delta

$h=6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s $\pi=3{,}141592...$

Trwa jubileusz XXV lat *Delty*:
6 czerwca 1973 roku powołano redakcję *Delty*,
8 grudnia odbyło się pierwsze posiedzenie Komitetu Redakcyjnego *Delty*, na którym przedstawiono próbny numer miesięcznika,
1 stycznia 1974 roku ukazał się w kioskach w nakładzie 30 tys. egzemplarzy, w cenie 5 zł, pierwszy numer *Delty*.

XXV lat powinien zamknąć numer 300 miesięcznika, jednak w okresie parcelacji RSW straciliśmy pięć numerów, tak więc numer taki ukaże się jako 5/1999.

Składając Czytelnikom najserdeczniejsze jubileuszowe życzenia, informujemy, iż od czerwca 1998 do maja 1999 w każdym numerze przypomnimy coś z dawnych lat.

Ten okazjonalny dział nazywa się **Stara Delta**.

SPIS TREŚCI

NUMERU 8(291)

W następnym numerze:

Czy prawo Hooke'a zawsze jest słuszne?

Okładkę wykonał
Krzysztof Biesaga

Na okładce wykorzystano obraz Pietera Bruegela Starszego „Wieża Babel"

Wybór artykułów z *Delty* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem
http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 843-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65.
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

czasopismo dla nauczycieli

MATEMATYKA

Korzystając z gościnnych łamów *Delty*, przedstawiamy *Matematykę* – czasopismo dla nauczycieli szkół podstawowych i średnich. *Matematyka* obchodzi w tym roku 50-lecie – pierwszy numer ukazał się we wrześniu 1948 roku – jest więc dwa razy starsza od *Delty*. Ponieważ jednak *Matematyka* jest dwumiesięcznikiem, na liczbę numerów powinniśmy iść „łeb w łeb". W tym jednak *Delta* bije nas regularnością – *Matematyka* miała trochę numerów „podwójnych", a przez parę lat ukazywała się 5 razy w roku, z przerwą wakacyjną. Jubileuszowy zeszyt wrześniowy ma numer 275.

W ciągu tych 50 lat *Matematykę* redagowało czworo redaktorów naczelnych. Pierwszym z nich, i założycielem pisma, był Bolesław Iwaszkiewicz, znany autor podręczników szkolnych, z których w liceum uczyli się starsi z obecnych redaktorów *Matematyki* (a także *Delty*). Następnymi byli: Witold Janowski, Włodzimierz Waliszewski i do dziś niżej podpisana. W *Matematyce* publikowali m.in. Hugo Steinhaus, Wacław Sierpiński, Zofia Krygowska, Leon Jeśmanowicz, Zdzisław Opial i wielu innych znanych matematyków.

Bolesław Iwaszkiewicz (1902–1989)

Mamy wielu autorów wspólnych z *Deltą*, liczymy na następnych!

Matematyka przeżyła przeprowadzkę z Wrocławia do Warszawy i z powrotem, kilka całkowitych zmian składu redakcji i komitetu redakcyjnego. Każda redakcja miała własną koncepcję pisma – jednak ciągłość jest wyraźnie widoczna. Utrzymał się nawet umowny podział artykułów na działy, do których dodaliśmy tylko Dział Instrumentów Klawiszowych, i od czasu do czasu coś okazjonalnego.

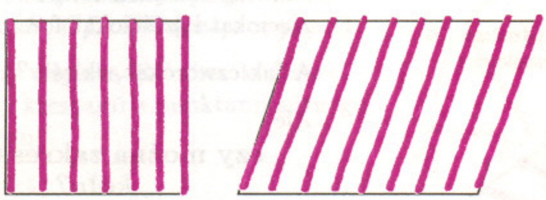
Poniżej prezentujemy kilka tekstów przygotowanych dla *Matematyki* przez jej obecną redakcję, a reprezentujących główne działy pisma.

I jeszcze informacja handlowa: *Matematyki* nie można kupić w kiosku – rozchodzi się ona wyłącznie w prenumeracie. Zamówienie można złożyć m.in. w firmie AMOS, która kolportuje także *Deltę* – nawet na tym samym blankiecie! Cena 1 egzemplarza w 1998 roku wynosi 4,50 zł. Naszym wydawcą są Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne (*primo voto* Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych) i to tam ustalana jest cena. Skład komputerowy, w ścisłej współpracy z redakcją, wykonuje wrocławska firma TORUS.

Agnieszka WOJCIECHOWSKA

Kreskówki

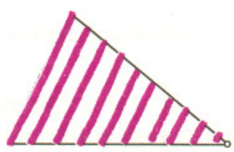
Kwadrat lub równoległobok można zakreskować.



Zakreskować – to znaczy przedstawić jako (nieskończoną) sumę odcinków, z których żadne dwa nie mają punktów wspólnych (rozważamy odcinki wraz z końcami, jak zwykle).

Czy można zakreskować trójkąt?

UWAGA: To nie jest zakreskowanie – pozostał jeden punkt!



Pisał już o tym Hugo Steinhaus w *Kalejdoskopie matematycznym*, WSiP 1989, str. 142.

Kreskówki cd. str. 2

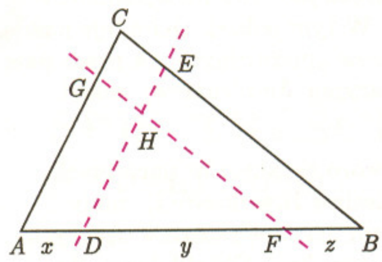
czasopismo dla nauczycieli

MATEMATYKA

Podział trójkąta

W książce M. Karpińskiego i J. Lecha *Geometria dla klasy II*, na str. 32 jest zadanie 93 następującej treści:

Prowadzimy dwie proste równoległe do dwóch boków trójkąta tak, że dzielą one trójkąt na cztery części o równych polach. Znajdź długości odcinków, na które proste te dzielą trzeci bok, jeśli jego długość wynosi 2.



$|AB| = 2$, $P_{\triangle ABC} = S$

ROZWIĄZANIE
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Kluczowa jest tu własność: stosunek pól figur podobnych jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

Mamy:

(1) $\triangle DBE \equiv \triangle AFG$,

(2) i oba są podobne do $\triangle ABC$ w skali $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(3) Również $\triangle DFH \sim \triangle ABC$ ze skalą podobieństwa $m = \frac{1}{2}$.

SPOSÓB I
Z podobieństwa (3) mamy $y = \frac{1}{2}|AB| = 1$, a z podobieństwa (2):
$x + y = \frac{1}{\sqrt{2}}|AB| = \sqrt{2}$, stąd $x = \sqrt{2} - 1$, oraz $z = |AB| - (x + y) = 2 - \sqrt{2}$.

Odpowiedź: $x = \sqrt{2} - 1$, $y = 1$, $z = 2 - \sqrt{2}$.

SPOSÓB II
Z podobieństwa (3) mamy $y = \frac{1}{2}|AB| = 1$, a z przystawania (1) wynika, że $x + y = z + y$, zatem $x = z = \frac{1}{2}$.

SPOSÓB III
Z podobieństwa (2): $x + y = \frac{1}{\sqrt{2}}|AB| = \sqrt{2}$, czyli $z = 2 - \sqrt{2}$. Z (1) mamy $x = z$, zatem $y = \sqrt{2} - x = 2\sqrt{2} - 2$.

Każdy sposób jest poprawny i każdy daje inny wynik! Jak to możliwe?!

Trzy rozumowania, startując z tych samych przesłanek, wiodą do sprzecznych odpowiedzi! Jeśli rozumowania są poprawne – a są (są na tyle krótkie, że łatwo je można dokładnie sprawdzić) – to jedyny stąd wniosek, że przesłanki zadania są sprzeczne – nie zachodzi opisana w nich sytuacja.

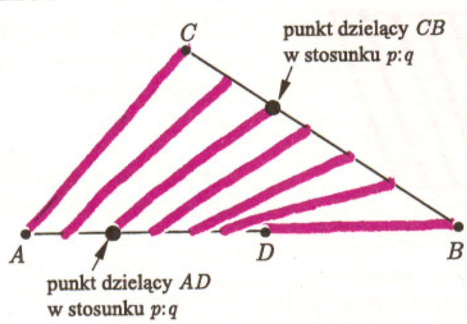
Powyższy wywód logiczny zapewne nie przekona zbyt wielu uczniów. Zatem rozwiążmy dodatkowo następujące zadanie; pomoże to wyjaśnić powyższą zagadkę.

ZADANIE. *W trójkącie o polu S poprowadzono dwie proste równoległe do dwóch boków, z których każda dzieli trójkąt na dwie figury o równych polach. Obliczyć pole równoległoboku, który powstał przy wierzchołku.*

Choć w pierwszej chwili wydaje się to niemożliwe, jednak **trójkąt można zakreskować.**

Kreski mają końce na odcinkach AD i CB.

Końce danej kreski dzielą AD i CB (odpowiednio) w tym samym stosunku.



ĆWICZENIE.
Jak można zakreskować pięciokąt i sześciokąt foremny?

A jak czworokąt wklęsły?

Ale

czy można zakreskować koło?

Kreskówki cd. str. 3

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku i korzystamy z poprzednich wyników:

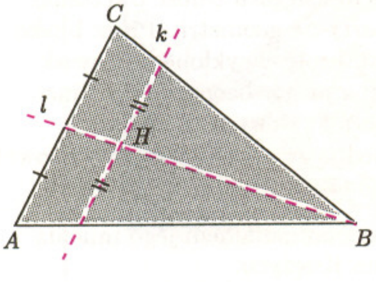
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \quad (\text{gdzie } a = |BC|,\ b = |AC|),$$

$$|BE| = \frac{1}{\sqrt{2}}|BC| = \frac{a}{\sqrt{2}} \ \Rightarrow\ |EC| = a\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},$$

analogicznie

$$|GC| = b\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}.$$

$$\mathrm{Pole}_{GHEC} = |EC|\cdot|GC|\cdot\sin\gamma = ab\sin\gamma\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} = S\cdot(\sqrt{2}-1)^2 \neq \frac{1}{4}S.$$



WNIOSEK: Pola otrzymanych czterech figur są dokładnie określone. Nie istnieje podział, o którym jest mowa w pierwszym zadaniu. Założenie jest fałszywe. A z fałszu może wyniknąć wszystko.

Na koniec zauważmy „coś pozytywnego":
Dla prostej $k \parallel AC$, połowiącej pole trójkąta, można znaleźć taką prostą l (nierównoległą do BC!), że razem dzielą trójkąt ABC na cztery części o równych polach – jest nią prosta zawierająca środkową trójkąta wychodzącą z wierzchołka B (tw. Talesa).

Żadna inna prosta tego warunku nie spełnia!

Jest tak dlatego, że dla każdej innej prostej l', jeśli nie przechodzi ona przez H, to któryś z czterech obszarów, jakie powstały dzięki k i l, jest zawarty (istotnie) w jednej z części podziału wyznaczonego przez k i l'. Jeśli natomiast l' przechodzi przez H, to odcina od któregoś z „kawałków" część o polu mniejszym niż $\frac{1}{4}S$.
Co więcej: jeżeli jakaś para prostych k, l (już nie ma mowy o równoległości) rozcina trójkąt na 4 części o równych polach, to każda z nich wyznacza tę drugą jednoznacznie. (Dowód jest ten sam!). Ponadto: to, że wyjściowa figura jest trójkątem, nie jest tu istotne – wystarczy założyć, że jest wypukła.

