



Dnia 4 maja 1998 roku zginął tragicznie
w wieku 75 lat

prof. **Józef WERLE**

nestor warszawskich fizyków teoretyków,
członek rzeczywisty Polskiej Akademii Nauk,
były wiceprzewodniczący IUPAP –
Międzynarodowej Unii Fizyki Czystej i Stosowanej,
nauczyciel wielu pokoleń fizyków, Autor *Delty*

SPIS TREŚCI

NUMERU 7(290)

Dobrego nigdy za wiele
Piotr Chrząstowski

Jest takie równanie
Krzysztof Ciesielski

Czy istnieją smoki?
Grzegorz Białkowski

Mała Delta

Aktualności
(nie tylko) fizyczne

Samochód z n przyczepkami
Bronisław Jakubczyk

Zadania

Klub 44

Pożytek z ciągu stałego

Patrz w niebo

Lipiec

Gammalimatias

W następnym numerze:

50 lat czasopisma

MATEMATYKA

Okładki i ilustracje wykonała
Anna Ludwicka

Wybór artykułów z *Delty*

ukazuje się w języku angielskim

w sieci Internet pod adresem

<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

str. 1	Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący	Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol Krzysztof Biesaga Wojciech Kopczyński – z-ca red. nacz. Krystyna Kordos – sekr. red. Marek Kordos – red. nacz.
str. 1	Krzysztof Ciesielski Jan A. Gaj Piotr Goldstein Tomasz Hofmokl	Tomasz Kwast Anna Ludwicka Anna Rudnik Paweł Strzelecki
str. 6	Andrzej Hryniewicz Wiesław A. Kamiński Marta Kicińska-Habior	Joanna Udalska Anna Wojtyra Piotr Zalewski
str. 8	Krzysztof Maślanka Andrzej Mąkowski Zdzisław Pogoda Feliks Przytycki	Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa tel. 843-02-41(-2) wewn. 21 PAWELST@MIMUW.EDU.PL
str.10	Michał Różyczka Konrad Rudnicki Zbigniew Semadeni Grzegorz Sitarski Andrzej Woszczyk	Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65. Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.
str.11	Wiesław Żelazko – przewodniczący	

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące. Cena jednego numeru w 1998 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres co najmniej trzech miesięcy) cena numeru w 1998 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1998 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem	
	za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

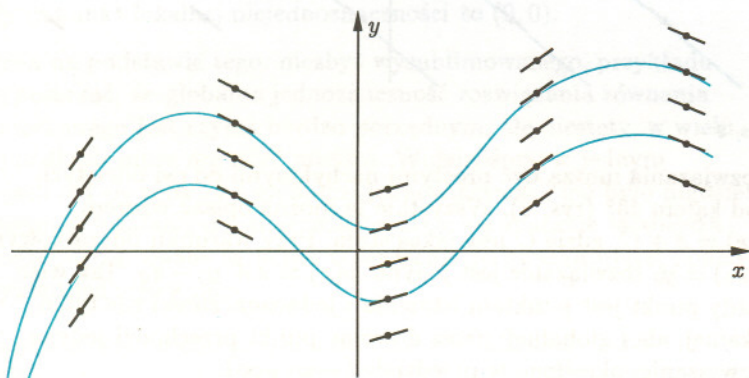
Numer archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie. Niestety, nie dysponujemy już numerami z lat 1974–1984.

Jest takie równanie

Krzysztof CIESIELSKI

Oryginalne, niestandardowe przykłady dodają matematyce uroku. Czasem chciałoby się zawołać: „to niemożliwe, coś takiego nie może istnieć!”. Dziwnych obiektów matematycznych jest bardzo wiele. To opowiadanie będzie o jednym z nich.

Rozważmy płaszczyznę z wprowadzonym kartezjańskim układem współrzędnych i założmy, że w każdym jej punkcie umieszczona została jakaś liczba. Szukamy funkcji (o argumentach i wartościach rzeczywistych) wyznaczonej w pewien sposób przez zadane liczby. Chodzi o to, że jeśli (x_0, y_0) należy do wykresu funkcji, to pochodna funkcji w x_0 ma być równa właśnie liczbie „zaczepionej” w (x_0, y_0) . Gdy przypomnimy sobie geometryczną interpretację pochodnej, możemy powiedzieć, że mamy w każdym punkcie dany kąt nachylenia stycznej do wykresu nieznanej funkcji, a funkcję, która do tych stycznych „pasuje”, chcemy znaleźć.



Rys. 1

Zapiszmy to formalnie. Dane jest odwzorowanie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Szukamy funkcji $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ewentualnie dziedziną może być przedział zawarty w \mathbb{R}), takiej, że dla każdego argumentu x funkcji y spełniony jest warunek $y'(x) = f(x, y(x))$.

Zapisane powyżej równanie to **równanie różniczkowe zwyczajne**. Poszukując funkcji, której wykres leży na płaszczyźnie „zgodnie” z zadanymi pochodnymi, dobrze jest narzucić jeszcze jeden warunek: wykres szukanej funkcji y zmiennej x powinien przechodzić przez pewien wyznaczony punkt płaszczyzny. Warunek ten, zwany **warunkiem początkowym**, zapisujemy: $y(x_0) = y_0$, gdzie (x_0, y_0) to właśnie dany punkt na płaszczyźnie. Klasyczne w teorii równań różniczkowych zadanie znalezienia funkcji, spełniającej takie dwa warunki, nazywane jest **problemem Cauchy’ego**.

Nasuują się dwa naturalne pytania. Po pierwsze, czy rozwiązanie – to znaczy odpowiednia funkcja, określona w jakimś przedziale, zawierającym x_0 – istnieje? Po drugie, jeśli istnieje, to czy jest w tym przedziale jedyna? Łatwo się domyślić, że zależy to przede wszystkim od funkcji f .

Twierdzenie (uproszczona wersja twierdzenia Peano o istnieniu). *Jeżeli funkcja $f : [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to dla pewnego $\alpha > 0$ problem*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ma rozwiązanie w przedziale $[x_0, x_0 + \alpha]$.

Dobrego nigdy za wiele

Piotr CHRZĄSTOWSKI

Wpadł do mnie Paweł, mój bardzo bliski przyjaciel. Postawił dwie identyczne puszkki na stole.

– Mam fajną zabawę – powiedział. – To gra, w której możesz tylko zyskać. Chodzi o to, żebyś zyskał jak najwięcej.

Zasady są takie: za chwilę pójdę do sąsiedniego pokoju i zacznę rzucać monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Zannotuję, ile reszek zdążyło wypaść przed pierwszym pojawieniem się orła, i jeśli będzie ich n , to do jednej puszkki (nie będziesz wiedział, do której) włożę 3^n złotych, a do drugiej 3^{n+1} zł. Następnie przyniosę ci obie puszkki. Ty będziesz mógł dowolną z nich utworzyć i sprawdzić, ile zawiera pieniędzy. Następnie albo bierzesz to, co widzisz, albo decydujesz się na wzięcie pieniędzy z drugiej puszkki. To są zasady. Teraz chodzi o to, żebyś opracował najlepszą strategię: kiedy warto zatrzymać to, co widzisz, a kiedy decydować się na tę drugą puszkę?

Zacząłem przyglądać się założeniom. Możliwe układy par gotówki w puszkach to $(1, 3)$, $(3, 9)$, $(9, 27)$, ... Oczywiście, układy te są rozłożone według następującej reguły: para $(1, 3)$ będzie się pojawiać z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ (bo w połowie przypadków orzeł wypadnie od razu), para $(3, 9)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ (bo w jednej czwartej przypadków zostanie wyrzucona najpierw jedna reszka, a tuż po niej orzeł), para $(9, 27)$ z prawdopodobieństwem $\frac{1}{8}$, itd. Zawsze będzie tak, że prawdopodobieństwo wystąpienia dowolnej pary jest dwa razy większe, niż tej, która bezpośrednio po niej następuje. Zwykły rozkład geometryczny.

Zrobiliśmy jedną próbę. W puszcze, którą otworzyłem, zobaczyłem 3 złote. Aha, to znaczy, że w drugiej puszcze jest albo jedna złotówka, albo jest ich tam 9. Oczywiście to, że jest ich tam 9, jest dokładnie 2 razy mniej prawdopodobne, niż to, że jest tam pojedynczy złocisz: w końcu układ $(1, 3)$ jest dokładnie 2 razy bardziej prawdopodobny niż układ $(3, 9)$. Ponieważ inne układy już nie wchodzą w grę, więc z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ mamy w drugiej puszcze jedną złotówkę, a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ dziewięć złotych. Jeżeli zdecydujemy się na wzięcie

zawartości tej drugiej puszki, to średnio dostaniemy $\frac{2}{3}1 + \frac{1}{3}9$ zł, ewidentnie więcej niż, co prawda, gwarantowane, ale tylko 3 zł, które byśmy mieli pozostając przy pierwszej puszcze.

Co by było, gdybyśmy otworzywszy pierwszą puszkę, zobaczył w niej inną kwotę? Z jedynek nie ma problemu: bez zastanowienia biorę 3 zł z drugiej puszki. A dla większych wartości? Załóżmy, że widzę 3^i zł. Oznacza to, że w drugiej puszcze z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ znajdę 3^{i-1} zł, a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ zobaczę 3^{i+1} zł. Jeżeli zatem zdecyduję się na drugą puszkę, to średnio dostanę $\frac{2}{3}3^{i-1} + \frac{1}{3}3^{i+1}$ zł. Ponieważ sam drugi składnik tej sumy jest równy 3^i , więc oczekiwana wartość zysku przy wzięciu kwoty z drugiej puszki jest ostro większa, niż oczekiwana (a przy okazji pewna) kwota z puszki, którą otworzyłem.

No to wszystko jest jasne! Strategia okazała się bardzo prosta: wystarczy po otwarciu zawsze decydować się na tę drugą puszkę, a na pewno średnio wyjdziemy lepiej, niż pozostając przy kwocie z tej otwartej.

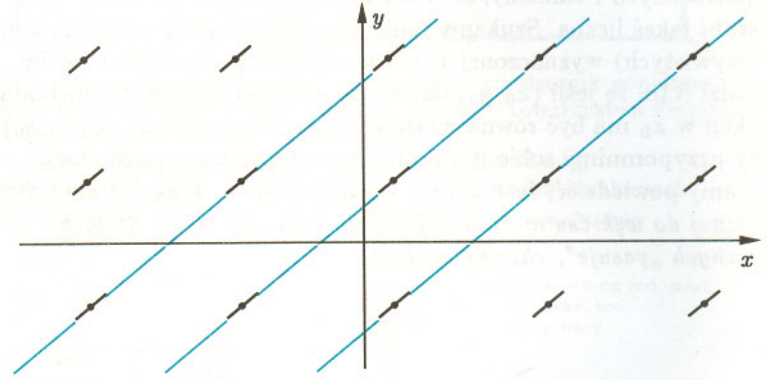
Zaraz, zaraz... To po co w ogóle otwierać i sprawdzać, co jest w tej pierwszej puszcze? Skoro i tak zawsze dostaniemy średnio więcej, niż to, co w niej zobaczymy, to nie ma sensu się męczyć z otwieraniem, tylko od razu wziąć tę drugą puszkę. Uproszczona strategia jest więc taka. Wybierz dowolną puszkę, a potem otwórz ją, albo i nie – jak chcesz – bylebyś tylko pamiętał, żeby ostatecznie wziąć tę drugą puszkę! Na pewno wyjdiesz na tym średnio lepiej, niż gdybyś pozostał przy pierwszym wyborze.

Coś tu jednak nie gra. No bo skoro nie musimy puszek otwierać, to co by było, gdybyśmy jako pierwszą wybrali tę drugą, niby lepszą? Wybranie pozostałej puszki musiałoby nam przynieść średnio stratę. Ponadto przecież gdy stoimy przed dwiema zamkniętymi puszkami, to nie sposób stwierdzić, która jest lepsza. Czyżby jednak otwarcie puszki było konieczne do zastosowania prawidłowej strategii?

Wygląda na to, że tak. No więc dobrze. Mamy przed sobą dwie nierozróżnialne puszki. Bierzymy jedną do ręki, a razie wszystko jedno którą, i powoli uchylamy wieczko. Jeszcze nic nie widzimy, jeszcze wszystko jedno, na którą puszkę się zdecydujemy, ale po chwili dostrzegamy parę monet na dnie: wygląda na to, że jest więcej niż 3, ale nie aż 27, czyli zapewne 9...

Jeśli funkcja f jest odpowiednio „porządna” (przy czym nie musimy wymagać wiele, por. twierdzenie wydrukowane kolorem), to problem Cauchy’ego ma rozwiązanie. Trochę bardziej wysublimowane założenia należy podać w celu zagwarantowania jedyności rozwiązania, ale i tu nie jest źle, jeżeli wystarczy nam jednoznaczność lokalna. **Lokalna jednoznaczność** oznacza, że jeśli startujemy od punktu (x_0, y_0) , to w pewnym przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ rozwiązanie jest jedyne.

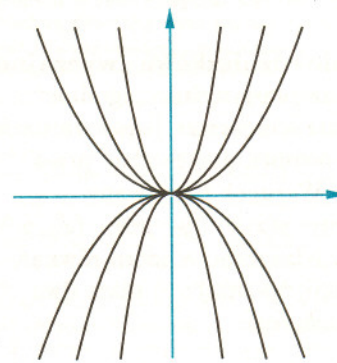
Najwyższy czas na parę prostych przykładów. Rozważmy równanie $y'(x) = 1$; w każdym punkcie pochodna szukanej funkcji jest stała.



