



SPIS TREŚCI NUMERU 5(288)

Rendez-vous fizyki z zasadami wariacyjnymi <i>Wojciech Kopczyński</i>	str. 1
Zasada najmniejszego działania w fizyce <i>Krzysztof Meissner</i>	str. 2
Hipopotam a metoda wariacyjna <i>Michał Wojciechowski</i>	str. 5
Brachistochrona	str. 7
Mała Delta	str. 8
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str.11
Jak żeglować, czyli o Matematycznej Teorii Sterowania <i>Bronisław Jakubczyk</i>	str.12
Zadania	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Maj	str.16
Gammalimatias	str.17

W następnym numerze:

Kot Hawkinga: żywy czy martwy?

Okładkę i ilustracje wykonał
Krzysztof Biesaga

Wybór artykułów z *Delty*
ukazuje się w języku angielskim
w sieci Internet pod adresem
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki
– wiceprzewodniczący
Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Tomasz Hofmokl
Andrzej Hryniewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda
Feliks Przytycki
Michał Różyżka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Anna Wojtyra
Piotr Zalewski
Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 843-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65.
Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 834-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena
jednego numeru w 1998 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
cena numeru w 1998 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje
dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1998 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe
„RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa
egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej.
Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A.
XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa,
ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem
zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,
realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem
otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.
Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71
wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także
tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numerzy archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.
Niestety, nie dysponujemy już numerami z lat 1974–1984.

Rendez-vous fizyki z zasadami wariacyjnymi

Wojciech
KOPCZYŃSKI

Pierwszy impuls do tego spotkania dał Heron z Aleksandrii (I wiek n.e.), który stwierdził, że równość kątów odbicia i padania jest konsekwencją postulatu, iż czas przelotu rzeczywistego promienia świetlnego między dwoma ustalonymi punktami jest (w porównaniu z jakimikolwiek pomyślanymi promieniami) lokalnie najmniejszy. Sposzczenie to zostało uogólnione przez Piotra de Fermata (1601–1665) na wszelkie (niekoniecznie odbijające się) promienie świetlne i uzyskało rangę zasady, opatrzonej później nazwiskiem jej autora. Fermat mógł na jej podstawie uzasadnić prawo załamania światła, a jego wytłumaczenie tego prawa przyszło w sukurs nieco wcześniejszemu wytłumaczeniu podanemu przez Krystiana Huygensa. To był pierwszy uścisk tytułowego spotkania.

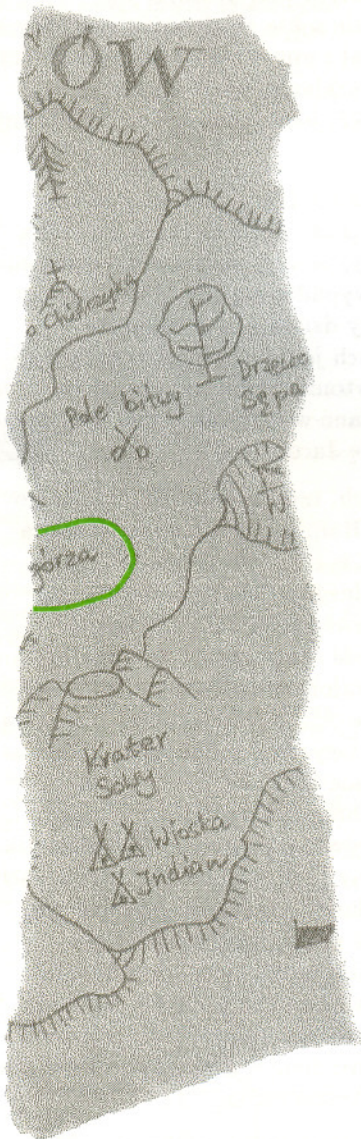
Do następnego uścisku przyczynił się Jan Bernoulli (1667–1748), a o jego *brachistochronie* i rachunku wariacyjnym w ogóle (łacińskie *vario* \simeq zmienia) piszemy w tym numerze *Delty*.

Potem to już był pocałunek raczej niż uścisk. Zaczęło się od nieśmiałej próby, podjętej przez Godfryda Wilhelma Leibniza (1646–1716), wprowadzenia pojęcia działania – wielkości, która w mechanice grałaby tę samą rolę co czas w zasadzie Fermata, a więc w obrębie optyki. Ostatecznie sformułowanie zasady najmniejszego działania (najważniejszej z zasad wariacyjnych) pochodzi od Józefa Ludwika Lagrange'a (1736–1813). Krzysztof Meissner pisze obszerniej o tej zasadzie na innych stronach *Delty*, omawiając zwłaszcza, jak z jej punktu widzenia wygląda relacja między mechaniką kwantową a klasyczną. W tych odległych czasach mechaniki kwantowej nie znano, wyrażano natomiast przypuszczenie, że przyroda dąży do osiągnięcia założonego celu, a celem tym miało być osiąganie najmniejszej wartości przez działanie, będące całką z funkcji zwanej obecnie lagranżjanem. To, że filozofia, która historycznie legła u podstaw zasady najmniejszego działania, jest raczej niepoprawna, wymaga szerszego uzasadnienia – będą Państwo mieli okazję przeczytać o tym w jednym z kolejnych zesztytów *Delty* w artykule Stanisława Bażańskiego.

Warto nadmienić, że zasada najmniejszego działania pracuje (zostawmy na boku filozofię!) nie tylko w mechanice, ale także w teorii pola (a więc np. w elektrodynamice). Z faktu tego nie zdawał sobie sprawy Albert Einstein, kiedy z mozołem, przez prawie dziesięć lat, wyprowadzał relatywistyczne równania pola grawitacyjnego. W 1915 roku prawie równocześnie z Einsteinem, opierając się na zasadzie najmniejszego działania i poświęcając zagadnieniu czas zaniedbywalnie mały w porównaniu z Einsteinowskim, równania te otrzymał Dawid Hilbert. To był jeden z najnamiętniejszych pocałunków, jakie fizyka otrzymała od zasad wariacyjnych.

Ale 3 lata później wydarzyła się rzecz o jeszcze większym znaczeniu: Emma Noether sformułowała twierdzenie o związku symetrii lagranżjanu z prawami zachowania. U Noether chodzi o przekształcenia, którym podlegają zmienne niezależne (tj. argumenty) x i zmienne zależne (tj. funkcje tych argumentów) y , które wraz z pochodnymi zmiennych zależnych względem niezależnych $\partial y/\partial x$ stanowią pełny zestaw argumentów lagranżjanu. Istotne są przy tym tylko te przekształcenia, które dadzą się wzajemnie w gładki sposób połączyć. Jeśli mamy do czynienia z n -parametrową grupą Liego przekształceń, które nie zmieniają lagranżjanu (tzn. są jego symetriami), to w teorii opisanej tym lagranżjanem występuje n -parametrowy zespół praw zachowania. Na przykład, gdy przesunięcia w czasie są symetriami lagranżjanu, to wtedy w teorii obowiązuje prawo zachowania energii. Może też się zdarzyć, że symetrie lagranżjanu zamiast od dowolnych parametrów zależą od dowolnych funkcji – wtedy zamiast praw zachowania pojawiają się w teorii tożsamości różniczkowe, zwane tożsamościami Bianchiego. Taki przypadek zachodzi w teorii Einsteina, w której tożsamości te istotnie pochodzą od tego włoskiego geometry. Nie powinno więc dziwić, że Einstein pośrednio uznał wyższość metod wariacyjnych nad swymi własnymi, „chałupniczymi”, pisząc do *New York Timesa* w roku 1935 po śmierci autorki twierdzenia: *Zdaniem najbardziej kompetentnych z żyjących matematyków Fraülein Noether jest najznamienszym umysłem matematycznym, jaki pojawił się, odkąd kobiety uzyskały dostęp do wyższego wykształcenia.*

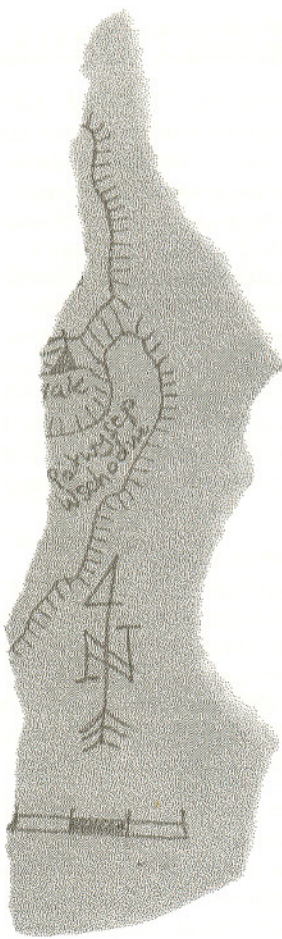
Obecnie stworzyć teorię fizyczną to przede wszystkim rozważyć jej symetrie (a może supersymetrie?) i podać lagranżjan niezmienniczy względem tych symetrii. Oczywiście, dla twórcy nie jest to koniec pracy nad teorią, ale i tak bardzo dużo. Zaiste, rendez-vous trwa, i staje się coraz bardziej interesujące.



