii Riemanna, w której pojęcie linii najprostszych zlewa się z pojęciem *linii najkrótszych* (geodezyjnych). Niezależne pojęcie linii najprostszych nie istniało i trzeba było jeszcze długiego czasu, by przyznano mu pełnię „praw obywatelskich”. W czasoprzestrzeni Newtona–Cartana, w której można zgeometryzować grawitację Newtona, nie udaje się w żaden sensowny sposób wprowadzić metryki, a zatem pytania, czym są geodezyjne, nie można postawić.



## Zadania

Redaguje *Lukasz WIECHECKI*

**M 856.** Niech  $n$  będzie liczbą parzystą. Udowodnić, że istnieją takie wielomiany  $f(x)$ ,  $g(x)$  stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych, że  $x^{2n} + x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + x^2 + 1 = f(x)g(x)$ .  
Rozwiązanie na str. 13

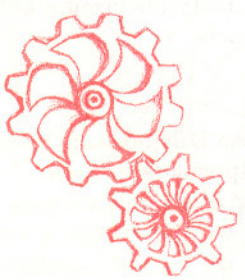
**M 857.** Czy istnieją takie wielomiany  $f(x)$  i  $g(x)$  stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych, że  $x^{10} + x^5 + 1 = f(x)g(x)$ ?  
Rozwiązanie na str. 13

**M 858.** Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  wielomian  $(x + 1)^{2n+1} + x^{n+2}$  jest podzielny przez  $x^2 + x + 1$ .  
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje *Ewa CZUCHRY*

**F 483.** W świeżo odnalezionych fragmentach Czerwonej Księgi Marchii Zachodniej znajduje się wzmianka, że Sauron skonstruował samobieżną maszynę, poruszającą się ze stałą prędkością 1 km/h i mającą siłę ognia większą niż wszystko, co znane było ludziom Śródziemia. Maszyna ta mogłaby zmienić wynik bitwy na Polach Pelennoru, gdyby nie to, że Sauron (słabiej znający fizykę niż metalurgię) nie wyposażył jej w żadne urządzenie zapobiegające dryfowi, lecz przeciwnie, postarał się o zlikwidowanie wszelkich oporów bocznych. Maszynę uruchomiono zaraz na początku bitwy o Pelennor, gdy nie było wiatru. Mimo to maszyna nie odniosła sukcesu – dlaczego? Znaleźć ruch maszyny, zakładając, że Pelennor leży na północnej szerokości geograficznej  $\phi = 50^\circ$ , a tolkienowską planetą jest Ziemia.  
Rozwiązanie na str. 2

**F 484.** Na szerokości geograficznej  $\phi = 50^\circ$  płynie z południa na północ rzeka z prędkością  $v = 5$  km/h. Na pewnym odcinku swego biegu skręca ona trochę w kierunku zachodnim. Dla jakiego promienia krzywizny zakola rzeki składowa pozioma siły Coriolisa, wywołana ruchem obrotowym Ziemi, będzie większa od siły odśrodkowej, związanej z zakolem rzeki?  
Rozwiązanie na str. 2





# Czy prawo Hooke'a zawsze jest słuszne?

Stanisław  
BEDNAREK

Prawo Hooke'a orzeka, że naprężenie ciała sprężystego jest wprost proporcjonalne do jego wydłużenia względnego. Naprężenie mierzymy stosunkiem wartości siły  $F$ , działającej prostopadle na daną powierzchnię, do pola tej powierzchni  $S$ . Wydłużenie względne wyraża się stosunkiem przyrostu długości ciała  $\Delta l$  do jego długości początkowej  $l_0$ . Korzystając z tych definicji, prawo Hooke'a możemy wyrazić wzorem

$$(1) \quad \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Współczynnik proporcjonalności  $E$ , występujący we wzorze (1), nazywa się modułem Younga. Moduł ten równy jest takiemu naprężeniu, przy którym długość ciała staje się dwa razy większa od jego długości początkowej. Żeby to wykazać, wystarczy podstawić do wzoru (1)  $\Delta l = l_0$ .

Większość materiałów ulega rozerwaniu już przy znacznie mniejszych wydłużeniach, nie przekraczających kilku procent. Są jednak materiały, które wytrzymują wydłużenie nawet do 10 razy większe od ich długości początkowej. Te niezwykle właściwości wykazuje pewna grupa polimerów zwanych elastomerami, których przykładem jest guma, ale czy przy tak dużych wydłużeniach elastomery spełniają prawo Hooke'a?

Żeby się o tym przekonać, będziemy potrzebowali kilku gumek o grubości około 1 mm i długości około 10 cm. Bardzo dobrze nadają się do tego celu tzw. gumki aptekarskie, które obecnie można kupić w sklepach z artykułami papierniczymi. Podobne gumki można uzyskać przez pocięcie starej dętki rowerowej.

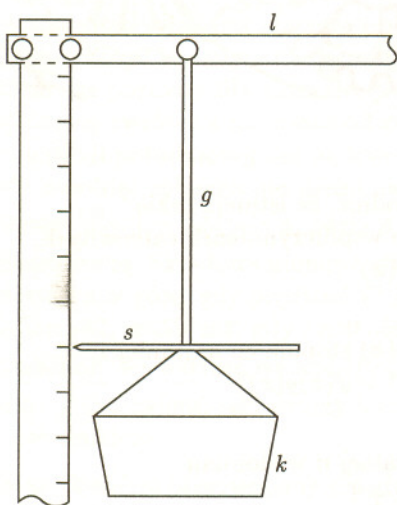
Zbudujemy teraz układ doświadczalny przedstawiony na rysunku 1. W pobliżu końca poziomej listewki  $l$ , przywiązanej np. do oparcia krzesła, przypinamy pinezką lub przywiązujemy nitką górny koniec przeciętej gumki  $g$ . Do dolnego końca gumki przywiązujemy za pomocą trzech nitek plastikowy kubek  $k$  od margaryny oraz poziomą strzałkę  $s$  zrobioną z cienkiego patyczka lub drutu. Równoległe do gumki mocujemy linijkę o długości 50 lub 40 cm, przyklejając ją plasteliną do listewki w takim miejscu, żeby położenie końca strzałki można było odczytać na skali linijki. Ponieważ kubek, strzałka i nitki są bardzo lekkie, wydłużenie gumki, spowodowane przez te elementy, możemy pominąć.

W naszych doświadczeniach będziemy mierzyć i zapisywać wydłużenia gumki  $\Delta l$  spowodowane przez dokonywane na różne sposoby wzrosty obciążenia kubka. Dlatego wzór (1) wygodnie jest przekształcić do postaci

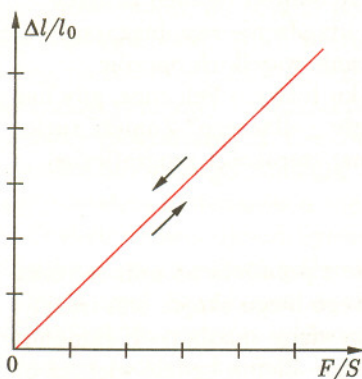
$$(2) \quad \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}.$$

Podczas pierwszego doświadczenia wkładamy do kubka kolejno jednakowe niewielkie obciążniki i odczytujemy na skali linijki odpowiadające temu przesunięcia wskazówki. W warunkach domowych rolę obciążników mogą spełniać np. średniej wielkości nakrętki, wkręty lub gwoździe. Możemy też uformować z plasteliny jednakowe sześciiany i używać ich jako obciążników. Nie musimy znać masy takiego obciążnika ani nawet pola przekroju poprzecznego gumki. Dla uproszczenia przyjmijmy, że jeden obciążnik powoduje naprężenie gumki równe jednostce umownej. (Założenie to ma charakter przybliżony, ponieważ przekrój poprzeczny gumki w miarę rozciągania zmniejsza się, ale przyjęte przybliżenie nie zmienia w istotny sposób wyników doświadczenia.)

Największe obciążenie nie powinno powodować wydłużenia przekraczającego połowę początkowej długości gumki. Obciążniki staramy się wkładać ostrożnie, ale możliwie szybko i w równych odstępach czasu niezbędnych tylko na odczytanie wydłużenia, np. co 5 s. Następnie w ten sam sposób zdejmujemy kolejno obciążniki i odczytujemy położenia wskazówki. Widzimy, że po usunięciu wszystkich obciążników długość gumki jest taka sama, jak przed rozpoczęciem doświadczenia. Wykorzystując uzyskane wyniki, możemy sporządzić wykres zależności  $\Delta l/l_0$  od  $F/S$ . Będzie on wyglądał podobnie, jak na rysunku 2.



Rys. 1



Rys. 2



Wynika stąd, że w zakresie niewielkich wydłużeń dla naszej gumki słuszne jest prawo Hooke'a.

Powtórzmy teraz opisane doświadczenie z większą liczbą obciążników, tak żeby osiągnąć wydłużenie gumki 3–4 razy większe od długości początkowej. Nadal staramy się zachowywać krótkie odstępy czasu między zmianami obciążenia. Okazuje się, że po zakończeniu doświadczenia gumka nie wróci do początkowej długości, a wykres zależności  $\Delta l/l_0$  od  $F/S$  będzie przypominał to, co przedstawia rysunek 3. Zmniejszanie wydłużenia jakby nie nadążało za zmniejszaniem naprężenia. Zjawisko to nazywa się histerezą sprężystą.

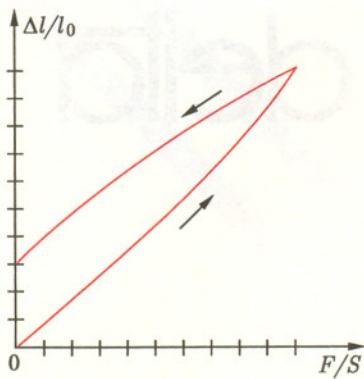
Przeprowadźmy jeszcze jeden wariant doświadczenia. Zawieśmy nową gumkę, zmierzmy jej długość początkową  $l_0$  i obciążmy od razu tak, żeby spowodować duże wydłużenie, np.  $\Delta l = 3l_0$ . Nie zmieniając obciążenia, mierzymy to

wydłużenie w równych odstępach czasu, np. co 2 minuty, i zapisujemy wyniki. Okazuje się, że mimo stałego obciążenia wydłużenie rośnie. Zjawisko to nazywa się płynięciem lub pełzaniem materiału. Jeżeli sporządzimy wykres zależności wydłużenia od czasu, to otrzymamy krzywą zbliżoną do krzywej  $AB$  na rysunku 4. Następnie zdejmujemy ostrożnie całe obciążenie i nadal mierzymy wydłużenie co 15–20 s. Spostrzegamy, że wydłużenie gumki nie znika od razu, ale maleje najpierw szybko, a później coraz wolniej.

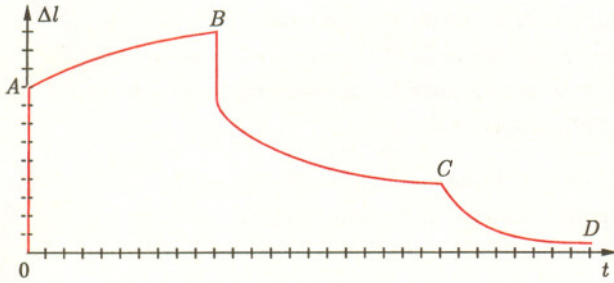
Kolejne pomiary wydłużenia gumki możemy wykonywać w coraz dłuższych odstępach czasu, np. co 5–20 minut lub jeszcze rzadziej. W jednym z przeprowadzonych doświadczeń zmiany wydłużenia obserwowałem jeszcze następnego dnia. Jeżeli uzupełnimy wykres, to temu procesowi, zwanemu relaksacją naprężeń, będzie odpowiadała krzywa  $BC$  (rys. 4). Gumka nie wróci jednak do początkowej długości. Dalsze zmniejszanie wydłużenia gumki możemy spowodować przez jej ogrzanie. Najlepiej użyć do tego celu lampy zaopatrzonej w żarówkę o mocy 60–100 W. Gdybyśmy kontynuowali pomiary i sporządzili wykres, to otrzymamy krzywą  $CD$  reprezentującą tzw. proces relaksacji cieplnej naprężeń, w wyniku którego gumka ewentualnie wróci do początkowej długości.

Termiczną relaksację naprężeń możemy wykorzystać do budowy bardzo prostego i pomysłowego silnika cieplnego przedstawionego na rysunku 5. Widoczne tam koło składa się z metalowego pierścienia  $p$  (może to być zakrętka od słoika typu twist-off z wyciętą środkową częścią), bardzo dużej igły  $i$  oraz kilku gumek aptekarskich  $g$  tworzących „szprychy”. Gumki obejmujące z obu stron powinny być dość mocno naprężone i rozmieszczone symetrycznie na obwodzie pierścienia. Igła tworząca oś oparta jest na wycięciach kartonowego wspornika  $w$ . Spróbujmy wykonać takie koło i zobaczyć, jak się ono zachowa, gdy jego jedną pionową połowę zasłonimy kawałkiem kartonu, a drugą ogrzejemy wspomnianą żarówką.