Rys. 2

Rozwiązania muszą być prostymi nachylonymi do osi odciętych pod kątem 45° (rys. 2). Wszystkie je można opisać wzorem: $y(x) = x + C$, gdzie C jest jakąś stałą. Przy warunku początkowym $y(x_0) = y_0$ rozwiązanie jest jedyne: $y(x) = x + y_0 - x_0$. Tak więc każdy punkt jest punktem istnienia i jednoznaczności nie tylko lokalnej, ale i globalnej; przez dowolny punkt przechodzi jedyne rozwiązanie, określone w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

Narysujmy teraz na płaszczyźnie rodzinę krzywych: wszystkie parabole o wspólnym wierzchołku w punkcie $(0, 0)$ oraz prostą, pokrywającą się z osią OX (rys. 3). Równanie określamy w ten sposób, że w każdym punkcie styczna do szukanej funkcji jest



Rys. 3

styczną do przechodzącej przez ten punkt paraboli (lub osi odciętych). Jedynym miejscem, gdzie mogłoby to sprawić problem, jest $(0, 0)$, bo tylko przez ten punkt przechodzi więcej niż jedna krzywa – ale nie ma z tym kłopotu, bo dla każdej z nich styczna w tym punkcie jest taka sama, pochodna wynosi 0. Równanie to określone jest przez funkcję:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

ale nie jest to w tej chwili istotne.

Spróbujmy zobaczyć, jak w tym przykładzie wygląda istnienie i jednoznaczność rozwiązań. Oczywiście, rozwiązaniami są funkcje $y(x) = Cx^2$ dla dowolnego C (dla $C = 0$ wychodzi funkcja stała). Oznacza to, że przez każdy punkt nie należący do osi OY przechodzi jakieś rozwiązanie; przez punkt $(0, 0)$ przechodzi ich nieskończenie wiele (a zatem jest on ewidentnie punktem niejednoznaczności), przez pozostałe punkty osi rzędnych rozwiązania nie przechodzą.

A jak jest dla $x_0 \neq 0$? Na pierwszy rzut oka wydawać by się mogło, że tu rozwiązanie będzie jedyne – któraś z parabol, ewentualnie prosta. A jednak nie! Rozważmy, na przykład, warunek początkowy $y(-1) = 1$ – szukamy rozwiązania przechodzącego przez $(-1, 1)$. Oczywiście, jest nim funkcja $y = x^2$. Ale nie tylko! Rozwiązaniem jest też funkcja

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 0, \\ 0 & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

i w tej chwili nietrudno zauważyć, że jeśli w punkcie $(0, 0)$ dokleimy do „lewej części” paraboli $y = x^2$ „prawą część” którejkolwiek paraboli, wszystko będzie w porządku. Ogólnie, rozwiązanie ma postać

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 0, \\ Cx^2 & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}$$

Punkt $(-1, 1)$ nie jest zatem punktem globalnej jednoznaczności – ale jest punktem jednoznaczności **lokalnej**; w przedziale $(-\infty, 0)$ mamy jedyne rozwiązanie $y(x) = x^2$. Łatwo zauważyć, że analogicznie jest dla każdego punktu (x_0, y_0) , o ile tylko $x_0 \neq 0$; wszędzie tam rozwiązanie istnieje i jest w pewnym otoczeniu jedyne. Jedyne punkty lokalnej niejednoznaczności to $(0, 0)$.

Można na podstawie tego, niezbyt wysublimowanego, przykładu przypuszczać, że globalna jednoznaczność rozwiązania równania różniczkowego jest czymś bardzo porządnym, ale niestety, w wielu przypadkach może nie mieć miejsca. Widzieliśmy: w jednym miejscu coś się zepsuło i globalnej jednoznaczności nie było nigdzie! Natomiast lokalna jednoznaczność wydaje się znacznie łatwiejsza do osiągnięcia. Znane są liczne twierdzenia to gwarantujące; poniżej przykład jednego z nich.

Twierdzenie (uproszczona wersja twierdzenia Picarda–Lindelöfa). *Jeżeli $P = [x_0, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ i funkcja $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła oraz istnieje takie $L > 0$, że $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ dla dowolnych $(x, y_1), (x, y_2) \in P$, to dla pewnego $\alpha > 0$ problem*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $[x_0, x_0 + \alpha]$.

Nasuwa się pytanie: jak dalece „nieporządna” (czyli dopuszczająca dużo punktów lokalnej niejednoznaczności) sytuacja może zajść? Otóż istnieją przykłady wyjątkowo perfidne. Mianowicie, można pokazać równanie różniczkowe, dla którego **żaden** punkt na płaszczyźnie nie jest punktem lokalnej jednoznaczności (i to w obu kierunkach, zarówno w prawo, jak i w lewo). Inaczej: istnieje taka ciągła funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, że równanie różniczkowe $y'(x) = f(x, y(x))$ ma dla każdego warunku początkowego $y(x_0) = y_0$ rozwiązanie (i to określone na przedziale $(-\infty, +\infty)$), przy czym jakkolwiek liczbę $\delta > 0$ weźmiemy, to zarówno w przedziale $(x_0 - \delta, x_0]$, jak i w przedziale $[x_0, x_0 + \delta)$ znajdziemy więcej niż jedno rozwiązanie równania, spełniające zadany warunek początkowy. Dziwne? A jednak...

Pierwszy taki przykład podał w roku 1925 Michaił Aleksiejewicz Ławrientiew. Ten, którego idea konstrukcji pokazana zostanie poniżej, przedstawił w roku 1963 Philip Hartman.

Najpierw narysujmy na płaszczyźnie rodzinę sinusoid tak, by każda „wyższa” była w punktach swoich minimów styczna do bezpośrednio „niższej” w punktach jej maksimów. Precyzyjnie: rysujemy wykresy funkcji $u_k(x) = \cos \pi x + 4k$ oraz $v_k(x) = -\cos \pi x + 4k + 2$ dla

STOP! Od tego momentu już opłaca się wziąć drugą puszkę! Czyli konieczne jest **uświadomienie** sobie, ile mamy złotych w pierwszej puszcze, aby naprawdę zaczęło się opłacać wybranie tej drugiej. Coś jest nie tak! A jeżeli ja mam słaby wzrok, źle dostrzegłem i okaże się, że jednak kwota jest inna? Nic nie szkodzi! Strategia jest ogólna. A jeżeli zacznę oszukiwać i zamknę oczy, albo będę się tak nieostro patrzył, żeby nic nie zobaczyć? Gdzie pojawia się ten moment, w którym już na pewno opłaca się zdecydować na tę drugą puszkę? Przecież od tego, czy ja patrzę źle czy dobrze, nie może zależeć przeskoczenie z kompletnej równości szans do sytuacji, w której faktycznie mam strategię lepszą, niż pozostanie przy pierwszej puszcze.

Spojrzałem na Pawła. Czy on wariata ze mnie struga? A on, faktycznie, się śmieje: Widzę, że masz zagwozdkę? Zastanów się więc, ile średnio wygrasz przy dwóch strategiach: tej niby najlepszej „Biorę zawsze to, co w drugiej puszcze” i tej niby najgorszej „Biorę zawsze to, co widzę”. Bo cała reszta strategii jest gdzieś pośrodku. Zaczęłam obliczenia. Przy pierwszej strategii średnio wygram $\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} \cdot 27 + \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \dots = \frac{1}{2} \cdot 3 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} (3^i + 2 \cdot 3^{i-2}) = \infty$, a przy drugiej

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 9 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{i-1}}{2^i} = \infty.$$

A widzisz! I tu, i tu wygrywasz nieskończenie dużo. Nie możesz tylko pogodzić się z myślą, że może to być dokładnie tyle samo. A to dlatego, że nie jesteś sobie w stanie wyobrazić, co to znaczy, że średnio wygrasz nieskończenie dużo, a ponadto jesteś zachłanny. Nie rozumiesz jeszcze?

To oczywiście. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że ten pierwszy szereg ma każdy wyraz większy od odpowiadającego mu wyrazu drugiego szeregu. Ale wystarczy przesunąć pierwszy szereg o jedną pozycję w następujący sposób: Pierwsze trzy wyrazy pierwszego szeregu porównujemy z pierwszymi czterema drugiego i okazuje się, że te drugie są łącznie o $\frac{13}{48}$ od nich większe. Dalej, piąty wyraz drugiego szeregu ($\frac{1}{32} \cdot 81$) jest większy od czwartego wyrazu pierwszego szeregu ($\frac{1}{16} (27 + 2 \cdot 3)$), szósty wyraz drugiego szeregu od piątego z pierwszego, i tak dalej. Każdy i -ty wyraz pierwszego szeregu jest mniejszy niż $(i+1)$ -szy wyraz drugiego szeregu. Przy takim zestawieniu drugi szereg wydaje się być większy od pierwszego. Oczywiście

absurd, a wynika stąd, że nie wolno nam porównywać w ten sposób wartości nieskończonych.

Błąd twój polegał na tym, że poznawszy lokalne strategie (każda poprawna!) starałeś się wymyślić strategię globalną. Zakładałeś, że jeśli pojedyncze przypadki ustawione parami obok siebie wskazują wyższość pierwszej strategii, to istnieje uogólnienie na wszystkie przypadki naraz. A tak wcale być nie musi – jak zobaczyliśmy, inne zestawienie przypadków daje wprost przeciwny wniosek: ta druga strategia jawi się jako lepsza.

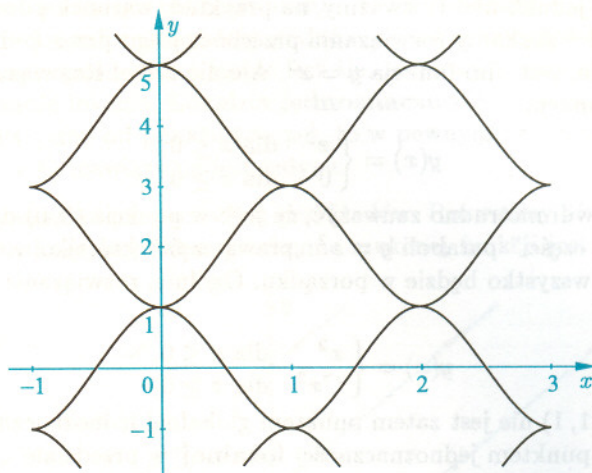
Takie wychodzą kłopoty, gdy zaczynamy bawić się z nieskończonymi wartościami oczekiwanymi. A co one oznaczają tak naprawdę? Intuicyjnie, pojęcie nieskończonej wartości oczekiwanej jest nieoczekiwane: przecież zawsze wygrywamy skończoną wartość, więc jak się można spodziewać średnio nieskończonej wygranej? Otóż nie można się, oczywiście, takiej wygranej spodziewać i w ogóle przyjmujemy, że jeśli odpowiednia suma, określająca wartość oczekiwaną, okaże się nieskończona, to po prostu wartość oczekiwana nie istnieje. Niemniej jednak, można podejść do zagadnienia inaczej i zinterpretować ten fenomen następująco. Wyobraźmy sobie, że ktoś proponuje nam naprawdę taką grę, jak opisana powyżej, tylko że na prawdziwe pieniądze, a ponadto żąda od nas pewnej kwoty, którą musimy uiścić za każdą rundę tej gry. Za jaką kwotę opłaci się nam grać?

Gdyby taka wartość oczekiwana była skończona, to opłacałoby się postawić wszystkie wartości od niej mniejsze, nie opłacałoby się stawiać stawek większych, a stawka równa wartości oczekiwanej nie dałaby zysku żadnej ze stron. W naszym przypadku, gdy wartość oczekiwana jest nieskończona, opłaca się oczywiście grać za każdą stawkę. Rzecz jasna, przy założeniu nieograniczonej wypłacalności partnera.

Pewien ksiądz, zresztą matematyk z wykształcenia, powiedział, że to bardzo interesujący problem. Ludzie często mają żal do Boga, że skoro są „lepsi” od innych, to w wieczności powinni więcej otrzymać. Spodziewają się, co prawda, nieskończenie wielkiej zapłaty za dobrze spędzone życie, ale chcieliby, żeby ci „gorsi” mieli jakoś gorzej! To znaczy, żeby tamtych nieskończenie wielka zapłata za nie tak dobre życie, którą otrzymają w wieczności, była „gorszej jakości”.

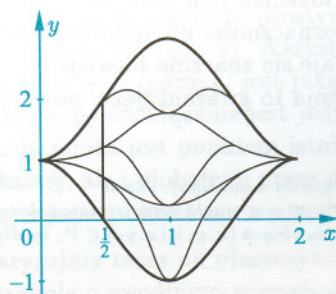
Morał: Gdy masz w perspektywie dostać nieskończenie wiele – nie kombinuj!

wszystkich k całkowitych (rys. 4). Powstaje w ten sposób na płaszczyźnie rodzina krzywych i sieć „oczka” między nimi.