Zasada najmniejszego działania w fizyce

Krzysztof MEISSNER

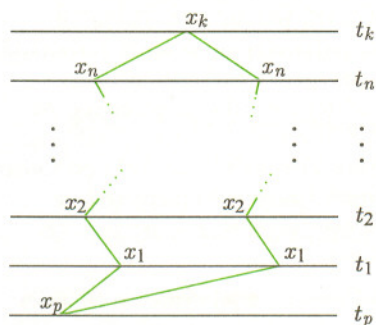
Gdy gramy w koszykówkę, zdarza się (niestety częściej niż rzadziej), że rzucając piłkę nie trafimy do kosza – dla nikogo nie ulega wtedy wątpliwości, że źle rzuciliśmy (pod złym kątem albo z za małą prędkością) i nie możemy się tłumaczyć, że mimo dobrego rzutu trajektoria „złośliwie” odchyliła się od prawidłowej. Wynika to z powszechnego przekonania, że ruch piłki jest jednoznacznie określony (pomijając opór powietrza i tym podobne małe poprawki) przez miejsce rzutu i nadaną jej prędkość początkową. Przyjęcie jako ogólnie prawdziwego takiego niezmiennego postulatu, określającego jednoznacznie ruch, niesie ze sobą niezwykle głębokie konsekwencje zarówno praktyczne, jak i filozoficzne. Szczególnie w wieku XIX wyciągano z istnienia takiego postulatu daleko idące wnioski co do determinizmu w świecie, jednak mechanika kwantowa dowodzi, że w świetle zasady Heisenberga ruchu jednoznacznie przewidzieć się nie da i wnioski te opierały się na błędnych założeniach. Jednak na szczęście w życiu codziennym taki postulat jest wystarczająco dobrym przybliżeniem. Każdy może sobie wyobrazić przykłady, co by się działo, gdyby ten postulat nie obowiązywał i np. gorąca woda z czajnika w sposób przypadkowy lała się albo w kierunku szklanki, albo w naszym i w żaden sposób nie moglibyśmy tego przewidzieć; jedno jest pewne: żylibyśmy krócej.



Problem „Dlaczego ruch przebiega właśnie tak, a nie inaczej?” był stawiany od tysiącleci, ale w genialny sposób został rozwiązany dopiero przez Newtona. Jak wiemy ze szkoły, w opisie tym stosujemy pojęcie sił i podstawowe równanie mówi, że przyspieszenie jest proporcjonalne do wypadkowej siły. Jeżeli znamy położenie początkowe, początkową prędkość i siły działające w układzie, to w klasycznym opisie Newtona cały późniejszy ruch jest już konsekwencją tego równania. Ze względu na wagę problemu po Newtonie usiłowano opisać ruch ciał wychodząc również z innych założeń. Sformułowano w tym celu kilka tzw. zasad minimalnych (np. zasadę Maupertuisa czy zasadę Jacobiego).

W tym artykule chcę omówić najważniejszą z nich, tzw. zasadę najmniejszego działania, zwaną również zasadą Hamiltona lub Hamiltona-Jacobiego (zasada ta nosi tę nazwę z powodów historycznych, gdyż w rzeczywistości jest zasadą stacjonarnego działania, a niekoniecznie minimalnego). Zasada ta mówi, że dla rzeczywistych trajektorii pewna wielkość zwana działaniem (której sens postaram się wyjaśnić poniżej) osiąga wartość stacjonarną, tzn. małe, liniowe odchylenie się od tej trajektorii powodowałoby kwadratową (lub jeszcze szybciej zbieżną do zera) zmianę działania. Takie odchylenia są zwykle nazywane wariacjami i dlatego mówimy, że na trajektorii klasycznej znika wariacja działania. Istotne jest, że w sformułowaniu tym nie mówi się nic o siłach i przyspieszeniach, ale można pokazać, że w mechanice klasycznej jest ono (prawie) równoważne opisowi ruchu za pomocą równań Newtona. Niecałkowita równoważność wynika z tego, że inaczej określamy ruch w obydwu przypadkach: w równaniach Newtona określamy punkt początkowy i prędkość początkową (co daje jednoznaczne rozwiązanie), a w zasadzie najmniejszego działania punkt początkowy i końcowy (co może dawać wiele możliwych trajektorii). Poza mechaniką klasyczną okazuje się, że opis dynamiki za pomocą działania jest daleko ogólniejszy niż za pomocą równań Newtona i widać to szczególnie w teoriach fundamentalnych – teorii grawitacji, mechanice kwantowej, kwantowej teorii pola czy najnowszych teoriach, takich jak teoria strun.

Pojęcie działania w mechanice klasycznej można wprowadzić tylko w niektórych sytuacjach, mianowicie wtedy, kiedy w układzie działają tylko tzw. siły zachowawcze, np. nie ma tarcia (typowym przykładem jest ruch planet wokół Słońca). Działanie (oznaczane zwykle przez S) wprowadzamy w następujący sposób: Jeżeli ruch zaczyna się w czasie t_p w punkcie x_p , a kończy w czasie t_k w punkcie x_k , to rozpatrujemy oddzielnie wszystkie możliwe trajektorie w $n + 1$ przedziałach czasu („zdjęciach trajektorii” – patrz rysunek). Dla każdej trajektorii i każdej chwili t_p oraz t_i , $i = 1, \dots, n$, obliczamy w danym punkcie x_i



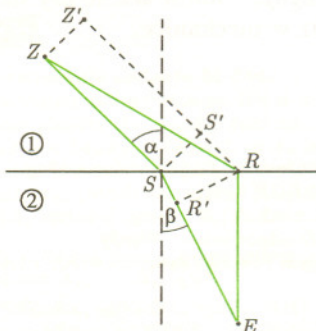
Podział czasu na $n + 1$ przedziałów dla dwóch dowolnie wybranych trajektorii.

Tarcie jest tylko pojęciem makroskopowym, użytecznym wtedy, gdy nie chcemy wnikać, co się dzieje na poziomie atomowym. W teoriach fundamentalnych (mikroskopowych) pojęcie tarcia jest bezużyteczne i wszystkie układy są zachowawcze. Na przykład: hamowanie kulki poruszającej się po stole i „rozpraszanie” jej energii kinetycznej na (niewidoczne mechanicznie) ruchy ciepłe makroskopowo opisujemy jako tarcie, ale mikroskopowo powiemy, że energia kinetyczna kulki zamienia się w trakcie toczenia na energię kinetyczną ruchów ciepłych stołu i kulki. Podobną analizę można przeprowadzić dla wielu innych układów, które wydają się „rozpraszać” energię i na wystarczająco głębokim poziomie opisu następuje jedynie przepływ energii między składnikami, ale układ jest zachowawczy i pojęcie działania może być wprowadzone.



Rozwiązanie zadania F 476.

Niech ZSE będzie drogą rzeczywistą światła, a ZRE drogą porównawczą. Kąty α i β są odpowiednio rzeczywistym kątem padania i załamania. Przez R prowadzimy równoległą do ZS , $Z'S$ i $S'R$ są prostopadłe do ZS , a RR' do SE . Wtedy $\angle S'SR = \alpha$ i $\angle SRR' = \beta$. Stąd i z prawa Snelliusa mamy, że $S'R/SR' = v_1/v_2$. Gdyby więc drogą rzeczywistą światła był odcinek $Z'R$, to w ośrodku 1 przebyłoby ono drogę $S'R$ w takim samym czasie, jak drogę SR' w ośrodku 2, czyli $t(S'R) = t(SR')$ lub $t(Z'R) = t(ZSR') = t(ZS) + t(SR')$. Ponieważ przeciwprostokątna $ZR > Z'R$, więc $t(ZSR') < t(ZR)$. Podobnie $RE > R'E$ i $t(R'E) < t(RE)$.