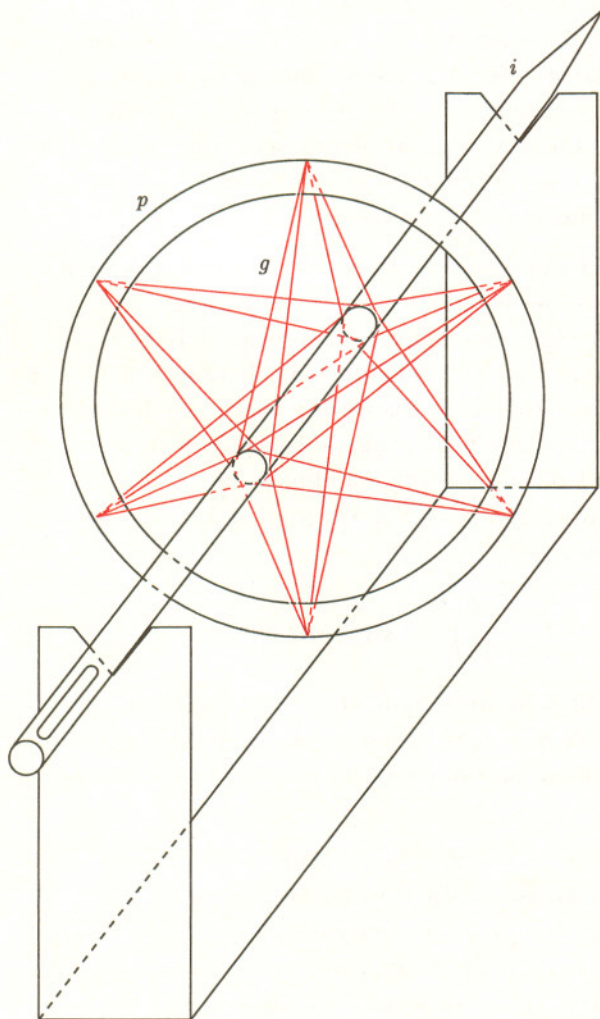
Z przeprowadzonych doświadczeń wynika, że nawet dla tak sprężystego materiału jak guma, prawo Hooke'a jest słuszne tylko dla niewielkich i krótkotrwałych naprężeń. Przyczyną takich zjawisk, jak pełzanie czy histereza sprężysta, jest przemieszczanie się cząstek ciała w wyniku współdziałania sił międzycząsteczkowych i sił zewnętrznych. Zjawiska te są jednym z przedmiotów zainteresowania reologii – nauki, która powstała około 70 lat temu, kiedy stwierdzono, że teoria sprężystości, wykorzystująca prawo Hooke'a, nie wystarcza do prawidłowego opisu zachowania się pewnych ciał podczas ich odkształcania.



Rys. 3



Rys. 4



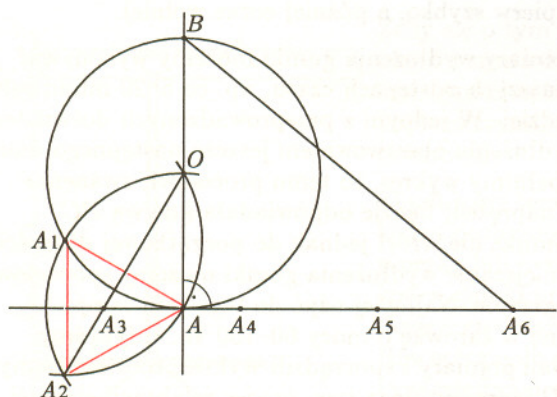
Rys. 5





## Bibliotekarz króla Jana

Jak wiadomo od 116 lat, za pomocą cyrkla i linijki nie można wykonać rektyfikacji okręgu, czyli skonstruować odcinka o długości równej obwodowi danego koła. Niemniej jednak istnieją rozmaite konstrukcje przybliżone, niezbyt skomplikowane, a przy tym obciążone bardzo niewielkim błędem. Autorem jednej z nich jest Adam Adamandy Kochański, nadworny bibliotekarz i matematyk króla Jana III Sobieskiego. Oto ona.



$$OA_1 = OA = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = 1$$

Z punktu  $A$  położonego na okręgu  $o(O, 1)$  o jednostkowym promieniu zakreślamy okrąg o promieniu 1. Z punktu  $A_1$  przecięcia obu okręgów kreślimy trzeci okrąg  $o(A_1, 1)$ , też o jednostkowym promieniu. Punkt  $A_2$  (patrz rysunek) to różny od  $O$  punkt wspólny okręgów  $o(A, 1)$  i  $o(A_1, 1)$ , punkt  $A_3$  zaś – to punkt przecięcia prostej  $OA_2$  ze styczną do okręgu  $o(O, 1)$ , przechodzącą przez punkt  $A$ . Kolejne punkty  $A_4, A_5, A_6$  zaznaczamy na prostej  $A_3A$  tak, jak to pokazuje rysunek. Długość odcinka  $BA_6$  jest w przybliżeniu równa długości półokręgu o promieniu 1, czyli liczbie  $\pi$ .

Nietrudno się o tym przekonać za pomocą rachunku (jeśli ktoś nie umie wyciągać pierwiastków

kwadratowych, to przyda mu się kalkulator). Otóż, czworokąt  $OA_1A_2A$  to romb o kącie ostrym  $60^\circ$ , złożony z dwóch trójkątów równobocznych,  $\triangle OA_1A$  i  $\triangle A_1AA_2$ . Punkt  $A_3$  to punkt przecięcia środkowych jednego z tych trójkątów – mianowicie  $\triangle A_1AA_2$ . Środkowe dowolnego trójkąta dzielą się w stosunku 2:1, a w trójkącie równobocznym o boku 1 środkowa ma długość  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , bo jest jednocześnie wysokością. Zatem,  $A_3A = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Stąd  $AA_6 = 3 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Z twierdzenia Pitagorasa mamy więc

$$BA_6 = \sqrt{2^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 3,1415333387\dots$$

Jest to przybliżenie liczby  $\pi$  z błędem mniejszym od 0,00006 (to znaczy, używając go np. do obliczenia długości orbity Ziemi, pomylimy się z grubszą o  $\frac{3}{2}$  średnicy Ziemi, czyli wcale). Aż się ciśnie na usta pytanie: jak właściwie ten Kochański na to wpadł?

I szkoda tylko, że to osiągnięcie polskiej matematyki XVII wieku, jakże chętnie wspomniane w popularnych książkach i w Encyklopedii Powszechnej, tak się mniej więcej ma do zdobyczy królowej nauk w tamtym stuleciu, jak wyniki mistrza trzeciej ligi piłkarskiej do wyników mistrza świata w piłce nożnej. Nie ta klasa, nie ta konkurencja – choć na pozór wygląda podobnie.

Małą Deltę przygotował Paweł STRZELECKI





## Aktualności (nie tylko) fizyczne

Trzy miesiące temu poznaliśmy przekonujące dowody istnienia nowego składnika masy Wszechświata. W dniu 5 czerwca, na konferencji Neutrino'98, odbywającej się w Takayamie w Japonii, zespół naukowców eksperymentu Super-Kamiokande ogłosił, że widzi oscylacje atmosferycznych neutrino mionowych. Implikuje to masywność przynajmniej jednego rodzaju neutrino. Odkrycie to może zostać uznane za najważniejsze wydarzenie w fizyce cząstek elementarnych od czasu odkrycia bozonów pośredniczących  $W^\pm$  i  $Z^0$ .

Neutrino wymyślił Wolfgang Pauli dla ratowania zasad zachowania energii, pędu i momentu pędu w jądrowych rozpadach  $\beta$ . Aby spełnić pokładane w nim nadzieje, neutrino musiało być neutralne, praktycznie nie oddziałujące z materią i bardzo lekkie lub wręcz bezmasowe. Ze względu na dwie pierwsze cechy wydawało się niemożliwe do zarejestrowania. Niels Bohr założył się nawet z Paulim, że nigdy nie dojdzie do odkrycia neutrino. A jednak udało się to Frederickowi Reinesowi i Clyde'owi Cowanowi w 1957 r., czyli po prawie 30 latach. Cztery dekady później Reines dostał za swoje odkrycie Nagrodę Nobla. Cowan, niestety, nie dożył tego momentu. Wcześniej, bo w 1988 roku, zaproszono do Sztokholmu Leona Ledermana, Melvina Schwartz'a i Jacka Steinbergera, którym udało się w 1962 roku wykazać, że neutrino elektronowe i mionowe to dwie różne cząstki. Trzeciego neutrino, taonowego, jak dotąd bezpośrednio nie zarejestrowano, ale precyzyjny pomiar szerokości bozonu pośredniczącego  $Z^0$ , przeprowadzony w LEP-ie na początku lat dziewięćdziesiątych, pozwolił stwierdzić, że są dokładnie 3 rodzaje lekkich (bezmasy) neutrino.

W międzyczasie rozpoczęto poszukiwania rozpadu protonu, przewidywanego przez tzw. teorie wielkiej unifikacji oddziaływań mikroświata. Tłem dla takich poszukiwań są oddziaływania neutrino z materią. Dwoma głównymi, naturalnymi źródłami neutrino prześwietlających Ziemię są: reakcje jądrowe wewnątrz Słońca produkujące neutrino elektronowe, tzw. *neutrino słoneczne*, oraz rozpady cząstek wtórnych powstających w wyniku oddziaływania promieniowania kosmicznego z naszą atmosferą, tzw. *neutrino atmosferyczne*.

Rozpadu protonu jeszcze nie udało się zoobserwować. Za to badanie neutrinoowego tła okazało się niezwykle interesujące samo w sobie. Jego historia jest zdominowana przez doniesienia o niedoborze neutrino. Po pierwsze, obserwuje się tylko połowę spodziewanych neutrino słonecznych. Po drugie, wśród neutrino atmosferycznych powinno być dwa razy tyle neutrino mionowych co elektronowych (w rozpadach kaskadowych produkowane są najpierw miony wraz z neutrino mionowym, a następnie mion rozpada się na elektron, neutrino mionowe i elektronowe), lecz rejestruje się ich mniej więcej tyle samo.

Generalnie są dwa możliwe wyjaśnienia tych obserwacji. Albo nie w pełni rozumiemy procesy produkcji i detekcji neutrino, albo neutrino oscylują. Od dawna fizycy zajmujący się łapaniem neutrino skłaniają się ku tej drugiej możliwości, ale dopiero teraz udało im się na tyle poprawić możliwości detekcyjne, aby w przypadku neutrino atmosferycznych praktycznie wykluczyć rozwiązanie inne niż oscylacje.

Co to znaczy, że neutrino oscylują i dlaczego w ten sposób można wytłumaczyć ich niedobór? W minimalnym modelu standardowym cząstek elementarnych neutrino są bezmasowe, ale tylko dlatego, że wcześniej nie udało się stwierdzić, aby miały masę różną od zera. Jeżeli ją mają, to mogą się „mieszać”. Oznaczałoby to, że neutrino elektronowe, mionowe i taonowe nie mają określonej masy, ale są mieszkankami trzech różniących się masą stanów. Jeżeli ograniczymy się do dwóch rodzajów neutrino, to możemy przywołać analogię z polaryzacją światła. Rodzajowi neutrino za względu na oddziaływanie odpowiadałyby wtedy polaryzacje: pionowa i pozioma, a stanom własnym masy – polaryzacje: lewo i prawoskrętna. Różnicy mas natomiast odpowiadałby ośrodek optyczny czynny, w którym – ze względu na różnicę prędkości propagacji fal o polaryzacjach lewo i prawoskrętnej – następuje skręcenie płaszczyzny polaryzacji o kąt proporcjonalny do iloczynu przebytej w ośrodku drogi i różnicy prędkości propagacji. Tak jak dobierając odpowiednio grubość ośrodka, można zamienić światło spolaryzowane poziomo na spolaryzowane pionowo, tak po przebyciu pewnej drogi strumień neutrino mionowych może zamienić się np. na strumień neutrino taonowych.

Taka właśnie możliwość okazuje się najlepiej pasować do obserwowanego niedoboru atmosferycznych neutrino mionowych rejestrowanych przez Super-Kamiokande, najbardziej czuły detektor neutrinoowy. Jest to umieszczony kilometr pod powierzchnią Ziemi cylinder, wypełniony 50 tysiącami metrów sześciennych bardzo czystej wody i obłożony kilkunastoma tysiącami gigantycznych fotopowielaczy (większość o średnicy 50 cm), które rejestrują promieniowanie Czerenkowa, pochodzące od naładowanych cząstek, poruszających się z prędkością większą od prędkości światła w wodzie (efekt Czerenkowa jest analogiem fali ponaddźwiękowej). Super-Kamiokande potrafi odróżniać miony od elektronów, a więc przypadki oddziaływania neutrino mionowych od indukowanych przez neutrino elektronowe, szacować energię neutrino oraz kierunek, z którego nadleciały. Dzięki temu można było wykazać, że cały niedobór przypada na te atmosferyczne neutrino mionowe, które przylatują od spodu, a produkowane są po drugiej stronie Ziemi. W porównaniu do tych nadlatujących z góry mają wystarczająco dużo czasu, żeby w wyniku oscylacji zamienić się w neutrino nie oddziałujące z materią detektora. Może to być neutrino taonowe, którego niechęć do oddziaływania wynika z dużej masy koniecznej do wyprodukowania taonu, albo postulowane przez niektóre modele tzw. *neutrino sterylne*.

Tak czy inaczej, fakt obserwowania oscylacji implikuje różnicę mas, wynoszącą około  $0,07 \text{ eV}/c^2$ , między neutrino mionowym a tym, z którym się ono miesza. W takim razie przynajmniej jedno neutrino ma masę rzędu zmierzonej różnicy lub większą, a ponieważ w początkach Wszechświata neutrino były bardzo intensywnie produkowane, więc stanowią obecnie znaczącą część jego masy.

Piotr ZALEWSKI

Więcej informacji na ten intrygujący temat nasi Czytelnicy będą mogli znaleźć w jednym z pierwszych, przyszłorocznych numerów *Delty* w artykule Danki Kielczewskiej, naszej (Uniwersytetu Warszawskiego) przedstawicielki w eksperymencie Super-Kamiokande.



Pan **Piotr Kumor** z Olsztyna w swoim liście przedstawia rozwiązanie problemu obliczenia objętości bryły opisanej w notce *Inne spojrzenie z Delty* 1/1998. Przypomnijmy, że chodzi o bryłę powstałą w przecięciu dwóch naroży prostopadłościennych umieszczonych tak, że ich osie obrotowe pokrywają się, ponadto wierzchołek każdego jest zawarty we wnętrzu pozostałego naroża. Bryła taka to wielościan o sześciu jednakowych ścianach. Jego ściany mają co najwyżej cztery boki i co najmniej jeden kąt prosty, przy czym przyległe do niego boki są równej długości. Szczególnym przypadkiem takiego wielościanu jest np. sześcián; w innym szczególnym przypadku ściany są równoramienne trójkątami prostokątnymi.