Tak się rodzą ogólne twierdzenia.

A czy dla każdej prostej k połowiącej trójkąt można znaleźć taką prostą l, by razem podzieliły trójkąt na 4 równe części? TAK – dotarliśmy do znanego twierdzenia „o kanapkach"*).

Olga STANDE

*) Porównaj R. Courant, H. Robbins, *Co to jest matematyka*, rozdz. VI §6.1 PWN, Warszawa 1959 oraz M. Szurek, *Opowieści geometryczne*, WSiP, Warszawa 1995, rozdz. 12.5.

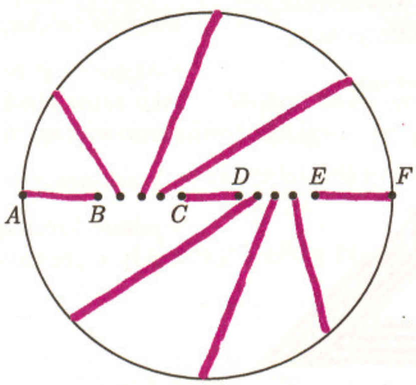
Zadziwiające,
koło można zakreskować!

Na ustalonej średnicy rysujemy trzy kreski: AB, CD, EF (patrz rysunek) i

– punkty odcinka BC (bez końców) łączymy kreskami z punktami górnego półokręgu,

natomiast

– punkty odcinka DE (bez końców) łączymy kreskami z punktami dolnego półokręgu.



Ale

czy można zakreskować trójkąt bez brzegu?

a wnętrze koła?

UWAGA: Kreski – tak jak poprzednio – powinny być z końcami!

Kreskówki cd. str. 4

czasopismo dla nauczycieli
MATEMATYKA

Witelo (1230?–1314?)

„Pierwszy, który nauką swoją imię Polski rozsławił wśród obcych"

O sobie pisał „**Witelo, syn Turyngów i Polaków**". W innym miejscu (patrz sąsiednia strona) Polskę nazywa swoją ojczyzną. O jego życiu wiemy niewiele. Urodził się około roku 1230 na Śląsku. Jego dzieciństwo przypadło na okres najazdu tatarskiego na Polskę. 9 kwietnia 1241 roku, w czasie bitwy pod Legnicą, był prawdopodobnie w tym mieście. Tam otrzymał początkowe wykształcenie w szkole trywialnej przy kościele św. Piotra. Na studia wyjechał do Paryża. Jako magister *artium* (sztuk wyzwolonych) powrócił na Śląsk. Zatrzymał się najpierw we Lwówku, później w Legnicy, w końcu znalazł się we Wrocławiu na dworze Henryka III, jako nauczyciel księcia Władysława, najmłodszego z synów Henryka Pobożnego.

W 1262 roku wraz z nim wyjechał do Padwy, gdzie studiował przez 6 lat. Tam prawdopodobnie zaczął przeprowadzać swoje doświadczenia optyczne.

Od roku 1268 Witelo przebywał na dworze papieskim w Rzymie. Bardzo ważne okazało się spotkanie i przyjaźń z Wilhelmem z Moerbecke – filozofem, matematykiem, który współpracując ze św. Tomaszem z Akwinu, tłumaczył z greckich oryginałów na łacinę dzieła Arystotelesa. Na prośbę Witelona tłumaczył też matematyczne prace Archimedesa, Eudoksosa, Apoloniusza, Herona i Ptolemeusza. Poznanie ponadto dzieł matematyków arabskich stawia Witelona w rzędzie najlepiej wykształconych matematyków średniowiecza.

W latach 1270–1278 napisał *Perspektywę* – traktat, obejmujący w dziesięciu księgach całość ówczesnej wiedzy optycznej, oparty na geometrii. Przez blisko 400 lat dzieło to pełniło rolę encyklopedii zjawisk świetlnych. Korzystali z niego: Leonardo da Vinci, Regiomontanus, Kopernik, Newton, a jeszcze w 1604 roku Kepler jedną ze swoich prac zatytułował *Dopełnienie do Witelona.*

Zasługi Witelona uczczono nadaniem jego imienia jednemu z kraterów na Księżycu.

Wiadomo, że Witelo napisał jeszcze co najmniej siedem prac, w tym *Wnioski z Elementów Euklidesa.* Rękopisy te jednak dotychczas nie zostały odszukane.

Schyłek życia Witelona jest mało znany. Prawdopodobnie wrócił do Polski i uczył w „swojej" szkole w Legnicy. Uzasadniałby to fakt nadania, przez biskupa wrocławskiego Henryka w roku 1309, szkole parafii św. Piotra w Legnicy prawa nauczania nie tylko gramatyki, ale także logiki i filozofii naturalnej (Arystotelesa).

Krystyna WUCZYŃSKA

Wnętrze trójkąta można zakreskować

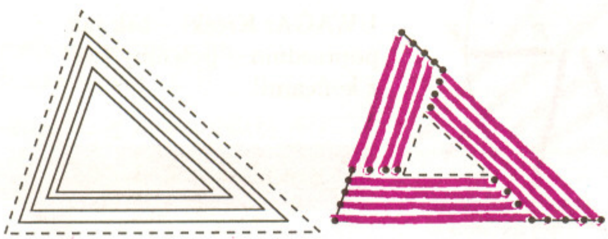
By to zobaczyć, przedstawmy najpierw

– wnętrze trójkąta jako sumę nieskończenie wielu coraz to większych trójkątów;

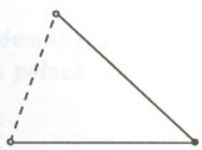
– zakreskujmy centralny mały trójkąt (według poprzedniego schematu);

– każdy z „trójkątnych pierścieni" bez wewnętrznej części brzegu zakreskujmy jak na rysunku poniżej.

W ten sposób całe wnętrze trójkąta zostanie zakreskowane.

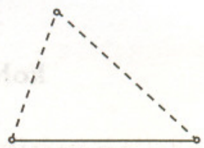


Można też zakreskować trójkąt bez jednego boku.



Wystarczy pominąć jedną kreskę przy kreskowaniu całego trójkąta.

Można też zakreskować trójkąt bez dwóch boków.

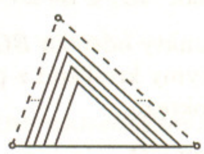


Podobnie jak przy kreskowaniu wnętrza trójkąta:

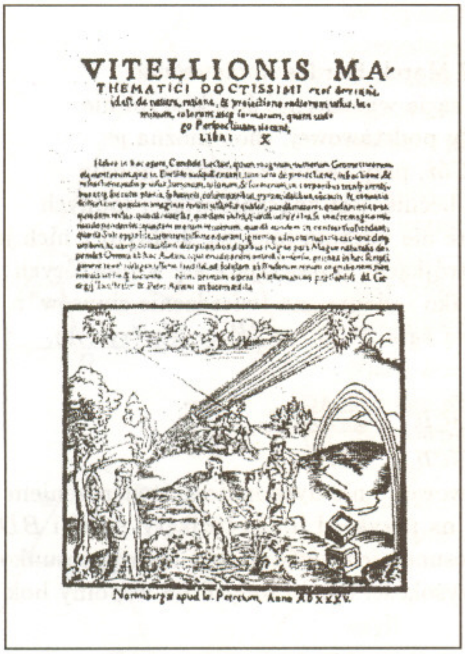
– najpierw przedstawiamy trójkąt jako sumę nieskończenie wielu coraz większych trójkątów;

– kreskujemy centralny trójkąt;

– potem kreskujemy oddzielnie każdy z „pasków".



Kreskówki cd. str. 5


VITELLIONIS MA-
THEMATICI DOCTISSIMI περὶ ὀπτικῆς,
id est de natura, ratione, & proiectione radiorum uisus, luminum, colorum atque formarum, quam uulgo Perspectiuam uocant,
LIBRI X

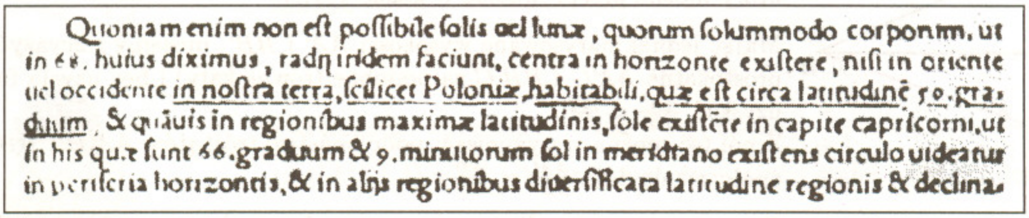
Norimbergæ apud Io. Petreium, Anno MDXXXV.

Karta tytułowa I wydania *Perspektywy* z roku 1535.


VITELLONIS THVRINGOPOLONI OPTICAE LIBRI DECEM.
Instaurati, figuris nouis illustrati atque aucti: infinitisq; erroribus, quibus antea scatebant, expurgati.
A
FEDERICO RISNERO.

BASILEAE.

Karta tytułowa III wydania *Perspektywy* z roku 1572.


Quoniam enim non est possibile solis ad lunæ, quorum solummodo corporum, ut in 68. huius diximus, radij iridem faciunt, centra in horizonte existere, nisi in oriente uel occidente in nostra terra, scilicet Poloniæ, habitabili, quæ est circa latitudinē 50. graduum, & quãuis in regionibus maximæ latitudinis, sole existēte in capite capricorni, ut in his quæ sunt 66. graduum & 9. minutorum sol in meridiano existens circulo uideatur in periferia horizontis, & in alijs regionibus diuersificata latitudine regionis & declina.

Fragment tekstu *Perspektywy*. Podkreślone słowa
„... w naszej ziemi, to jest w Polsce, kraju zamieszkałym, leżącym na szerokości około 50 stopnia...".

Wnętrze koła, jak również

wnętrze dowolnej figury można zakreskować.

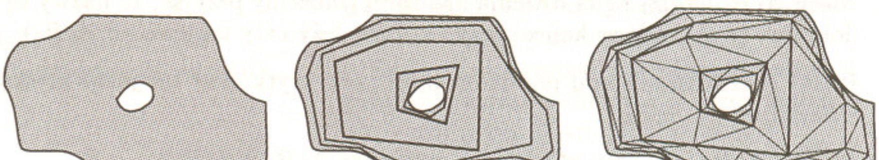
By to zobaczyć, należy wnętrze figury* przedstawić jako sumę nieskończenie wielu coraz większych „wieloboków" (być może z „dziurami").

Wnętrze figury jest takim „nieskończonym wielobokiem".

Dzielimy go na trójkąty.

Pierwszy z trójkątów kreskujemy (cały); następny, być może, przylega bokiem, wierzchołkiem, dwoma lub trzema bokami do wcześniej zakreskowanych – zatem kreskujemy go według jednego z wcześniej opisanych schematów.

I tak „w nieskończoność".