Dodając te nierówności stronami, stwierdzamy, iż czas przejścia drogi $ZSR'E$, równy $t(ZS) + t(SR') + t(R'E)$, jest zawsze mniejszy od czasu $t(ZR) + t(RE)$ przejścia drogi ZRE .

aktualną energię kinetyczną $T = mv^2/2$ i energię potencjalną $U(x_i)$. Następnie dodajemy wkłady od wszystkich punktów (t_i, x_i) do funkcji $L = T - U$ (tzw. lagranżjanu), mnożąc każdy wkład przez długość odpowiedniego przedziału czasu:

$$(1) \quad S_n = L(t_p, x_p)(t_1 - t_p) + L(t_1, x_1)(t_2 - t_1) + \dots + L(t_n, x_n)(t_k - t_n).$$

Działanie S dla tej trajektorii jest zdefiniowane jako granica S_n dla $n \rightarrow \infty$, czyli S_n dla bardzo drobnych przedziałów (niektórzy Czytelnicy rozpoznają w takim określeniu definicję całki względem czasu z funkcji L). Faktyczną trajektorię chcemy znaleźć z zasady najmniejszego działania: dla niej S prawie się nie zmienia, jeżeli trochę ją zmienimy (ściślej, zmiany S są kwadratowe przy liniowym odchyleniu się od trajektorii rzeczywistej). Dla przykładu obliczmy działanie dla cząstki swobodnej ($U = 0$, czyli dla siły równej zero) z trajektoriami podzielonymi dla uproszczenia tylko na dwa przedziały o równej długości ($t_1 - t_p = t_k - t_1 = \Delta t$). Przekonamy się, że z zasady najmniejszego działania można odtworzyć znany fakt, iż w tej sytuacji ruch jest prostoliniowy i jednostajny. Działanie jest dane wzorem

$$(2) \quad \begin{aligned} S_1 &= L(t_p, x_p)(t_1 - t_p) + L(t_1, x_1)(t_k - t_1) = \\ &= \frac{m(x_1 - x_p)^2}{2\Delta t^2} \Delta t + \frac{m(x_k - x_1)^2}{2\Delta t^2} \Delta t. \end{aligned}$$

Różne x_1 odpowiadają różnym trajektoriom i dają inną wartość działania. Pytanie brzmi: dla jakiego $x_1 = x_{\min}$ działanie S_1 ma minimum? Żeby odpowiedzieć na to pytanie, wystarczy w tym przypadku zauważyć, że S_1 można przekształcić do postaci

$$(3) \quad S_1 = \frac{m(x_1 - (x_p + x_k)/2)^2}{\Delta t} + \frac{m(x_k - x_p)^2}{4\Delta t}.$$

Z postaci tej widać, że minimum działania otrzymujemy dla $x_1 = (x_p + x_k)/2$, co znaczy, że ruch jest prostoliniowy. Również można obliczyć, że prędkość w pierwszym i drugim przedziale jest taka sama i równa prędkości średniej:

$$(4) \quad \frac{x_{\min} - x_p}{\Delta t} = \frac{x_k - x_{\min}}{\Delta t} = \frac{x_k - x_p}{2\Delta t}.$$

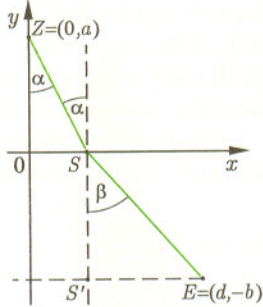
Można wykazać, że dla tego ruchu wnioski te są identyczne dla poprawnie obliczonego działania (czyli granicy S_n przy $n \rightarrow \infty$). Dodajmy, że istnieje znacznie bardziej efektywna metoda obliczania działania poprzez rozwiązywanie równania Hamiltona–Jacobiego i jest ona zresztą najogólniejszym sposobem rozwiązywania problemów w mechanice klasycznej, ale nie będziemy jej tutaj omawiać.

Zasada najmniejszego działania, którą przedstawiliśmy powyżej, obowiązuje w tej formie jedynie w mechanice klasycznej. W mechanice kwantowej zmienia się ona w sposób dość zasadniczy: każda trajektoria jest dozwolona, tylko im dalej jest od trajektorii klasycznej (czyli im większe jest działanie), tym mniejsze jest prawdopodobieństwo jej wystąpienia (czyli trajektoria klasyczna jest najbardziej prawdopodobna, ale już nie jedyna). W mechanice kwantowej dla danych t_p, x_p, t_k i x_k znajdujemy tzw. amplitudę, czyli pewną liczbę, którą możemy obliczyć znając działanie wzdłuż wszystkich trajektorii łączących x_p z x_k (a nie tylko wzdłuż trajektorii klasycznej). Trajektoria klasyczna daje zwykle największy wkład do amplitudy (co jest związane z minimum działania wzdłuż tej trajektorii) i to tłumaczy w pewien sposób zasadę najmniejszego działania w mechanice klasycznej: cząstka „sprawdza” wszystkie trajektorie, ale ta, która minimalizuje działanie, daje największy wkład do amplitudy, więc gdy można cząstce przypisać określoną trajektorię (tak jak dla obiektów makroskopowych w mechanice klasycznej), to ona jest wybierana. Sumowanie wkładów do amplitudy od wszystkich trajektorii nosi nazwę całki po trajektoriach i jest dość trudną procedurą – istnieje jednak prostszy sposób, przez rozwiązywanie pewnego równania różniczkowego zwanego równaniem Schrödingera. Równanie to jest bardzo podobne do równania Hamiltona–Jacobiego z mechaniki klasycznej (co jeszcze raz podkreśla ważność działania), ale zupełnie inna jest jego interpretacja.



Rozwiązanie zadania F 475.

Bierzemy pod uwagę hipotetyczny (niekoniecznie rzeczywisty) promień wysłany z Z pod dowolnym kątem α , $0 < \alpha < \pi/2$, który jest równy kątowi padania w punkcie S (rysunek). Następnie w punkcie tym tak dobieramy kąt załamania β , żeby punktem końcowym promienia załamane go był ustalony w zadaniu punkt E .



Ponieważ $ZS = a / \cos \alpha$ i $SE = b / \cos \beta$, więc całkowity czas, w którym światło przejdzie drogę ZSE , jest równy

$$(1) \quad t = \frac{a}{v_1 \cos \alpha} + \frac{b}{v_2 \cos \beta}.$$

Łatwo możemy sprawdzić, że kąt β jest funkcją kąta α , gdyż z $\triangle OZS$ i $\triangle S'E$ wynika, iż

$$(2) \quad a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta = d.$$

W rezultacie czas t dany wzorem (1) jest funkcją jednej zmiennej α . Obliczając pochodną t' funkcji t względem α i korzystając z warunku koniecznego istnienia ekstremum, $t' = 0$, dostajemy

$$(3) \quad t' = \frac{a \sin \alpha}{v_1 \cos^2 \alpha} + \frac{b \sin \beta}{v_2 \cos^2 \beta} \beta' = 0,$$

gdzie β' jest pochodną funkcji β względem α . Aby wyznaczyć β' , obliczamy pochodną względem α obu stron równania (2) i stwierdzamy, że

$$(4) \quad \beta' = -\frac{a \cos^2 \beta}{b \cos^2 \alpha}.$$

Eliminując β' z (3) i (4), otrzymujemy prawo Snelliusa

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Dla klasycznej teorii pola, takiej jak klasyczna elektrodynamika czy teoria grawitacji Einsteina, mamy pewne pola zależne zarówno od czasu, jak i od punktu w przestrzeni (takim polem mógłby też być np. rozkład temperatury nad Europą). W tym przypadku „trajektoria” to dowolnie wybrany rozkład pola w czasie i przestrzeni, a działanie dla tego rozkładu jest zdefiniowane jako suma wkładów od wszystkich punktów czasu i przestrzeni dla tej wybranej konfiguracji. W przypadku teorii pola zasada stacjonarnego działania mówi, że rzeczywisty rozkład to taki, dla którego działanie dla „trochę” zmienionego rozkładu pozostaje „prawie” niezmienione (ściślej: liniowe odchylenia od trajektorii powodują jedynie kwadratowe odchylenia działania). Ze względu na to, że nawet dla jednej „trajektorii”, czyli rozkładu pola, bez znajomości pojęcia całki wielokrotnej trudno jest obliczyć odpowiadające jej działanie, trudniej również niż poprzednio podać przykład ilustrujący zasadę stacjonarnego działania. Z zasady tej wynikają pewne równania różniczkowe (równania pola, analogiczne do równań Newtona w mechanice), które często łatwiej jest rozwiązać niż obliczać działanie i znajdować ekstremum. Równania te są jednak równaniami różniczkowymi cząstkowymi i „łatwiej” bardzo rzadko oznacza „łatwo”. Do takich równań pola należą równania Maxwella w elektrodynamice (gdzie działanie to całka z różnicy kwadratów wartości pola elektrycznego i magnetycznego) i równania Einsteina w teorii grawitacji (gdzie działanie to całka ze składowej krzywizny czasoprzestrzeni). Jak wiadomo, znamy rozwiązania tych ostatnich równań jedynie w szczególnych (ale bardzo ważnych) przypadkach.