Rozwiązanie zaproponowane przez Pana Kumora uzależnia wynik od jednego parametru. Zakłada się mianowicie, że wyjściową bryłą jest sześcián o krawędzi 1, a raczej jego przeciwległe naroża. Wszystkie interesujące nas bryły to przecięcia jednego nieruchomego naroża (dalej będzie to naroże o wierzchołku  $A$ ) z narożem powstałym z obrotu przeciwległego naroża wokół przekątnej sześciánu o jakiś kąt – kąt ten będzie dalej oznaczany  $\alpha$ . Można przy tym założyć, że  $0 \leq \alpha \leq 60^\circ$  (bo dla większych kątów sytuacja się powtarza).

Pan Kumor czyni bardzo naturalne spostrzeżenie, że środek sześciánu jest jednakowo położony względem każdej z (przystających) ścian badanej bryły. Jego odległość od ściany jest taka sama jak w sześciánie, czyli równa  $\frac{1}{2}$ . Można zatem badaną bryłę potraktować jako sumę sześciu przystających ostrosłupów o wierzchołku w środku wyjściowego sześciánu mających rozłączne wnętrza. Liczbowo poszukiwana objętość jest więc równa

$$6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\text{pole ściany badanej bryły}),$$

czyli po prostu polu ściany. Zatem pozostaje obliczyć to pole.

Ponieważ list Pana Kumora jest sformułowany bardzo lapidarnie, więc będziemy go tu naśladować, pozostawiając Czytelnikom sprawdzenie poprawności i celowości rozumowania. Zgodnie z intencją Autora nie proponujemy żadnych rysunków.

Niech rozpatrywany sześcián będzie miał jako wierzchołki punkty  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (1, 0, 0)$ ,  $C = (1, 1, 0)$ ,  $D = (0, 1, 0)$ ,  $A' = (0, 0, 1)$ ,  $B' = (1, 0, 1)$ ,  $C' = (1, 1, 1)$ ,  $D' = (0, 1, 1)$ . Na początku zajmiemy się okręgiem opisanym na trójkącie równobocznym  $A'BD$ . Jego środkiem jest  $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Gdy oznaczymy przez  $Q = (x, y, z)$  jego punkt powstały z obrotu punktu  $A'$  wokół prostej  $AC'$  o kąt  $\alpha$ , to współrzędne wektora

$$\overrightarrow{PQ} := (x_1, y_1, z_1) = (x - \frac{1}{3}, y - \frac{1}{3}, z - \frac{1}{3})$$

spełniać będą układ równań

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \frac{2}{3} \\ 2z_1 - y_1 - x_1 = 2 \cos \alpha \end{cases}$$

(pierwsze równanie to równanie płaszczyzny  $A'BD$ , drugie to kwadrat długości promienia, trzecie to – z definicji – iloczyn skalarny  $\overrightarrow{PQ}$  i  $\overrightarrow{PA'}$ ). Otrzymujemy się stąd, że punkt  $Q$  ma współrzędne

$$\begin{aligned} x &= \frac{1 - \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha}{3}, \\ y &= \frac{1 - \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{3}, \\ z &= \frac{1 + 2 \cos \alpha}{3}. \end{aligned}$$

Zatem prosta  $AQ$  przecina płaszczyznę  $A'B'C'D'$  (o równaniu  $z = 1$ ) w punkcie

$$M = \left( \frac{1 - \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}, \frac{1 - \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}, 1 \right).$$

Analogicznie znajdujemy punkt  $R$  powstały z obrotu punktu  $B$  wokół prostej  $AC'$  o kąt  $\alpha$  i punkt przecięcia prostej  $AR$  z płaszczyzną  $BCC'B'$  (o równaniu  $x = 1$ )

$$L = \left( 1, \frac{1 - \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}, \frac{1 - \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha} \right).$$

Czwartym wierzchołkiem rozważanej ściany będzie punkt przecięcia prostej  $B'C'$  (o równaniu  $x = 1 = z$ ) z płaszczyzną  $AML$ ; oznaczmy go  $N$ . Oczywiście istnieją takie liczby  $p$  i  $q$ , że

$$\overrightarrow{AN} = p \cdot \overrightarrow{AM} + q \cdot \overrightarrow{AL},$$

które można obliczyć wobec tego z równań

$$\begin{cases} p \cdot \frac{1 - \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha} + q = 1 \\ p + q \cdot \frac{1 - \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha} = 1 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu i podstawieniu otrzymujemy

$$N = \left( 1, \frac{2 \cos \alpha - 2}{1 + 2 \cos \alpha}, 1 \right).$$

Dla obliczenia pola (przeważnie) czworokąta  $AMNL$  rozbijamy go na trójkąty i rachujemy za pomocą wyznaczników lub – co na jedno wychodzi – iloczynów wektorowych pole  $AMN$  i  $ANL$ . Np.

$$\begin{aligned} P_{AMNL} &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AN} \times \overrightarrow{AL} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}) \times \overrightarrow{AN} \right|. \end{aligned}$$

Po przeliczeniu otrzymujemy

$$\frac{9 \cos \alpha}{(1 + 2 \cos \alpha)^2}$$

i tyle właśnie wynosi poszukiwana objętość bryły.

A może ktoś umie uporać się z tym prościej?



# O piorunach kulistych, latających talerzach i innych „meteorach” (7/1976)

Andrzej K. WRÓBLEWSKI

*Meteora nie co innego jest tylko z Greckiego Sublimia (zjawiska górne) unoszące się, że będąc Exhalacją, do góry się maia. Które się rodzą z Elementarnych subtelnych części, znacznie pomieszanych y znowu skupionych.*

*Te meteora z czterech Elementów urodzone są cztery, Ogniste, wodne, Powietrzne y ziemskie.*

*Ignia, ogniste, z ognistej rodzą się Materyi, jako to Ignis Fatuus (błędny ogień) za idącym lecący, przed goniącym uciekający; jest to alias subtelna, tłusta, kleiowata Exhalacja, która zaiwwszy się, tu y owdzie lata ponad ziemię, dla tego Ogniem szalonym nazwany. Prości ludzie latawcami, albo diabłami, nazywają, którzy w prostocie swojej causas rerum (przyczyn rzeczy) nie wiedząc, wszystkie rzeczy extraordinaryne albo Bogu albo diabłu imputują.*

Powyższy wyjątek z „Nowych Aten”, wydanych przez ks. Benedykta Chmielowskiego w latach 1754–1756, odzwierciedla osiemnastowieczne poglądy na szereg zjawisk atmosferycznych, których w owym czasie, rzecz jasna, zupełnie nie rozumiano. Jeszcze na początku XIX wieku utrzymywano nazwę „meteory” dla wszystkich zjawisk rozgrywających się w atmosferze; naukę o tych zjawiskach nazywano meteorologią. Rozróżniano wówczas aż sześć rodzajów „meteorów”: ogniowe, elektryczne, wodne (mgła, chmury, śnieg, grad, rosa, deszcz itp.), światła, ciepła i powietrzne.

Wyładowania elektryczne zaliczano najpierw do „meteorów ogniowych”, potem do „meteorów elektrycznych”. Poglądy z pierwszej połowy XVIII wieku na temat piorunów znakomicie ilustruje następujący wyjątek z dzieła „Informacya matematyczna przez księdza Woyciecha Bystrzanowskiego do druku podana Roku 1743”:  
„Bo piorun jest to exhalacya ziemna siarczysta, saletrzysta, gorąca y sucha, słońca promieniem w górę wyciągniona, y z piekła, od tegoż słońca albo powietrza gorącego zapalona, która gdy na chmurę wodnistą napadnie, grzmot w niej sprawuje... Błyskawica zaś iest podobną exhalacya ziemna gorąca y sucha, ale tak od słońca zapiekła, która zapalona w wyszszym nad chmury krayu, prędkie się spali nim do chmury dopadnie: na podobieństwo żywicy na proch startey y zapaloney...”

Dziś pioruny przestały być już zjawiskiem tak tajemniczym, jakim były dla naszych przodków z połowy XVIII wieku. Beniamin Franklin swymi pięknymi i odważnymi doświadczeniami udowodnił, że są to wyładowania elektryczne podobne do tych, które możemy wywołać przy użyciu maszyny elektrostatycznej, tyle że są to zjawiska niepomiernej większej skali. Konstruując piorunochron, tenże Franklin pierwszy podał sposób zabezpieczenia przed tymi groźnymi fenomenami natury. Zdjęcia pioruna nie są niczym osobliwym i może je uzyskać każdy, kto podczas nocnej burzy będzie czekał z otwartą migawką aparatu fotograficznego. Zjawiska najpospolitszych piorunów, tzw. liniowych, zostały już dość szczegółowo zbadane i można na ten temat znaleźć wiele informacji w podręcznikach fizyki, meteorologii, encyklopediach i innych wydawnictwach.

A jednak pozostało zjawisko, które, mimo wysiłków uczonych, do dziś jest tajemnicze i niewyjaśnione. Tym zjawiskiem jest tzw. piorun kulisty.

Pierwsze obserwacje piorunów kulistych znajdujemy już u starożytnych, w dziełach Arystotelesa, Lukrecjusza, Seneki. Wzmianki te nie mają jednak wartości naukowej, lecz tylko historyczną, gdyż trudno z nich wyciągnąć cechy charakterystyczne zjawiska. Jak wiadomo, przez długie lata ludzie skłonni byli uznawać wszelkie niezrozumiałe zjawiska za cuda. I tak np. kronikarz francuski, Grzegorz z Tours, żyjący w VI w., opisuje cud, jaki zdarzył się w tym mieście podczas procesji, gdy nad zgromadzonymi przeleciała oślepiająco jasna kula ognista, która tak przeraziła ludzi, że padli na ziemię. Mógł to być właśnie piorun kulisty.

Wzmianki o obserwacjach podobnych zjawisk z ostatnich paruset lat przynoszą już wiele materiału faktograficznego. W 1838 r. znany fizyk francuski, Franciszek Arago, napisał pierwszą pracę naukową na temat piorunów kulistych, zbierając w niej ponad 20 dobrze udokumentowanych doniesień na temat tego zjawiska. Od tego czasu napisano na temat piorunów kulistych setki prac z zestawieniami i analizą obserwacji. Niedawno wydana monografia S. Singera (*The Nature of Ball Lightning*, 1971 r.) zawiera sześćset odnośników do prac wcześniejszych, w tym do wielu prac przeglądowych. I mimo wszystko nadal nie umiemy powiedzieć z całą pewnością, czym jest to tajemnicze zjawisko.

Przytoczymy kilka ciekawszych doniesień o piorunach kulistych. Zacytujmy najpierw informację z ogłoszonego w 1858 r. zbioru kuriozów Królestwa Polskiego. Dowiadujemy się tam, że „... Roku 1724 w m. lutym około godziny 8 z rana, wśród szumu, kula ognista wielkości pięści, przez okno wpadła do Zamku Warszawskiego z hukiem równym bombie i napełniła pokoje dymem i ogniem smrodliwym, ogłuszając przy tym trzy osoby w kancelarii królewskiej”. A teraz szereg informacji świadczących o niszczącym działaniu piorunów kulistych. W 1711 r. kula ognista wpadła przez wieżę do kościoła w Solingen i eksplodowała, zabijając trzy osoby, raniąc ponad sto. W 1789 r. kula ognista wielkości „kuli armatniej” wpadła do wielkiego



holu w Feltre; eksplozja spowodowała śmierć 10 osób i rany ponad 100. W 1901 r. w Uralsku podczas burzy 21 osób skryło się do sieni w pewnym domu, gdy nagle zagrzmiało i pojawiła się we wnętrzu kula ognista, która bardzo powoli zbliżyła się do głowy jednej z dziewcząt; po dotknięciu przez kulę dziewczyna padła martwa, natomiast kula ognista oddaliła się do sąsiedniego pokoju i tam wybuchła, powodując zniszczenie. W podobny sposób zginął także fizyk rosyjski, Richmann, który w 1753 r. powtarzał w Petersburgu doświadczenia Franklina z wydobywaniem iskier podczas burzy z wysokiego pręta metalowego; w pewnej chwili z pręta wyskoczył w kierunku profesora bładobłękitny „kłąb ognisty” wielkości pięści; rozległ się huk jakby wystrzału z działa i Richmann padł martwy.

W innych opisywanych przypadkach piorun kulisty powoduje daleko mniejsze szkody lub nie powoduje ich wcale. I tak, np. w 1934 r. pewien Anglik wraz z dwunastoletnim synem znajdował się na wycieczce samochodem i napotkał burzę. Jego syn otwierał właśnie żelazną bramę na drodze, gdy ojciec spostrzegł kulę ognistą o średnicy około 30 cm zbliżającą się do bramy wśród drzew; gdy kula zetknęła się z bramą, ręka chłopca została sparaliżowana na kilka godzin, ale na tym się skończyło. W 1936 r. zdarzyło się, że po uderzeniu zwykłego pioruna do wnętrza domu przeniknęła kula ognista o średnicy około 20 cm i potoczyła się pod drewnianą ławę; wtedy gospodarz odważnie zdołał zniszczyć kulę kilkoma uderzeniami deski nie ponosząc żadnego szwanku; po kuli pozostał tylko silny zapach.