Można też zakreskować dowolną ograniczoną figurę wypukłą wraz z jej brzegiem.

(Zmodyfikuj pomysł kreskowania koła.)

Ale **czy każdą figurę można zakreskować?**

Kreskówki cd. str. 6

*Mieszkańcy wysp (np. Kanaryjskich) muszą zająć się oddzielnie każdą ze swych wysp.

czasopismo dla nauczycieli
MATEMATYKA

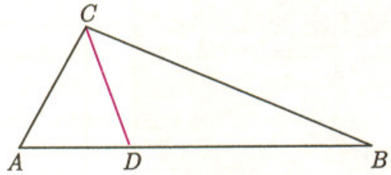
Dwusieczne w szkole?

W *Małej Delcie* z numeru 12/1997 Marek Kordos ubolewa nad tym, że uogólnienia twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym nie znalazły się w podręcznikach szkoły podstawowej, choć można je ładnie i elementarnie udowodnić. Cóż, przy takim wymiarze godzin matematyki, jaki mamy w szkole obecnie, jest znacznie więcej ładnych i elementarnych twierdzeń, na które nie ma tam miejsca. Jednym z nich jest twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie, pojawiające się w niektórych podręcznikach dla szkół średnich jako zadanie „na twierdzenie sinusów":

jeśli CD jest dwusieczną kąta ACB, to $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$ (rys. 1),

z następującym rozwiązaniem:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\frac{AD}{\sin\angle ACD}}{\frac{BD}{\sin\angle BCD}} = \frac{\frac{AC}{\sin\angle ADC}}{\frac{BC}{\sin\angle BDC}} = \frac{AC}{BC}.$$

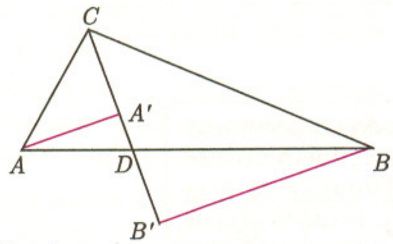


Rys. 1

Jeśli jednak – jak w szkole podstawowej – nie dysponujemy twierdzeniem sinusów, to musimy coś zauważyć, na przykład to, że trójkąty ADC i BDC mają wspólną wysokość, a więc stosunek ich podstaw jest równy stosunkowi ich pól, ten zaś z kolei – stosunkowi wysokości opuszczonych na wspólny bok CD (rys. 2). Daje to dowód

$$\frac{AD}{BD} = \frac{P_{\Delta ADC}}{P_{\Delta BDC}} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{AC\sin\angle ACD}{BC\sin\angle BCD} = \frac{AC}{BC},$$

który można przeprowadzić w klasie VIII.



Rys. 2

Mając jednak narysowane wysokości AA' i BB', możemy zauważyć, że trójkąty prostokątne $AA'C$ i $BB'C$ są podobne (równe kąty) i bez użycia funkcji sinus uzyskać $\frac{AA'}{BB'} = \frac{AC}{BC}$.

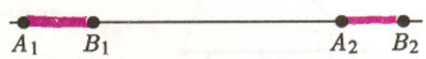
Z pól też można zrezygnować: podobieństwo trójkątów $AA'D$ i $BB'D$ analogicznie daje $\frac{AA'}{BB'} = \frac{AD}{BD}$.

Tym sposobem umożliwiamy przeprowadzenie dowodu w klasie VII.

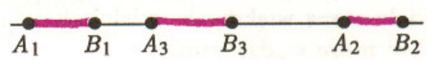
Oczywiście, okręgu nie można zakreskować; również

nie można zakreskować prostej.

Przypuśćmy, że jest pewien sposób zakreskowania prostej.



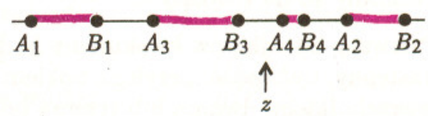
Niech A_1B_1, A_2B_2 będą dwiema kreskami (możemy przyjąć, że nazwy są tak dobrane, że A_i to lewe końce, oraz że A_1B_1 leży cały na lewo od A_2B_2).



Punkt pośrodku odstępu pomiędzy nimi „przykryty" jest też jakąś kreską – nazwijmy ją A_3B_3

(kreska A_3B_3 leży cała w odstępie pomiędzy A_1B_1 a A_2B_2).

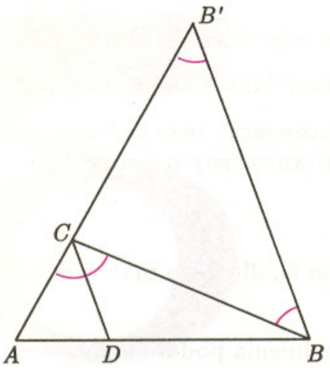
Również punkt pośrodku odstępu pomiędzy A_2B_2 a A_3B_3 jest „przykryty" – przez kreskę, którą nazwiemy A_4B_4.



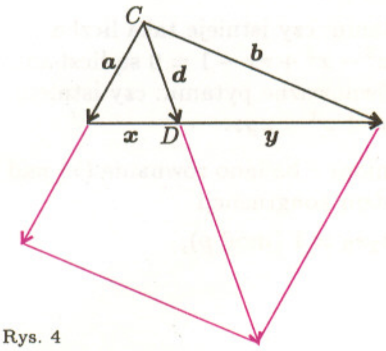
Podobnie punkt pośrodku odstępu pomiędzy A_3B_3 i A_4B_4, i tak dalej.

Prawe końce kresek nieparzystych, punkty $B_1, B_3, B_5, \ldots$, leżą coraz bardziej na prawo, ale stale na lewo od punktów $A_2, A_4, A_6, \ldots$. Ciągi punktów $B_1, B_3, B_5, \ldots$ oraz $A_2, A_4, A_6, \ldots$ skupiają się wokół pewnego punktu z. Punkt z nie może należeć do żadnej kreski (bo wnętrze kreski oddziela każdy ze swoich punktów wewnętrznych od końców innych kresek, a swój koniec oddziela z jednej strony od innych końców).

Kreskówki cd. str. 7



Rys. 3



Rys. 4

W tej samej klasie możemy zrobić to inaczej, zamiast z podobieństwa korzystając bezpośrednio z twierdzenia Talesa. Mianowicie przedłużamy bok AC o odcinek równy BC. Trójkąt $BB'C$ jest równoramienny, kąt ACB jest jego kątem zewnętrznym, a więc cztery kąty, oznaczone na rysunku 3 kolorem, są równe – proste CD i BB' są równoległe.

Niestety, nie widać sposobu udowodnienia omawianego twierdzenia w klasie VI, gdy uczniowie nie znają jeszcze twierdzenia Talesa. Ale – dla skompletowania kolekcji – można jeszcze pomyśleć o dowodzie rachunkowym (analitycznym) oraz wektorowym. Ten pierwszy odłóżmy na bok, drugi wyszedł mi dość skomplikowany – może ktoś pomoże znaleźć coś prostszego?

Niech $k = |\boldsymbol{b}| : |\boldsymbol{a}|$. Wydłużając k-krotnie wektor $\boldsymbol{a}$, otrzymujemy romb, na którego przekątnej leży punkt D (rys. 4). Przekątna (traktowana jako wektor) jest równa $k\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$). Wektory $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}$ są współliniowe, mamy więc $\boldsymbol{y} = t\boldsymbol{x}$ dla pewnej stałej dodatniej t. Teza dowodzonego twierdzenia oznacza, że $t = k$, a to wynika z następujących rachunków (Czytelnik zechce zinterpretować znaczenie pomocniczego parametru l):

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - lk\boldsymbol{a} - l\boldsymbol{b} = t\boldsymbol{x} = t(lk\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}),$$

czyli

$$(1-l)\boldsymbol{b} - lk\boldsymbol{a} = tl\boldsymbol{b} + t(lk-1)\boldsymbol{a}.$$

Ponieważ wektory $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ są liniowo niezależne, więc otrzymujemy stąd układ równań

$$\begin{cases} 1-l &= tl \\ lk &= t(1-lk), \end{cases}$$

z którego po wyliczeniu, że $l = \dfrac{1}{t+1}$, mamy $\dfrac{k}{t+1} = t\left(1 - \dfrac{k}{t+1}\right)$, czyli $k(t+1) = t(t+1)$, co wobec dodatniości stałej t kończy dowód.

Agnieszka WOJCIECHOWSKA

Tylko dla dorosłych

Poniższe twierdzenia (każde z osobna) uzasadniają, że kreskując trójkąt, koło czy pewien obszar na płaszczyźnie, musimy użyć nieprzeliczalnie wielu odcinków.

TWIERDZENIE (Baire)
W przestrzeni zupełnej X suma przeliczalnie wielu zbiorów nigdziegęstych jest zbiorem brzegowym (w szczególności suma ta nie jest całym zbiorem X).

TWIERDZENIE (Sierpiński)
Żadne continuum nie jest sumą przeliczalnie wielu parami rozłącznych zbiorów domkniętych ($\neq \emptyset$). (Oczywiście, chodzi o sumę co najmniej dwóch zbiorów.)

ĆWICZENIE. Jak zastosować Twierdzenie Sierpińskiego do obszaru na płaszczyźnie (brak zwartości!)?

Jednak te twierdzenia nie rozstrzygają, czy potrzeba aż continuum odcinków do zakreskowania tych figur.

ĆWICZENIE. Pokazać, że kreskując obszar płaszczyzny, musimy użyć continuum odcinków.
(PODPOWIEDŹ: Zmodyfikować argumentację ze strony 6.)

Z problemem kreskowania wiąże się następujące

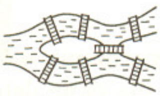
TWIERDZENIE (Moore)
Każda rodzina parami rozłącznych triodów na płaszczyźnie jest przeliczalna.
(Triod to homeomorficzny obraz przestrzeni zwartej w kształcie litery Y – sumy trzech odcinków o wspólnym jednym końcu.)

Zatem nie można „zatriodować” ani trójkąta, ani koła, ani żadnego obszaru płaszczyzny (triod jest, oczywiście, nigdziegęstym podzbiorem każdej z tych figur).

Ale

czy można „zatriodować” sześcian, czworościan lub kulę?

Kreskówki przygotował
Krzysztof OMILJANOWSKI



Zadanie z dalszym ciągiem

495. *Czy równanie* $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$ *ma rozwiązanie w liczbach całkowitych?*
Uwaga. Autor nie zna rozwiązania. Werner Mnich, Nr 1 (1957), str. 55

Uczestnikom konkursu zadaniowego nie udało się rozwiązać tego zadania. Wacław Sierpiński zauważył, że problem ten jest równoważny pytaniu: czy istnieją takie liczby wymierne r, s, t, że

$$r + s + t = rst = 1. \tag{$*$}$$

W. Sierpiński mówił autorowi zadania, że nie rozumie, dlaczego nikt wcześniej nie postawił tak prostego pytania.

Wcale nieelementarne negatywne rozwiązanie zagadnienia podał znany specjalista teorii liczb, J.W.S. Cassels, w pracy *On a diophantine equation*, Acta Aritmetica VI (1960), 47–52.