W kwantowej teorii pola podobnie jak poprzednio musimy sumować po wszystkich „trajektoriach”, czyli rozkładach pola i o ile poprzednio znalezienie amplitudy było bardzo trudne, ale jeszcze jakoś możliwe, to tu sprawa wydaje się beznadziejna. Wrażenie to jest w pewnej mierze słuszne – sprawa nie jest może aż tak beznadziejna, ale amplitudy przejścia od jednej konfiguracji pola do drugiej znamy jedynie w najprostszych przypadkach, jakiegokolwiek bardziej skomplikowane umiemy rozwiązywać jedynie w sposób przybliżony, a są ważne przypadki (np. budowa protonu), o których mimo dziesięcioleci intensywnej pracy niewiele możemy powiedzieć. Wydaje się, że istotny postęp w tej dziedzinie wymaga wypracowania nowych metod również od strony matematyki i jest tu jeszcze bardzo wiele do zrobienia.

Podsumowując: choć pojęcie działania powstało jako jeden z wielu równoważnych opisów ruchu, okazało się później być fundamentalnym sposobem opisu również w najnowszych teoriach (jak teoria strun), gdzie w ogóle definiujemy całą teorię przez podanie działania. Zasada najmniejszego działania jest podstawową zasadą w fizyce klasycznej i pozwala znaleźć dynamikę układu bez odwoływania się do pojęcia siły. W fizyce kwantowej przestaje ona obowiązywać, ale również tutaj działanie jest podstawowym obiektem definiującym teorię i pozwalającym obliczać amplitudy prawdopodobieństwa dla trajektorii.

Wielu uczniów i studentów często również kieruje się „zasadą najmniejszego działania”: „Nie rób tego, czego od ciebie nie wymagają”, ale w szkole czy na studiach daje ona zdecydowanie gorsze rezultaty niż w mechanice.

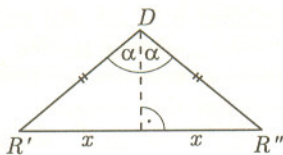


Rozwiązanie zadania M 846.

Niech S', L', D' będą spodkami wysokości, opuszczonych z wierzchołków S, L, D odpowiednio. Twierdzimy, że trójkąt $S'L'D'$ jest szukanym ROP -em. Niech $\triangle ROP$ będzie dowolnym trójkątem, wpisanym (jak w treści zadania) w $\triangle SLD$. Ponadto, niech R', R'' będą obrazami punktu R przy symetriach osiowych względem prostych LD i SD odpowiednio. Wtedy $|RP| + |PO| + |OR| = |R'P| + |PO| + |OR'| \geq |R'R''|$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $P, O \in R'R''$.

Mamy ponadto $\angle R'DR'' = 2\angle SLD$, $|DR'| = |DR''| = |DR| \geq |DD'|$, więc obliczając podstawę trójkąta $R'DR''$ dostajemy $|R'R''| \geq 2|DD'| \sin(\angle SLD)$ (na rysunku $\alpha = \angle SLD$, $x = DR' \sin \alpha$). Ostatecznie więc $|RP| + |PO| + |OR| \leq 2|DD'| \sin(\angle SLD)$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $R = D'$ i $P, O \in R'R''$.

Dowiedliśmy więc, że dla dokładnie jednego trójkąta minimum jest osiągnięte. Gdyby teraz nasz trójkąt nie był trójkątem $S'L'D'$, to powtarzając rozumowanie powyższe (biorąc zamiast R pozostałe wierzchołki: O lub P) znaleźlibyśmy trójkąt wpisany w $\triangle SLD$ o mniejszym obwodzie.



Przypominamy, że...

Przestrzeń metryczna to dowolny zbiór X zaopatrzony w metrykę (lub inaczej odległość), to znaczy funkcję $\rho : X \times X \rightarrow \mathbf{R}_+$, która spełnia następujące warunki:

- (i) $\rho(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$;
- (ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ dla wszystkich $x, y \in X$;
- (iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ dla wszystkich $x, y, z \in X$.

Trzeci warunek nazywamy nierównością trójkąta.

Ciąg (y_n) punktów przestrzeni metrycznej X jest zbieżny do y wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(y_n, y) = 0$.

Powiemy, że podzbiór K przestrzeni metrycznej X jest zwarty, jeśli dowolny ciąg (x_n) punktów zbioru K zawiera podciąg (x_{n_k}) zbieżny do pewnego $x \in K$.

Z każdego pokrycia podzbioru zwartego zbiorami otwartymi można wybrać pokrycie skończone.



Rozwiązanie zadania M 844.

Dowodzimy przez indukcję. Dla $n = 3$ mamy planety A_1, A_2, A_3 . Jeśli np. $|A_1 A_2| < |A_2 A_3| < |A_3 A_1|$, to A_3 jest nieobserwowana. Załóżmy, że $n > 3$. Niech A_{n-1}, A_n będą takimi planetami, że $|A_{n-1} A_n| = \min_{i \neq j} |A_i A_j|$. Jeśli astronom znajdujący się na jednej z planet A_1, \dots, A_{n-2} obserwuje planetę A_{n-1} lub A_n , to na planety A_1, \dots, A_{n-2} nie starcza astronomów (bo A_{n-1} i A_n obserwują siebie nawzajem). Jeśli natomiast żaden z astronomów z A_1, \dots, A_{n-2} nie obserwuje ani planety A_{n-1} , ani A_n , to stosujemy założenie indukcyjne do A_1, \dots, A_{n-2} .

Każdy wie, że hipopotam potrafi potężnie rozdziawić paszczę. Odległości niektórych par punktów hipopotama wtedy wzrastają; odległości innych – maleją. Rozdziawić paszczy tak, by odległość żadnej pary jego punktów nie zmalała, hipopotam nie może. Intuicyjnie jest to w miarę jasne – my jednak, by nabrać stuprocentowej pewności, że istotnie tak jest, rozwiążemy poniższe

Zadanie o hipopotamie. Niech K będzie zbiorem zwartym metrycznym z metryką $\rho(\cdot, \cdot)$. Wykazać, że dowolne przekształcenie $f : K \rightarrow K$, spełniające dla wszystkich $x, y \in K$ warunek $\rho(f(x), f(y)) \geq \rho(x, y)$, jest izometrią.

Jako pierwsi zadanie to rozwiązali zapewne Ehrenpreis i Hurewicz. Rozwiązanie przytoczone niżej dobrze ilustruje siłę i elegancję metod wariacyjnych.

Zacznijmy od przypomnienia ważnej własności zbiorów zwartych metrycznych. Powiemy, że podzbiór \mathcal{E} przestrzeni metrycznej X (czyli zbioru z metryką $\rho(\cdot, \cdot)$) jest ε -sieciami, jeżeli dla dowolnego $x \in X$ istnieje taki $y \in \mathcal{E}$, że $\rho(x, y) \leq \varepsilon$. Okazuje się, że jeżeli X jest zbiorem zwartym, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona ε -sieć zawarta w X .

Założmy na początek, że f jest „na”. Z treści zadania wynika, oczywiście, różnowartościowość f , więc istnieje wtedy przekształcenie $g : K \rightarrow K$ odwrotne do f , które jest również „na”, o tej własności, że dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi nierówność $\rho(g(x), g(y)) \leq \rho(x, y)$. Wykażemy, że g jest izometrią.

Wybermy dwa ustalone punkty $p_1, p_2 \in K$ oraz liczbę $\varepsilon > 0$. Spośród wszystkich ε -siec w K wybierzmy taką sieć \mathcal{E} , która spełnia warunek

$$(*) \quad \text{nie istnieje } \varepsilon\text{-sieć } \mathcal{E}', \text{ taka, że } \sum_{x, y \in \mathcal{E}'} \rho(x, y) < \sum_{x, y \in \mathcal{E}} \rho(x, y) - \varepsilon.$$

Oczywiście, jest to możliwe (Czytelnik zechce sobie przypomnieć definicję kresu dolnego).