Rys. 4

Teraz będziemy rysować kolejne krzywe tak, aby wszystkie stykające się wykresy miały w punktach wspólnych takie same styczne oraz by „oczka” były coraz mniejsze, zagęszczały się. Dokładniej omówimy jedynie drugi krok. Wszystkie powstałe w pierwszym etapie „oczka” są przystające. Wystarczy więc pokazać, jak poprowadzimy nowe

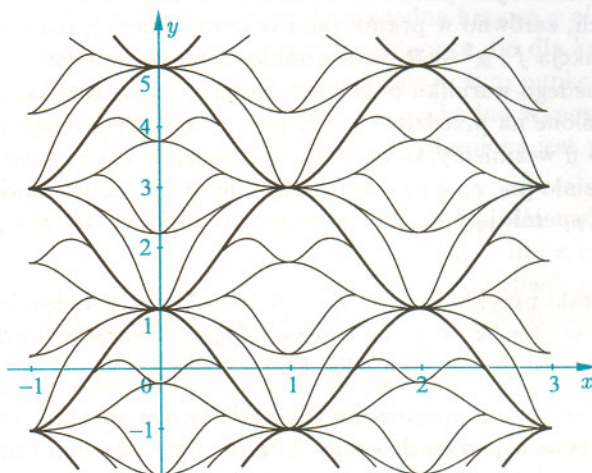


Rys. 5

linie w jednym z nich; jest to pokazane na rysunku 5. Zauważmy: w tym „oczku” sinusoidy stykały się w punktach o odciętych 0, 1 i 2 (a na płaszczyźnie w punktach o odciętych całkowitych). Skonstruowane teraz linie (wraz z tymi z poprzedniego kroku) stykają się w punktach o odciętych $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$. Ogólnie – punkty styczności mają odcięte $\frac{k}{2}$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą.

Rzecz jasna, narysowane krzywe opisane są konkretnym wzorem, który jednak tu sobie darujemy.

Co dalej? Konstrukcję przeprowadza się rekurencyjnie; mając utworzone w kilku krokach „pseudo-sinusoidy”, dorabia się



Rys. 6

w następnym kroku kolejnie. Robi się to w ten sposób, by w punktach wspólnych styczne były identyczne oraz by po każdym kroku linie stykały się w punktach o odciętych dwukrotnie zmniejszonych. Ponadto „oczka” mają być coraz drobniejsze, mają stawać się „dowolnie małe”. Krzywe te muszą być takie, by można było potem zastosować pewne twierdzenia analizy matematycznej. W ten sposób tworzymy kolejne funkcje, w nieskończoność. Łatwo domyślić się, że one, między innymi, będą rozwiązaniami równania – którego jednak jeszcze nie mamy. . .

Należy więc jakoś określić funkcję f dwóch zmiennych rzeczywistych. Gdy punkt (x, y) należy do którejś ze skonstruowanych krzywych, wiemy, jak to zrobić – jako $f(x, y)$ przyjmujemy pochodną (w punkcie x) narysowanej w którymś z kroków funkcji, której wykres przechodzi przez ten punkt. W niczym nie przeszkadza, że takich funkcji może być więcej – z ich konstrukcji wynika, że te pochodne są identyczne. Ale zostaje jeszcze wiele innych punktów na płaszczyźnie. Co z nimi?

Linie, na których wartości f są już określone, w sumie tworzą gęsty podzbiór płaszczyzny (to znaczy taki, że jego domknięcie jest całą płaszczyzną). Nasze krzywe były tak konstruowane, że powstałą funkcję można – przy wykorzystaniu klasycznych twierdzeń z analizy matematycznej – rozszerzyć do funkcji ciągłej na całej płaszczyźnie. W ten sposób dostajemy takie równanie $y'(x) = f(x, y)$, że dla każdego warunku początkowego $y(x_0) = y_0$ rozwiązanie istnieje. Trzeba zatem jedynie zobaczyć, czemu nigdzie nie ma lokalnej jednoznaczności. Ale to wcale nie jest trudne!

Zgodnie z konstrukcją, w $(n + 1)$ -szym kroku linie „stykały” się w punktach o odciętych $\frac{k}{2^n}$. Obierzmy jakikolwiek punkt (x_0, y_0) i małą, dowolnie wybraną, liczbę δ . Należy sprawdzić, że w przedziale $[x_0, x_0 + \delta)$ rozwiązanie nie jest jedyne. Weźmy teraz takie n , by $\frac{k}{2^n} \in (x_0, x_0 + \delta)$ dla jakiegoś k . Punkt (x_0, y_0) leży w pewnym „oczku” z $(n + 1)$ -szego kroku. Teraz, „wędrując” po rozwiązaniu, musimy dotrzeć do odciętej $\frac{k}{2^n}$. Musimy „wyjść” z oczka w prawą stronę (bo $x_0 + \delta$ jest większe). Jeżeli wcześniej „wyszliśmy na zewnątrz oczka”, to musieliśmy „przejść” przez punkt, w którym nie ma jednoznaczności. Jeśli nie, to dojdziemy do punktu o odciętej $\frac{k}{2^n}$, leżącego na skonstruowanej w $(n + 1)$ -szym kroku krzywej, a tam jednoznaczności nie ma. Tak czy inaczej, napotykamy po drodze punkt, przez który przechodzi więcej niż jedno rozwiązanie; nie ma zatem jednoznaczności w przedziale $[x_0, x_0 + \delta)$. Analogicznie rozumując, pokazujemy, że to samo dzieje się, gdy idziemy „w lewo”.

By wszystko było w porządku, trzeba przeprowadzić dokładny, precyzyjny dowód, sprawdzając każdy szczegół. Podaje się równania opisujące konstruowane krzywe, wykazuje się formalnie, że „oczka”, punkty styczności oraz funkcja f są rzeczywiście takie, jak trzeba. To wszystko zajmuje jeszcze kilka stron druku. Tu przedstawiona została jedynie idea rozumowania.

Oczywiście, „oryginalność” takiego czy innego przykładu jest rzeczą subiektywną. Każdy patrzy na matematykę po swojemu; dotyczy to również powyższego przykładu. Jednemu niestandardowe wydaje się to, drugiemu coś całkiem innego, choć na temat prawdziwości dyskutowanych faktów sporów nie będzie. Także w tym ukryty jest urok matematyki.



Rozwiązanie zadania M 851. Jak na rysunku obok:

$$\begin{aligned} S_{BMP} + S_{MCNQ} + S_{RND} + (S_{QRN} + S_{BPA}) &= S_{BMA} + S_{MCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{BNA} = \\ &= (S_{QRN} + S_{BPA}) + S_{APQR}. \end{aligned}$$



Rozwiązanie zadania F 479.

Rozważmy jedno z ramion rurki. Średnia prędkość przepływu wody jest równa objętości wody przepływającej w jednostce czasu podzielonej przez pole przekroju poprzecznego rurki. W naszym przypadku wynosi ona $v = 2w/\pi d^2$. Moment sił wywołujący obrót rurki powstaje podczas przepływu wody przez zakrzywioną część rurki. W jednostce czasu wektor zmiany pędu wody tworzy kąt 45° z rurką, a jego długość wynosi $\rho v w / \sqrt{2}$, gdzie ρ jest gęstością wody. Moment sił działających na rurkę jest więc równy $\rho v w l / 4$. Całkowity moment sił, pochodzący od obu ramion rurki, wynosi $\rho l w^2 / \pi d^2$. A zatem rurka obraca się z prędkością kątową $\omega = \rho l w^2 / \pi d^2$. Po podstawieniu wartości liczbowych, $\omega \approx 4 \text{ s}^{-1}$. W rozwiązaniu zaniedbaliśmy siły bezwładności działające na wodę w obracającej się rurce.



Rozwiązanie zadania F 480.

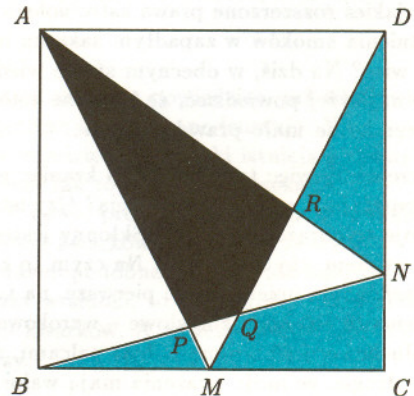
Prędkość wody wylatującej z rurki jest $v - \omega l / 2$. Woda będzie zraszała koło o promieniu $r = (v - \omega l / 2) t$, gdzie $t = \sqrt{2h/g}$. Zasięg zraszania wynosi więc około dwóch metrów.



Rozwiązanie zadania M 850.

Niech S_1 oznacza sumę pól lewych części prostokątów z nieparzystymi numerami, S_2 – sumę pól prawych części prostokątów z nieparzystymi numerami i S_3 – sumę pól prawych części prostokątów z parzystymi numerami. Wówczas

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{BCD} = S_2 + S_3, \text{ skąd } S_1 = S_3.$$



Czy istnieją smoki? (7/1985)

Zadałem to pytanie, śmiałością swoją dorównując chyba słynnej frazie Gałczyńskiego „Dlaczego ogórek nie śpiewa?” zastanawiając się, jakiej odpowiedzi na nie będą teraz ode mnie oczekiwać Czytelnicy. Na miłość Boską, chyba nie zwykłego „nie”? (Tu oczekuję odruchu buntu u niejednego i niejednej: „Chyba autor zapomniał, że wyrośliśmy już z wieku, kiedy kazano nam wierzyć w bajki” – i na to odrzekłbym tylko „czyżby?”) Sprawa wcale nie jest taka prosta. Ież tu zależy od (a) definicji smoka, (b) definicji słowa „istnieje”, (c) od możliwości weryfikacji, a choćby i falsyfikacji jakiegokolwiek odpowiedzi na to pytanie.

Po pierwsze: w pewnym sensie istnieje wszystko, o czym w danej chwili co najmniej ja myślę jako o istniejącym. W tym sensie istnieje i smok, i pan Zagłoba, i Apollo. Na przykład pan Zagłoba, gdy o nim myślę, istnieje, co prawda w sposób całkowicie ode mnie zależny, ale ode mnie odrębny. Nie jest on przecież żadnym aktem mojej świadomości, gdyż o żadnym takim akcie nie można sensownie orzec, że ma dziurę w czole i umie wypić półgarncówkę miodu nie odrywając naczyń od ust. Ponieważ w tym sensie na pewno istnieją też i smoki, i to wszystkich możliwych rodzajów, więc kwestię tę dalej pomijam jako trywialną. Interesować mnie będzie tylko istnienie „na serio”, takie, jakim istnieje, na przykład, biurko, przy którym piszę ten artykuł.

Po drugie zatem: wszystko zależy od tego, jaką przyjmę definicję smoka. Jeśli, na przykład, patrząc na psa powiem: „Ten smok gotów jest wszystko pożreć”, to stosuję takie określenie smoka, przy którym smoki istnieją nie gorzej niż biurka. Ale i to wydaje się za łatwe, za trywialne. Niechże więc smok będzie istotą o jaszczurczych łapach, skrzydłach nietoperza, pokrytą łuską i z siedmioma pyskami ziejącymi ogniem. Czy takie smoki istnieją? Z pewnym wahaniem odpowiadam – chyba nie. Na czym opieram tę odpowiedź? Po pierwsze na tym, że nikt nigdy takiego potwora nie uświadczył, a po drugie na tym, że jego istnienie w tej postaci wydaje mi się całkowicie sprzeczne ze znanymi prawami biologii. Pierwszy powód – choć ważny! – nie wydaje się bardzo przekonujący. Wszak do czasu nikt nie widział, na przykład, radu. Czy w owym okresie rad nie istniał? Trudno byłoby zaryzykować takie twierdzenie. W końcu każde odkrycie przekonuje nas o czymś, czego przedtem nie znaliśmy. Pozostaje drugi powód, moim zdaniem poważniejszy. Istnienie smoka wydaje mi się sprzeczne z prawami biologii. Lecz prawa biologii, jak i każde inne, także się zmieniają. Czy mogą przysiąc, że jakieś rozszerzone prawa astrobiologii nie dopuszczają istnienia smoków w zapadłym zakątku naszej Galaktyki? A więc? Na dziś, w obecnym stanie wiedzy mógłbym tylko co najwyżej powiedzieć, że istnienie smoków wydaje mi się niezmiernie mało prawdopodobne.

Przejdźmy więc teraz na drugi kraniec naszego poznania i zapytajmy, czy biurka istnieją? Czy istnieją mocniej niż moje wyobrażenie biurka? Skłonny jestem odpowiedzieć, że owszem, chyba istnieją. Na czym to z kolei swoje przekonanie opieram? Po pierwsze, na tym, że odbieram rozmaite wrażenia zmysłowe – wzrokowe, dotykowe, może i słuchowe, jeśli stuknę w blat palcami, może jeszcze inne. Po drugie, że moje wrażenia mają walor spójności, są ze

sobą nawzajem zgodne. Po trzecie, że ten kompleks wrażeń wykazuje wielką trwałość. Odchodzę od biurka, odwracam się do niego tyłem, potem znowu na nie spoglądam, a ono nic, stoi jak stało. Każdy może zrobić to doświadczenie.

Łatwo zauważyć, że prowadząc to rozumowanie opierałem się zarówno na danych wrażeńiowych, jak i na mojej wiedzy (przesądach?) o tym, jaki świat powinien być. Powinna w nim obowiązywać jakaś konsekwencja! jakaś przyczynowość! jakaś spójność wewnętrzna! Bez tego nic! Widać, że i w tym przypadku, podobnie jak przy smoku, nasze przekonanie o istnieniu bądź nieistnieniu opierało się na dwu czynnikach – zespole danych wrażeńiowych i zespole naszych teorii co do tego, jaki świat jest, wynikających z naszej chęci zrozumienia go. Biurko chyba istnieje – powiadam, ukrywając w tym „chyba” teoretyczną możliwość długotrwałego złudzenia zmysłowego czy też rozchwiania się zasady przyczynowości akurat w tym kącie mojego pokoju.