Łatwo pokazać, że problem jest równoważny pytaniu: czy istnieje taka liczba wymierna r, że wszystkie pierwiastki równania $x^3 - x^2 + rx - 1 = 0$ są liczbami wymiernymi. Można też udowodnić, że jest to równoważne pytaniu: czy istnieją takie liczby całkowite x, y, z, że $xyz \neq 0$ i $x^3 + y^3 + z^3 = xyz$.

Problem omawiany dał impuls różnym uogólnieniom – badano równanie $(*)$ nad ciałami kwadratowymi. Zajmowano się też układem kongruencji

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \pmod{p}, \quad x_1x_2x_3 = 1 \pmod{p},$$

gdzie p – liczba pierwsza nieparzysta.

Zadanie tysięczne!

1000. *Znaleźć liczbę złożoną, która pozostaje złożoną przy każdej zmianie którychkolwiek dwóch jej cyfr.* W. S. (Wacław Sierpiński), Nr 1 (1977), str. 55

Zadanie to, przekazane *Matematyce* już w 1958 roku, opublikowane po 19 latach (bo tyle było w zapasie zadań Sierpińskiego!), nie zostało rozwiązane przez żadnego z uczestników konkursu i zostało uznane za beznadziejne. Jego uogólnienie ukazało się w *Matematyce* 1 w 1989 roku jako zadanie 1238 (znów bez rezultatu) i ponownie w numerze 4, 1994 jako zadanie 1326. Łatwiejsza wersja zadania znalazła się w *Matematyce* 4, 1995 pod nr. 1356.
To ostatnie zostało w końcu rozwiązane i to aż przez 16 uczestników konkursu; rozwiązanie Jerzego Witkowskiego wydrukowano w nr. 3, 1996 na str. 182.

Dwa zadania, które wydają się naturalne, a nie udało się ich rozwiązać

720. *Kwadrat. Czy można znaleźć kwadrat o bokach całkowitych i taki punkt na płaszczyźnie kwadratu, którego cztery odległości od wierzchołków wszystkie byłyby całkowite?* H. St. (Hugo Steinhaus), Nr 5 (1963), str. 208

Jest zresztą kilka innych zadań Steinhausa dotąd nie rozwiązanych (p. książka *Sto zadań*).

1292. *Podział przestrzeni. Przestrzeń trójwymiarową podzielono na cztery niepuste, parami rozłączne zbiory. Czy co najmniej jeden z tych zbiorów zawiera trzy punkty będące wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku 1?*
Werner Mnich, Nr 3 (1993), str. 172

Zadanie z wpadką

781. *Dowieść, że równanie* $x^4 + y^4 = z^4 + 1$ *nie posiada rozwiązań w różnych liczbach naturalnych* x, y, z. Jan Antonik, Nr 3 (1966), str.142

Rzekome rozwiązanie jest w nr. 1–2 (1969), str. 76–78. Jest ono wadliwe, jak pokazano w nr. 3 (1972), str. 182. Kilka lat temu Andrzej Schinzel pisał do mnie, że rzecz jest dalej otwarta, podobnie jak sprawa równania $x^4 + y^4 = z^4 + 2$.

Może Czytelnicy *Delty* rozwiążą te zadania?

Werner MNICH

czasopismo dla nauczycieli
MATEMATYKA

Masłem na dół

Złośliwość przedmiotów martwych jest tematem wielu celnych powiedzonek sformułowanych w stylu szczególnych „praw przyrody” – praw Murphy'ego [1]. Jedno z powszechniej znanych wyraża przekonanie, że spadające kanapki zawsze lądują masłem do podłogi. Problem ten był, oczywiście, przedmiotem analiz, a nawet został uogólniony na „dowolny wszechświat” [2]. Doświadczenia przeprowadzone w rozmaitych warunkach oraz obliczenia pozwalają zweryfikować pogląd o złośliwości kanapki jako zbyt pesymistyczny.

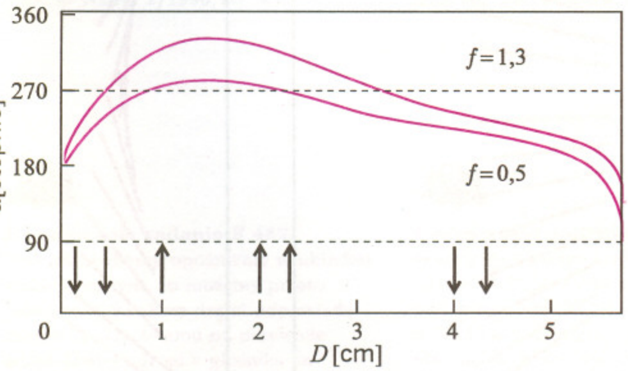
Na sposób upadku kanapki ma wpływ bardzo wiele czynników: jej kształt, masa, moment bezwładności, własności sprężyste, *sposób odkładania*, stan powierzchni stołu i jego wysokość. Niektóre z nich trudno kontrolować, więc aby poprawić nieco powtarzalność wyników, do eksperymentów dobrze jest użyć kromek o regularnym kształcie, na przykład z pumpernikla.

Podstawowe cechy zachowania się spadającej kanapki można poznać dzięki symulacji numerycznej. Ponieważ niektóre z wymienionych czynników są trudne do ujęcia w rachunkach, przyjmiemy tu uproszczony model kanapki w kształcie cienkiego, sztywnego prostopadłościanu, z wyróżnioną („posmarowaną”) górną ścianą. Uściślimy też warunki, w jakich dochodzi do upadku kanapki.

PRZYPADEK 1. Kładziemy nieostrożnie kanapkę na stole, poziomo, i tak, że jej środek ciężkości wystaje poza jego krawędź. Zakładamy przy tym, że robimy to bardzo powoli (jak zwykle zamyśleni albo zaczytani).

PRZYPADEK 2. Trącamy z rozmachem kanapkę leżącą na stole, tak, że zaczyna sunąć po powierzchni w kierunku prostopadłym do krawędzi (rzut poziomy kanapką).

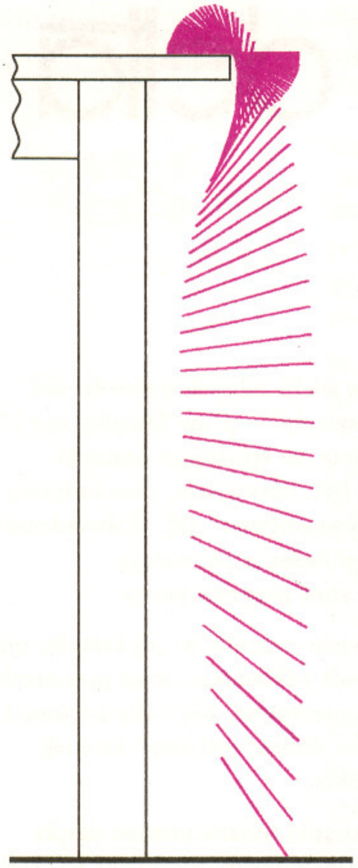
Ograniczymy się do przypadków, w których krótsza krawędź podstawy jest zawsze równoległa do krawędzi stołu. Warunki początkowe określone są odległością D środka ciężkości od krawędzi (w przypadku 1) lub prędkością początkową środka V_0 w momencie mijania krawędzi (w przypadku 2).



Rys. 1. Zależność kąta upadku α od położenia początkowego D dla współczynników tarcia 0,5 i 1,3. Strzałki pokazują stwierdzone doświadczalnie sposoby lądowania kanapki przy spadku z drewnianego blatu.

Przyjmiemy parametry kanapki przygotowanej z pumpernikla: szerokość 8 cm, długość 11,5 cm, grubość 0,6 cm, masa 40 g. Współczynnik tarcia o stół f można wziąć z przedziału od 0,5 (gładki blat) do 1,3 (lniany obrus). Wybierzmy typową wysokość stołu 80 cm.

W ruchu kromki powoli odkładanej (przypadek 1) można wyróżnić następujące etapy:
– obrót wokół krawędzi stołu,
– zsuwanie się połączone z obrotem w stałym kontakcie z krawędzią, która pełni rolę chwilowej osi obrotu,
– lot swobodny (opór powietrza pomijamy) z jednostajnym obrotem.



Rys. 2. **Upadek masłem na dół;**
$D = 0{,}2$ cm, $f = 1{,}3$.

Podczas spadku kanapki strącanej (przypadek 2) pierwszy etap nie występuje. Zderzenie z podłogą traktujemy jako doskonale niesprężyste. Kanapka upadnie więc na podłogę stroną posmarowaną, gdy zdąży przyjąć położenie określone kątem większym niż $\pi/2$, ale nie przekraczającym $3\pi/2$. (Ogólnie – gdy kąt upadku pochodzi z przedziałów $((2n+1)\pi/2, (2n+3)\pi/2)$, $n = 1, 2, \ldots$ Kąt mierzymy względem płaszczyzny stołu. Jego wartości przyjmowane podczas spadku rozpoczynającego się od pozycji poziomej definiujemy jako dodatnie.)

Z obliczeń (a także z obserwacji) wynikają następujące prawidłowości.

W PRZYPADKU 1

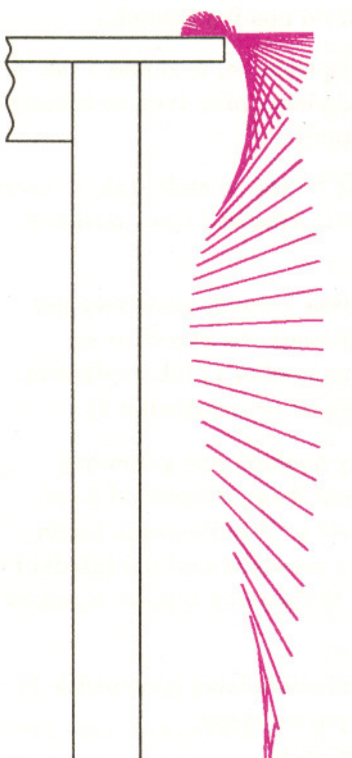
– kanapka upada masłem na dół przy dostatecznie małych lub dostatecznie dużych wartościach D, a masłem do góry – przy wartościach pośrednich,

– przedział odległości D, przy których kanapka upada masłem do góry, poszerza się przy wzroście tarcia.