Zauważmy teraz, że $g(\mathcal{E})$ jest również ε -sieciami. Istotnie, jeżeli $y \in K$, to istnieje takie $x \in \mathcal{E}$, że $\rho(x, f(y)) \leq \varepsilon$. Stąd $\rho(g(x), y) = \rho(g(x), g(f(y))) \leq \rho(x, f(y)) \leq \varepsilon$. Ponieważ $g(x) \in g(\mathcal{E})$, więc $g(\mathcal{E})$ jest ε -sieciami.

Na mocy warunku (*) jest więc $\sum_{x, y \in \mathcal{E}} \rho(g(x), g(y)) \geq \sum_{x, y \in \mathcal{E}} \rho(x, y) - \varepsilon$. Stąd, dla dowolnych punktów $a, b \in \mathcal{E}$ dostajemy

$$\begin{aligned} \rho(g(a), g(b)) &\geq \rho(a, b) + \sum_{\substack{x, y \in \mathcal{E} \\ (x, y) \neq (a, b)}} (\rho(x, y) - \rho(g(x), g(y))) - \varepsilon \geq \\ &\geq \rho(a, b) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Ponieważ \mathcal{E} jest ε -sieciami, istnieją takie $a, b \in \mathcal{E}$, że $\rho(p_1, a) \leq \varepsilon$ oraz $\rho(p_2, b) \leq \varepsilon$. Mamy więc, korzystając dwukrotnie z nierówności trójkąta,

$$\begin{aligned} \rho(g(p_1), g(p_2)) &\geq \rho(g(a), g(b)) - \rho(g(p_1), g(a)) - \rho(g(p_2), g(b)) \geq \\ &\geq \rho(a, b) - \varepsilon - \rho(p_1, a) - \rho(p_2, b) \geq \\ &\geq \rho(p_1, p_2) - \rho(p_1, a) - \rho(p_2, b) - \varepsilon - \rho(p_1, a) - \rho(p_2, b) \geq \\ &\geq \rho(p_1, p_2) - 5\varepsilon. \end{aligned}$$

Ponieważ ε było wybrane dowolnie, więc $\rho(g(p_1), g(p_2)) \geq \rho(p_1, p_2)$. Razem z założeniem zadania daje to ostatecznie równość $\rho(g(p_1), g(p_2)) = \rho(p_1, p_2)$.

Jak teraz pozbyć się dodatkowego założenia, że f jest „na”? Dopomoże nam w tym pojęcie pokrewne do ε -siec. Nazwiemy podzbiór A przestrzeni metrycznej ε -rozdzielonym, jeżeli każde dwa jego różne punkty są odległe o co najmniej ε . W dowolnej przestrzeni metrycznej zwartej istnieje dla dowolnego $\varepsilon > 0$ największy (tzn. taki, że nie istnieje podzbiór ε -rozdzielony o większej liczbie elementów) podzbiór ε -rozdzielony (dlaczego?).

Wykażemy, że $f(K)$ jest gęstym podzbiorem K . W przeciwnym razie dla pewnego $\varepsilon > 0$ kula o środku w pewnym punkcie $a \in K$ i promieniu ε byłaby rozłączna z $f(K)$. Innymi słowy: $\rho(a, x) > \varepsilon$ dla każdego $x \in f(K)$. Niech teraz A będzie maksymalnym zbiorem ε -rozdzielonym zawartym w K . Ponieważ f nie zmniejsza odległości, $f(A)$ jest również zbiorem ε -rozdzielonym. Lecz wówczas także $f(A) \cup \{a\}$ jest ε -rozdzielony i ma więcej elementów niż A . Sprzeczność.

Zauważmy teraz, że na zbiorze $f(K)$ można określić funkcję $g_0 : f(K) \rightarrow K$ odwrotną do f . Funkcja g_0 jest jednostajnie ciągła, co więcej, $\rho(g_0(x), g_0(y)) \leq \rho(x, y)$, dla $x, y \in f(K)$. Ma ona zatem rozszerzenie ciągle $g : K \rightarrow K$, takie, że $\rho(g(x), g(y)) \leq \rho(x, y)$, dla $x, y \in K$ (dlaczego?). Oczywiście $g(K) = K$ (a nawet $g_0(f(K)) = K$). Zatem, postępując tak, jak w pierwszej części dowodu dostaniemy, że $\rho(g(x), g(y)) = \rho(x, y)$. Co za tym idzie, f jest izometrią.

Jeszcze dwie uwagi. Po pierwsze, dowód byłby nieco prostszy, gdybyśmy wiedzieli, że istnieje ε -sieć \mathcal{E} , dla której wielkość $\sum_{x, y \in \mathcal{E}} \rho(x, y)$ jest najmniejsza.

Rzeczywiście jest to prawda, ale po dołączeniu (nietrudnego) dowodu tego faktu cały tekst niepotrzebnie by się wydłużył.

Po drugie, możemy pokusić się o dowód faktu nieco ogólniejszego. Załóżmy, że K , zamiast samemu być zbiorem zwartym, jest jedynie gęstym podzbiorem zbioru zwartego metrycznego (bardziej fachowo mówimy wtedy, że K ma zwarte uzupełnienie lub jest całkowicie ograniczony – w przypadku podzbiorów przestrzeni euklidesowej oznacza to tyle, że K jest ograniczony). Już to skromniejsze założenie implikuje tezę naszego zadania. Istotnie, niech L będzie takim zwartym nadzbiorem K , że K jest jego gęstym podzbiorem. Wówczas na zbiorze $f(K)$ można określić funkcję $g_0 : f(K) \rightarrow K$ odwrotną do f , jednostajnie ciągłą – spełniającą warunek $\rho(g_0(x), g_0(y)) \leq \rho(x, y)$, dla $x, y \in f(K)$. Można więc rozszerzyć g_0 do funkcji ciągłej g przekształcającej domknięcie $\overline{f(K)}$ zbioru $f(K)$ w zbiór L , dla której $\rho(g(x), g(y)) \leq \rho(x, y)$, dla $x, y \in f(K)$.

Ale $\overline{f(K)} = L$, tzn. $f(K)$ jest gęstym podzbiorem L . Dowód tego faktu jest analogiczny jak w przypadku K zwartego. Z naszego zadania wynika więc, że g jest izometrią zbioru L , a co za tym idzie, $f = g|_K^{-1}$ jest izometrią zbioru K .

Jest jednak spora różnica między przypadkiem, gdy zbiór K jest zwarty, a przypadkiem, gdy K jest jedynie gęsty w pewnym zbiorze zwartym. W tym drugim przypadku f , mimo że jest izometrią, nie musi być „na”. Można się o tym przekonać biorąc np. liczbę α niewspółmierną z π oraz podzbiór K okręgu $x^2 + y^2 = 1$ złożony z punktów postaci $(\cos n\alpha, \sin n\alpha)$, dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Wówczas obrót o kąt α jest izometrią zbioru K , ale nie jest „na” – punkt $(1, 0)$ nie jest obrazem żadnego innego punktu. Obrót f o kąt $m\alpha$ jest izometrią K o tej własności, że $K \setminus f(K)$ ma m elementów. W przestrzeni o większej liczbie wymiarów można zbudować znacznie ciekawsze przykłady. Istnieje np. taki podzbiór gęsty A dwuwymiarowej sfery S^2 oraz izometrie $f, g : A \rightarrow A$, że zbiory $f(A)$ i $g(A)$ są rozłączne oraz $f(A) \cup g(A) = A$. Na tym opiera się tzw. paradoksalny rozkład kuli Banacha–Tarskiego. No, ale to już zupełnie inna historia.



Rozwiązanie zadania M 845.