Do czego zmierzam? Po prostu chciałbym uświadomić każdemu, kto jeszcze tego nie wie, że twierdzenia żadnej nauki przyrodniczej ani też zresztą poznania potocznego, codziennego, nie mają charakteru sądów absolutnych, lecz tylko mniej lub bardziej prawdopodobnych hipotez. Zgadzam się – czasem bardzo, bardzo prawdopodobnych. Jednakże możliwość zasadniczego wątplenia zawsze pozostaje. Należałoby odróżnić subiektywną pewność człowieka od zasadniczej hipotetyczności nauki. To samo dotyczy także sądów o istnieniu. Jeśli, na przykład, mówimy, że atomy istnieją, to dlatego, że ta hipoteza stała się obecnie wystarczająco prawdopodobna, aby ją można było przekształcać na subiektywną pewność. Lecz nie zawsze przecież tak było! W ostatnich latach XIX wieku wybitny filozof i fizyk, Ernest Mach, tak pisał o atomach: „nie przystoi wiedzy przyrodniczej zmiennym środkiem ekonomicznym, które sama stworzyła, cząsteczkom i atomom, przyznawać bytu realnego poza zjawiskami”.

Innymi słowy, atomy są przydatne jako środki służące do ekonomicznego opisu zjawisk, ale naprawdę nie istnieją! I dopiero wyniki badań nad ruchami Browna (Einstein i Smoluchowski) oraz wspaniałe doświadczenia Jeana Perrina nad zachowaniem się kropelek emulsji żywicy przekonały – już chyba wszystkich (?) – że atomy jednak istnieją.

Przyznam się teraz szczerze Czytelnikom, że Redakcja *Delty* zamówiła u mnie artykuł nie o smokach i nawet nie o atomach, lecz o kwarkach, i że tytuł tego artykułu początkowo miał brzmieć „Czy istnieją kwarki?”. Lecz bez tego wstępu, który już prawie mamy za sobą, nie byłbym w stanie jasno przedstawić zagadnienia.

Zacznijmy od protonu. Czy proton istnieje? W odróżnieniu od biurka nikt chyba nie może się pochwalić, że odbierał wrażenia zmysłowe pochodzące „wprost” od protonu. „No dobrze”, zapyta ktoś, „a ślady pozostawione przez proton, na przykład, w emulsji fotograficznej czy w komorze pęcherzykowej? Czy to nie jest „fotografia” protonu?”. Zastanówmy się, bo to ważny problem. Co w rzeczywistości widzimy na zdjęciu? Na negatywie widać zaczerpnięcia, powstałe w wyniku dość prostych reakcji chemicznych

zachodzących w emulsji podczas wywoływania fotografii. Ziarenka te pojawiły się w wyniku rozpadu bromku srebra i wydzieleniu się srebra metalicznego. Cząsteczki bromku rozpadły się zaś w wyniku działania sił elektrycznych wywieranych na nie przez przebiegającą przez emulsję cząstkę. Siły te maleją ze wzrostem odległości, a więc najsilniej oddziaływały w tych miejscach, w których było największe prawdopodobieństwo wykrycia (znalezienia) owej cząstki. Na podstawie oceny gęstości ziaren wzdłuż toru można oszacować ładunek elektryczny przebiegającego obiektu. I tak dalej. Biorąc to wszystko pod uwagę, widzimy, że nasze rozumowanie, które i tym razem rozpoczyna się od wrażeń zmysłowych, dociera do konkluzji po bardzo długiej drodze. Musiało ono przebyć terytoria należące do teorii jonizacji ośrodków i do teorii reakcji chemicznych szczególnego rodzaju. Ponieważ liczenie ziaren (w celu oceny stopnia jonizacji) odbywa się pod mikroskopem, musimy też stosować prawa optyki. Jak widać i w tym przypadku nasze przekonanie o istnieniu protonu opiera się nie tylko na danych zmysłowych, ale także na naszej wiedzy o przyrodzie. Można by powiedzieć tak, że założenie czy hipoteza istnienia protonu ratuje naszą wiarę w racjonalność świata, który – gdyby proton nie istniał – byłby dla nas paradoksalną zagadką.

A neutron? Neutron nie pozostawia przecież śladu na kliszy. W tym przypadku – pomijając informacje pochodzące z interpretacji danych dotyczących budowy jądra atomowego – opieramy się na badaniu takich zdarzeń, w których w jednym punkcie przestrzeni w pewnej chwili zachodzi proces, w którym nie jest najwyraźniej zachowana energia, ani pęd, ani moment pędu, po czym, po pewnej chwili, w innym miejscu jakaś energia, i jakiś pęd, i jakiś moment pędu pojawiają się – z niczego. Do poprzednio już analizowanych czynników dochodzi jeszcze nasze głębokie przekonanie o słuszności zasad zachowania wymienionych wielkości mechanicznych. Nasza wiara w racjonalność świata wymaga od nas teraz jeszcze większego wysiłku – musimy założyć istnienie neutronu, chociaż nie widzimy jego śladu nawet w takim sensie, w jakim widzimy ślad protonu.

Niektóre cząstki elementarne żyją zdumiewająco krótko – ich średni czas życia jest rzędu 10^{-24} s. W takim przypadku śladów ich, choć niekiedy są to cząstki naładowane, nigdy nie widzimy. Aby cząstka o tak małym czasie życia przebiegła w komorze drogę rzędu 1 mm, musiałaby się poruszać z pędem około 10^{21} razy większym od jej masy (w układzie jednostek, w którym $c = 1$). Tego rodzaju pędy nie są obecnie osiągalne i może nigdy nie będą. Nawet w promieniowaniu kosmicznym nie obserwuje się energii większych od mniej więcej 10^{22} mas elektronu. Cóż więc takiego widzimy, co pozwala nam wierzyć w istnienie tak nietrwałych obiektów? Okazuje się, że żaden pojedynczy przypadek z udziałem takiej cząstki nic nam nie da. Musimy zebrać wiele „podejrzanych” przypadków, zrobić odpowiedni wykres i być może na tym wykresie pojawią się pewne cechy, które przemawiać będą za tym, że dana cząstka rzeczywiście istnieje. Przemawiają, ale tylko do tego, kto zdaje sobie sprawę, że hipoteza istnienia takiej cząstki jest jedyną znaną możliwością wyjaśnienia zdarzeń, które bez niej stanowiłyby irracjonalny chaos. „Znaną”? No tak, dlatego właśnie jest to hipoteza, a nie pewnik, dlatego hipoteza

ta początkowo przyjmowana jest ostrożnie lub nawet z zastrzeżeniami i dopiero wtedy, gdy danych zgromadzi się dużo, mówi się o potwierdzeniu istnienia cząstki. Potwierdzeniu – ale zawsze w domyśle pozostaje „w ramach naszej dzisiejszej wiedzy o świecie”.

No a co z tymi kwarkami? Chyba wszyscy domyślamy się, w czym rzecz i dlaczego Redakcja *Delty* kazała mi zadać sobie pytanie „czy istnieją kwarki?”. Bo po prostu kwarku swobodnego nikt jeszcze z całą pewnością nie zaobserwował, choć było wielu takich, którzy sądzili, że go zobaczą jak motyla w sieć swoich przyrządów. Ale chyba było to złudzenie wspomagane dobrą (bardzo dobrą!) wolą zaobserwowania tego niezwykłego obiektu, którym wydaje się kwark. Innymi słowy, kwark, jeżeli istnieje, nie może opuścić wnętrza hadronu. Nie mamy zatem żadnych szans go „zobaczyć”, choć pewno co najmniej jeden kwark byłby całkowicie trwały. I naładowany elektrycznie.

Na czym więc opiera się nasze przekonanie o tym, że kwarki jednak istnieją? Sytuacja jest analogiczna do wszystkich poprzednich. Pewne doświadczenia dostarczają nam pewnych danych zmysłowych, które zanalizowane w świetle obecnie uznawanej za ważną wiedzy fizycznej nie znajdują innego wyjaśnienia poza tym: kwarki istnieją.

Takich doświadczeń uprawdopodobniających hipotezę istnienia kwarków uskładało się już bardzo wiele. Poniżej przedstawiam ich niekompletną listę.

1. Fakt istnienia tylko tych cząstek elementarnych, które można złożyć z par kwark-antykwar (mezony) i trzech kwarków (bariony) (a więc fakt, że nie obserwuje się w przyrodzie tzw. cząstek egzotycznych, które by miały inną kompozycję kwarkową).
2. Fakty dotyczące pewnych własności barionów – mas, momentów magnetycznych itd., które można wyjaśnić tylko zakładając istnienie kwarków (posługując się różnymi modelami teoretycznymi, przede wszystkim modelem worka).
3. Fakty dotyczące wielu procesów zachodzących w świecie cząstek elementarnych – zarówno tzw. procesów głęboko nieelastycznych zderzeń leptonów z hadronami (w praktyce z nukleonami), jak procesów anihilacji par elektron-pozyton w układy hadronów. W tym ostatnim przypadku szczególnie prosty dowód eksperymentalny istnienia kwarków i to kwarków z kolorem daje pomiar stosunku prawdopodobieństwa anihilacji w układy hadronowe do prawdopodobieństwa anihilacji w parę mion-antymion.
4. Fakty wyjaśniane przez jednolitą teorię oddziaływań słabych i elektromagnetycznych, która nie mogłaby powstać, gdyby nie można było założyć, że kwarki istnieją.

I inne.

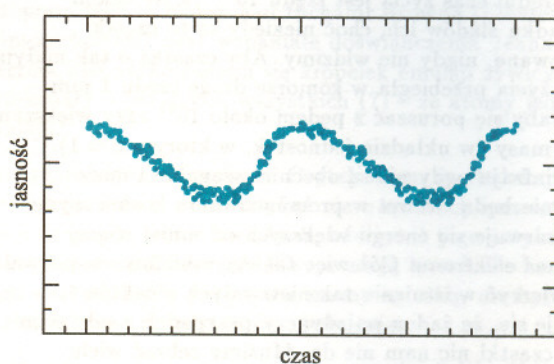
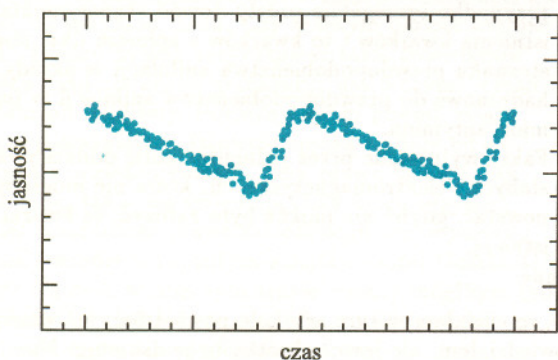
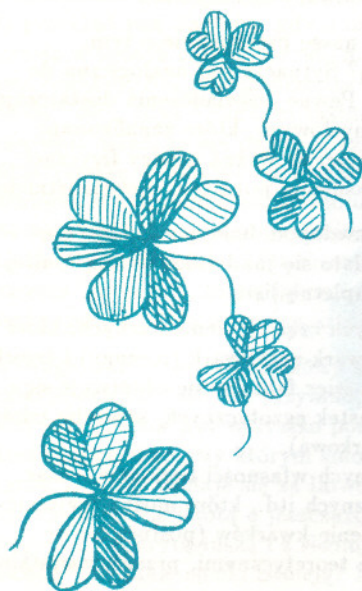
To, co chciałem w tym artykule powiedzieć, już właściwie powiedziałem, ale jeszcze krótko to podsumuję. Nie można wprawdzie powiedzieć, że kwarki istnieją z równym prawdopodobieństwem jak to, z którym orzekamy o istnieniu biurka. A nawet protonu. Ale też można śmiało powiedzieć, że istnienie kwarków wydaje się znacznie, znacznie bardziej prawdopodobne od istnienia smoków. Więc jeśli ktoś wierzy w smoki, to tym bardziej powinien uwierzyć w istnienie kwarków. A nawet – jeśli w smoki od dawna już nie wierzy.



Zmienność gwiazd

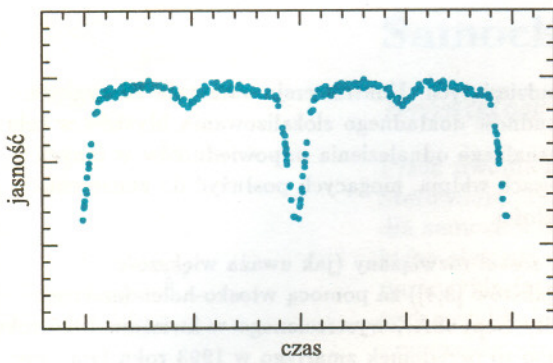
Gwiazdy migocą, a planety – nie. Choć pozwala to na proste ich rozróżnienie, nie ma nic wspólnego z rzeczywistymi zmianami jasności. Migotanie gwiazd jest jedynie efektem zakłócania ich blasku przez naszą niespokojną atmosferę. Nie oznacza to, naturalnie, że gwiazdy są niezienne – przeciwnie, prawdziwie stałych gwiazd nie ma. Wszystkie w swym bardziej lub mniej burzliwym życiu ulegają ciągłym przemianom, czego przejawem są zmiany jasności. Przyjęło się jednak nazywać gwiazdami stałymi te, których jasność nie zmienia się w naszych ludzkich skalach czasowych, gwiazdami zmiennymi zaś te, których blask zmienia się (cyklicznie lub nie) w czasie możliwym do zaobserwowania. Zmiany te stanowią niewyczerpane źródło informacji o wszystkim, co dla astronomów najważniejsze – rozmiarach, odległościach, budowie czy ewolucji badanych gwiazd. Gwiazdy stałe również spełniają swoją rolę jako wzorce jasności, do których odnosi się zmiany blasku.