Znane są też liczne obserwacje pioruna kulistego w samolotach. W 1938 r. kula ognista wpadła przez otwarte okno do kabiny pilota wodnopłatuwa brytyjskiego, lecącego na wysokości 2500 m. Kula osmałiła brwi i rzęsy pilota, po czym nie czyniąc dalszej krzywdy, przewędrowała obok zdumionego pasażera, aby z głośnym hukiem wybuchnąć w tylnej części samolotu. W 1956 r. obserwowano dwa „zderzenia” samolotów radzieckich z piorunami kulistymi (na wysokości 3300 i 5000 m); w jednym przypadku dokładne oględziny samolotu po wylądowaniu wykazały, że uszkodzona jest część śmigła, w drugim – nie stwierdzono najmniejszych śladów, chociaż po uderzeniu pioruna zgasł jeden z silników samolotu, uruchomiony po jakimś czasie przez pilota. W 1963 r. po uderzeniu pioruna zwykłego w pasażerski samolot „Eastern Airlines”, lecący z Nowego Jorku do Waszyngtonu, pasażerowie ze zdumieniem spostrzegli, że od strony kabiny pilotów leci (z prędkością tylko ok. 1,5 m/s) na wysokości ok. 75 cm nad podłogą kula ognista o średnicy ok. 20 cm. Przelatywała ona w odległości zaledwie kilkudziesięciu centymetrów od pasażerów, którzy jednak nie doznali żadnej krzywdy; kula miała podobno świecić jak żarówka o mocy ok. 10 W, lecz nie wysyłała ciepła. W 1957 r. piloci brazylijskiego transportowca spostrzegli w nocy, jak do ich

samolotu zbliża się czerwonawy „obiekt”, który w pobliżu samolotu nagle zniknął, przy czym uległo zniszczeniu kilka elektrycznych urządzeń pokładowych, np. nadajnik. (Ta ostatnia relacja pochodzi z książki o latających talerzach.)

Podobnych relacji przytaczać można by bardzo wiele. Duża różnorodność zjawiska, zaskoczenie świadków, ich częsty brak kwalifikacji, wszystko to sprawia, że dość trudno jest wyróżnić najbardziej charakterystyczne i powtarzalne cechy dla zjawisk zaliczanych do piorunów kulistych. Spróbujmy jednak podać takie podsumowanie, wzorując się na istniejących pracach przeglądowych:

1. Pioruny kuliste pojawiają się najczęściej podczas burzy lub tuż po niej, ale pewien ich procent (ok. 20% według ostatnich statystyk radzieckich) nie ma widocznego związku z burzą, występuje przy ładnej pogodzie.
2. Rozmiary pioruna są różnorodne, najczęściej średnica kuli ma od kilkunastu do kilkudziesięciu centymetrów, są jednak relacje o kulach kilkucentymetrowych i parometrowych.
3. Kształt na ogół zbliżony do kulistego, ale czasem nieregularny gruszkowaty, z wystęпами; niekiedy sypią się iskry.
4. Barwa najczęściej czerwonawa, ale może być także żółta, pomarańczowa, biała, niebieska, zielona.
5. Ruch odbywa się czasem na niewielkiej wysokości nad ziemią, z wiatrem lub pod wiatr, czasem mamy jakby swobodne spadanie pioruna, czasem unoszenie się do góry. Obserwacje z samolotów świadczą o występowaniu tych zjawisk także na dużych wysokościach. Czasem kule ogniste poruszają się wzdłuż dobrych przewodników elektryczności, w innych przypadkach nie są związane z żadnymi przedmiotami, czasem wręcz zdają się unikać przewodników. Mogą nagle pojawiać się w zamkniętych pomieszczeniach.
6. Czas trwania: kilka do kilkunastu sekund, ale są relacje o zjawiskach trwających wiele minut.
7. Czasem pojawia się nie jedna kula, lecz dwie lub więcej.
8. Niektóre pioruny kuliste wyraźnie promieniują ciepło odczuwane przez obserwatorów, inne nie. Jedne są oślepiająco jasne, inne nie. Jedne niszczą i zabijają, inne znikają bezgłośnie, nie powodując żadnych szkód.

Z tego zestawienia najlepiej widać, że jak mało poznany zjawiskiem mamy do czynienia. Nic więc dziwnego, że żadna z wysuwanych hipotez nie potrafiła dotychczas wytłumaczyć wszystkich obserwowanych i tak różnorodnych cech piorunów kulistych. A było już tych hipotez bardzo wiele. Większość z nich, ale nie wszystkie, przyjmują, że pioruny kuliste mają rzeczywiście naturę elektryczną. Trudność zasadniczą sprawia wyjaśnienie źródła dużej energii kul ognistych (pewnego razu



piorun kulisty wpadł do beczki pełnej wody, która zaczęła się gotować; na tej podstawie można było ocenić jego całkowitą energię na około 0,3 kWh) i ich długiego, jak na małe rozmiary, świecenia. Znany radziecki fizyk, Piotr Kapica, zwrócił uwagę, że czas wypromieniowania energii przez piorun kulisty jest proporcjonalny do jego średnicy  $d$  (wynika to stąd, że energia całkowita jest proporcjonalna do  $d^3$ , a straty zależą od powierzchni, czyli od  $d^2$ ). Weźmy dla porównania świecący obłok zjonizowanego gazu, powstający przy wzbudzeniu jądrowym: przy średnicy około 150 m czas jego wyświecenia jest mniejszy niż 10 sekund. Stąd wynika, że piorun kulisty o średnicy 10 cm powinien przestać świecić po około 0,01 s, tymczasem w bardzo licznych przypadkach obserwowano te zjawiska przez 1–2 minuty. Wobec tego, mówi Kapica, należy przyjąć, że energia pioruna kulistego jest ciągle dostarczana z zewnątrz; jest on czymś w rodzaju rezonatora, pochłaniającego energię fal elektromagnetycznych, powstających podczas wyładowań elektrycznych. W tej hipotezie rozumiałe jest także to, że pioruny kuliste mogą z łatwością przenikać przez okna lub ściany, nie powodując żadnych uszkodzeń.

A oto kilka innych hipotez:

- energia pioruna bierze się z reakcji jądrowej rozszczepienia jąder ksenonu z powietrza pod wpływem wyładowań elektrycznych,
- energia pioruna powstaje wskutek zachodzącej reakcji chemicznej utleniania azotu, silnie egzotermicznej i samopodtrzymującej się z chwilą zapoczątkowania,
- pioruny kuliste są wywoływane przez mikrometeority z antymaterii, których anihilacja w powietrzu jest spowolniona przez warstwę „ochronną” zjonizowanego gazu wytwarzaną podczas tego procesu.

Są także fizycy, którzy uważają, że większość piorunów kulistych to złudzenie optyczne, tzw. powidoki, zjawisko powstawania obrazów na siatkówce oka wskutek silnych bodźców świetlnych (jak np. po spojrzeniu na Słońce lub silną lampę). Ta hipoteza

wysuwana już przez Kelvina tłumaczy dziwaczne relacje o niespodziewanym pojawianiu się kul ognistych w zamkniętych pomieszczeniach, wewnątrz samolotów itd. Niektóre z tych relacji są rzeczywiście niezwykle. Oto, jak opowiada pewien chemik z uniwersytetu w Sheffield, podczas silnej burzy znajdował się on w budynku, w którym było łącznie 25 osób w różnych pomieszczeniach. W pewnej chwili piorun (liniowy) uderzył w drzewo w odległości około 100 m, niszcząc je i uszkadzając przy okazji przewody telefoniczne. W tym momencie ludzie w tym budynku spostrzegli jednocześnie białą świecącą kulę o średnicy około 30 cm. Ale nie była to jedna kula, lecz tyle, ile było pomieszczeń: każdy obserwator zobaczył jasną kulę w środku pomieszczenia, w którym się znajdował, w kuchni, w salonie, w łazience, itd. Po kilku sekundach kule te znikły, bez widocznego śladu. Dodać trzeba, że wskutek silnego grzmotu w chwili uderzenia pioruna ludzie byli ogłuszeni przez około pół godziny. Trudno przypuszczać, żeby było to kilka piorunów kulistych jednocześnie. Należy sądzić, że w tym wypadku przyczyną był powidok, wywołany silnym bodźcem elektromagnetycznym.

Nie ma więc w tej chwili jednej, jedynej teorii wyjaśniającej wszystkie obserwowane cechy różnorodnych zjawisk nazywanych piorunami kulistymi. Podobnie ma się sprawa z „latającymi talerzami”, które również według relacji obserwatorów wykazują bardzo różnorodne cechy i dla których nie ma dotychczas jednolitego wyjaśnienia. Autorowi tego artykułu wydaje się, że, być może, jesteśmy w sytuacji podobnej do naszych przodków z XVIII w., którzy wszystkie różnorodne obserwowane zjawiska nazywali meteorami. My też obserwujemy wiele różnych zjawisk, tajemniczych i niezrozumiałych, współczesnych „meteorów”, niektóre z nich nazywamy piorunami kulistymi, inne – latającymi talerzami. Za jakiś czas może się okazać, że chodzi o kilka odrębnych zjawisk różniących się naturą fizyczną. I może ktoś w przyszłości będzie się z politowaniem wyrażał o swych nierozsądnych przodkach z XX wieku, którzy nie potrafili znaleźć właściwego podziału i wyjaśnienia tych zjawisk.



**Rozwiązanie zadania M 856.**

Mamy  $(x^2 - 1)(x^{2n} + x^{2n-2} + x^{2n-4} + \dots + x^2 + 1) = x^{2n+2} - 1 = (x^{n+1} - 1)(x^{n+1} + 1) = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)(x + 1)(x^n - x^{n-1} + x^{n-2} - \dots + x^2 - x + 1)$ , z czego wynika, że można położyć  $f(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$ ,  $g(x) = x^n - x^{n-1} + x^{n-2} - \dots + x^2 - x + 1$ .



**Rozwiązanie zadania M 857.**

Tak, istnieją. Mamy  $(x^5 - 1)(x^{10} + x^5 + 1) = x^{15} - 1 = (x^3 - 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1)$ , więc, jak się wydaje, wielomian  $x^{10} + x^5 + 1$  powinien dzielić się przez  $x^2 + x + 1$ . Rzeczywiście, po wykonaniu dzielenia otrzymujemy  $x^{10} + x^5 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$ .

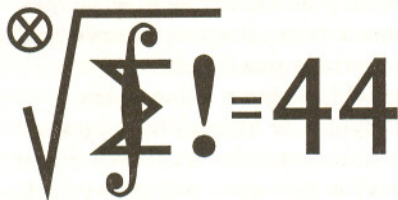
**Uwaga:** Można dowieść, że dalej już rozkładać się nie da.



**Rozwiązanie zadania M 858.**

Wielomian  $(x + 1)^{2n+1} + x^{n+2}$  jest podzielny przez  $x^2 + x + 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian  $((x + 1) - (x^2 + x + 1))^{2n+1} + x^{n+2}$  jest podzielny przez  $x^2 + x + 1$ . Mamy jednak  $((x + 1) - (x^2 + x + 1))^{2n+1} + x^{n+2} = (-x^2)^{2n+1} + x^{n+2} = -x^{n+2}(x^{3n} - 1) = -x^{n+2}(x^3 - 1)(x^{3n-3} + x^{3n-6} + \dots + x^3 + 1)$ , a  $x^3 - 1$  jest podzielny przez  $x^2 + x + 1$ .





Termin nadsyłania rozwiązań:

30 XI 1998

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 353 ( $WT=2,39$ ) i 354 ( $WT=1,50$ )  
z numeru 1/1998

Konrad Patkowski	- Gdańsk	43,98
Piotr Kumor	- Olsztyn	43,10
Maciej Mostowski	- Warszawa	42,81
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	39,37
Witold Bednarek	- Łódź	34,16
Paulina Domagańska	- Zbąszczynek	34,09
Zbigniew Skalik	- Pyskowice	33,65
Bogumiła Piotrowska	- Zielona Góra	32,56

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 254 ( $WT=2,37$ ) i 255 ( $WT=1,73$ )  
z numeru 3/1998

Andrzej Idzik	- Bolesławiec	41,52
Tomasz Wietecha	- Tarnów	23,98
Jarosław Łazuka	- Warszawa	23,97
Marek Wójcicki	- Szczecin	22,23
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	22,02
Aleksander Surma	- Myszków	14,47

**361.** Przypuśćmy, że  $P(x)$  jest wielomianem o wymaganych własnościach i że  $k > 3$ . Różnica  $P(k+1) - P(0)$  dzieli się przez  $k+1$ , a jej wartość bezwzględna nie przekracza  $k$ . Jest więc równa zero, skąd wniosek, że

$$P(x) - P(0) = x(x-k-1)Q(x)$$

dla pewnego wielomianu  $Q(x)$  o współczynnikach całkowitych; przy tym  $Q(1) \neq 0$ , bo  $P(1) \neq P(0)$ . Dla  $j = 2, \dots, k-1$  wartość bezwzględna iloczynu  $j(j-k-1)$  jest większa od  $k$ , natomiast moduł różnicy  $P(j) - P(0)$  nie przekracza  $k$ . W takim razie  $Q(j) = 0$  dla  $j = 2, \dots, k-1$ , i w konsekwencji

$$Q(x) = (x-2)(x-3) \dots (x-k+1)R(x)$$

dla pewnego wielomianu  $R(x)$  o współczynnikach całkowitych;  $R(1) \neq 0$ . Z uzyskanych wzorów wynika nierówność

$$|P(1) - P(0)| = 1 \cdot k \cdot |Q(1)| = k \cdot (k-2)! \cdot |R(1)| \geq k \cdot (k-2)! > k,$$

sprzeczna z warunkami zadania. To znaczy, że dla  $k > 3$

nie istnieje wielomian o podanej własności. Dla  $k \leq 3$  wielomiany takie istnieją; oto przykłady (kolejno dla  $k = 1, 2, 3$ ):  
 $P_1(x) = x(2-x)$ ;  $P_2(x) = x(3-x)$ ;  $P_3(x) = x(4-x)(x-2)^2$ .

**362.** Skoro  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  są czterema różnymi okręgami,  $P_1, P_2, P_3, P_4$  są czterema różnymi punktami. Oznaczmy środek okręgu  $\omega_i$  przez  $O_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), a środek okręgu  $\Omega$  przez  $Q$ .