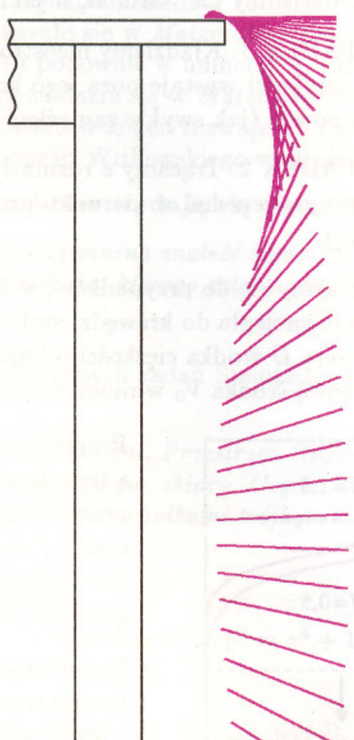
Można rozważyć uogólnienie przypadku 1: odkładanie kanapki nie poziomo, lecz ukośnie. Warunki początkowe zadane są wtedy kątem początkowym α_0 oraz parametrem D, który określa w tych przypadkach położenie środka ciężkości w chwili, gdy kanapka styka się po raz pierwszy z krawędzią stołu. Dwie możliwości – nachylenie pod kątem dodatnim i ujemnym – dają istotne różnice w zachowaniu się kanapki względem wariantu poziomego:

– zadarcie końca kanapki do góry ($\alpha_0 < 0$) sprzyja jej obrotowi, a więc upadkowi masłem do góry,

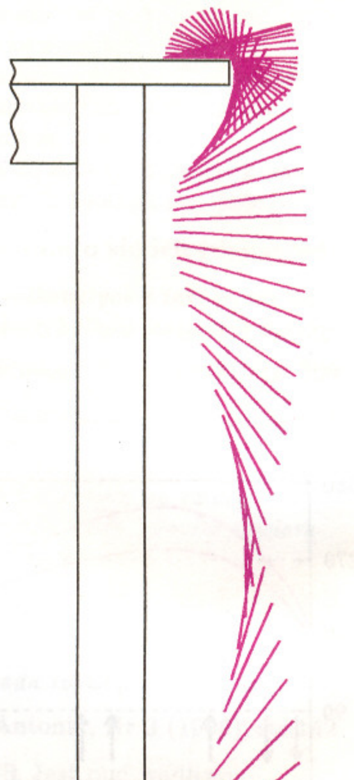
– pochylenie końca ku dołowi ($\alpha_0 > 0$) ogranicza obrót i może doprowadzić do upadku masłem na dół.



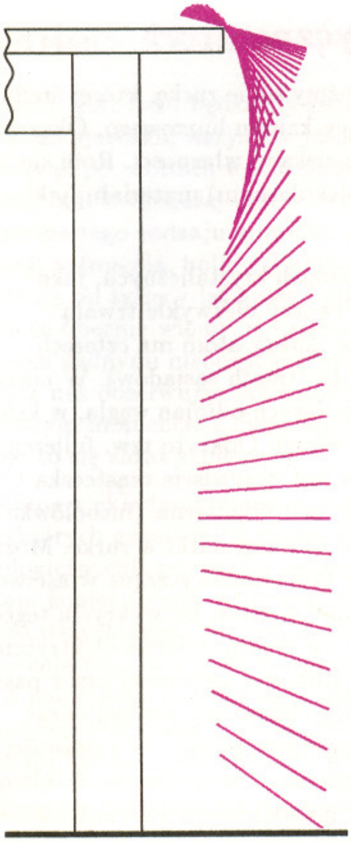
Rys. 3. Upadek masłem do góry;
$D = 2$ cm, $f = 0{,}5$.



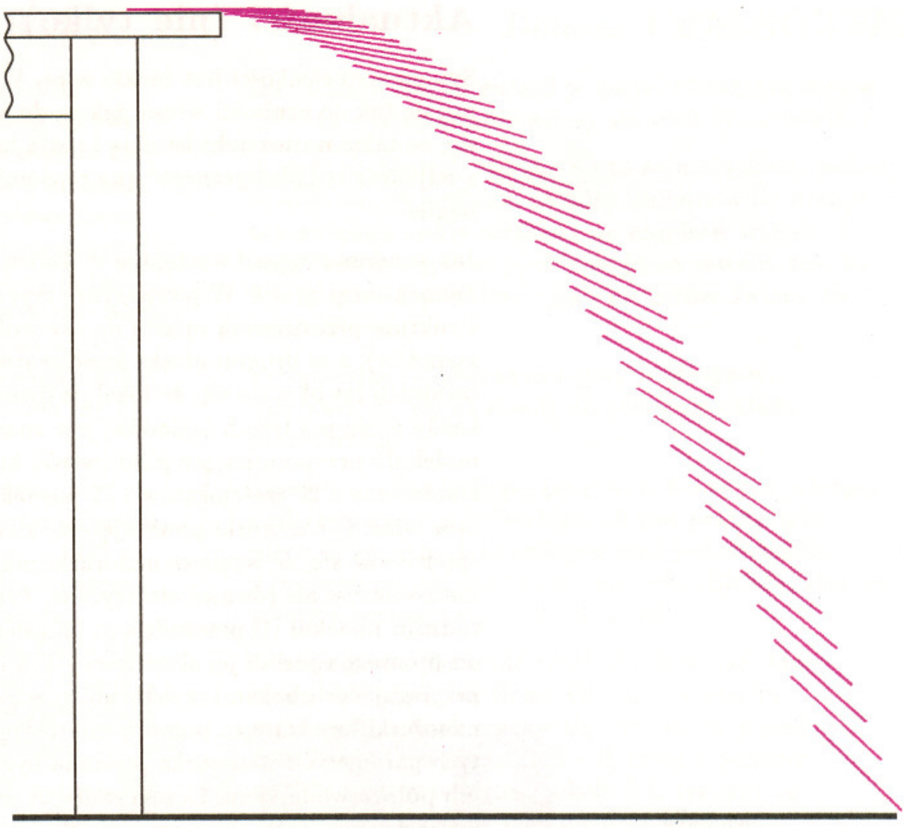
Rys. 4. Upadek masłem na dół;
$D = 4$ cm, $f = 0{,}5$.



Rys. 5. Upadek masłem do góry kanapki odkładanej ukośnie pod kątem $\alpha_0 = -0{,}3$ rad; $D = 0{,}2$ cm, $f = 1{,}3$.



Rys. 6. Upadek masłem na dół kanapki odkładanej ukośnie pod kątem $\alpha_0 = 0{,}3$ rad; $D = 2$ cm, $f = 0{,}5$.



Rys. 7. Lot kanapki strąconej z prędkością; $V_0 = 150$ cm/s, $f = 0{,}5$.

W PRZYPADKU 2

– istnieje graniczna prędkość, poniżej której kanapka upada masłem na dół. W naszym przypadku wynosi ona około 85 cm/s przy $f = 0{,}5$,

– im większa prędkość, tym krócej kanapka styka się z krawędzią stołu, tym mniej czasu ma na nabranie prędkości kątowej i upada pod tym mniejszym kątem – tyle że daleko.

Prawidłowości te są zilustrowane rysunkami 1–7.

Podsumowanie uzyskanych wyników pozwala wysnuć wniosek, że okazji do wylądowania masłem do góry kanapka ma wiele. Zła opinia o przebiegu tego zjawiska ma swoje uzasadnienie raczej w psychicznym nastawieniu, skłaniającym nas do zwracania większej uwagi na zdarzenia niekorzystne.

Małą Deltę przygotował Grzegorz DERFEL

Literatura

[1] A. Bloch, *Dlaczego w życiu nic nie może się udać, czyli prawa Murphy'ego*, OPTIMA Press, Warszawa 1992.

[2] I. Stewart, *Zasada antropomurphiczna*, Świat Nauki 2/1996, str. 82.

Rozwiązanie zadania F 482.

Jeśli zaniedbamy opóźnienie w układzie elektronicznym, to możemy prosto oszacować, że okres drgań odpowiada czasowi potrzebnemu na przebycie przez dźwięki drogi z głośnika do mikrofonu. Oznaczając prędkość dźwięku przez $v = 340$ m/s, otrzymujemy, że częstotliwość powstałego dźwięku wynosi $\nu \approx v/l = 113$ Hz.

Rozwiązanie zadania M 855.

Weźmy pod uwagę liczby $n, n+1, n+2, \ldots, n+10$. Wtedy $n^2 + (n+1)^2 + \ldots + (n+10)^2 = 11n^2 + 110n + 385 = 11(n^2 + 10n + 35)$. Jak łatwo zauważyć, liczba $n^2 + 10n + 35$ musi być podzielna przez 11. Nietrudno sprawdzić, że wtedy n musi być postaci $11k + 5$ lub $11k + 7$. Np. dla $n = 11k + 5$ mamy $11(n^2 + 10n + 35) = 11^2(11k^2 + 20k + 10)$. Teraz można już próbować trafić: $k = 1$ nie pasuje, $k = 2$ też, ale za to $k = 3$ jest wyśmienite – istotnie $11 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3 + 10 = 13^2$.

A więc ostatecznie mamy przykład: $38^2 + 39^2 + \ldots + 48^2 = (11 \cdot 13)^2$. Czy jedyny?

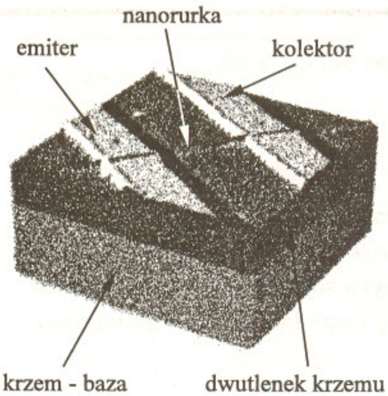
Uwaga. Proponuję Czytelnikom następujące rozwinięcie problemu: *Udowodnić, że dla $2 < n < 11$ nie istnieje n kolejnych liczb naturalnych, których suma kwadratów jest też kwadratem liczby naturalnej.*

Da się to zrobić w skończonym czasie.

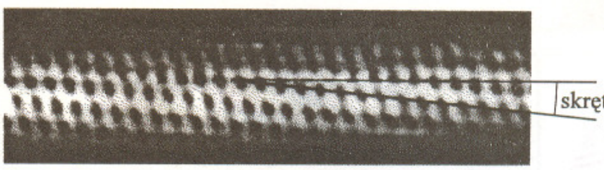
Aktualności (nie tylko) fizyczne

Synonimem cienkości jest ludzki włos. Wyobraźmy sobie rurkę, której średnica ma się tak do grubości włosa, jak ta do średnicy kanału burzowego. Okazuje się, że takie **nanorurki** istnieją i mają bardzo ciekawe własności. Robi się je z najbardziej „plastycznego" (na poziomie molekularnym) materiału, jakim jest węgiel.

Jak wiadomo, węgiel występuje w dwóch odmianach krystalicznych, jako diament oraz grafit. W pierwszym przypadku tworzy niezwykle trwałą strukturę przestrzenną opartą na czworościanie (każdy atom ma czterech sąsiadów), a w drugim płaską sześciokątną siatkę (trzech sąsiadów). W ciągu ostatnich lat okazało się, że lokalnie dwuwymiarowych odmian węgla, w których każdy atom ma trzech sąsiadów, jest znacznie więcej. Odkryto tzw. fullereny, molekuły przypominające piłki (wśród których jest oczywiście cząsteczka C_{60} zbudowana z 20 sześciokątów i 12 pięciokątów, czyli popularna „futbolówka") oraz właśnie nanorurki powstające ze zwinięcia płaskiej siatki w rurkę. Można spodziewać się, że węglowe nanorurki mają nie tylko nadzwyczajne właściwości mechaniczne, ale również elektryczne. Prawie natychmiast po wykryciu tego rodzaju molekuł [1] przewidziano [2] zależność ich przewodnictwa elektrycznego od promienia rurki i jej skrętności (skoku linii śrubowej tworzonej przez pasek przylegających bokami sześciokątów; zobacz reprodukowany poniżej obraz nanorurki uzyskany za pomocą mikroskopu skaningowego [3]). W zależności od tych parametrów nanorurka powinna być jednowymiarowym przewodnikiem lub półprzewodnikiem. Oczekiwania te zostały potwierdzone doświadczalnie na początku tego roku [3], a majowe *Nature* [4] przyniosło informację o pierwszym, działającym w temperaturze pokojowej tranzystorze opartym na pojedynczej nanorurce (reprodukcja na marginesie).