Zmiany blasku gwiazd fizycznie zmiennych są wywołane przez procesy zachodzące w ich wnętrzach. Najprostszym przypadkiem są pulsacje, podczas których gwiazda na przemian rozdymając się i kurcząc, to słabnie, to jaśnieje. Osiągając największy rozmiar, słabnie najbardziej, wtedy bowiem jest najchłodniejsza i odwrotnie – w fazie największego skurczenia jako najgorętsza jest jednocześnie najjaśniejsza. Zmiany jasności mogą być wywołane również przez istnienie plam (obszarów powierzchni istotnie jaśniejszych bądź ciemniejszych od otoczenia) na powierzchni obracającej się gwiazdy. Najbardziej jednak widowiskowe zmiany towarzyszą wybuchom związanym z burzliwymi fazami ewolucji.

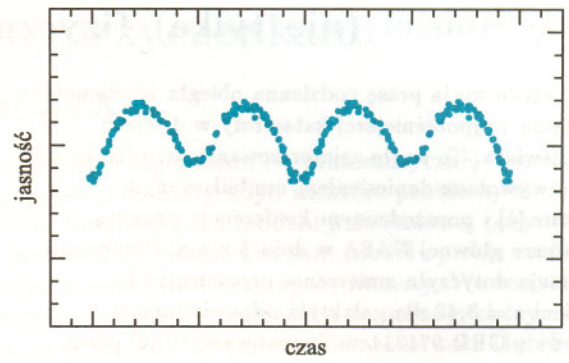


Krzywe zmian blasku gwiazd pulsujących.

Inną, powszechną przyczyną zmian jasności jest wzajemne zaślania się składników w układach kilku (co najmniej dwóch) gwiazd. Gdy orbita układu nie jest skierowana prostopadle do obserwatora, może on zaobserwować cykliczne zmiany blasku, których okres i amplituda zależą od rozmiarów składników, ich jasności, a także wzajemnych odległości.

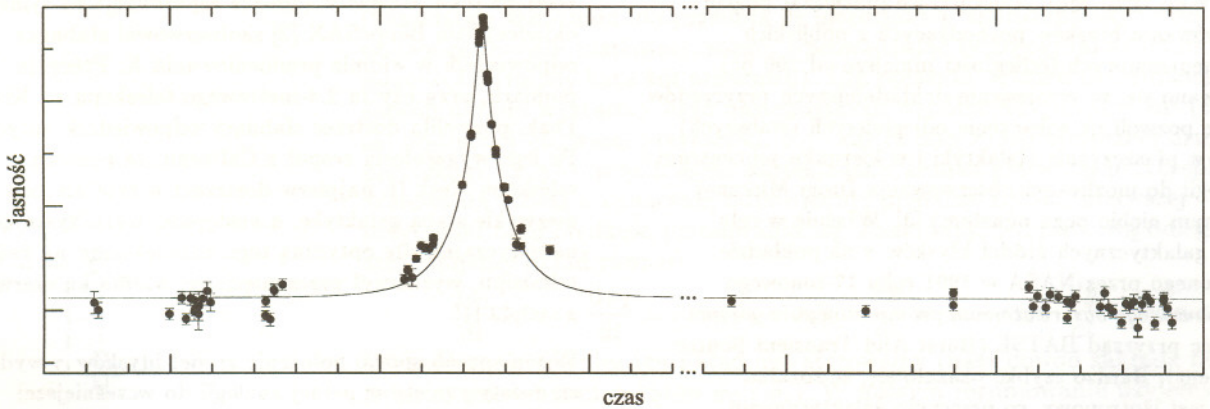
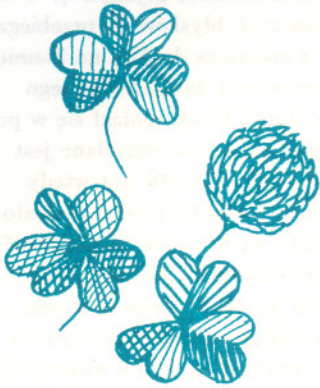


Krzywa zmian blasku układu zaćmieniowego typu Algol – składa się on z dwóch różnej jasności gwiazd znacznie oddalonych jedna od drugiej.



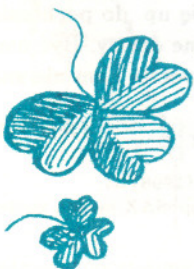
Krzywa zmian blasku układu zaćmieniowego typu W Ursae Maioris – składa się on z dwóch niemal stykających się gwiazd o prawie jednakowej jasności.

Co ciekawe, zmiany jasności gwiazdy mogą być wywołane również przez zupełnie z nią nie związane obiekty znajdujące się dowolnie daleko. Promienie świetlne gwiazdy zostają ugięte (pod wpływem przyciągania grawitacyjnego), jeśli dokładnie na linii łączącej ją z obserwatorem znajdzie się inne ciało niebieskie. Działa ono jak soczewka skupiająca, powodując jednorazowe pojaśnienie gwiazdy. Tak precyzyjne ustawienie w przestrzeni jest zjawiskiem niezwykle rzadkim, jego wykrycie wymaga nieustannego obserwowania milionów gwiazd w gęstych obszarach galaktyk podejrzanych o występowanie wielu ciał niebieskich, często zbyt słabych do zaobserwowania wprost, stąd określanych mianem ciemnej materii. Zjawisko to nosi nazwę mikrosoczewkowania grawitacyjnego, i choć nie jest pasjonujące z punktu widzenia badań gwiazdy soczewkowanej, to pozwala na stwierdzenie istnienia obiektu soczewkującego, nie wykrywalnego innymi metodami. Obiektów tych astronomowie poszukują z dużym zaangażowaniem, bowiem szacuje się, że mogą one stanowić blisko 90% całej materii Wszechświata.



Zmiany blasku wywołane przez zjawisko mikrosoczewkowania grawitacyjnego.

Małą Deltę przygotowała Joanna UDALSKA



Rozwiązanie zadania M 852.

Weźmy pod uwagę takie dwie sąsiednie proste i kąty wierzchołkowe między nimi. Ponieważ pola części T zawartych w tych kątach są równe, więc brzegi T i T' – obrazu T w symetrii względem O – przecinają się w każdym z tych kątów. Stąd przecięć brzegów T i T' jest co najmniej dwa razy tyle, co tych prostych, a brzegi dwóch n -kątów wypukłych nie mogą się przecinać w więcej niż $2n$ punktach.

Na początku maja prasę codzienną obiegła wiadomość o odkryciu najpotężniejszej katastrofy w dziejach Wszechświata. To nagle zainteresowanie astrofizyką zostało wywołane doniesieniem opublikowanym w *Nature* [1] i poprzedzonym konferencją prasową w kwaterze głównej NASA w dniu 6 maja. Przekazana informacja dotyczyła zmierzania przesunięcia ku czerwieni $z = 3,42$ dla galaktyki odpowiadającej błyskowi γ GRB 971214 zaobserwowanemu [2] przez satelitę BeppoSAX w dniu (jak sama nazwa wskazuje) 14 grudnia zeszłego roku. Tak duże przesunięcie ku czerwieni oznacza, że zarejestrowane promieniowanie γ leciało do nas aż 12 miliardów lat. Jeżeli założymy, że eksplozja była izotropowa, to możemy oszacować całkowitą energię wypromieniowaną w postaci kwantów γ , mnożąc zarejestrowany strumień promieniowania przez powierzchnię sfery o promieniu $12 \cdot 10^9$ lat świetlnych. Wynik jest naprawdę zastanawiający: $3 \cdot 10^{46}$ J [1]. Przez kilka sekund obiekt GRB 971214 promieniował intensywniej niż reszta Wszechświata!

Błyski γ zaczęły być rejestrowane przez satelity *Vela*, wynoszone na orbitę okołoziemską w latach sześćdziesiątych w celu monitorowania memorandum o zakazie naziemnych prób jądrowych. Pierwszy taki przypadek zaobserwowano 2 lipca 1967 roku (świat naukowy dowiedział się o nim 6 lat później, gdy wykluczono Słońce spośród potencjalnych źródeł błysków [3]). Do zeszłego roku nie było wiadomo, nie tylko jaki jest mechanizm ich powstawania, ale również czy jest to zjawisko lokalne (źródła związane z naszą Galaktyką), czy kosmologiczne. Klasyczny błysk trwa od kilku milisekund do setek sekund (najczęściej około 2 s). Najwięcej energii noszą kwanty w zakresie od setek keV do kilku MeV. Początkowo przeważał pogląd o obserwowaniu błysków pochodzących z pobliskich gwiazd neutronowych (odległości mniejsze od 200 pc). Spodziewano się, że wyniesienie dokładniejszych przyrządów na orbitę pozwoli na zobaczenie odleglejszych (słabszych) błysków w płaszczyźnie Galaktyki i w kierunku jej centrum (w analogii do możliwości obserwowania Drogi Mlecznej na ciemnym niebie poza miastem) [3]. Właśnie w celu badania galaktycznych źródeł błysków γ na pokładzie wystrzelonego przez NASA w 1991 roku 17-tonowego *comptonowskiego obserwatorium promieniowania gamma* znalazł się przyrząd BATSE (Burst And Transient Source Experiment). Bardzo szybko okazało się, że rozkład błysków jest izotropowy, co przeczyło galaktycznemu pochodzeniu ich źródeł. Społeczność naukowa podzieliła się na dwa obozy. Jedni, broniąc gwiazd neutronowych jako potencjalnych źródeł błysków, zapostulowali istnienie galaktycznego halo złożonego z takich gwiazd, drudzy dowodzili, że obserwowane zjawisko ma skalę kosmologiczną. Spór ten [4] do złudzenia przypominał dyskusję z początku wieku o pochodzeniu *obiektów mgławicowych*, którego apogeum była debata między H. Shapleyem i H.D. Curtisem. Podobną debatę odbyli w 1995 roku D. Lamb, główny zwolennik hipotezy galaktycznego halo, i B. Paczyński, który o kosmologicznym pochodzeniu błysków γ przekonywał od połowy lat

osiemdziesiątych. Kontrowersja narastała ze względu na trudność dokładnego zlokalizowania błysków w celu ewentualnego odnalezienia odpowiedników w innych zakresach widma, mogących posłużyć do zmierzenia odległości.

Spór został rozwiązany (jak uważa większość specjalistów [3,4]) za pomocą włosko-holenderskiego satelity BeppoSAX wystrzelonego w kwietniu 1996 roku (Beppo to przydomek zmarłego w 1993 roku Giuseppe Occhilaniego, a SAX jest akronimem włoskiej nazwy *Satellite per Astronomia a raggi X*). Jest on wyposażony w zestaw precyzyjnych teleskopów γ (Narrow Field Instruments, NFI) oraz dwie kamery szerokokątne (WFC). Dodatkowo aktywna osłona jednego z instrumentów NFI służy jako monitor błysków γ . Poszukiwanie odpowiedników tych błysków [3] przebiega następująco. Kiedy sygnał z monitora dociera na Ziemię, tworzona jest mapa promieniowania zarejestrowanego przez kamery szerokokątne. Jeżeli błysk znalazł się w polu widzenia jednej z nich, to jego położenie określane jest z dokładnością 3 minut kątowych. Satelita jest wtedy (w ciągu 4–8 godzin) obracany tak, aby źródło znalazło się w polu widzenia NFI, które są w stanie zlokalizować je z dokładnością 50 sekund łukowych. Informację tę przekazuje się obserwatoriom na całym świecie w celu umożliwienia poszukiwania odpowiedników optycznych i radiowych, które powinny znajdować się we wskazanym miejscu i zanikać w czasie od kilku dni do kilku miesięcy. Jak dotąd, udało się dokonać trzech takich obserwacji, z których każda wskazuje na pozagalaktyczne źródło błysków γ . Najbardziej spektakularna okazała się ostatnia z nich, odpowiadająca właśnie błyskowi z 14 grudnia zeszłego roku. Najpierw (zobacz reprodukcje na tylnej okładce) sam BeppoSAX [2] zaobserwował słabnący odpowiednik w widmie promieniowania X. Precyzja pomiaru, przy użyciu 2,4-metrowego teleskopu na Kitt Peak, pozwoliła dostrzec słabnący odpowiednik optyczny. Po jego wygaśnięciu zespół z Caltechu, za pomocą teleskopu Keck II, najpierw dostrzegł w tym miejscu niezwykle słabą galaktykę, a następnie, wykorzystując nadzwyczajną siłę optyczną tego największego na świecie teleskopu, wyznaczył przesunięcie jej widma ku czerwieni $z = 3,42$ [1].

W ten sposób spór o położenie źródeł błysków γ wydaje się rozstrzygnięty w pełnej analogii do wcześniejszej kontrowersji dotyczącej mgławic-galaktyk. Tym bardziej fascynujące staje się pytanie, jakiego rodzaju katastrofy dają o sobie znać poprzez te błyski. Za konserwatywne uważa się hipotezy odwołujące się np. do pochłaniania gwiazd neutronowych przez czarne dziury. Być może jednak obserwujemy zjawisko zupełnie nam nie znane.