Niech  $\mathbf{v}_i = \overrightarrow{SO_i}$ . Czworokąt  $SO_iP_iO_{i+1}$  jest rombem, więc  $\overrightarrow{SP_i} = \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i+1}$ . Zatem  $\overrightarrow{P_iP_{i+1}} = \overrightarrow{SP_{i+1}} - \overrightarrow{SP_i} = \mathbf{v}_{i+2} - \mathbf{v}_i$ , skąd  $\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{P_3P_4}$ . To znaczy, że czworokąt  $P_1P_2P_3P_4$  jest równoległobokiem; a ponieważ jest wpisany w okrąg  $\Omega$ , jest to prostokąt. Tak więc  $P_1P_2 \perp P_2P_3$ , czyli  $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_2$ . Stąd łatwo wynika, że  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \perp \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$ . Odcinek  $P_1P_3$  jest średnicą

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

**Zadania z matematyki nr 365, 366**

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**365.** Znaleźć wszystkie czwórki liczb całkowitych  $t, x, y, z > 0$  spełniające równanie

$$(x+y)(y+z)(z+x) = txyz$$

wraz z warunkiem: liczby  $x, y, z$  są parami względnie pierwsze.

**366.** Punkt  $D$  leży na boku  $AC$  trójkąta  $ABC$ . Okrąg o środku  $P$  opisany na trójkącie  $ABD$  jest styczny do prostej  $BC$ . Okrąg o środku  $Q$  opisany na trójkącie  $BCD$  jest styczny do prostej  $AB$ . Odcinki  $PQ$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $E$ . Udowodnić, że  $|PQ| \cdot |BD|^3 = 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot |PE| \cdot |QE|$ .

Zadanie 366 zaproponowała pani Joasia Jaszuka z Warszawy.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1998**

Przypominamy treść zadań:

**361.** Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie  $k$ , dla których istnieje wielomian  $P(x)$  o współczynnikach całkowitych spełniający warunki:  $P(0) \neq P(1)$ ,  $0 \leq P(j) \leq k$  dla  $j = 0, 1, \dots, k+1$ .

**362.** Cztery różne okręgi  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  o jednakowym promieniu  $r$  przechodzą przez wspólny punkt  $S$  i przecinają się kolejno parami:

$$\omega_i \cap \omega_{i+1} = \{S, P_i\} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4. \quad (\omega_5 = \omega_1);$$

przy tym punkty  $P_1, P_2, P_3, P_4$  leżą na okręgu  $\Omega$  o promieniu  $R$ , a środek okręgu  $\Omega$  leży w odległości  $d$  od punktu  $S$ . Znaleźć związek między liczbami  $r, R, d$ . Czy każda trójka liczb dodatnich, spełniająca ów związek, jest wyznaczona przez pewną czwórkę okręgów  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ ?

okręgu  $\Omega$ , wobec czego  $2 \cdot \overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SP_1} + \overrightarrow{SP_3} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$ . Zatem

$$\begin{aligned} (2d)^2 &= \left( \sum \mathbf{v}_i \right)^2 = \\ &= \sum |\mathbf{v}_i|^2 + 2 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 + 2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4 + 2 \cdot (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4) = \\ &= 4r^2 + 2 \cdot (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4). \end{aligned}$$

Z drugiej strony,

$$\begin{aligned} (2R)^2 &= |P_1P_3|^2 = |P_1P_2|^2 + |P_2P_3|^2 = (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)^2 + (\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_2)^2 = \\ &= 4r^2 - 2 \cdot (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4). \end{aligned}$$

Dodajemy otrzymane równania i mamy szukany związek:  
 $R^2 + d^2 = 2r^2$ .

Aby odpowiedzieć na ostatnie pytanie z zadania, ustalmy okrąg  $\omega$  o środku  $S$  i promieniu  $r$  i zauważmy, że jeśli  $O_1O_3$  i  $O_2O_4$  są dowolnymi prostymi cięciwami tego okręgu, to okręgi  $\omega_i$  (o środkach  $O_i$  i promieniu  $r$ ) wyznaczają punkty  $P_i$  będące kolejnymi wierzchołkami prostokąta (bowiem  $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_2$ ); istnieje zatem okrąg  $\Omega$ .

Gdy prostopadłe cięciwy  $O_1O_3$  i  $O_2O_4$  są króciutkie (a więc każdy z odcinków  $O_iO_{i+1}$  ma długość bliską  $\sqrt{2}r$ ), wówczas punkty  $P_i$  leżą blisko siebie i promień okręgu  $\Omega$  może być dowolnie mały. Gdy  $O_1O_3$  i  $O_2O_4$  są prostopadłymi średnicami okręgu  $\omega$ , wówczas punkty  $P_i$  są wierzchołkami kwadratu o boku  $2r$  i okrąg  $\Omega$  ma promień  $R = \sqrt{2}r$ .

Przechodząc w sposób ciągły od jednej konfiguracji do drugiej (przy ustalonym  $r$ ), jesteśmy w stanie uzyskać wszystkie wartości  $R$  z przedziału  $(0, \sqrt{2}r)$ ; wartość  $d$  jest wyznaczona przez równanie  $R^2 + d^2 = 2r^2$ . Wobec dowolności  $r$  daje to twierdzącą odpowiedź na postawione pytanie.





Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1998

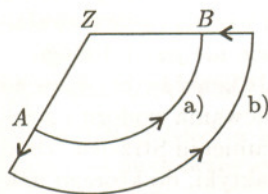
**262.** Zerwanie się napiętego drutu stalowego jest niebezpieczne, gdyż urwane końce uzyskują przy tym dużą prędkość. Obliczyć wartość tej prędkości. Niezbędne dane wziąć z tablic.

**263.** Punkt  $Z$  jest źródłem przenikliwego promieniowania izotropowego (tzn. którego natężenie nie zależy od kierunku), a punkty  $A$  i  $B$  są od niego jednakowo odległe, przy czym kierunki  $ZA$  i  $ZB$  tworzą kąt  $120^\circ$  (rys. 1). Którą drogę z  $A$  do  $B$  należy wybrać, idąc ze stałą prędkością, aby otrzymać przy tym jak najmniejszą dawkę promieniowania:

- a)  $1/3$  okręgu o środku w  $Z$ ,
- b) odcinek z  $A$  w kierunku przeciwnym do  $Z$  (jak długi?),  $1/3$  okręgu o promieniu większym niż poprzednio i zbliżenie do  $Z$  wzdłuż promienia?

Czy istnieje rozwiązanie lepsze od każdego z tych dwóch? Jeśli tak, to opisać taką drogę i podać wartość otrzymanej dawki (niekoniecznie musi to być droga optymalna). Można użyć dowolnych jednostek.

Rys. 1

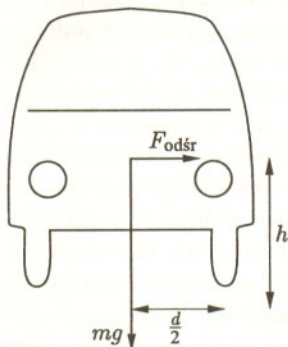


**Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1998**

Przypominamy treść zadań:

**258.** Jednym ze „ślepych zaułków” w rozwoju motoryzacji były projekty samochodu trójkołowego. Obliczyć maksymalną prędkość  $v'$ , z jaką taki samochód mógłby na poziomej jezdni wykonać zakręt bez przewrócenia się, jeśli maksymalna prędkość samochodu czterokołowego na tym zakręcie wynosi  $v = 60$  km/h. Trójkołowiec ma dwa koła w przedniej osi odległe od siebie o  $d$  i jedno koło tylne odległe od środka przedniej osi o  $l$ , przy czym tę samą wartość  $d$  ma odległość między kołami w osi samochodu czterokołowego. Środek masy obu samochodów leży na tej samej wysokości  $h$  nad jezdnią, a nacisk na każde z kół jest jednakowy (w samochodzie stojącym). Pominąć efekty związane z przyspieszaniem lub hamowaniem, a także ze zmianą promienia skrętu (rozpatrujemy ruch jednostajny po okręgu); ponadto przyjmując, że promień skrętu jest znacznie większy od rozmiarów samochodu.

Rys. 2



**259.** Czy można z trzech jednakowych soczewek skupiających skonstruować lunetę powiększającą trzykrotnie i dającą obraz: a) prosty, b) odwrócony? Jeśli tak, to jakie powinny być odległości między kolejnymi soczewkami?

**258.** W przypadku samochodu czterokołowego rozpatrując siły działające w płaszczyźnie prostopadłej do osi samochodu (rys. 2), stwierdzamy, że samochód nie przewróci się, jeśli spełniona będzie nierówność

$$(*) \quad \frac{F_{odśr}}{mg} < \frac{d}{2h}$$

Podstawiając  $F_{odśr} = mv^2/r$  (gdzie  $r$  – promień skrętu), otrzymujemy ograniczenie prędkości w postaci  $v^2 < rdg/(2h)$ .

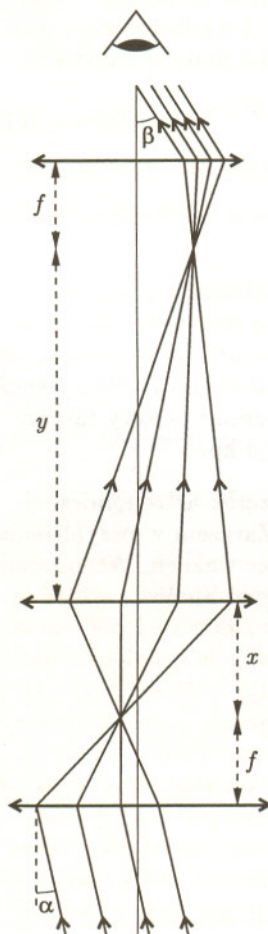
Dla samochodu trójkołowego powyższe zależności obowiązują z dwiema modyfikacjami. Po pierwsze, zgodnie z założeniem o jednakowym obciążeniu kół rzut środka masy na płaszczyznę poziomą leży w odległości  $(1/3)l$  od środka przedniej osi, a  $(2/3)l$  od tylnego koła; odległość tego punktu od prostej przechodzącej przez tylne koło i jedno z przednich jest równa

$$d' = \frac{dl}{3\sqrt{l^2 + (d/2)^2}}$$

i pełni rolę analogiczną do  $d/2$  na rysunku i w równaniu (\*). Po drugie, istotna jest ta składowa siły odśrodkowej, która jest prostopadła do wyżej wzmiankowanej prostej – znajdziemy ją, mnożąc  $F_{odśr}$  przez ułamek  $l/\sqrt{l^2 + (d/2)^2}$ . Po wprowadzeniu tych zmian do równania (\*) otrzymujemy nierówność  $v'^2 < rdg/(3h)$ , zatem graniczna wartość  $v'$  wynosi  $v' = v\sqrt{2/3} \approx 49$  km/h.

**259.** Oznaczmy ogniskową soczewek przez  $f$ , a odległości między nimi przez  $d_1$  i  $d_2$ . Przyjmijmy – jak zwykle w przypadku lunet – że przedmiot jest bardzo odległy, czyli wiązka światła wpadającego do lunety jest równoległa i tworzy z osią optyczną mały kąt  $\alpha$ . Wiązka wybiegająca z lunety powinna także być równoległa, a kąt  $\beta$  między nią a osią ma, zgodnie z założeniem, mieć wartość  $\beta = 3\alpha$ . Zatem obraz wytworzony przez pierwszą soczewkę (będący przedmiotem dla drugiej) znajduje się w jej płaszczyźnie ogniskowej w odległości  $\alpha f$  od osi, a obraz wytworzony przez drugą soczewkę (będący przedmiotem dla trzeciej) znajduje się w płaszczyźnie ogniskowej trzeciej soczewki w odległości  $\beta f$  od osi (rys. 3). Wynika stąd, że druga soczewka wytwarza obraz trzykrotnie powiększony, czyli jeśli ten obraz jest rzeczywisty, to jest odległy od soczewki o  $y = 4f$ , natomiast przedmiot jest odległy o  $x = (4/3)f$ . Rozwiązanie (odpowiadające luncie dającej obraz prosty) ma postać  $d_1 = f + x = (7/3)f$ ,  $d_2 = f + y = 5f$ . Dla przypadku lunety odwracającej rozwiązanie nie istnieje, gdyż jej powiększenie nie może przekraczać wartości 2 (tak byłoby dla  $d_1 = (3/2)f$ ,  $d_2 = 0$ ).

Rys. 3





## Patrz w niebo

Na pierwszy rzut oka Kosmos robi wrażenie, że jest generalnie pusty z wyjątkiem szczególnych miejsc, gdzie znajdują się wyraźne zgęszczenia materii. Zgęszczenia te występują w bardzo różnych skalach. W Układzie Słonecznym mamy na ogół niemal próżnię, a w niej z rzadka takie zgęszczenia jak Słońce, planety, planetoidy i inne okruchy skalne i lodowe. W Galaktyce też jest na ogół próżnia, a w niej z rzadka gwiazdy, gromady gwiazd i mgławice. W jeszcze większej skali w próżni Wszechświata znajdujemy gdzieś tam galaktyki i gromady galaktyk. Tak czy inaczej miejsca zgęszczonej materii są znikome w porównaniu z dzielącymi je obszarami pustki, przez co indywidualność tych zgęszczeń jest wyraźnie określona.