Niech k będzie danym kołem, na którym opisany jest n -kątem M , F jest n -kątem foremnym opisanym na k , a K kołem opisanym na F . Niech S_1, S_2, \dots, S_n będą odcinkami kołowymi w K , wyznaczonymi przez proste zawierające kolejne boki n -kąta M . Wszystkie one mają równe pola. Niech ponadto $S_{i,j} = S_i \cap S_j$. Oznaczmy przez $|A|$ pole figury A . Mamy

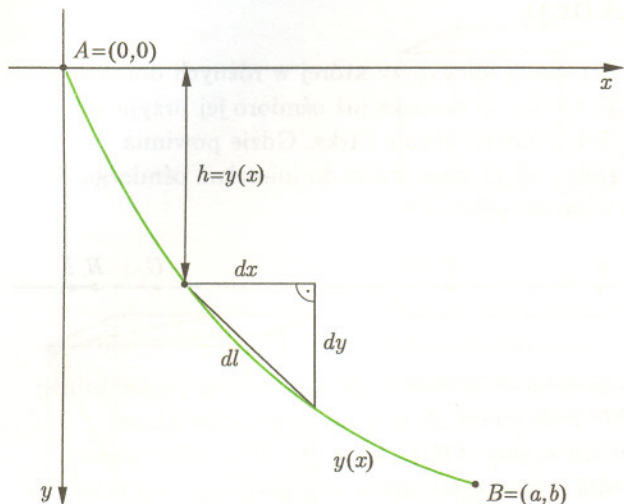
$$\begin{aligned} |M \cap K| &= |K| - (|S_1| + |S_2| + \dots + |S_n|) + (|S_{1,2}| + |S_{2,3}| + \dots + |S_{n-1,n}| + |S_{n,1}|) \geq \\ &\geq |K| - n|S_1| = |F|, \end{aligned}$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $|S_{1,2}| = \dots = |S_{n-1,n}| = 0$, czyli gdy M jest foremny.

Brachistochrona

Trzysta dwa lata temu, w czasopiśmie *Acta Eruditorum*, Jan Bernoulli zapytał, jaki kształt ma krzywa (od greckich *brachist* – najkrótszy i *chronos* – czas nazywana brachistochroną), po której ruch z punktu A do punktu B pod wpływem siły grawitacji trwa najkrócej.

Aby, podobnie jak sam Bernoulli, Newton, czy Leibniz, odpowiedzieć na powyższe pytanie, wprowadźmy układ współrzędnych tak, jak to pokazuje rysunek.



Czas, w jakim zsuwający się punkt pokonuje fragment krzywej o długości dl , jest równy $\frac{dl}{v}$. Mamy też $dl = (1 + y'(x)^2)^{1/2} dx$, a z zasady zachowania energii wynika, że $mgh = \frac{1}{2}mv^2$, czyli, przy oznaczeniach z rysunku, prędkość v spełnia w każdej chwili równanie $v^2 = 2gy(x)$. Całkowany czas ruchu wzdłuż krzywej $y(x)$ to całka $\int \frac{dl}{v}$, a zatem ostatecznie

$$(1) \quad T[y] = \int_0^a f(y(x), y'(x)) dx,$$

gdzie $f(y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(\frac{1 + y'^2}{y} \right)^{1/2}$. Zagadnienie brachistochrony polega więc na znalezieniu takiej funkcji różniczkowalnej $y : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, spełniającej warunki $y(0) = 0$, $y(a) = b$, dla której całka $T[y]$ ma najmniejszą wartość. Oto szkic rozwiązania.

Krok 1: równanie Eulera-Lagrange'a. Warunek konieczny na to, by funkcja y była minimum funkcjonału T , ma postać

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0.$$

Dowód tego faktu można znaleźć w dowolnym podręczniku rachunku wariacyjnego.

Równanie (2) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu. Jego postać zależy od funkcji f ; w naszej sytuacji, dla $f(y, y') = \text{const} \cdot \sqrt{(1 + y'^2)/y}$, jest to dość paskudne równanie nieliniowe. Żeby niepotrzebnie nie straszyć

Czytelników, nie będziemy go w ogóle wypisywać.

Krok 2: pierwsze całkowanie. Gdy funkcja f nie zależy w jawny sposób od x , to wówczas równanie Eulera-Lagrange'a można natychmiast jeden raz scałkować i zamiast (2) napisać

$$(3) \quad f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{const}.$$

(Różniczkując lewą stronę powyższego równania względem x , dostajemy lewą stronę równania (2) pomnożoną przez y' .) Po mechanicznym obliczeniu pochodnej f względem zmiennej y' i doprowadzeniu równania do najprostszej postaci otrzymamy

$$(4) \quad y(1 + y'^2) = c.$$

Krok 3: drugie całkowanie. Równanie (4) można już brutalnie scałkować. Żeby się nadmiernie nie męczyć, dokonamy podstawienia $y' = \text{tg } \theta$ (Czytelnik zechce się zastanowić, jaki jest jego sens geometryczny). Wówczas $1 + y'^2 = 1 + \text{tg}^2 \theta = 1/\cos^2 \theta$, a zatem mamy $y = c \cos^2 \theta$. Obie strony tej równości zróżniczkujemy teraz względem zmiennej x – po to, by również x wyrazić jako funkcję θ . Dostaniemy

$$\text{tg } \theta = y' = -2c\theta' \cos \theta \sin \theta.$$

Ponieważ $2 \cos^2 \theta = 1 + \cos 2\theta$, więc

$$1 = -2c\theta' \cos^2 \theta = -c(1 + \cos 2\theta)\theta'.$$

Zatem, $x + c_1 = -c(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta)$. Otrzymane równania, po podstawieniu $\alpha = \pi - 2\theta$, mają postać

$$2y = c(1 - \cos \alpha),$$

$$2(x + c_2) = c(\alpha - \sin \alpha)$$

i są parametrycznymi równaniami cycloidy, krzywej, którą zakreśla punkt okręgu tocącego się bez poślizgu po prostej.

Na razie wykonaliśmy taką mniej więcej pracę umysłową, jak uczeń, którego zapytano o minima lokalne funkcji $g(x) = x^3$, a on z radością odpowiada: *pochodna tej funkcji, $g'(x) = 3x^2$, znika dla $x = 0$, więc tam właśnie jest minimum.* Sprawdzenie, że funkcjonał T w ogóle przyjmuje najmniejszą wartość, wymaga jednak wiedzy z zakresu analizy funkcjonalnej; nie będziemy go więc tu Czytelnikom prezentować.

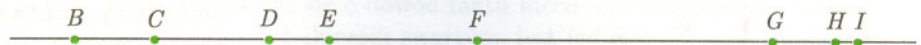
Na zakończenie warto powiedzieć, że zadanie Jana Bernoulliego o brachistochronie to początek rachunku wariacyjnego, bogatej gałęzi matematyki, która w dwudziestym wieku przeżywa burzliwą drugą młodość, po części ze względu na zastosowania w fizyce (np. cząstek elementarnych), a po części z powodów czysto matematycznych. Głębsze wnikanie w tę historię może być raczej motywem długich intymnych kontaktów z nauką niż tematem krótkiego artykułu w *Delcie*.

P.S.



Mieszkanie dla Alicji

Alicja chce zamieszkać przy tej samej ulicy, przy której w różnych domach (położonych tak, jak pokazuje to rys. 1) mieszka już ośmioro jej przyjaciół: Basia, Cesia, Dorota, Edek, Felek, Grześ, Hania i Irka. Gdzie powinna zamieszkać, żeby suma odległości od jej mieszkania do mieszkań ośmiorga przyjaciół była najmniejsza z możliwych?



Rys. 1

Suma odległości z domu Alicji do domów Basi i Irki zawsze jest przynajmniej taka, jak długość odcinka BI . Jeśli punkt A , w którym mieszka Alicja, leży na odcinku BI , to wówczas mamy $AB + AI = BI$. Podobnie, suma odległości $AC + AH$ jest – dla dowolnego punktu A – przynajmniej taka, jak odległość CH . Przy tym, $AC + AH = CH$ dla każdego punktu A leżącego na odcinku CH . Zatem, suma czterech odległości $AB + AC + AH + AI$ jest minimalna, jeśli punkt A wybierzemy (w dowolny sposób!) na odcinku CH .

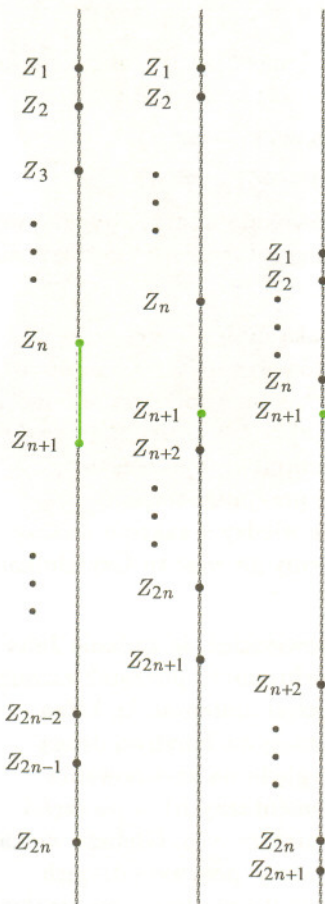
Suma kolejnych dwóch składników, $AD + AG$, jest najmniejsza i równa DG , gdy punkt A leży między D i G . Wreszcie, suma odległości z domu Alicji do domów Edka i Felka jest najmniejsza (i równa EF), gdy Alicja mieszka w jakimkolwiek punkcie odcinka EF łączącego domy Edka i Felka.