Nanorurka jako tranzystor [4]. Półprzewodząca nanorurka węglowa łączy emiter z kolektorem. Ujemne napięcie przyłożone do krzemowego podłoża indukuje w nanorurce nośniki typu p i tym samym włącza tranzystor.



Zespół z politechniki w holenderskim Delft [5] połączył za pomocą węglowej, półprzewodzącej nanorurki o średnicy 1,3 nm dwie elektrody platynowe odległe o 300 nm i położone na warstwie SiO_2. Włączenie złącza odbywało się za pomocą przyłożenia ujemnego napięcia do podłoża, co powodowało pojawianie się nośników typu p (dziur) w nanorurce. Autorzy szacują docelową częstość, z jaką ich tranzystor mógłby pracować, na 10 THz. Po przeanalizowaniu charakterystyk prądowych złącza okazało się, że są one jakościowo zgodne z półklasycznym modelem pasmowym stosowanym do opisu współcześnie używanych układów scalonych. Wydaje się to świadczyć, że jeszcze jesteśmy dość daleko od skali integracji, w której logika dwuwartościowa nie mogłaby już być stosowana ze względu na efekty kwantowe.

Trudno już dzisiaj powiedzieć, jak długo trzeba będzie poczekać na pierwsze komercyjne zastosowanie złącza TUBEFET, jak je nazwali autorzy [5]. Przyszła produkcja układów scalonych tego typu może zostać oparta na technice biomolekularnej.

Jednym z ulubionych tematów klasycznej science-fiction było (jest) opisywanie „nieziemskich" form życia. Wśród takich pomysłów pojawiło się życie oparte na krzemie, cięższym koledze węgla. O ile możliwość zastąpienia krzemem węgla w tworzeniu życia pozostaje w kręgu SF, to zastąpienie krzemu węglem w nanoelektronice wydaje się nabierać realnych kształtów.

Piotr ZALEWSKI

[1] S. Iijima, *Nature* **354** (1991) 56.
[2] N. Hamada i inni, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 1579;
R. Saito i inni, *Appl. Phys. Lett.* **60** (1992) 2204;
J. Mintmire i inni, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 631.
[3] M. S. Dresselheaus, *Nature* **391** (1998) 19;
J. W. G. Wildöer i inni, *Nature* **391** (1998) 59;
T. W. Odom i inni, *Nature* **391** (1998) 62.
[4] Paul L. McEuen, *Nature* **393** (1998) 15.
[5] S. J. Tans, A. R. M. Verschueren, C. Dekker, *Nature* **393** (1998) 49.

Koniec świata (4/1979)

Tomasz CHLEBOWSKI

W lutym 1982 roku będziemy świadkami dość rzadkiego zjawiska: wszystkie jasne planety ustawią się, krążąc po orbitach wokół Słońca, prawie na linii prostej, tzn. w niedużej odległości kątowej od siebie. Wszystkie tego rodzaju zjawiska, jak pojawienie się komety, zaćmienia, bolidy (bardzo jasne meteory) itp. wywołują od tysięcy lat grozę i strach u wielu ludzi. Mimo że obecnie wiemy, iż całkowite zaćmienie Słońca nie grozi żadnymi niebezpieczeństwami, to prawie każdy z nas obserwując takie zaćmienie zadaje sobie w pewnym momencie z niepokojem pytanie: czy na pewno to się zaraz skończy?

Podobnie z układami planet. Coraz częściej w niektórych gazetach (a co dopiero w czasopismach astrologicznych!) pojawiają się wieści, że w 1982 r. nastąpi koniec świata, trzęsienie ziemi na obszarze najbogatszych części Stanów Zjednoczonych, zakłócenia pogody i pola magnetycznego Ziemi itp., itd. Z naukowego punktu widzenia jednak związek przyczynowo-skutkowy układu planet ze zjawiskami na Ziemi będzie – jak zawsze – zaniedbywalny.

Często przy takiej okazji zadajemy sobie pytanie – żyjemy na tej Ziemi już tak długo, a ona pędzi przez otchłań kosmosu stokrotnie szybciej niż pocisk karabinowy, a my nie zdając sobie z tego sprawy czujemy się zupełnie bezpieczni; ale czy mamy podstawy do tego, żeby ufnie patrzeć w przyszłość, czy niebo nie zrobi nam jutro jakiegoś „numeru" w postaci zderzenia z inną planetą, gwiazdą, wybuchu Słońca czy innych podobnych zjawisk?

Zacznijmy od największej skali – całego Wszechświata. Czy można spodziewać się „końca świata" i kiedy to może nastąpić? Wiemy, że obecnie Wszechświat rozszerza się i jednocześnie stygnie. Mamy przed sobą alternatywę: albo w pewnym momencie Wszechświat przestanie się rozszerzać, zacznie się kurczyć i ogrzewać do coraz wyższych temperatur, albo będzie rozszerzać się w nieskończoność. Coraz więcej argumentów przemawia za ostatnią hipotezą, jeśli jednak kosmologiczny koniec świata miałby nastąpić, to dzieli nas od tego momentu jeszcze około 50 miliardów, czyli $5 \cdot 10^{10}$ lat.

Przechodząc do obiektów mniejszych możemy zapytać, jakie jest prawdopodobieństwo „zderzenia" z inną galaktyką? Tutaj też nam nic nie grozi: średni czas między zderzeniami galaktyk jest wielokrotnie dłuższy niż wiek Wszechświata, poza tym większość galaktyk oddala się od siebie i są one tak rzadkie, że w wyniku „zderzenia" wzajemnie się przenikają wymiatając tylko materię międzygwiazdową w przestrzeń międzygalaktyczną.

A więc zderzenia galaktyk mogą nie być niebezpieczne, dopóki się nie zderzają gwiazdy. Prawdopodobieństwo takiej katastrofy jest znikome – średni czas między zderzeniami dwóch gwiazd w naszej Galaktyce wynosi 10^{13} lat – tysiąckrotnie więcej niż wiek Wszechświata.

A wybuch Słońca? Ma ono na to za małą masę, jednak w toku swojej ewolucji, za kilka miliardów lat Słońce tak zwiększy swoje rozmiary, że najpierw wypali całą Ziemię, a potem pochłonie ją na zawsze. Jest to bardzo prawdopodobne – jeśli nie koniec świata, to koniec Ziemi.

Przechodząc do jeszcze mniejszych obiektów, zatrzymajmy się na chwilę na poziomie układu planetarnego.

Wszystkie planety krążą po prawie kołowych orbitach i zderzenie z którąkolwiek z nich jest praktycznie niemożliwe, jednak prawdopodobne jest zderzenie z mniejszymi ciałami krążącymi wokół Słońca, których orbity przecinają się z orbitą Ziemi.

Istnieje grupa planetoid (małych planetek), które mogą zbliżać się do Ziemi. Obecnie znamy 24 takie ciała, jednak szacuje się, że jest ich ponad 500. Jedna taka planetoida – Hermes – przeszła w 1937 roku w odległości około 600 tys. km od Ziemi, czyli niewiele dalej niż orbita Księżyca. Według E.J. Öpika, gdyby tej wielkości ciało uderzyło w Ziemię, zniszczyłoby obszar o powierzchni kilkunastu procent powierzchni Polski. Największa z „niebezpiecznych dla Ziemi", planetoida Amor, mogłaby zniszczyć połowę kontynentu Azji. Zderzenie z ciałem wielkości Hermesa może zdarzyć się średnio raz na kilka milionów lat, natomiast kolizja z Amorem – raz na 2–3 miliardy lat. Zderzenie z kometą, mimo że bardziej widowiskowe (kometa ma warkocz), byłoby jednak mniej niebezpieczne niż uderzenie planetoidy. Najprawdopodobniej tzw. meteor tunguski, który uderzył w Ziemię 30 czerwca 1908 roku niszcząc część tajgi środkowej Syberii, był jądrem małej komety. Upadek meteoru, najczęstszy ze wszystkich opisanych tu zjawisk, robi najmniejsze szkody. Dotychczas wiemy tylko o jednym przypadku, kiedy to meteor zrobił dziurę w dachu. Księżyc, następny kandydat, na szczęście oddala się powolutku po spirali od Ziemi i oddalałby się tak jeszcze ze 40 miliardów lat, gdyby wcześniej nie został pożarty razem z Ziemią przez Słońce.

Jednak na orbitach wokół Ziemi pojawia się coraz więcej obiektów, które po pewnym czasie spadają na Ziemię stwarzając pewne niebezpieczeństwo dla jej mieszkańców. Są to sztuczne satelity. I tu dochodzimy do wniosku:
jeśli nie będziemy niepotrzebnie zaśmiecać przestrzeni wrakami satelitów, jeśli nie będziemy niszczyć własnej atmosfery chroniącej nas przed promieniowaniem kosmicznym, obstrzałem meteorów i ulatywaniem ciepła z Ziemi, to prawdopodobieństwo katastrofy kosmicznej będzie tak małe, że możemy spać spokojnie.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 351 (WT=1,27) i 352 (WT=2,55) z numeru 12/1997

Maciej Mostowski	– Warszawa	42,81
Konrad Patkowski	– Gdańsk	40,09
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	39,37
Piotr Kumor	– Olsztyn	39,21
Witold Bednarek	– Łódź	32,66
Bogumiła Piotrowska	– Zielona Góra	32,41
Zbigniew Skalik	– Pyskowice	32,15

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1998

Przypominamy treść zadań:

359. Czy istnieje para funkcji $f,\ g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ spełniających dla każdej liczby $x\in\mathbf{R}$ równania $f(g(x))=x^2$ oraz $g(f(x))=x^4$?

360. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n+1}$ o następującej własności: po odrzuceniu dowolnego wyrazu pozostałe można podzielić na takie dwie grupy po n wyrazów, że suma wyrazów w pierwszej grupie jest równa sumie wyrazów w drugiej. Dowieść, że wszystkie wyrazy ciągu są równe.