Jest to jednak obraz niekompletny. Zastosowanie wymyślnych narzędzi, wspomagających ludzkie oczy, ujawniło dwa podstawowe fakty: po pierwsze – to, co braliśmy za próżnię, wcale nią nie jest, lecz jest bardzo konkretnym (wprawdzie silnie rozrzedzonym) ośrodkiem poddającym się badaniom i grającym wielką rolę w życiu Wszechświata, i – po drugie – równie wyraźnymi indywidualnościami są dziury w tym ośrodku. Na przykład zdecydowanie uznana już jest obecność „pustek” w rozkładzie przestrzennym galaktyk. Galaktyki rozmieszczone są wyraźnie nierównomiernie i można wskazać kilka konkretnych ogromnych (o rozmiarach liczonych w dziesiątkach megaparseków) obszarów praktycznie pozbawionych galaktyk. Są to tzw. voidy, z angielskiego *void* – pustka. W wielu galaktykach, również w naszej,

można wskazać liczne bąble niemal próżni w ośrodku międzygwiazdowym. O ile mechanizm powstania voidów nie jest znany, to wiadomo, że przyczyną powstawania „dziur” w galaktykach jest aktywność pewnych gwiazd. Gdyby ośrodek międzygwiazdowy był jednorodny, to w wyniku wybuchu supernowej lub wokół gwiazdy z silnym wiatrem powstawałaby kulista dziura. Tak oczywiście nie jest i dlatego dziury te mają często kształt kanałów czy kominów. Na przykład obraz promieniowania wodoru na fali 21 cm dowodzi, że w tzw. ramieniu Strzelca (chodzi o ramię spiralne naszej Galaktyki, do którego należą liczne obiekty położone w gwiazdozbiornie Strzelca) zaczyna się stożek pustki skierowany w przybliżeniu prostopadle do płaszczyzny Galaktyki i otwierający się szerszym końcem w południowy obszar halo galaktycznego. W pobliżu wierzchołka tego stożka znajduje się wielki obłok molekularnego wodoru, w którym przebiega intensywne powstawanie gwiazd, a więc gdzie powstają silne wiatry gwiazdowe oraz zachodzą wybuchy supernowych. Najwyraźniej ekspandujący bąbel materii wyrzucanej przez gwiazdy znalazł sobie ujście poza płaszczyznę Galaktyki. Przypuszcza się, że materia ta z czasem spada znowu na dysk Galaktyki jak gigantycznych rozmiarów deszcz. Właściwie nawet Układ Słoneczny znajduje się w podobnym bąblu utworzonym w ośrodku międzygwiazdowym przez wiatr słoneczny. Ciągle jest nadzieja, że Voyagerzy zdołają wydostać się z tego bąbla i dostarczą informacji o materii naprawdę międzygwiazdowej.

Tomasz KWAST

## Wrzesień

Wieczorem we wrześniu góruje m.in. Koziorożec, gwiazdozbiór mogący kojarzyć się z zimą, gdyż to zima zaczyna się, gdy Słońce wchodzi w znak Koziorożca. No właśnie, w znak, a nie w gwiazdozbiór. W wyniku precesji osi ziemskiej znak Koziorożca zdążył przesunąć się w ciągu ponad 2000 lat do Strzelca. Koziorożec jest mało wyraźnym gwiazdozbiorem, nie zawierającym bardzo jasnych gwiazd, a odszukać go można na południku niebieskim poprowadzonym od Łabędzia na południe – Łabędź z bardzo jasnym Denebem jest gwiazdozbiorem na tyle okazałym, że może służyć jako punkt orientacyjny. Albo jeżeli przedłużyć na południe linię łączącą Węgę ( $\alpha$  Lutni) i Altaire ( $\alpha$  Orła), to też trafi się w Koziorożca. Najjaśniejsza gwiazda tego gwiazdozbioru jest oznaczona deltą i nazywa się Deneb Algedi. Jest gwiazdą zmienną o jasności około 3 mag, okresie zmienności nieco dłuższym od doby i leży w odległości 15,3 pc. 25 września 1846 r. niemiecki astronom, Johann Galle, znalazł w Koziorożcu Neptuna, co było ogromnym triumfem mechaniki,

gdyż nowa planeta została znaleziona w miejscu przewidzianym teoretycznie na podstawie zakłóceń ruchu Urana. W Koziorożcu można za pomocą lornetki dostrzec gromadę kulistą M 30 (NGC 7099) o jasności 7,5 mag. Na niebie ma ona rozmiar połowy tarczy Księżycy i leży w odległości 7,4 kpc.

Równonoc jesienna, czyli początek astronomicznej jesieni, wypada 23 września. Zarazem w przybliżeniu oznacza to nieodwołalny koniec wakacji. Wenus znajduje się we Lwie i powoli zbliża się do Słońca – widać ją nad ranem, ale coraz gorzej w słonecznej poświacie. Mars jest w Raku, wschodzi więc w drugiej połowie nocy. Jowisz jest na granicy Ryb i Wodnika (16 IX jest jego opozycja), a Saturn w Baranie i obie te planety widać praktycznie przez całą noc. Pełnia Księżycy wypada 6 IX i – podobnie jak miesiąc temu – nastąpi jego półcieniowe zaćmienie, które jest praktycznie niezauważalne. Księżyc zbliży się mocno do Jowisza 7 IX, Aldebarana 12 IX, Regulusa 18 IX i zakryje wtedy te ciała, ale z Polski zakrycia te nie będą widoczne.

T.K.



ZADANIE: Obliczyć granicę  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{e^x - 2x - 1}$ .

Rozwiązanie: Mamy do czynienia z wyrażeniem nieoznaczonym  $\frac{0}{0}$ . Dwukrotne zastosowanie reguły de l'Hospitala daje:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin x}{e^x - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \cos x}{e^x - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sin x}{e^x} = 2.$$

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (9)

ZADANIE: Niech  $a_1 = 99, a_2 = 199, a_3 = 400$  oraz  $a_n = 6a_{n-1} - 13a_{n-2} + 10a_{n-3}$  dla  $n \geq 4$ . Obliczyć  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ .

Rozwiązanie: Oznaczmy szukaną granicę przez  $g$ . Wtedy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g \cdot g = g^2$  i podobnie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+3}}{a_n} = g^3$ . Z drugiej strony

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+3}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6a_{n+2} - 13a_{n+1} + 10a_n}{a_n} = 6g^2 - 13g + 10,$$

skąd  $g^3 = 6g^2 - 13g + 10$ . Jedynym rozwiązaniem tego równania jest  $g = 2$ .

Odpowiedź:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ .

JWR

CYFROMANIA (7)

Jesteśmy już wystarczająco zaawansowani w naszych rozważaniach, aby rozwiązać następujące zadanie z obozu przygotowawczego do Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej:

ZADANIE: Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych  $n$ , że  $2^n$  w zapisie dziesiętnym ma końcówkę  $n$ , tzn.  $10^k | 2^n - n$ , gdzie  $k = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$ .

Rozwiązanie: Wykażemy, że dla każdego  $k \geq 2$  istnieje takie  $n_k < 10^k$ , iż  $10^k | 2^{n_k} - n_k$ .

Bezpośrednio sprawdzamy, że  $n_2 = 36$  spełnia powyższy warunek, gdyż  $2^{36} = 68719476736$ . Dla  $k \geq 2$  końcówka  $(k+1)$ -cyfrowa liczby  $2^n$  zależy tylko od  $k$ -cyfrowej końcówki liczby  $n$  (o ile  $n \geq k+1$ ). Tak więc wszystkie liczby postaci  $2^{100l+36}$  mają taką samą końcówkę 3-cyfrową. Zatem  $n_3 = 736$ . Podobnie  $n_4$  jest 4-cyfrową końcówką liczby  $2^{n_3}$  itd.

Aby stwierdzić, że w ten sposób otrzymamy  $n_k$ , spełniające warunek  $10^k | 2^{n_k} - n_k$ , należy zauważyć, iż  $n_k \geq k+1$ . Istotnie, skoro  $2^k | 2^{n_k} - n_k$  oraz  $2^{n_k} > n_k$ , to  $2^{n_k} - n_k \geq 2^k$ , skąd  $2^{n_k} > 2^k$  i  $n_k > k$ . Można wykazać, że w powyższy sposób otrzymamy wszystkie liczby spełniające warunki zadania.

Bezpośrednie obliczenia pokazują, że np.  $n_{14} = n_{15} = 75353432948736$ , nie ma więc liczby 15-cyfrowej spełniającej warunki podane w zadaniu. Podamy jeszcze wartość

$$n_{50} = 24570145528696872600159853338098615075353432948736.$$

JWR

PRAWIE ZAWSZE (1)

Twierdzenie: Niech  $n$  będzie prawie dowolną liczbą naturalną oraz niech liczby rzeczywiste  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  spełniają nierówność

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n x_i^4 + 13 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 5 \sum_{i=1}^n x_i \leq n + n^2.$$

Wtedy zachodzi nierówność

$$(2) \quad 10 \sum_{i=1}^n x_i^3 < 37n + n^2 + 55 \sum_{i=1}^n x_i.$$

Twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich  $n$ , z wyjątkiem następujących 17 wartości: 8, 323, 365, 518, 603, 680, 833, 875, 918, 960, 1113, 1190, 1275, 1428, 1470, 1785 i 1793.

Dowód:

Dla dowolnego  $x \in \mathbb{R}$  zachodzi nierówność  $(x-6)^2(x+1)^2 \geq 0$ , czyli  $10x^3 \leq x^4 + 13x^2 + 60x + 36$ . Dodając do nierówności (1) nierówność

$$10 \sum_{i=1}^n x_i^3 \leq \sum_{i=1}^n x_i^4 + 13 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 60 \sum_{i=1}^n x_i + 36 \sum_{i=1}^n 1,$$

otrzymujemy

$$10 \sum_{i=1}^n x_i^3 \leq 37n + n^2 + 55 \sum_{i=1}^n x_i,$$

czyli słabą wersję nierówności (2).

W ostatniej nierówności może zajść równość tylko wtedy, gdy

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n x_i^4 + 13 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 5 \sum_{i=1}^n x_i = n + n^2$$

oraz  $10x_i^3 = x_i^4 + 13x_i^2 + 60x_i + 36$  dla  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , czyli gdy  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \{-1, 6\}$ .

Równość (3) przyjmuje postać

$$\sum_{i=1}^n (x_i^4 + 13x_i^2 + 5x_i - 1) = n^2,$$

gdzie  $x_i^4 + 13x_i^2 + 5x_i - 1 \in \{8, 1793\}$ . Twierdzenie jest więc fałszywe dla tych  $n$ , dla których  $n^2$  jest sumą  $n$  liczb, z których każda jest równa 8 lub 1793. Takie  $n$  musi spełniać nierówność  $8 \leq n \leq 1793$ . Jeśli  $n^2$  jest sumą  $k$  liczb równych 1793 i  $n-k$  liczb równych 8, to  $n^2 = 1793k + 8(n-k)$ , czyli  $n(n-8) = 1785k$ , skąd widać, że należy wziąć  $k = \frac{n(n-8)}{1785}$ , o ile jest to liczba całkowita.

Zatem twierdzenie jest fałszywe dla tych  $n \in \{8, 9, \dots, 1793\}$ , dla których  $n(n-8)$  dzieli się przez 1785 = 3 · 5 · 7 · 17.

JWR





# Dodatek Olimpijski

## Zadania I stopnia

### Olimpiady Astronomicznej, Fizycznej i Matematycznej 1998/99

#### Olimpiada Matematyczna

Olimpiada Matematyczna skończy niebawem 50 lat. Zawody matematyczne dla uczniów szkół średnich zorganizowano w Polsce po raz pierwszy w roku szkolnym 1949/50. Laureat I Olimpiady, prof. dr Stanisław Balcerzyk, tak sobie odpowiadał po ponad 35 latach na pytanie, co dała swoim uczestnikom: *Sądzę, że głównie okazję sprawdzenia uzdolnień, przekonanie, że ponieważ istnieją tu w kraju ludzie, którzy znajdują w kontakcie z matematyką tak wiele satysfakcji, to, być może, mamy szansę dołączenia do nich (Delta 5/1986)*. Widać pomysł i sposób realizacji – opracowany pod kierunkiem prof. Stefana Straszewicza – okazały się udane, skoro przez tyle lat impreza ta jest organizowana corocznie niemal bez żadnych zmian.

Zawody Olimpiady Matematycznej są trzystopniowe. Etap pierwszy polega na rozwiązywaniu zadań

w domu. Na początku każdego roku szkolnego zadania olimpijskie rozsyłane są do szkół, a rozwiązania należy przysyłać do komitetów okręgowych Olimpiady. Zadania te są także publikowane w *Delcie* (corocznie w numerze 9) wraz z adresami komitetów. Do następnego etapu powoływani są ci uczestnicy, których rozwiązania uzyskały najwyższe oceny. Nie trzeba wcale rozwiązywać wszystkich zadań! Większość uczestników nadsyła tylko kilka rozwiązań. Oni również mogą się zakwalifikować do drugiego etapu; oczywiście im więcej rozwiązań (poprawnych!), tym większe szanse.

Zawody drugiego stopnia – dwudniowe – są przeprowadzane w lutym, jednocześnie w dziesięciu miastach, będących siedzibami komitetów okręgowych (Gdańsk, Katowice, Kraków, Lublin, Łódź, Poznań, Szczecin, Toruń, Warszawa, Wrocław). Każdego dnia



uczestnicy otrzymują trzy zadania do samodzielnego rozwiązania (w warunkach egzaminacyjnych, czyli bez „współpracy”); mają na to pięć godzin. Ci, którzy zrobią to najlepiej, są powoływani do zawodów finałowych, organizowanych w kwietniu na zasadach analogicznych do drugiego etapu.

Na podstawie wyników finału Komitet Główny Olimpiady przyznaje najlepszym tytuły laureatów Olimpiady lub wyróżnienia, ustala się także składy delegacji polskiej na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną, organizowaną corocznie w innym kraju, na Polsko-Austriackie Zawody Matematyczne oraz na Olimpiadę Matematyczną Państw Bałtyckich.

Wszyscy zawodnicy dopuszczeni do finału są zwolnieni z egzaminu z matematyki na maturze, otrzymując z urzędu ocenę celującą. Laureaci i finaliści korzystają

ze znacznych ułatwień przy ubieganiu się o przyjęcie na studia wyższe; zakres tych ułatwień ustalają senaty poszczególnych uczelni. W szczególności wydziały matematyczne uniwersytetów przyjmują finalistów Olimpiady Matematycznej bez żadnych egzaminów wstępnych.