Zatem, suma odległości z domu Alicji do domów ośmiorga przyjaciół jest najmniejsza (i równa $BI + CH + DG + EF$), gdy Alicja mieszka w domu stojącym gdziekolwiek na odcinku EF .

Jeśli Alicja ma nie ośmioro, ale $2n$ znajomych Z_1, Z_2, \dots, Z_{2n} mieszkających w różnych miejscach (patrz rys. 2), to – jeśli chce, by suma odległości z jej domu do domów wszystkich znajomych była najmniejsza z możliwych – powinna zamieszkać w dowolnym punkcie odcinka $Z_n Z_{n+1}$. Dowód jest taki sam, jak wyżej, dla $n = 4$.

Jeśli natomiast liczba znajomych Alicji jest równa $2n + 1$ (rys. 3), to środkowy składnik rozpatrywanej sumy $2n + 1$ liczb, AZ_{n+1} , zostaje bez pary. Jest on zawsze nieujemny, a znika wtedy i tylko wtedy, gdy $A = Z_{n+1}$. Alicja powinna wówczas zamieszkać w punkcie Z_{n+1} . Warto zauważyć, że nie są ważne odległości punktu Z_{n+1} od pozostałych punktów Z_i . Punkty Z_1, \dots, Z_n można dowolnie doń zbliżyć, a punkty Z_{n+2}, \dots, Z_{2n+1} dowolnie odeń oddalić; jeśli tylko zachowamy przy tym kolejność punktów Z_i na prostej, to suma $AZ_1 + \dots + AZ_{2n+1}$ nadal będzie najmniejsza właśnie dla $A = Z_{n+1}$ (rys. 4).

Wbrew pozorom, nie jest to wcale fakt szczególnie zaskakujący. Gdy bowiem mieszkamy już wygodnie w samym śródmieściu, to znajomi, którzy z dalekich przedmieść wyprowadzą się na jeszcze dalsze, nie namówią nas przecież łatwo do zmiany miejsca zamieszkania.



Rys. 2

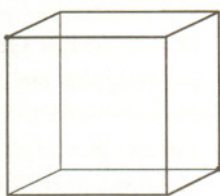
Rys. 3

Rys. 4

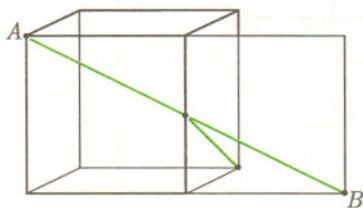


Nieskracalna droga

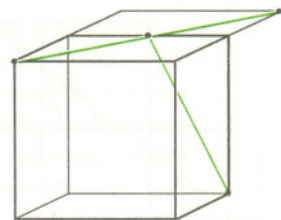
Mucha, wędrując po jednostkowym sześcianie od pewnego jego wierzchołka do wierzchołka przeciwnego (rys. 1), musi przejść po jego powierzchni drogę o długości co najmniej $\sqrt{5}$. Przekonuje nas o tym eksperyment myślowy polegający na otwarciu sześcianu (rys. 2). Gdyby istniała krótsza droga, to istniałaby na płaszczyźnie droga łącząca A i B , krótsza od odcinka AB , co jest niemożliwe.



Rys. 1

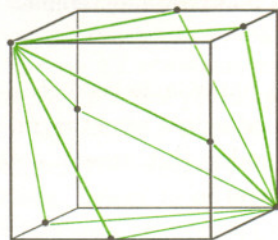


Rys. 2



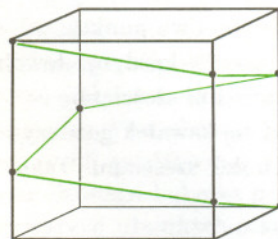
Rys. 3

Takie rozumowanie trzeba uzupełnić. Naprawdę bowiem stwierdziliśmy jedynie, że nie ma krótszej drogi prowadzącej przez przednią i prawą ścianę. A można przecież iść inaczej. Bez trudu stwierdzamy, że idąc ścianą górną i tylną (rys. 3) też możemy dotrzeć do przeciwnego wierzchołka sześcianu po drodze długości $\sqrt{5}$. Chwila namysłu i już wiemy, że dróg tej długości jest 6 – przez środki każdej z krawędzi łączących dwie ściany zawierające start i metę (rys. 4). Jest ich faktycznie 6, bo i ze startu, i z mety wychodzą po 3 krawędzie (i te musimy odrzucić), a wszystkich krawędzi w sześcianie jest 12.



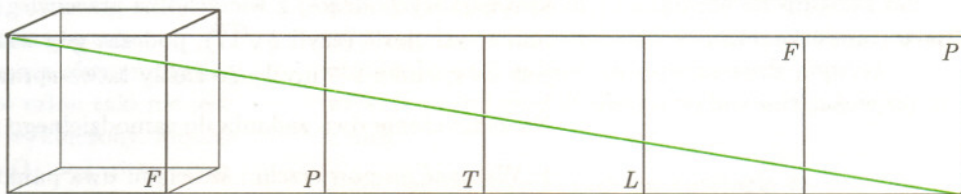
Rys. 4

I teraz jest już bardzo blisko do końca uzasadnienia, że znaleziona droga jest najkrótsza: żeby dojść od startu do mety, trzeba przejść po jakiejś ścianie zawierającej start i jakiejś zawierającej metę, czyli po co najmniej dwóch ścianach, a te przypadki już rozpatrzyliśmy.



Rys. 5

Żeby pokazać, jak bardzo druga część dowodu była potrzebna, rozważmy drogę, która kolejne pionowe krawędzie przecina w odległości równej kolejno: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ od górnego denka (rys. 5). Jak widać z rysunku 6, i ta droga jest nieskracalna. Wyobraźmy sobie trasę łączącą start z metą jako bardzo sprężystą gumkę – jej (choćby największa) sprężystość nie przeprowadzi gumki w położenie z rysunku 2: do tego celu trzeba by najpierw gumkę dodatkowo rozciągnąć.



Rys. 6

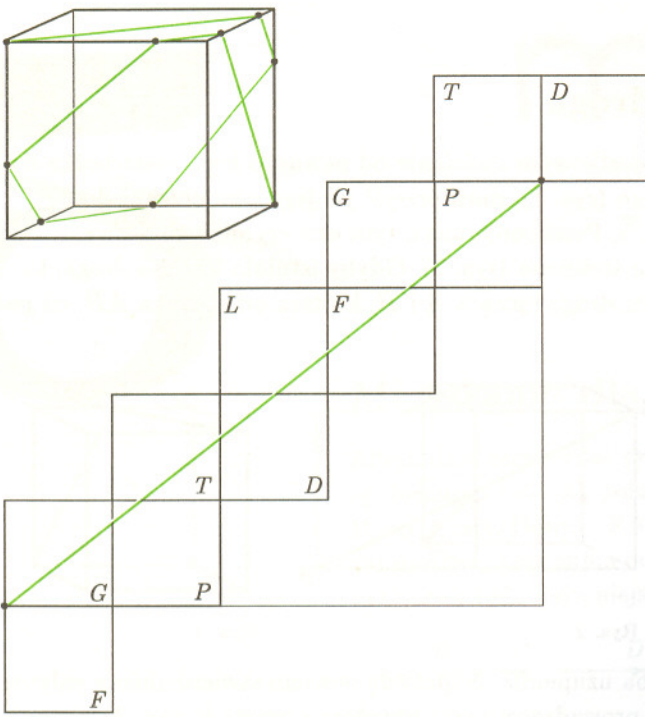
W tym miejscu widać już, że linii nieskracalnych łączących przeciwległe wierzchołki sześcianu jest nieskończenie wiele. Co więcej, mogą one mieć dowolnie wielką długość. Wzór

$$\sqrt{4(2n+1)^2 + 1}$$

opisuje długość linii nieskracalnej owijającej sześcian n razy w podobny sposób, jak na rysunku 5 linia owija go raz.

Na rysunkach 6 i 7 stosujemy następujący sposób oznaczania ścian sześcianu:

F oznacza front, T – tył,
 P – prawa, L – lewa,
 G – góra, D – dół.



Rys. 7

A czy są linie nieskracalne łączące przeciwległe wierzchołki sześcianu i mające inną długość? Rysunek 7 pokazuje przykład takiej linii na sześcianie i na jego rozwinięciu. Z tego ostatniego można bez trudu obliczyć, że ma ona długość $\sqrt{41}$, a więc inną od określonych podanym poprzednio wzorem.