Piotr ZALEWSKI

[1] S. R. Kulkarni i inni, *Nature* 393 (1998) 35

[2] Informacje o misji i wynikach BeppoSAX można znaleźć pod adresem <http://www.sdc.asi.it/>

[3] D. L. Band, *astro-ph/9712193*

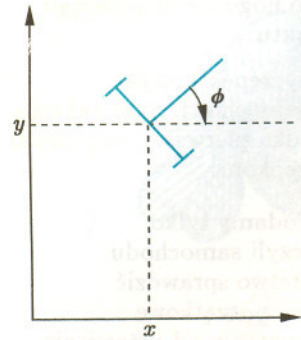
[4] S. Bajtlik, *Wiedza i Życie*, Styczeń 1998, str. 22

Samochód z n przyczepkami

Bronisław JAKUBCZYK

Przed dwoma miesiącami pisaliśmy o żeglowaniu i o Matematycznej Teorii Sterowania. Teraz opiszemy model matematyczny i niektóre problemy sterowania dla samochodu z przyczepkami. Zaczniemy od modelu jednoosiowej przyczepki, który stanowi sam w sobie interesujący układ. Ten sam model opisuje ruch monocykla (tzn. jednokołowego roweru) lub toczącej się monety. We wszystkich tych przykładach przyjmujemy upraszczające założenie, że monocykl czy przyczepka nie przechyla się, oraz ignorujemy położenie kątowe koła (lub kół).

Wybieramy układ współrzędnych na płaszczyźnie, po której porusza się przyczepka lub monocykl. Położenie pojazdu opisują dwie współrzędne kartezjańskie x i y środka osi oraz kąt ϕ między osią podłużną przyczepki a osią x układu współrzędnych (rys. 1).



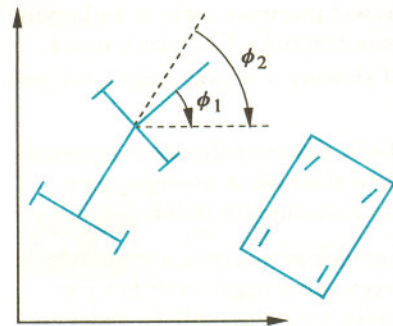
Rys. 1

Sterowaniami niech będą: prędkość u , zmiany kierunku (tzn. kąta ϕ) osi podłużnej przyczepki oraz prędkość v środka przyczepki w kierunku osi podłużnej. Przyjmijemy też, że koła przyczepki (koło monocykla) toczą się bez poślizgu, tzn. prędkość jest skierowana wzdłuż osi podłużnej. Model matematyczny naszego układu ma postać

$$\frac{d\phi}{dt} = u, \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \phi, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \phi.$$

Otrzymany układ jest sterowalny, tzn. możliwe jest przejście z dowolnego położenia początkowego (x_p, y_p, ϕ_p) do dowolnego położenia końcowego (x_k, y_k, ϕ_k) . Możemy to uzyskać przez następujące ruchy.

1. Poprzez obrót (a więc przyjmując sterowania $u = \pm 1, v = 0$) skierujemy przyczepkę osią podłużną dokładnie w stronę punktu (x_k, y_k) .
2. Przez przesunięcie (jazdę po prostej, ze sterowaniem $u = 0, v = 1$) osiągniemy położenie końcowe środka przyczepki (x_k, y_k) .
3. Stosując kolejny obrót, osiągniemy zadane położenie końcowe kąta ϕ_k .



Rys. 2

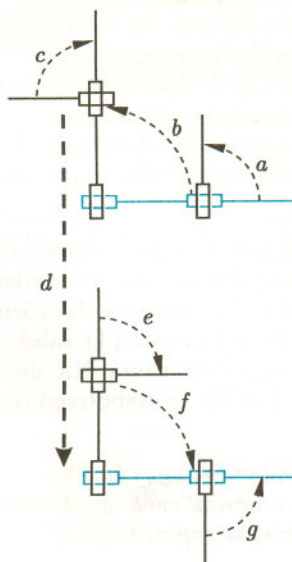
Przejdźmy teraz do bardziej interesującego przykładu *samochodu*. Możemy go opisać jako połączenie dwóch jednoosiowych przyczepek, tak jak na rysunku 2 (prawdziwy samochód ma przednią oś nieruchomą, ale można użyć niżej podanego modelu matematycznego, wprowadzając tylko ograniczenia na możliwości zmiany kąta kół przednich). Dla opisu położenia otrzymanego w ten sposób układu wystarczy użyć następujących współrzędnych: ϕ_1 – kąt (z osią x) osi podłużnej pierwszej przyczepki, ϕ_2 – kąt (z osią x) osi podłużnej drugiej przyczepki, (x, y) – współrzędne kartezjańskie środka pierwszej przyczepki. Sterowania u oraz v oznaczają odpowiednio prędkość kątową pierwszej przyczepki oraz prędkość przesuwania się. Zakładając jednostkową odległość osi otrzymujemy układ równań

$$\frac{d\phi_1}{dt} = u, \quad \frac{d\phi_2}{dt} = v \sin(\phi_1 - \phi_2), \quad \frac{dx}{dt} = v \cos \phi_1, \quad \frac{dy}{dt} = v \sin \phi_1.$$

Wykażemy, że również ten układ jest sterowalny (nasz dowód zakłada możliwość pełnego zakresu zmian kątów ϕ_0 i ϕ_1). W naszym rozumowaniu użyjemy następującego, raczej oczywistego faktu.

Pierwsza przyczepka, po ewentualnym wstępnym obrocie, może wykonywać ruch po dowolnym uogólnionym okręgu na płaszczyźnie (ruch po uogólnionym okręgu oznacza również obrót, który traktujemy jako ruch po okręgu o zerowym promieniu, oraz ruch po prostej, którą traktujemy jako okrąg o nieskończonym promieniu).

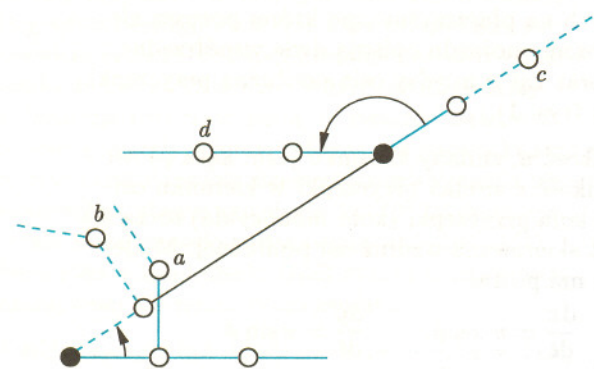
Wobec tego, możemy tak poruszać (sterować) pierwszą przyczepką, by druga przyczepka wykonała kolejno ruchy opisane powyżej, które przeniosą ją z położenia wyjściowego w położenie końcowe (rys. 3). Ponieważ położenie drugiej przyczepki wyznacza położenie środka pierwszej, pozostaje wykonać odpowiedni obrót pierwszej przyczepki, by cały układ przybrał żądane położenie końcowe.



Rys. 3 Położenie początkowe i końcowe zaznaczono kolorem.

Zachodzi też mocniejszy fakt, a mianowicie druga przyczepka może również wykonywać ruch po dowolnym uogólnionym okręgu na płaszczyźnie, przy czym ruch ten jest bezpośrednio możliwy z wyjściowego położenia jej środka po odpowiednim wstępnym ruchu pierwszej przyczepki, zachowującym położenie środka drugiej. Wynika to stąd, że podczas ruchu drugiej przyczepki po uogólnionym okręgu pierwsza wykonuje również ruch po uogólnionym okręgu, a więc ruch dopuszczalny wobec stwierdzonego wyżej faktu.

Rozważmy wreszcie abstrakcyjny układ złożony z n przyczepek kolejno połączonych (pierwsze dwie z nich możemy uważać za samochód). Stan takiego układu będzie wyznaczony przez współrzędne (x, y) środka pierwszej przyczepki oraz kąty $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ odpowiadające kolejnym przyczepkom.



Rys. 4

Taki układ jest również sterowalny. Podamy tylko rozumowanie dla trzech przyczepek (czyli samochodu z przyczepką), które Czytelnik może łatwo sprawdzić poprzez rysunki. Mając dane położenie początkowe układu, oraz żądane końcowe, rozpoczynamy od ustawienia pierwszych dwu przyczepek jak na rysunku 4 (jest to możliwe wobec stwierdzonego wyżej faktu dla dwu przyczepek). Następnie, poruszając odpowiednio pierwsze dwie przyczepki, dokonujemy obrotu trzeciej przyczepki. W kolejnym kroku przesuwamy jej środek dożądanego położenia końcowego. W przedostatnim kroku znowu dokonujemy obrotu tej przyczepki, by w ostatnim ustawić pierwsze dwie w żądanym położeniu (bez zmiany położenia trzeciej). Czytelnik może

spróbować udowodnić (przez indukcję), że układ złożony z n przyczepek też jest sterowalny.

Nasze poprzednie stwierdzenia o możliwych ruchach poszczególnych przyczepek w pociągu złożonym z n przyczepek można ogólnie zawrzeć w następującym fakcie (jego dowód jest nietrudny, jeśli umiejętnie zastosujemy indukcję).

Poprzez odpowiednie ruchy poprzedzających przyczepek przyczepka z numerem k może poruszać się po dowolnym uogólnionym okręgu, przy czym ruch ten jest możliwy bezpośrednio z wyjściowego położenia środka tej przyczepki po wstępnych ruchach przyczepek poprzedzających nie poruszających tego środka.

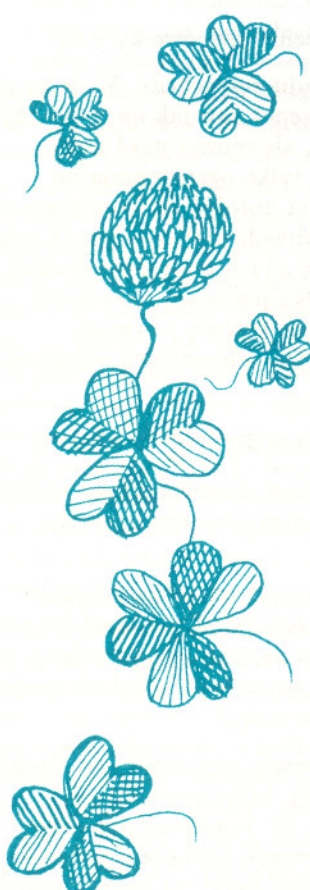
Wynika z tego następująca własność: pociąg złożony jedynie z przyczepek z numerami $k, k + 1, \dots, n$ ma te same możliwości ruchu, co pociąg mający dodatkowo pierwszych $k - 1$ przyczepek, jeśli tylko te pierwsze $k - 1$ przyczepek „zgaduje intencje” tych następnich (tzn. dostosowuje swój ruch odpowiednio do ruchu następnych).

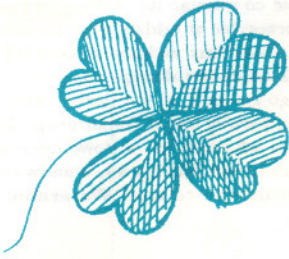
W teorii sterowania ważny jest także **problem obserwowalności** układu. Występuje on wtedy, gdy umowny obserwator nie ma dostępu do wszystkich współrzędnych stanu (tzn. uogólnionego położenia) układu, a jedynie do części z nich lub ich funkcji. Problem polega na tym, czy z obserwowanych współrzędnych da się odtworzyć pozostałe (znając równania układu oraz sterowania). Na przykład, w problemie z żaglówką obserwator na brzegu może mierzyć jedynie położenie kątowe łódki, a chciałby odtworzyć obie współrzędne kartezjańskie jej położenia.

Zajmiemy się problemem obserwowalności dla pociągu złożonego z n przyczepek. Załóżmy, że współrzędne dostępne w obserwacji to współrzędne (x, y) środka pierwszej przyczepki. Taki układ nie jest obserwowalny. Mianowicie, dla różnych położeń początkowych dalszych przyczepek ruch pierwszej przyczepki zależy tylko od jej położenia początkowego oraz zastosowanego sterowania. Nie da się więc wyznaczyć położenia początkowego przyczepki jedynie ze współrzędnych środka pierwszej przyczepki.

Jeśli jednak przyjmiemy, że obserwowane są współrzędne (x_n, y_n) środka ostatniej przyczepki, układ staje się obserwowalny, ponieważ *ruch środka k -tej przyczepki wyznacza jednoznacznie ruch środka przyczepki poprzedzającej.*

Istotnie, ruch środka k -tej przyczepki określa jednoznacznie odpowiednią prędkość (choć możemy mieć kłopoty z jej praktycznym wyliczeniem).





Kierunek tej prędkości, wobec braku bocznego poślizgu, jest kierunkiem osi podłużnej tej przyczepki, a zatem znamy położenie k -tej przyczepki. Znajomość długości dyszla (odległości środków przyczepek) wyznacza teraz położenie środka przyczepki poprzedzającej.

Rozpoczynając od funkcji czasu $x_n(t)$ i $y_n(t)$ określających położenie środka ostatniej przyczepki, wiemy, że określają one jednoznacznie położenie środka (w czasie) $(n-1)$ -szej przyczepki, te z kolei poprzedniej i tak dalej. Dochodzimy do tego, że położenia wszystkich przyczepek, łącznie z samochodem, są określone przez współrzędne ostatniej przyczepki, jako funkcje czasu.