W 1950 r. prof. Kazimierz Kuratowski, wówczas Prezes Polskiego Towarzystwa Matematycznego (organizatora wszystkich Olimpiad Matematycznych), zakończył przemówienie wygłoszone do laureatów I Olimpiady następującym zdaniem: *W imieniu Polskiego Towarzystwa Matematycznego witam was jako nowych członków rodziny matematycznej.* Od tej pory w rodzinie matematycznej znalazły się dzięki Olimpiadom setki nowych członków, z których wielu wzbogaciło ulubioną dziedzinę własnymi wynikami naukowymi.

## ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Dla województwa elbląskiego, gdańskiego i słupskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa bielskiego, częstochowskiego i katowickiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-005 Katowice.

Dla województwa krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa białkopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzeskiego i zamojskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 223, 20-031 Lublin.

Dla województwa kieleckiego, łódzkiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Adama Mickiewicza, ul. Matejki 48/49, 60-769 Poznań.

Dla województwa gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, płockiego, toruńskiego i włocławskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego, suwalskiego i warszawskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.



# L OLIMPIADA MATEMATYCZNA

## ZADANIA KONKURSOWE ZAWODÓW I STOPNIA

### I SERIA

1. Dowieść, że wśród liczb postaci  $50^n + (50n + 1)^{50}$ , gdzie  $n$  jest liczbą naturalną, występuje nieskończenie wiele liczb złożonych.

2. Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $a, b, c, d$  zachodzi nierówność

$$(a + b + c + d)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 6ab.$$

3. W trójkącie równoramiennym  $ABC$  kąt  $BAC$  jest prosty. Punkt  $D$  leży na boku  $BC$ , przy czym  $BD = 2 \cdot CD$ . Punkt  $E$  jest rzutem prostokątnym punktu  $B$  na prostą  $AD$ . Wyznaczyć miarę kąta  $CED$ .

4. Dane są takie liczby rzeczywiste  $x, y$ , że liczby  $x + y, x^2 + y^2, x^3 + y^3$  i  $x^4 + y^4$  są całkowite. Dowieść, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej  $n$  liczba  $x^n + y^n$  jest liczbą całkowitą.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia 12 października 1998 r. Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

### II SERIA

5. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich  $x, y$  spełniające równanie  $y^x = x^{50}$ .

6. Przekątne  $AC$  i  $BD$  czworokąta wypukłego  $ABCD$  przecinają się w punkcie  $P$ . Punkt  $M$  jest środkiem boku  $AB$ . Prosta  $MP$  przecina bok  $CD$  w punkcie  $Q$ . Dowieść, że stosunek pól trójkątów  $BCP$  i  $ADP$  jest równy stosunkowi długości odcinków  $CQ$  i  $DQ$ .

7. Dana jest liczba naturalna  $n \geq 2$ . Wyznaczyć wszystkie wielomiany  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  mające dokładnie  $n$  pierwiastków nie większych niż  $-1$  oraz spełniające warunek

$$a_0^2 + a_1a_n = a_n^2 + a_0a_{n-1}.$$

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia 12 listopada 1998 r. Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

### III SERIA

9. Punkty  $D, E, F$  leżą odpowiednio na bokach  $BC, CA, AB$  trójkąta  $ABC$ . Okręgi wpisane w trójkąty  $AEF, BFD, CDE$  są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt  $DEF$ . Udowodnić, że proste  $AD, BE, CF$  przecinają się w jednym punkcie.

10. Dana jest liczba  $x_1 > 0$ . Ciąg  $(x_n)$  jest zdefiniowany wzorem:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Udowodnić, że istnieje granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt[3]{n}}$  i obliczyć ją.

**Uwaga:** Pierwiastki są liczone z uwzględnieniem krotności: jeśli liczba  $x_0$  jest pierwiastkiem  $k$ -krotnym wielomianu  $P(x)$  (tzn. jeśli wielomian  $P(x)$  jest podzielny przez wielomian  $(x - x_0)^k$ , ale nie przez  $(x - x_0)^{k+1}$ ), wówczas liczba  $x_0$  jest traktowana jak  $k$  pierwiastków wielomianu  $P(x)$ .

8. Dana jest liczba naturalna  $n \geq 2$  oraz zbiór  $n$ -elementowy  $S$ . Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną  $k$ , dla której istnieją podzbiory  $A_1, A_2, \dots, A_k$  zbioru  $S$  o następującej własności: dla dowolnych dwóch różnych elementów  $a, b \in S$  istnieje taka liczba  $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , że zbiór  $A_j \cap \{a, b\}$  jest jednoelementowy.

11. W urnie znajdują się dwie kule: biała i czarna. Ponadto mamy do dyspozycji 50 kul białych i 50 czarnych. Wykonujemy 50 razy następującą czynność: losujemy z urny kulę, a następnie wrzucamy ją z powrotem do urny oraz dokładamy jedną kulę tego samego koloru, co wylosowana kula. Po zakończeniu tych czynności mamy więc w urnie 52 kule. Jaka liczba kul białych, znajdujących się w urnie, jest najbardziej prawdopodobna?

12. Wszystkie wierzchołki sześcianu o krawędzi  $a$  leżą na powierzchni czworoscianu foremnego o krawędzi 1. Wyznaczyć możliwe wartości  $a$ .

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia 10 grudnia 1998 r. Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.



# XLII OLIMPIADA ASTRONOMICZNA

## ROK SZKOLNY 1998/99

### INFORMACJE REGULAMINOWE

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół średnich.
2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne. Rozwiązywanie zadań zawodów II stopnia i III stopnia odbywa się w warunkach kontrolowanej samodzielności.
3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do 13 października 1998 r., rozwiązania 3 zadań, dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.
4. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, do 17 listopada br. Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.
5. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu, do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyższej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).
6. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem: **KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY ASTRONOMICZNEJ, Planetarium Śląskie, 41-500 Chorzów, skr. poczt. 10, w terminach podanych w p. 3 i 4. Decyduje data stempla pocztowego.**

7. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.
8. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A-4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: rok i miejsce urodzenia, pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi).
9. O uprawnieniach laureatów i finalistów decydują senaty wyższych uczelni. Wśród nagród dla najlepszych znajdują się teleskopy.

**ZALECANA LITERATURA:** obowiązujące w szkołach średnich podręczniki do przedmiotów ścisłych; H. Chrupała, M.T. Szczepański *25 lat olimpiad astronomicznych; Zadania olimpiad astronomicznych XXVI-XXXV* (w dwóch częściach); J.M. Kreiner *Astronomia z astrofizyką*; J. Mietelski *Astronomia w geografii*; E. Rybka *Astronomia ogólna*; David H. Levy *NIEBO – Poradnik użytkownika*; D.L. Moché *Astronomia – Przewodnik po Wszechświecie; Słownik szkolny – Astronomia* – praca zbiorowa; atlas nieba; obrotowa mapa nieba; czasopisma: *Urania – Postępy Astronomii, Wiedza i Życie, Świat Nauki, Delta, Fizyka w Szkole.*

### PIERWSZA SERIA ZADAŃ

1. Sztuczny satelita porusza się w płaszczyźnie równika ziemskiego po eliptycznej orbicie o mimośrodzie  $e = 0,82$ , z okresem równym okresowi obrotu Ziemi dookoła własnej osi. Jaka może być maksymalna szerokość geograficzna miejsc na powierzchni Ziemi, z których czasami możliwa jest łączność radiowa z tym satelitą?
2. Nie wyklucza się istnienia w przestrzeni międzygalaktycznej różnorodnych obiektów astronomicznych, w tym również gwiazd. Przedyskutuj, korzystając z diagramu H-R, jakie gwiazdy można by jeszcze zaobserwować w odległości 3 Mpc. Jakie są możliwości odróżnienia takiej gwiazdy od odległej galaktyki tła?
3. W oparciu o samodzielnie wybrane dane tabelaryczne – podając źródło – wyraż okresy obiegów Wenus i Marsa dookoła Słońca w ich średnich dobach słonecznych.
4. Które z wymienionych w tabelce obiektów można by obserwować w Twojej miejscowości w październiku bieżącego roku? W jakich okresach doby są one widoczne i jakie są najdogodniejsze pory ich obserwacji?

obiekt	rektascensja $\alpha_{2000}$	deklinacja $\delta_{2000}$
1.	18 <sup>h</sup> 51 <sup>m</sup>	-06° 16'
2.	16 <sup>h</sup> 42 <sup>m</sup>	+36° 27'
3.	04 <sup>h</sup> 43 <sup>m</sup>	+41° 16'
4.	06 <sup>h</sup> 09 <sup>m</sup>	+24° 20'
5.	08 <sup>h</sup> 40 <sup>m</sup>	+20° 00'

### ZADANIA OBSERWACYJNE

1. Sporządź rysunek tarczy Słońca na podstawie obrazu uzyskanego na ekranie. Na rysunku zaznacz położenia i kształt plam oraz kierunek ruchu dziennego Słońca. Wyznacz wynikającą z rysunku wartość liczby Wolfa. Uwaga! Zachowaj szczególną ostrożność przy kierowaniu przyrządu na Słońce. W szczególności nie wolno patrzeć przez przyrząd bezpośrednio na Słońce.
2. Maksimum jasności gwiazdy *o Cet* (Mira) przewidywane jest w połowie stycznia 1999 r. Na podstawie własnych obserwacji sporządź fragment krzywej jasności obejmujący okres co najmniej jednego miesiąca.
3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji astronomicznych prowadzonych w latach 1997, 1998, a w szczególności wyniki obserwacji zakrycia gwiazdy  $\alpha$  Tau (Aldebaran) w dniu 6.11.1998 r.

*Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. W przypadku zastosowania metody fotograficznej należy dołączyć negatywy. Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 17 listopada 1998 r.*



# XLVIII OLIMPIADA FIZYCZNA

## – ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

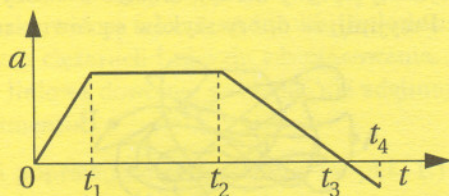
Rozwiązania zadań I stopnia należy przysłać do Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej w terminach: część I – do 25 października br., część II – do 20 listopada br. O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć w broszurze i na afiszu rozesłanych do szkół średnich.

### CZĘŚĆ I (termin wysyłania rozwiązań – 25 października 1998 r.)

Podaj lub wybierz i krótko uzasadnij prawidłową odpowiedź (za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty).

**Uwaga:** Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres domowy autora pracy, a także nazwę i adres szkoły, klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.

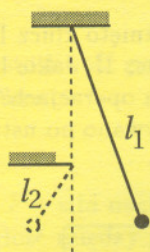
1. Rysunek 1 przedstawia zależność przyspieszenia ciała od czasu w ruchu prostoliniowym. W chwili  $t = 0$  ciało spoczywało. W której chwili prędkość ciała była największa?



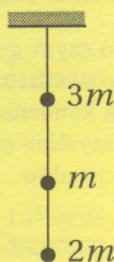
Rys. 1

2. Dwie metalowe kule o jednakowych promieniach – jedna pełna, druga wydrążona (lżejsza), wystrzelono (w powietrzu) jednocześnie pionowo do góry z jednakową prędkością początkową. Która z kul zatrzyma się wcześniej? Która osiągnie większą wysokość?

3. Małe ciało wisi na nici o długości  $l_1$ . Przy wychyleniach w lewo nić opiera się o przeszkodę (rys. 2) tak, że swobodna długość nici jest wtedy równa  $l_2$ . Oblicz okres małych drgań ciała. Naszkluj zależność kąta wychylenia ciała od czasu, podając na rysunku wszystkie charakterystyczne wielkości dotyczące wykresu.



Rys. 2



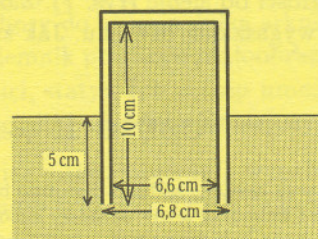
Rys. 3

4. Trzy kulki o masach  $3m$ ,  $m$  i  $2m$  wiszą na gumkach (rys. 3). Oblicz przyspieszenia, jakie uzyskają kulki natychmiast po przecięciu środkowej gumki. Zaniedbaj masy gumek.

5. Mała kulka o masie 800 g jest zaczepiona na nitce o wytrzymałości 15 N. Odchyłono ją od pionu o kąt  $65^\circ$  i puszczono. Czy nitka zostanie zerwana?

6. Po nagłym zatrzymaniu lokomotywy wzdłuż pociągu towarowego wędruje stukot zderzających się buforów. Czy szybkość przemieszczania się tego sygnału wzdłuż pociągu jest większa w przypadku pustych czy załadowanych wagonów?

7. Szklanka ma kształt cylindra o średnicy wewnętrznej 6,6 cm, zewnętrznej 6,8 cm i wysokości 10 cm. Masa szklanki wynosi 150 g. Szklankę zanurzano w wodzie, odwrócono i wyciągnięto do połowy (rys. 4). Jaką siłą trzeba działać na tę szklankę, by ją utrzymać?



Rys. 4

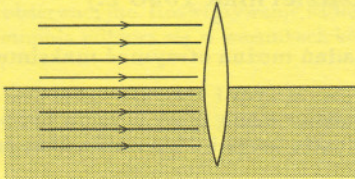
8. W igloo (eskimoskim domku lodowym) ludzie mogą przeżyć mimo bardzo silnego mrozu dlatego, że
- do igloo nie dostaje się wiatr,
  - lód ma temperaturę  $0^\circ\text{C}$ , która jest wyższa od temperatury zewnętrznej,
  - ubity śnieg lub lód jest złym przewodnikiem ciepła,
  - lód ma małe ciepło właściwe, więc ciepło ludzkiego ciała szybko go ogrzewa.
  - pod wpływem ciepła ludzkiego ciała lód zaczyna topnieć, a powstające ciepło topnienia dodatkowo podwyższa temperaturę w igloo.