359. Poszukiwanie pary funkcji o podanych własnościach może ułatwić podstawienie $x=2^{2^t}$; to ogranicza (chwilowo) zakres zmienności x do przedziału $(1,\infty)$. Przypuśćmy więc, że $f,g\colon(1,\infty)\to(1,\infty)$ są funkcjami spełniającymi zadane równania i przyjmijmy

$$\varphi(t)=\log_2\log_2 f(2^{2^t}),\qquad \psi(t)=\log_2\log_2 g(2^{2^t})\qquad \text{dla } t\in\mathbf{R}.$$

Te funkcje spełniają układ równań funkcyjnych: $\varphi(\psi(t))=t+1$ oraz $\psi(\varphi(t))=t+2$; ma on rozwiązania nawet w klasie par funkcji liniowych. Postulując postać $\varphi(t)=at+b$, $\psi(t)=ct+d$, otrzymujemy dla parametrów a,b,c,d warunki: $a=1/2$, $c=2$, $2b+d=2$. Biorąc na przykład $b=1$, $d=0$, dostajemy $\varphi(t)=(t+2)/2$, $\psi(t)=2t$, co daje parę funkcji

$$f(x)=2^{2\sqrt{\log_2 x}},\qquad g(x)=2^{(\log_2 x)^2}\qquad \text{dla } x>1.$$

Aby rozszerzyć te funkcje na cały zbiór $\mathbf{R}$, wystarczy przyjąć

$$f(x)=1/f(1/x),\qquad g(x)=1/g(1/x)\qquad \text{dla } x\in(0,1)$$

oraz $f(1)=g(1)=1$, a następnie przedłużyć f i g do funkcji parzystych, określonych na $\mathbf{R}$. Nietrudno sprawdzić, że tak rozszerzone funkcje spełniają wymagane warunki.

360. Dla liczb całkowitych a_i twierdzenie to było kiedyś zadaniem na Olimpiadzie Matematycznej – możemy je więc uważać za znane. (Notka z odsyłaczem była dołączona do treści zadania w *Delcie* 4/1998.) Natychmiastowym wnioskiem jest prawdziwość twierdzenia dla liczb wymiernych a_i; wystarczy je wszystkie pomnożyć przez wspólny mianownik.

Niech teraz $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n+1}$ będą liczbami rzeczywistymi o podanej własności i niech m będzie najmniejszą liczbą naturalną, dla której istnieją w zbiorze $K=\{1,2,\ldots,2n+1\}$ różne numery $k_1,\ldots,k_m$, takie, że każdą z liczb a_i da się przedstawić w postaci kombinacji liniowej

$$(*)\qquad a_i=r_{i,1}a_{k_1}+\ldots+r_{i,m}a_{k_m}=\sum_{s=1}^{m} r_{i,s}a_{k_s}$$

o wymiernych współczynnikach $r_{i,s}$. (Innymi słowy, m jest wymiarem przestrzeni liniowej nad ciałem liczb wymiernych, generowanej przez liczby $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n+1}$.) Z minimalności liczby m wynika, że przedstawienie $(*)$ jest wówczas jednoznaczne.

Weźmy dowolny numer $l\in K$. Zgodnie z warunkiem zadania, zbiór $K\setminus\{l\}$ jest sumą n-elementowych zbiorów I oraz J, takich, że

$$\sum_{i\in I} a_i=\sum_{i\in J} a_i.$$

Zastępując każdą z liczb a_i jej przedstawieniem $(*)$, otrzymujemy (po przegrupowaniu składników) równość

$$\sum_{s=1}^{m}\Bigl(\sum_{i\in I} r_{i,s}-\sum_{i\in J} r_{i,s}\Bigr)a_{k_s}=0.$$

Przedstawienie liczby 0 jako wymiernej kombinacji liniowej liczb a_{k_s} jest jednoznaczne, więc wyrażenie w nawiasie ma dla każdego s wartość 0. To znaczy, że dla każdego $s\in\{1,\ldots,m\}$ ciąg liczb wymiernych $r_{1,s},\ r_{2,s},\ \ldots,\ r_{2n+1,s}$ ma własność, o której mowa w zadaniu (po odrzuceniu dowolnego wyrazu $r_{l,s}$ pozostałe można podzielić itd.). W myśl uwagi rozpoczynającej rozwiązanie, liczby te są równe:

$$r_{1,s}=r_{2,s}=\ldots=r_{2n+1,s}\qquad \text{dla } s=1,\ldots,m.$$

Ze wzoru $(*)$ dostajemy żądany wniosek, że liczby $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2n+1}$ są równe.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 252 (WT=1,73) i 253 (WT=2,76) z numeru 2/1998

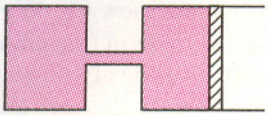
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	39,55
Tomasz Wietecha	– Tarnów	19,88
Marek Wójcicki	– Szczecin	18,37
Aleksander Surma	– Myszków	12,50

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1998

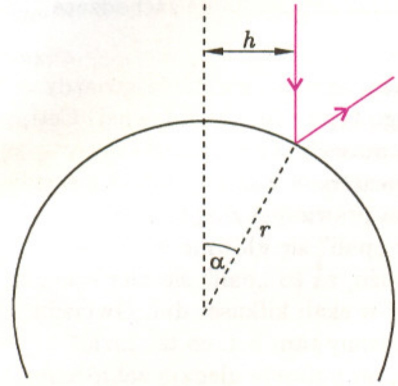
Przypominamy treść zadań:

256. Jednorodny strumień równolegle biegnących cząstek (np. strumień światła) pada na kulę: a) odbijającą cząstki sprężyście (zwierciadło kuliste), b) taką, do której cząstki się „przyklejają" (czarną). Jeżeli promień kul jest jednakowy, to na którą z nich działa większa siła? A może siły są jednakowe?



Rys. 1

257. Naczynie z gazem jest izolowane termicznie od otoczenia i przedzielone na dwie części, z których jedna jest zamknięta tłokiem wywierającym na gaz stałe ciśnienie p (rys. 1). Jeżeli grzałka elektryczna dostarczy do wnętrza pewną ustaloną ilość ciepła Q, to w którym przypadku tłok przesunie się bardziej:
a) gdy podgrzejemy lewą część naczynia,
b) gdy podgrzejemy prawą część naczynia,
c) gdy połowę ciepła dostarczymy lewej części, a połowę – prawej?
Kanalik łączący obie części naczynia jest tak wąski, że temperatura nie ulega wyrównaniu.



Rys. 2

256. W przypadku a) cząstka biegnąca torem przesuniętym względem środka o h (rys. 2) odbija się pod kątem $\alpha = \arcsin(h/r)$. Pionowa składowa pędu tej cząstki wynosi po odbiciu $p' = p\cos(180^\circ - 2\alpha) = -p\cos 2\alpha$ (gdzie p – pęd początkowy), czyli zmiana pędu wynosi $\Delta p = p(1+\cos 2\alpha) = 2p\cos^2\alpha = 2p(1-(h/r)^2)$. Oznaczmy liczbę cząstek padających w ciągu sekundy na jednostkową powierzchnię prostopadłą przez n. Aby obliczyć siłę ze wzoru $F = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t$, należy otrzymane wyrażenie Δp pomnożyć przez n oraz przez powierzchnię cienkiego pierścienia zawartego między h a $h + \mathrm{d}h$ (równą $\Delta S = 2\pi h \mathrm{d}h$) i scałkować po h od 0 do r:

$$F = 4\pi p n \int_0^r \left(1 - (h/r)^2\right) h \mathrm{d}h = pn\pi r^2.$$

Wielkość ta jest równa sile działającej na pochłaniającą cząstki powierzchnię o polu πr^2 (przypadek b).

257. Oznaczmy objętość lewej części przez V_1, początkową objętość prawej przez V_2, przyrost objętości przez ΔV, temperatury początkowe przez T_1 i T_2, temperatury końcowe przez T_1' i T_2', a odpowiednie liczby moli w poszczególnych częściach przez n_1, n_2, n_1' i n_2'. Ponieważ energia wewnętrzna n moli gazu o temperaturze T jest dana wzorem $U = nC_VT$, a praca przy przesunięciu tłoka – wzorem $W = -p\Delta V$, więc bilans energii ma postać

$$n_1C_VT_1 + n_2C_VT_2 + Q - p\Delta V = n_1'C_VT_1' + n_2'C_VT_2'.$$

Z równania Clapeyrona mamy

$$n_1'T_1' = pV_1/R = n_1T_1,\quad n_2'T_2' = p(V_2+\Delta V)/R = n_2T_2 + p\Delta V/R.$$

W wyniku podstawienia otrzymujemy

$$QR = p\Delta V(R + C_V) = C_p p\Delta V.$$

Równanie to obowiązuje w każdym z przypadków a)-c), zatem ΔV nie zależy od tego, którą część podgrzejemy.
(Bardzo podobne do powyższego było przed trzema laty zadanie 198.)

Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 853. Czy istnieje taki ciąg $\{a_n\}$ liczb naturalnych, że dla każdego n liczba $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$ jest kwadratem liczby naturalnej?
Rozwiązanie na str. 17

M 854. Czy istnieje taki nieskończony zbiór liczb naturalnych, że żadna skończona suma liczb z tego zbioru nie jest potęgą liczby naturalnej o wykładniku całkowitym większym niż 1?
Rozwiązanie na str. 17

M 855. Znaleźć 11 kolejnych liczb naturalnych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby naturalnej.
Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Konrad BANASZEK

F 481. Automatyczny układ do napełniania zbiornika składa się z pływaka, który po podniesieniu się do pewnego poziomu zamyka zawór doprowadzający wodę. Zdarza się, że tuż przed odcięciem dopływu wody cały układ wpada w drgania. Wychyleniu pływaka z położenia równowagi musi więc towarzyszyć powstanie pewnej siły, wymuszającej jego powrót do położenia równowagi. Oszacować częstotliwość drgań przy założeniu, że głównym źródłem tej siły jest siła wyporu działająca na pływak. Przyjąć masę pływaka $m = 0{,}1$ kg i pole jego przekroju poprzecznego $S = 100\ \mathrm{cm}^2$.
Rozwiązanie na str. 16

F 482. Instalacja nagłaśniająca wydaje czasem buczenie, pochodzące z ponownej rejestracji przez mikrofon dźwięków wyemitowanych przez głośnik. Jaka będzie typowa częstotliwość odgłosów, jeśli odległość między tymi urządzeniami wynosi $l = 3$ m?
Rozwiązanie na str. 11

Patrz w niebo

Ewolucja gwiazd to proces bardzo powolny – oczywiście w skali ludzkiego życia. Jak wiemy, Słońce przerabia wodór na promieniowanie w tempie 4,25 mld kg/s, co wygląda poważnie, ale jest naprawdę bardzo drobnym ułamkiem masy Słońca i dlatego paliwa tego starczy jeszcze na kilka miliardów lat. Gwiazdy znacznie masywniejsze ewoluują wyraźnie szybciej, ale i tak ciągle bardzo powoli w ludzkim rozumieniu. Wyjątkiem są np. wybuchy supernowych. Wybuch taki to też zmiana ewolucyjna. Gwiazda przeżywa taki kataklizm (zapadnięcie się lub eksplozję jądra) tylko raz w życiu i cała struktura gwiazdy ulega przy tym dramatycznej przebudowie lub wręcz zniszczeniu. W każdym razie ewolucji gwiazd albo nie widać w ogóle, albo widać zjawiska katastrofalne zachodzące w czasie mierzonym sekundami.