Żeby doprecyzować matematycznie nasze rozumowanie, wystarczy założyć, że współrzędne (x_k, y_k) środka k -tej przyczepki są gładkimi (tzn. różniczkowalnymi dowolnie wiele razy) funkcjami czasu i środek ten jest w ruchu. Musimy to założyć dlatego, że przy przechodzeniu do przyczepki poprzedzającej używaliśmy kierunku prędkości, a więc różniczkowaliśmy współrzędne odpowiedniej przyczepki. Dodatkowo kierunek tej prędkości był jednoznacznie określony jedynie przy prędkości niezerowej.

Jako ostatnią uwagę podajemy następującą własność naszego układu, która jest związana z poprzednio opisanymi własnościami.

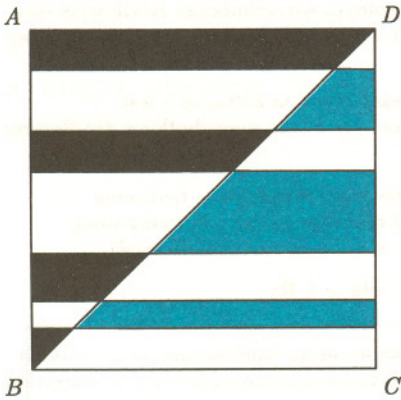
Współrzędne środka $(x_n(t), y_n(t))$ ostatniej przyczepki mogą kreślić dowolną krzywą gładką na płaszczyźnie. Dodatkowo, jeśli określona przez nie prędkość nie znika, to współrzędne te, jako funkcje czasu, określają jednoznacznie położenie całego pociągu jako funkcję czasu.

Wyjaśnienie tej pozornie paradoksalnej własności leży w tym, że do wyznaczenia położenia środka poprzedzającej przyczepki używamy położenia i prędkości następnej, do położenia jeszcze wcześniejszej używamy położenia, prędkości i przyspieszenia, itd.



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI



M 850. Pionowy bok AB kwadratu $ABCD$ został podzielony na n odcinków w ten sposób, że suma długości odcinków z parzystymi numerami jest równa sumie długości odcinków z nieparzystymi numerami. Przez punkty podziału poprowadzono proste poziome, uzyskując n prostokątów, z których każdy jest rozcinany przez przekątną BD na dwie części: lewą i prawą (rys.). Wykazać, że suma pól lewych części prostokątów o numerach nieparzystych jest równa sumie pól prawych części prostokątów o numerach parzystych.

Rozwiązanie na str. 5

M 851. Punkty M i N leżą na bokach, odpowiednio, BC i CD kwadratu $ABCD$. Oznaczmy przez P , Q , R przecięcia odcinków, odpowiednio, AM i BN , BN i MD , MD i AN . Wykazać, że

$$S_{APQR} = S_{BMP} + S_{MNCQ} + S_{RND}.$$

Rozwiązanie na str. 5

M 852. Żadne dwa boki wypukłego n -kąta T nie są równoległe. Wykazać, że dla każdego punktu O wewnątrz T istnieje co najwyżej n prostych przechodzących przez O , z których każda rozcina T na dwie części o równych polach.

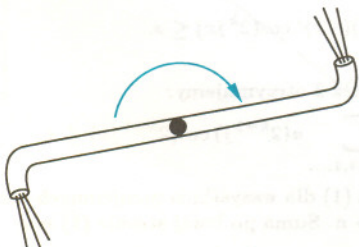
Rozwiązanie na str. 9

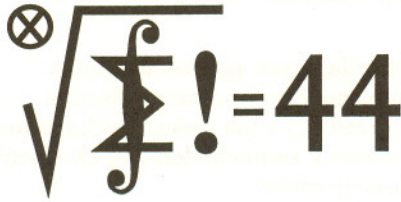
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 479. Proste urządzenie do podlewania ogrodu składa się z rurki o długości $l = 40$ cm i średnicy $d = 5$ mm z zagiętymi prostopadle końcami. Rurka może się obracać w płaszczyźnie poziomej wokół swojej osi symetrii, przy czym moment sił tarcia jest wprost proporcjonalny do prędkości kątowej rurki, ze współczynnikiem proporcjonalności $\alpha = 5$ kg m³/s. Do rurki doprowadzamy wodę w ilości $w = 0,2$ dm³/s. Z jaką prędkością kątową będzie obracać się urządzenie? Rozwiązanie na str. 5

F 480. Oszacować zasięg zraszania ogrodu przez urządzenie opisane w poprzednim zadaniu, jeśli znajduje się ono na wysokości $h = 1$ m nad powierzchnią ziemi. Rozwiązanie na str. 5

W zadaniach i ich rozwiązaniach przyjęto oznaczenie $S_{A_1 \dots A_n}$ dla pola wielokąta $A_1 \dots A_n$.





Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1998

Przypominamy treść zadań:

357. Rozważamy graf skierowany, w którym każde dwa różne wierzchołki a, b są połączone dokładnie jedną z dwóch zorientowanych krawędzi: $a \rightarrow b$ lub $b \rightarrow a$. Ponadto każda krawędź jest pomalowana albo na żółto albo na czerwono. Udowodnić, że istnieje wierzchołek, z którego można do każdego innego wierzchołka dotrzeć wzdłuż krawędzi jednego koloru, w kierunku

zgodnym z ich orientacją.

358. Liczby rzeczywiste a_1, \dots, a_n spełniają dla każdej liczby rzeczywistej x nierówność

$$a_1 \sin^2 x + a_2 \sin^2 2x + a_3 \sin^2 3x + \dots + a_n \sin^2 nx \geq 0.$$

Czy stąd wynika, że $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq 0$?

357. Gdy liczba wierzchołków grafu wynosi 1 lub 2, nie ma czego dowodzić. Ustalmy liczbę naturalną $n \geq 3$; założmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla każdego grafu o liczbie wierzchołków mniejszej od n i weźmy pod uwagę graf n -wierzchołkowy, o jakim mowa w zadaniu. Zbiór jego wierzchołków oznaczmy przez X .

Wierzchołek, z którego do każdego innego wierzchołka prowadzi droga jednokolorowa, będziemy nazywali wierzchołkiem źródłowym. Mamy dowieść, że taki wierzchołek istnieje.

Weźmy dowolny wierzchołek $a \in X$. Niech b będzie dowolnym wierzchołkiem źródłowym dla zbioru $X \setminus \{a\}$ (istnieje w myśl założenia indukcyjnego). Jeżeli krawędź łącząca wierzchołki a i b ma kierunek $b \rightarrow a$, to b jest wierzchołkiem źródłowym dla X i teza jest udowodniona. Założmy więc, że $a \rightarrow b$ jest krawędzią grafu; możemy przyjąć, że ma ona kolor żółty.

Oznaczmy przez Z zbiór wszystkich wierzchołków w zbiorze $X \setminus \{a\}$, do których można z wierzchołka b dotrzeć drogą żółtą. Niech c będzie dowolnym wierzchołkiem źródłowym dla zbioru $(X \setminus Z \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ (założenie indukcyjne). Jeśli $c = a$, to jest to wierzchołek źródłowy dla całego zbioru X . Przyjmijmy zatem, że $c \neq a$.

Z wierzchołka c prowadzi do a droga jednokolorowa. Jeżeli jest ona żółta, to c jest wierzchołkiem źródłowym dla X . Jeżeli jest ona czerwona, to b jest wierzchołkiem źródłowym dla X . To kończy dowód indukcyjny.

358. Odpowiedź: tak. Dowód: aby uniknąć „wielopiętrowych” wskaźników, będziemy pisać $a(m)$ zamiast a_m . Przyjmijmy ponadto $a(m) = 0$ dla $m > n$ oraz oznaczmy sumę $a(1) + \dots + a(n)$ przez s . Udowodnimy, że dla $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ zachodzi nierówność

$$(1) \quad \sum_{j \geq 1} a(2^k j) \cos(2^k jx) \leq s \quad \text{dla } x \in \mathbb{R};$$

użyty symbol oznacza – formalnie – sumę szeregu nieskończonego (sumowanie po wszystkich dodatnich liczbach całkowitych j), ale faktycznie jest to suma skończona, bo prawie wszystkie składniki są zerami.

Dowód przez indukcję. Dla $k = 0$ mamy sumę

$$\sum_j a(j) \cos(jx) = \sum_j a(j) (1 - 2 \sin^2(jx/2)) = s - 2 \sum_j a(j) \sin^2(jx/2),$$

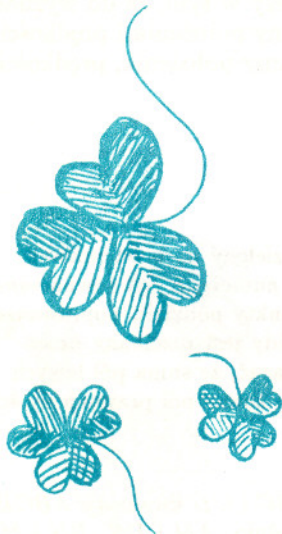
a wartość otrzymanego wyrażenia nie przekracza s , zgodnie z warunkiem zadania. Ustalmy liczbę całkowitą $k \geq 0$ i przyjmijmy, że warunek (1) jest dla niej spełniony. Zastępując x przez $x + 2^{-k}\pi$ dostajemy nierówność

$$(2) \quad \sum_j a(2^k j) \cos(2^k jx + j\pi) = \sum_j a(2^k j) (-1)^j \cos(2^k jx) \leq s.$$

Dodajemy związki (1) i (2) stronami i po podzieleniu przez 2 otrzymujemy:

$$\sum_{j=2,4,6,8,\dots} a(2^k j) \cos(2^k jx) \leq s, \quad \text{czyli} \quad \sum_{j=1,2,3,4,\dots} a(2^{k+1} j) \cos(2^{k+1} jx) \leq s$$

– czyli tezę indukcyjną. To dowodzi prawdziwości zdania (1) dla wszystkich nieujemnych liczb całkowitych k . Bierzymy teraz liczbę k tak dużą, by $2^k > n$. Suma po lewej stronie (1) ma wówczas wartość 0, co oznacza, że $s \geq 0$.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

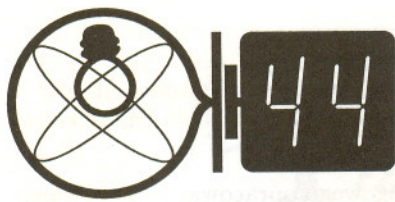
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 349 ($WT=1,38$) i 350 ($WT=2,33$)
z numeru 11/1997

Maciej Mostowski	- Warszawa	42,81
Piotr Kumor	- Olsztyn	35,39
Witold Bednarek	- Łódź	32,66
Bogumiła Piotrowska	- Zielona Góra	32,41
Zbigniew Skalik	- Pyskowiec	32,15

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 250 ($WT=2,70$) i 251 ($WT=3,00$)
z numeru 1/1998

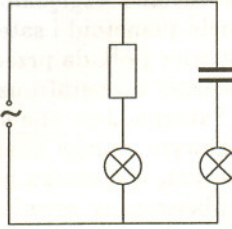
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	36,44
Tomasz Więtecha	- Tarnów	15,39
Marek Wójcicki	- Szczecin	13,88
Aleksander Surma	- Myszków	11,08



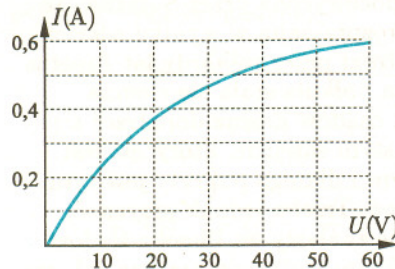
Przypominamy treść zadań:

254. Samochodzik-zabawka ma napęd zarówno na przednią, jak i na tylną oś, lecz wskutek błędu konstrukcyjnego na każdych 10 obrotów przedniej osi przypada 11 obrotów tylnej osi (promień kółek jest jednakowy). Jeśli masa samochodzika wynosi 300 g, obie osie są jednakowo obciążone, a współczynnik tarcia kółek o podłoże jest równy 0,6, to jaka jest minimalna moc silnika pozwalająca na jazdę z prędkością 15 cm/s po torze poziomym?

255. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 częstotliwość zasilania wynosi $f = 50$ Hz, oporność opornika $R = 100 \Omega$, pojemność kondensatora $C = 20 \mu\text{F}$, a żarówki są jednakowe. Charakterystyka prądowo-napięciowa żarówek jest przedstawiona na rysunku 2. Okazało się, że przy pewnej wartości skutecznej napięcia źródła U żarówki paliły się jednakowo silnie, a przy wyższym i niższym napięciu – niejednakowo. Obliczyć wartość U . Która żarówka paliła się jaśniej przy wyższym, a która przy niższym napięciu?



Rys. 1



Rys. 2

254. Jeśli ślizgać się będą tylne kółka, to przesunięciu samochodzika o 15 cm będzie towarzyszyło przesunięcie obrzeża tylnych kółek względem samochodzika o $15 \cdot 11/10 \text{ cm} = 16,5 \text{ cm}$, czyli nastąpi poślizg o 1,5 cm. Praca przeciw sile tarcia wynosi w takim przypadku $150 \text{ g} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0,6 \cdot 1,5 \text{ cm} = 0,013 \text{ J}$. Jeśli natomiast ślizgać się będą przednie kółka, to przesunięcie ich obrzeża wyniesie $15 \cdot 10/11 \text{ cm} = 13,64 \text{ cm}$, nastąpi poślizg o 1,36 cm, a odpowiednia praca będzie równa 0,012 J. W zasadzie przy jednakowym obciążeniu osi poślizg mógłby nastąpić na dowolnej osi (lub jednocześnie na obu osiach, z pośrednią wartością pracy), lecz ponieważ dowolnie mała dodatkowa siła oporu spowoduje poślizg tylnych kółek, więc prawidłowa wartość mocy wynosi raczej 0,013 W.