Wybierz prawidłową odpowiedź (odpowiedzi) i krótko uzasadnij, dlaczego pozostałe odpowiedzi uważasz za błędne.

9. Mały, czuły manometr wykazuje nieustanne wahania mierzonego ciśnienia gazu. Objaśnij przyczynę tych wahań.

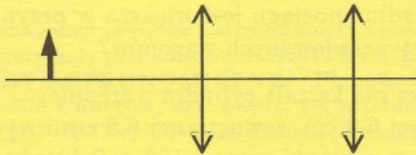


10. Równoległa wiązka światła pada na szklaną soczewkę zanurzoną do połowy w wodzie (rys. 5). Dorysuj dalszy bieg promieni światła.



Rys. 5

11. Przedmiot o wysokości 1 cm znajduje się w odległości 30 cm od soczewki o ogniskowej 10 cm, za którą w odległości 30 cm znajduje się następna soczewka o ogniskowej 25 cm (rys. 6). Gdzie powstanie obraz i czy będzie on rzeczywisty, czy urojony, prosty, czy odwrócony? Jaka będzie jego wysokość?

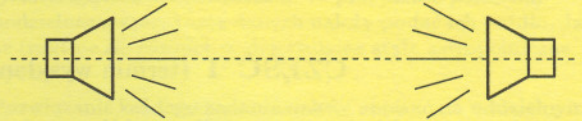


Rys. 6

12. Dwa identyczne głośniki podłączono jednakowo do wspólnego źródła napięcia przemiennego i ustawiono w pewnej odległości od siebie (rys. 7). Zaznacz obszary wzmocnienia i wygaszania dźwięku. Jak zmieni się

powyższy obraz, jeśli

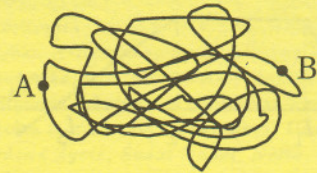
- zwiększymy częstotliwość napięcia,
- odsuniemy głośniki od siebie,
- zastąpimy powietrze gazem o dwukrotnie mniejszej gęstości pod tym samym ciśnieniem?



Rys. 7

13. Pracująca prądnica nagrzewa się. Wymień przyczyny tego zjawiska.

14. Kłębowisko drutów miedzianych, stykających się w przypadkowych miejscach, stanowi sieć, która między punktami A i B ma opór  $R$  (rys. 8). Jaki opór miałyby sieć powiększona liniowo  $n$ -krotnie, w której wszystkie druty byłyby  $n$  razy dłuższe i  $n$  razy grubsze? Przyjmij, że opory styków są równe zero.



Rys. 8

15. Mikroamperomierz o zakresie  $60 \mu\text{A}$  i oporze własnym  $20 \Omega$  musimy przerobić na woltomierz o zakresie  $50 \text{V}$ . Jaki opornik należy do niego dołączyć i jak – szeregowo czy równolegle?

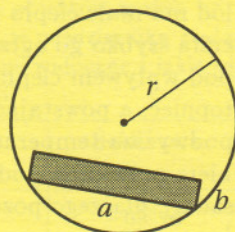
## CZĘŚĆ II (termin wysyłania rozwiązań – 20 listopada 1998 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres domowy autora pracy, a także nazwę i adres szkoły, klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

### ZADANIA TEORETYCZNE

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

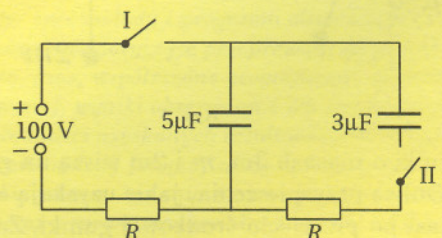
T1. Wewnątrz nieruchomego walca o promieniu  $r$  może ślizgać się bez tarcia jednorodny klocek o przekroju  $a \times b$  (rys. 9). Ruch odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do osi walca. Oblicz okres małych drgań klocka.



Rys. 9

T2. W obwodzie przedstawionym na rysunku 10 kondensatory były początkowo nienaładowane. Zamknijęto klucz I, po czym go otwarto, zamknijęto

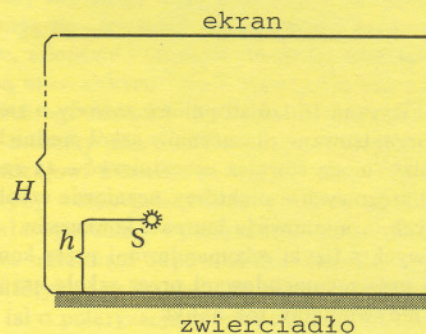
klucz II, po czym go otwarto, zamknijęto klucz I, po czym go otwarto, zamknijęto klucz II. Jakie było napięcie na kondensatorach po tych operacjach? Uwaga! Wszystkie operacje wykonywano po ustaniu przepływu prądów.



Rys. 10



T3. Na wysokości  $h = 1$  cm nad płaszczyzną zwierciadła znajduje się punktowe źródło światła monochromatycznego o długości fali  $\lambda = 500$  nm (rys. 11). Równoległe do płaszczyzny zwierciadła, na wysokości  $H = 1$  m znajduje się ekran, na którym widać prążki interferencyjne. Podaj położenia jasnych prążków. Podaj liczbę prążków na 1 mm w odległości 1 m od centrum obrazu interferencyjnego.



Rys. 11

### ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

D1. 1. Masz do dyspozycji nastrojoną gitarę, suwmiarkę, taśmę mierniczą lub linijkę, odważniki o znanych ciężarach i nici do ich mocowania. Wyznacz gęstość liniową dowolnej ze strun, nie zdejmując jej z instrumentu.

2. Oceń poprawność zastosowanej (w pkt. 1.) metody, wyznaczając gęstość liniową struny za pomocą wagi i taśmy mierniczej (po zdjęciu struny z gitary).

Uwagi:

a) Wartości częstotliwości drgań (podstawowych) strun w nastrojonej gitarze zebrano w tabeli.

Dźwięk	Częstotliwość, Hz
E	82,41
A	110,00
d	146,83
g	196,00
h	246,94
e <sup>1</sup>	329,63

b) Gęstość liniowa struny  $D$  jest to stosunek masy  $m$  elementu struny do jego długości  $l$ :

$$D = m/l.$$

c) Częstotliwość podstawowa drgań struny  $f$  wyraża się wzorem:

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{D}}$$

gdzie:  $F$  – siła naciągu struny,  $L$  – długość struny (odległość między punktami zamocowania).

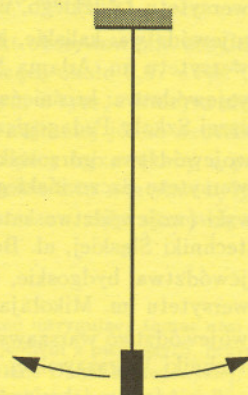
d) Zamiast stroić gitarę możesz zmierzyć częstotliwość drgań struny przy użyciu słuchawki telefonicznej (mikrofonu) i oscyloskopu lub częstotściomierza.

e) Strunę możesz zważyć, wykorzystując wagi dostępne w szkolnych pracowniach.

D2. Zbadaj, czy przewodnictwo cieplne drewna dla kierunku równoległego różni się od przewodnictwa cieplnego dla kierunku prostopadłego do włókien. Masz do dyspozycji suche deseczki świerkowe lub sosnowe, kawałek stearyny, gwoździe o dowolnych rozmiarach, linijkę, młotek oraz dostęp do kuchenki gazowej lub palnika spirytusowego. Możesz też używać dowolnych narzędzi do obróbki drewna. Zamiast kuchenki lub palnika, jako źródło ciepła możesz użyć np. lutownicy.

D3. Masz do dyspozycji zegarek z sekundnikiem lub stoper, przybory do pisania, kilka arkuszy papieru, walcowy pojemnik po filmie małoobrazkowym, plastelinę, nici, statyw lub zaczep umożliwiający zamocowanie nitki na odpowiedniej wysokości.

Wykorzystując nitkę i pojemnik wypełniony plasteliną, zbuduj wahadło (rys. 12). Zbadaj zależność amplitudy jego drgań od czasu. Sprawdź doświadczalnie, czy otrzymane wyniki można opisać przy założeniu, że siła oporu aerodynamicznego, działająca na poruszający się pojemnik, jest wprost proporcjonalna do jego prędkości chwilowej.



Rys. 12



Olimpiada Fizyczna to trójstopniowe zawody o zasięgu krajowym organizowane dla uczniów szkół średnich. W Olimpiadzie mogą również uczestniczyć – za zgodą komitetów okręgowych – niektórzy uczniowie szkół podstawowych, a mianowicie laureaci konkursów przedmiotowych z fizyki rekomendowani przez komisje konkursowe oraz rekomendowani przez szkołę uczniowie realizujący indywidualny tok nauki.

Zadania zawodów I stopnia rozsyłane są do szkół na początku września, a od zeszłego roku są także publikowane we wrześniowym numerze *Delty*. Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać w podanych terminach do komitetów okręgowych OF właściwych dla miejscowości, w których znajdują się szkoły, do których zawodnicy uczęszczają.

Zawody II i III stopnia odbywają się w dwóch turach – teoretycznej (trzy zadania) i doświadczalnej (jedno zadanie). Zawody każdej z tur II stopnia odbywają się w miastach, w których mają siedziby komitety okręgowe OF, jednocześnie we wszystkich okręgach. Do tury teoretycznej II stopnia uczestnicy kwalifikowani są przez komitety okręgowe na podstawie łącznej oceny za zadania obu części zawodów I stopnia. Do tury doświadczalnej powoływani są uczniowie, którzy za zadania tury teoretycznej uzyskali najwyższe oceny.

Kwalifikację do zawodów III stopnia przeprowadza Komitet Główny po sprawdzeniu według ujednoczonych kryteriów prac zawodników typowanych przez komitety okręgowe. Zawody III stopnia odbywają się w Warszawie i trwają dwa dni: pierwszego dnia uczestnicy wykonują zadanie doświadczalne, a drugiego – rozwiązują zadania teoretyczne.

Na podstawie łącznej oceny za rozwiązania zadań teoretycznych i zadania doświadczalnego Komitet Główny ustala listę laureatów i finalistów. Przyznawane są również wyróżnienia za rozwiązanie poszczególnych zadań. Pierwszych pięciu laureatów stanowi reprezentację na Międzynarodową Olimpiadę Fizyczną.

Wszyscy uczniowie zakwalifikowani do zawodów III stopnia są zwolnieni z egzaminu maturalnego z fizyki – na mocy obowiązujących przepisów otrzymują ocenę celującą. Ułatwienia dla uczestników olimpiady przy ubieganiu się o przyjęcie na studia ustalają senaty poszczególnych uczelni. Laureaci i finaliści są z reguły zwalniani z całości lub części egzaminów wstępnych na kierunkach przyrodniczych, technicznych, ekonomicznych, a nawet humanistycznych. Laureaci mogą być również przyjęci z pominięciem postępowania kwalifikacyjnego na studia medyczne. Niektóre uczelnie przyznały pewne przywileje uczestnikom zawodów doświadczalnych II stopnia.

Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Fizycznego oraz Komitet Główny Olimpiady Fizycznej przyznają roczne stypendia tym laureatom, którzy podejmują studia na kierunku fizyki lub pokrewnym.

## ADRESY KOMITETÓW OKRĘGOWYCH OLIMPIADY FIZYCZNEJ

Okręg białostocki (województwa: białostockie, łomżyńskie, ostrołęckie, siedleckie, suwalskie)  
Katedra Fizyki Uniwersytetu w Białymstoku, ul. Lipowa 41, 15-424 Białystok.

Okręg częstochowski (województwa: częstochowskie, kieleckie, opolskie)  
Instytut Fizyki Wyższej Szkoły Pedagogicznej, al. Armii Krajowej 13/15, 42-201 Częstochowa.

Okręg gdański (województwa: elbląskie, gdańskie, olsztyńskie, słupskie)  
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Gdańskiej, ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk-Wrzeszcz.

Okręg krakowski (województwa: bielskie, krakowskie, nowosądeckie)  
Instytut Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Okręg lubelski (województwa: bielsko-podlaskie, chełmskie, lubelskie, radomskie, zamojskie)  
Instytut Fizyki Uniwersytetu im. Marii Curie-Skłodowskiej, pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1, 20-031 Lublin.

Okręg łódzki (województwa: łódzkie, sieradzkie, skierniewickie, piotrkowskie)  
Instytut Fizyki Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Pomorska 149, 90-236 Łódź.

Okręg poznański (województwa: kaliskie, konińskie, leszczyńskie, poznańskie)  
Instytut Fizyki Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, ul. Umultowska 85, 61-614 Poznań.

Okręg rzeszowski (województwa: krośnieńskie, przemyskie, rzeszowskie, tarnobrzesckie, tarnowskie)  
Instytut Fizyki Wyższej Szkoły Pedagogicznej, ul. Reytana 16A, 35-310 Rzeszów.

Okręg szczeciński (województwa: gorzowskie, koszalińskie, pilskie, szczecińskie, zielonogórskie)  
Katedra Fizyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin.

Okręg śląsko-dąbrowski (województwo katowickie)  
Instytut Fizyki Politechniki Śląskiej, ul. Bolesława Krzywoustego 2, 44-100 Gliwice.

Okręg toruński (województwa: bydgoskie, ciechanowskie, płockie, toruńskie, wrocławskie)  
Instytut Fizyki Uniwersytetu im. Mikołaja Kopernika, ul. Grudziądzka 5, 87-100 Toruń.

Okręg warszawski (województwo warszawskie)  
Instytut Fizyki Politechniki Warszawskiej, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa.

Okręg wrocławski (województwa: jeleniogórskie, legnickie, wałbrzyskie, wrocławskie)  
Instytut Fizyki Doświadczalnej Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. M. Borna 9, 50-205 Wrocław.