A jednak trafiają się wyjątki od tej zasady – fakt, że nieliczne. Otóż gwiazdy zmienne zwane mirami – od przedstawicielki tego typu, Miry (Cudownej) Ceti, czyli Wieloryba – są czerwonymi olbrzymami o masach zbliżonych do masy Słońca, mocno zaawansowanymi w ewolucji. Zewnętrzne warstwy takiej gwiazdy są silnie rozdęte, a jądro ściśnięte. Gwiazda taka prawie już zużyła w centrum cały wodór i jest generalnie niestabilna. Wodór „pali" się głównie w pewnej odległości od centrum, bo tam jest go jeszcze dużo, za to „pali" się nierówno, co powoduje pulsacje gwiazdy i jej zmiany jasności w skali kilkuset dni. Gwiazda próbuje zarazem w centrum „zapalić" nagromadzony tam hel, co też idzie nierówno, a za każdym razem, gdy to się udaje, jej pulsacje ulegają zakłóceniu. I to się obserwuje!

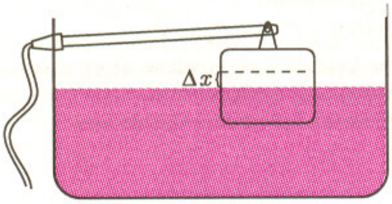
Przykładem takiej gwiazdy jest mianowicie T Ursae Minoris, której jasność waha się w zakresie 9–14 mag. W przybliżeniu do roku 1980 gwiazda zachowywała się jak zwyczajna mira o okresie zmian blasku 310–315 dni. Później okres jej zaczął się szybko skracać, osiągając w 1994 r. wartość 274 dni. Teoretycy twierdzą, że tego właśnie należało oczekiwać po gwieździe na wczesnym etapie uruchamiania helowego źródła energii (po angielsku *helium flash* – błysk helowy). Jeżeli modele budowy gwiazd są poprawne, to T UMi powinna pulsować coraz szybciej, osiągając okres 200 dni około roku 2030, po czym okres powinien zacząć się wydłużać. A rok 2030 to przyszłość niezbyt już odległa...

Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania F 481.
W położeniu równowagi siła ciężkości działająca na pływak równoważy się z siłą wyporu działającą na część pływaka zanurzoną w wodzie. Załóżmy dla uproszczenia, że ruch pływaka odbywa się w pionie. Przy wychyleniu pływaka z położenia równowagi o Δx wypadkowa siły ciężkości i siły wyporu, które nań działają, będzie wynosić $F = -\varrho g S \Delta x$, gdzie ϱ jest gęstością wody, a g – przyspieszeniem ziemskim. Wartość siły wypadkowej jest więc proporcjonalna do wychylenia, ze współczynnikiem proporcjonalności $k = \varrho g S$. Zatem pływak będzie wykonywać drgania harmoniczne z częstotliwością

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\varrho g S}{m}} \approx 5\ \text{Hz}.$$

W rozwiązaniu zaniedbaliśmy tzw. masę związaną wody, poruszającą się wokół drgającego pływaka, zmiany poziomu wody w zbiorniku, pochodzące ze zmian poziomu zanurzenia pływaka oraz siły związane z umocowaniem pływaka i działaniem zaworu. Opisany model drgań nie jest pełny, gdyż w rzeczywistości dźwięki te są słyszalne.



Sierpień

Aby w sierpniowy wieczór zobaczyć Wegę (najjaśniejszą gwiazdę Lutni), trzeba unieść głowę naprawdę wysoko. Ma się wrażenie, że gwiazda znajduje się w zenicie, ale jest to złudzenie. Ta bardzo jasna gwiazda jest też jedną z najbliższych i jedną z pierwszych, których odległość została w ogóle wyznaczona. Były to lata 1837–1838. Wyznaczono wtedy niemal jednocześnie odległości trzech gwiazd: F.G.W. Struve obserwował Wegę (α Lyr), T. Henderson Tolimana (α Cen) i F. Bessel 61 Cyg. Ta ostatnia gwiazda bardzo szybko wędruje po niebie i dlatego Bessel uznał, że musi znajdować się względnie blisko. Wszystkie trzy próby pomiaru paralaks heliocentrycznych tych gwiazd powiodły się. W szczególności okazało się, że Wega odległa jest o 8,1 pc, a więc rzeczywiście jest jedną z gwiazd sąsiednich. Dzięki temu też udało się później wyznaczyć jej średnicę – jest 3,6 razy większa od Słońca. Niedawno wreszcie za pośrednictwem obserwacji w podczerwieni stwierdzono obecność wokół niej pyłowego dysku, co może świadczyć, że kiedyś powstanie tam układ planetarny.

Wenus szybko przechodzi przez Bliźnięta i Raka, a ponieważ Słońce jest w Lwie, to widać ją już w promieniach wschodzącego Słońca i warunki jej widoczności będą się pogarszać. Również blisko Słońca, na granicy Bliźniąt i Raka, znajduje się Mars, ale z czasem będzie go widać coraz lepiej, gdyż zostaje coraz dalej za Słońcem. Jowisz jest nadal w Rybach, a Saturn w Baranie i obie te planety widać w drugiej połowie nocy. Pełnia Księżyca wypada 8 VIII – nastąpi wtedy jego półcieniowe zaćmienie, a więc praktycznie niedostrzegalne. Podczas nowiu 22 VIII nastąpi zaćmienie Słońca, ale z Polski niewidoczne. Księżyc zbliży się silnie do Jowisza 11 VIII i do Aldebarana 16 VIII i nawet zakryje te ciała, ale z Polski zakryć nie będzie widać. 31 VIII Merkury znajdzie się najdalej kątowo od Słońca (o 18°) i można próbować dostrzec go o świcie.

T.K.

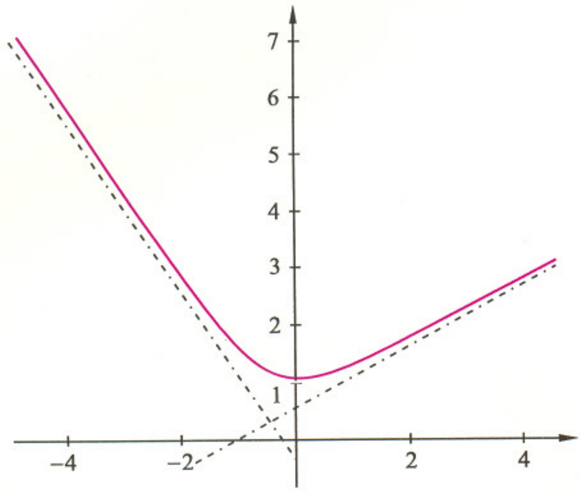
8/98 (8)

Γlimatias $n \to \infty$

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (5″)

Wyjaśnienie oszustwa (5′) – *tym razem poprawne*:

Funkcja f nie ma minimum w punkcie -1, gdyż $f'(-1) = -1 \neq 0$! Liczba -1 nie jest rozwiązaniem równania $2x+1 = \sqrt{x^2+x+1}$, bo dla $x=-1$ ma ono postać $-1 = \sqrt{1}$, ale po obustronnym podniesieniu do kwadratu dostajemy $1=1$. Prawdziwy wykres funkcji naszkicowany jest na rysunku.



JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (7′)

Wyjaśnienie oszustwa (7):

We wzorze na sumę postępu geometrycznego n jest liczbą wyrazów postępu. W sumie $1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n$ wyrazów jest $n+1$, więc jest ona równa $\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$, skąd

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}-1}{2\cdot 3^n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{3^n}}{2} = \frac{3}{2}.$$

JWR

CYFROMANIA (6)

Zastanówmy się, jakie końcówki mogą mieć liczby postaci 2^{2^n}. Wiemy już z wcześniejszych artykułów, że dowolna liczba $0 < r_k < 10^k$, podzielna przez 2^k i niepodzielna przez 5, może być k-cyfrową końcówką liczby 2^m. Chcąc uzyskać taką końcówkę, wystarczy zażądać, aby m dawało odpowiednią resztę s_k przy dzieleniu przez $4\cdot 5^{k-1}$. Jeśli nakładamy na m dodatkowe ograniczenie, że jest ono równe 2^n, to tym samym nakładamy pewne ograniczenie na resztę s_k z dzielenia m przez $4\cdot 5^{k-1}$.

Otóż, s_k musi dzielić się przez 4 (o ile $n \geq 2$) oraz nie może dzielić się przez 5. Ponieważ dowolna reszta z dzielenia przez 5^{k-1}, niepodzielna przez 5, jest realizowana jako reszta z dzielenia pewnej potęgi dwójki przez 5^{k-1}, więc s_k nie podlega żadnym innym ograniczeniom.

Dopuszczalnej dla wyrażenia postaci 2^{2^n} reszcie $r_k \pmod{10^k}$ odpowiada więc $s_k \pmod{4\cdot 5^{k-1}}$, które to s_k podlega wyżej opisanym ograniczeniom. Chcemy poznać po samym r_k, czy odpowiadające mu s_k jest dobre.

Liczba s_k ma się dzielić przez 4. Jak to wyrazić w języku r_k? Chwila zastanowienia pokazuje, że r_k musi się kończyć cyfrą 6.

Rozpatrując dwucyfrowe końcówki potęg dwójki zakończone cyfrą 6, łatwo zobaczymy, co oznacza warunek $5 \nmid s_2$:

s_2	r_2
$4 \pmod{20}$	$16 \pmod{100}$
$8 \pmod{20}$	$56 \pmod{100}$
$12 \pmod{20}$	$96 \pmod{100}$
$16 \pmod{20}$	$36 \pmod{100}$
$0 \pmod{20}$	$76 \pmod{100}$

Widać, że z powyższej listy trzeba wykreślić końcówkę 76. Warunek $20 \mid s_k$ jest równoważny temu, że $r_k \equiv 76 \pmod{100}$. Otrzymujemy więc:

WNIOSEK: Liczba $1 < r < 10^k$, $k \geq 2$ pojawia się jako k-cyfrowa końcówka w liczbach postaci 2^{2^n} ($n \geq 2$) wtedy i tylko wtedy, gdy r dzieli się przez 2^k, ma ostatnią cyfrę 6, a przedostatnia cyfra (która musi być nieparzysta) jest różna od 7.

Zauważmy, że przy tym liczba możliwych końcówek k-cyfrowych wynosi $4\cdot 5^{k-2}$.

JWR

Korespondencję do Γ-limatiasu prosimy kierować pod adresem:
Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCŁAW; e-mail: jwr@ math.uni.wroc.pl

Rozwiązanie zadania M 853.
Tak, istnieje. Na przykład ciąg skonstruowany indukcyjnie w następujący sposób: $a_1 = 3$; jeśli mamy już odpowiednie $a_1, \ldots, a_n$, przy czym $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = (2k+1)^2$, to kładziemy $a_{n+1} = 2k^2 + 2k$ i mamy wtedy $a_1^2 + \ldots + a_n^2 + a_{n+1}^2 = (2k+1)^2 + (2k^2+2k)^2 = (2k^2+2k+1)^2$.

Rozwiązanie zadania M 854.
Tak, istnieje. Np. zbiór $\{2,\ 2^2 3,\ 2^2 3^2 5,\ 2^2 3^2 5^2 7, \ldots,\ 2^2 3^2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^2 p_n, \ldots\}$, gdzie przez p_n oznaczyliśmy n-tą liczbę pierwszą. Dowolna skończona suma liczb z tego zbioru będzie podzielna przez p_k, ale nie przez p_k^2, gdzie k jest numerem najmniejszego ze składników w tej sumie.