255. Gdy żarówki palą się jednakowo, ich opór (iloraz U/I) ma jednakową wartość, którą oznaczmy przez R' . Impedancja gałęzi z kondensatorem jest dana wzorem $Z_1 = \sqrt{R'^2 + Z_C^2}$, gdzie $Z_C = 1/C\omega$, natomiast impedancja gałęzi z opornikiem jest równa $Z_2 = R' + R$. Przyrównując Z_1 do Z_2 wyznaczamy R' :

$$R' = \frac{Z_C^2 - R^2}{2R} = 76,7 \Omega.$$

W punkcie przecięcia odpowiedniej prostej z wykresem charakterystyki prądowo-napięciowej odczytujemy natężenie prądu $I \approx 0,53 \text{ A}$, a dalej obliczamy $U = I(R' + R) \approx 94 \text{ V}$. Przy niższym napięciu źródła opór żarówek jest mniejszy, a wtedy decydującą rolę odgrywa fakt, że $Z_C > R$ – zatem $Z_1 > Z_2$ i jaśniej pali się żarówka w gałęzi z opornikiem. Przy wyższym napięciu źródła (i większym oporze żarówek) sytuacja jest przeciwna, gdyż wtedy $Z_2 > Z_1$.

Pożytek z ciągu stałego

Okazuje się, że twierdzenie o tym, iż ciąg stały jest zbieżny, ma zupełnie ciekawe zastosowania. Oto dwa przykłady. Pierwszy pochodzi z czasów wojen punickich, a drugi z czasów Wiosny Ludów.

Dla obliczenia pola powierzchni kuli umieszczamy ją wewnątrz opisanego na niej walca, a następnie obie powierzchnie tnijemy na paski równoległe do podstawy walca. Powierzchnię każdego paska kuli przybliżamy powierzchnią boczną stożka ściętego stycznego do niej w połowie swojej wysokości. Okazuje się, że pole paska walca i pole powierzchni bocznej tego stożka jest w każdej części podziału takie samo. Oto rachunek: z oczywistego podobieństwa trójkątów OPS i QPR (rysunek przedstawia osiowy przekrój rozpatrywanych brył) mamy

$$\frac{OP}{PS} = \frac{QP}{PR}, \text{ czyli } OP \cdot PR = PS \cdot QP, \text{ zatem } r \cdot \frac{h}{2} = \bar{r} \cdot \frac{l}{2},$$

skąd wynika, że $2\pi r h = 2\pi \bar{r} l$. Dla całej powierzchni kuli otrzymujemy przybliżenie równe sumie pasków powierzchni bocznej walca, czyli $4\pi r^2$. Przybliżając powierzchnię kuli coraz dokładniej, czyli biorąc coraz węższe paski, za każdym razem otrzymujemy ten sam wynik – tyle też w granicy jest równe pole powierzchni kuli.

Oto sposób na udowodnienie Podstawowego Twierdzenia Analizy, czyli że jeśli f' – pochodna funkcji f – jest całkowalna w sensie Riemanna, to zachodzi

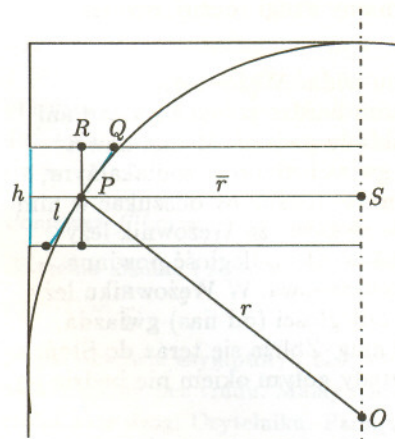
$$\int_a^b f' = f(b) - f(a). \text{ Zgodnie z twierdzeniem o wartości średniej mamy}$$

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (f(b) - f(c_k)) + (f(c_k) - f(c_{k-1})) + \dots + (f(c_1) - f(a)) = \\ &= f'(\xi_k)(b - c_k) + f'(\xi_{k-1})(c_k - c_{k-1}) + \dots + f'(\xi_0)(c_1 - a) \end{aligned}$$

(gdzie ξ_i zostały wybrane z odpowiednich przedziałów).

Prawa strona tych równości dla tzw. normalnego ciągu podziałów (czyli ciągu podziałów, w których długość najdłuższego z przedziałów dąży do zera) jest zbieżna z definicji do rozważanej całki, a ciąg przybliżeń znów jest ciągiem stałym.

M.K. i J.M.



Patrz w niebo

Pamiętamy zapewne doniesienia z lata 1996 r. o znalezieniu skamielin organizmów żywych w meteorycie pochodzącym z Marsa. Jeżeli pominąć kwestię, czy były to ślady organizmów żywych (co nadal jest nierozstrzygnięte i w ogóle wątpliwe), to w każdym razie był to meteoryt z Marsa, o czym świadczą skrupulatne badania mineralogiczne i chemiczne. Podobnie w kolekcjach meteorytów znajdują się odłamki skał księżycowych. Mechanizm dostawania się takich bryłek na Ziemię jest dość oczywisty. W dawnych czasach, gdy na ciała młodego Układu Słonecznego spadały wielkie bryły, które nie zdążyły jeszcze wejść w skład tych ciał, różne odłamki bez trudu mogły rozlatywać się z prędkościami przekraczającymi prędkość ucieczki z każdego z tych ciał i rozpraszać się w Układzie Słonecznym. A potem przypadkowo mogły spadać również na Ziemię. Zawsze było to zdarzenie mało prawdopodobne, dlatego znalezienie takiego odłamka innego globu na Ziemi jest sensacją naukową.

Tymczasem są poważne podejrzenia, że takie osadzenie się na jednym globie materii pochodzącej z innego globu jest widoczne „w skali kosmicznej”. Mianowicie już od czasów Williama Herschela wiadomo było, że Japetus – siedemnasty, licząc od planety – satelita Saturna, jest dość osobliwy: gdy widać go po zachodniej stronie Saturna, jest o około 1,7 mag jaśniejszy niż po stronie wschodniej. Gdy dużo później okazało się, że jest satelitą synchronicznym (okres obrotu równy okresowi obiegu

wokół planety), fakt ten można było zinterpretować tylko w jeden sposób: Japetus obiega Saturna ciemną półkulą naprzód.

Na podstawie drobiazgowego opracowania obserwacji wykonanych przez Voyagery stwierdzono, że tylna półkula Japetusa pod wieloma względami podobna jest do powierzchni wielu planetoid i satelitów innych planet. Nietypowa jest więc półkula przednia i za przyczynę takiej dziwacznej topografii uznano Phoebe, osiemnastego satelitę Saturna. Jest ona satelitą w innym sensie wyjątkowym, obiega mianowicie planetę ruchem wstecznym, w dodatku po orbicie mocno nachylonej do płaszczyzny równikowej Saturna. Silnie sugeruje to, że Phoebe, już jako uformowany glob, musiała zostać pochwycona przez Saturna. To zapewne jej materię, rozpraszając w wyniku zderzeń z innymi ciałami, zgarniał przez miliardy lat Japetus i dlatego jego przednia półkula stała się ciemna. Obecności podobnych osadów można dopatrzeć się na Hyperionie, szesnastym satelicie, który nie jest satelitą synchronicznym i dlatego pokryty jest tymi osadami w miarę równo. Trzeba jednak przyznać, że misje Voyagerów nie znalazły na Phoebe śladów ani potężnych uderzeń, ani wulkanów (jak na Io), czy gejzerów (jak na Trytonie) zdolnych do rozproszenia w okolicy Saturna wielkich ilości materii satelity. To, co się stało z Japetusem, musiało stać się w odległej przeszłości, a jeżeli nawet odpowiada za to Phoebe, to do dziś zdążyła to dobrze ukryć. Problem Japetusa posunął się ku rozwiązaniu – ale jeszcze nie do końca.

Tomasz KWAST

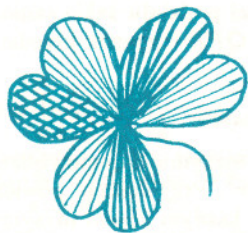
Lipiec

Czytelnicy zauważyli może, że minął rok moich opowieści na temat, co w danym miesiącu widać na niebie. Oczywiście układ gwiazdozbiorów jest taki sam dziś, jak przed rokiem (planet nie, bo one cyklu rocznego się nie słuchają), z czego jednak nie wynika, że już nie warto patrzeć w niebo. Pojawiają się zapewne nowi Czytelnicy *Delt*, a nawet dawni nie widzieli na niebie wszystkiego. Nieszczęście w tym, że aby zobaczyć rzeczy naprawdę ciekawe, trzeba popatrzeć w niebo przynajmniej przez lornetkę. Obecnie nie jest o nią trudno, ale na pewno nie wszyscy ją mają. Nie zrażając się tym, rozpoczynamy drugi roczny przegląd nieba.

Na przykład więc późnym wieczorem na południu widać Wężownika, gwiazdozbiór niezbyt wyrazisty, gdyż nie ma w nim bardzo jasnych gwiazd ani charakterystycznego, łatwego do zapamiętania układu gwiazd. Można nawet powiedzieć, że jest tak mało wybitny, iż nie jest gwiazdozbiorem zodiakalnym, mimo że przechodzi przezeń ekliptyka. Przez lornetkę można by odszukać w nim dwie gromady kuliste, M 10 i M 12, co jest o tyle ciekawe, że Wężownik leży częściowo w Drodze Mlecznej, i w widzeniu na tak wielką odległość powinna przeszkadzać rozproszona w niej materia międzygwiazdowa. W Wężowniku leży też druga (po Tolimanie – alfie Centaura) co do odległości (od nas) gwiazda, tzw. Gwiazda Barnarda. Niestety, jest słaba, 9,5 mag. Zbliży się teraz do Słońca i znajdzie się najbliżej około roku 10 000, ale i wtedy gołym okiem nie będzie jej widać.

Wenus znajduje się w Byku i wschodzi przed wschodem Słońca, Mars jest w Bliźniętach, więc go teraz nie widać, Jowisz jest w Rybach i Saturn w Baranie, więc planety te widać w drugiej połowie nocy. Pełnia Księżyca wypada 9 VII. Księżyc zbliży się mocno do Jowisza 14 VII, Aldebarana 19 VII, Regulusa 25 VII i nawet będą to zakrycia, ale z Polski niewidoczne.

T.K.



MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (5')

Wyjaśnienie oszustwa (5):

Wyliczenie współczynników asymptoty w $-\infty$ jest błędne. Błąd jest dosyć subtelny: otóż $\sqrt{x^2}$ nie jest równe x , ale $|x|$, co dla $x < 0$ oznacza $-x$. Przeprowadzony rachunek powinien wyglądać następująco:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{-\sqrt{x^2}} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2}} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2}} - 1} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zatem asymptota w $-\infty$ ma równanie $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

W naszkicowaniu wykresu pomocna jest także znajomość ekstremów funkcji. Obliczamy pochodną

$$f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} - \frac{1}{2}.$$

Przyrównując pochodną do 0 otrzymujemy równanie $f'(0) = 0$, czyli $2x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 1}$, skąd po obustronnym podniesieniu do kwadratu otrzymujemy $4x^2 + 4x + 1 = x^2 + x + 1$, co ma rozwiązania $x = 0$ i $x = -1$.

Ponieważ $f''(x) = \frac{3}{4(\sqrt{x^2 + x + 1})^3} > 0$, więc f ma dwa ekstrema lokalne i są to minima. Przy tym $f(0) = 1$ i $f(-1) = \frac{3}{2}$.

Mając obydwie asymptoty i ekstrema funkcji wykres naszkicujemy bez trudu. Mamy nadzieję, że zdołasz to zrobić sam drogi Czytelniku. Pamiętaj, że funkcja nie ma maksimów lokalnych, bo wszystkie jej ekstrema już znaleźliśmy – są to dwa minima i nic więcej.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (6')

Wyjaśnienie oszustwa (6):

Ciąg (a_n) określony wzorem

$$(*) \quad a_n = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n - 3 - 3^2 - 3^3 - \dots - 3^n.$$

i ciąg (a_n) określony wzorem

$$(**) \quad a_n = \binom{2n+4}{n-1}.$$

to dwa różne ciągi, tylko zaczynają się tak samo:

n	a_n wg (*)	a_n wg (**)
1	1	1
2	8	8
3	45	45
4	220	220
5	1001	1001
6	4368	4368
7	18565	18564
8	77540	77520
9	320001	319770
10	1309528	1307504
11	5326685	5311735
12	21572460	21474180
13	87087001	86493225
14	350739488	347373600
15	1410132405	1391975640
16	5662052980	5567902560
17	22712782001	22239974430
18	91044838248	88732378800
19	364760483725	353697121050

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (7)

ZADANIE: Obliczyć granicę

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}{3^n}.$$

Rozwiązanie: W liczniku występuje suma postępu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = 3$. Ze wzoru $S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ na sumę postępu geometrycznego otrzymujemy $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$, skąd

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}{3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Jak to pogodzić z obserwacją, że

$$\frac{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}{3^n} > 1 ?$$

JWR