Powstaje więc pytanie, ile jest linii nieskracalnych, przy czym chodzi o jakąś bardziej precyzyjną odpowiedź niż „nieskończenie wiele” (bo to już wiemy).

Dobrze jest w tym miejscu zacząć stosować takie nazwy, jakie się powszechnie w matematyce stosuje. Otóż linie nieskracalne nazywa się *liniami geodezyjnymi*. Nazwa ta bierze się stąd, że nawet najprostsze z linii wyznaczanych na powierzchni Ziemi przez geodetów (np. linia kolejowa Małkinia – Białystok) nie są liniami prostymi (ze względu na pofałdowanie terenu), a właśnie nieskracalnymi.

Bernhard Riemann zaproponował półtora wieku temu uprawianie geometrii w ten sposób, by geodezyjne traktować jako proste, a odległość punktów mierzyć długością najkrótszej z geodezyjnych łączących dwa punkty (lub kresem dolnym długości takich geodezyjnych, gdy najkrótsza nie istnieje).

Ważną własnością powierzchni regularnych (mniejsza o to, co to znaczy – praktycznie każda powierzchnia, z którą mamy do czynienia, jest regularna, w tym sześcian) jest twierdzenie:

przez każdy punkt powierzchni w każdym styczonym kierunku przechodzi geodezyjna.

Nie oznacza to jednak, że każda geodezyjna łączy wybrane dwa punkty.

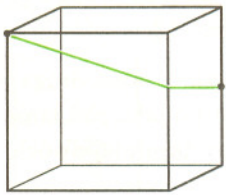
Odpowiedź na postawione wyżej pytanie jest następująca: W każdym, dowolnie małym (ale nie zerowym) kącie narysowanym na powierzchni sześcianu i mającym wierzchołek w wierzchołku sześcianu mieści się kawałek geodezyjnej wychodzącej z tego i trafiającej w przeciwległy wierzchołek sześcianu. Taka własność nazywa się gęstością.

Nie zawsze jest łatwo zgadnąć, która geodezyjna jest najkrótsza. W przypadku, gdy chodzi o odległość (riemannowską) wierzchołka sześcianu od środka którejś krawędzi wychodzącej z wierzchołka przeciwległego, wielu wskazuje na długość linii z rysunku 8 (czyli $\frac{1}{2}\sqrt{17}$), podczas gdy właściwe rozwiązanie (równe $\frac{1}{2}\sqrt{13}$) jest na rysunku 9 – myślę, że każdy łatwo sprawdzi te wyniki.

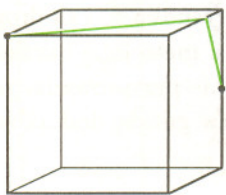
Na zakończenie dwa zadania do samodzielnego rozwiązania.

1. Wskazać na powierzchni sześcianu dwa punkty A i B , dla których istnieje tylko jedna łącząca je linia realizująca ich riemannowską odległość (to dla rozrzewki). Dla dowolnego punktu A wskazać wszystkie punkty B o powyższej własności.

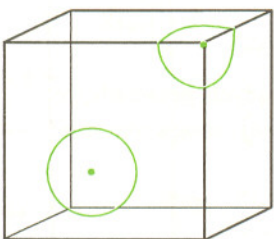
2. Na rysunku 10 pokazane są dwa riemannowskie okręgi o tym samym promieniu r ; sprawdzić, że długość jednego z nich jest równa przyzwoicie $2\pi r$, drugiego natomiast $\frac{3}{2}\pi r$. Czy w riemannowskiej geometrii powierzchni sześcianu są okręgi o tym samym promieniu, a jeszcze innej długości?



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Wyznaczanie odległości stanowi jedno z najważniejszych i najtrudniejszych wyzwań astronomii obserwacyjnej. Bez tego nie sposób odróżnić bliskiego słabego źródła od dalekiego, ale za to silnego. Bezpośredni pomiar odległości poprzez pomiar paralaksy jest możliwy tylko dla najbliższych gwiazd. Aby rozciągnąć skalę znanych odległości poza naszą Galaktykę, astronomowie uciekają się do używania tzw. świec standardowych, tzn. obiektów, których absolutna jasność jest znana. Najpopularniejszymi takimi świecami są cefeidy, gwiazdy zmienne charakteryzujące się dobrze określoną zależnością między absolutną jasnością a okresem zmienności. Właśnie dzięki cefeidom Edwin Hubble wykazał, że galaktyki oddalają się od siebie z prędkością proporcjonalną do odległości między nimi.

W ciągu ostatnich 70 lat jego obserwacja została wielokrotnie potwierdzona, prowadząc do coraz lepszego wyznaczenia stałej Hubble'a wiążącej przesunięcie ku czerwieni linii widmowych z odległością. Choć przyzwyczailiśmy się do rozszerzającego się Wszechświata, to nadal nie wiemy, czy grawitacja zdoła kiedyś zatrzymać jego ekspansję. Zależy to od średniej gęstości materii. Jeżeli stosunek tej gęstości do gęstości krytycznej jest większy od jedności, $\Omega_M > 1$, to przestrzeń ma dodatnią krzywiznę (jak sfera) i czeka nas Wielki Kolaps. W przypadku ujemnej krzywizny (kształt siodła), odpowiadającej $\Omega_M < 1$, ekspansja nigdy się nie skończy. Współczesne modele kosmologiczne sugerują pośrednie rozwiązanie, w którym całkowita gęstość energii odpowiadałaby dokładnie wartości krytycznej $\Omega_C = 1$. Według tych modeli płaski i jednorodny Wszechświat powstał w wyniku inflacji, czyli gwałtownego rozszerzania się jednego przechłodzonego bąbelka podczas przemiany fazowej w pierwszych ułamkach sekundy po Wielkim Wybuchu. $\Omega_C = 1$ nie musi oznaczać $\Omega_M = 1$, gdyż płaskość Wszechświata można uzyskać, dodając składnik Ω_Λ odpowiadający stałej kosmologicznej wprowadzonej przez Alberta Einsteina w celu otrzymania stacjonarnego rozwiązania równań Ogólnej Teorii Względności. Dziś wiemy, że człon taki nie jest konieczny, ale też nie jest a priori wykluczony. Modele inflacyjne przewidują $\Omega_C = \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$, przy czym $\Omega_\Lambda > 0$ odpowiadałoby tajemniczej energii pustej przestrzeni powodującej długozasięgowe odpychanie.

W 1995 roku A. Goobar i S. Perlmutter zaproponowali nowy sposób jednoczesnego wyznaczenia Ω_M i Ω_Λ [1]. Pomysł polegał na wykorzystaniu supernowych typu Ia jako standardowych świec. Przypuszcza się, że supernowe te powstają w układach podwójnych białego karła i czerwonego olbrzyma. Biały karzeł wysysa materię ze swojego partnera do momentu przekroczenia granicy Chandrasekhara, kiedy to

rozpoczyna się gwałtowne jądrowe spalanie węgla i gwiazda wybucha. Zaobserwowano, że eksplozje te przebiegają prawie identycznie, co tłumaczy się dużym podobieństwem rozpadających się obiektów. Użycie ich jako standardowych świec pozwala na ocenę kosmologicznych odległości rzędu miliardów lat świetlnych z dokładnością dochodzącą do 10%. Panowie Goobar i Perlmutter stwierdzili, że wykreślając diagram Hubble'a, czyli zależność obserwowanej jasności od przesunięcia ku czerwieni, dla kilkudziesięciu odległych supernowych Ia można jednocześnie wyznaczyć Ω_M i Ω_Λ . Diagram Hubble'a obrazuje zmienność „stałej” Hubble'a w czasie, która w nietrywialny sposób zależy od obecnych wartości Ω_M i Ω_Λ . Najprościej mówiąc, duże Ω_M powodowałyby grawitacyjne spowalnianie tempa ekspansji Wszechświata, natomiast duże Ω_Λ odwrotnie – przyspieszanie tempa ekspansji [1].

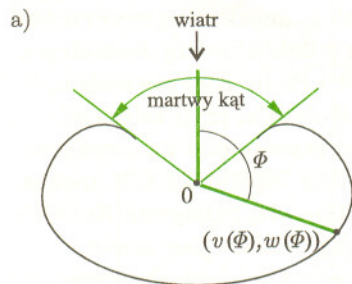
Ostatnie miesiące przyniosły zaskakujące wyniki dwóch grup polujących na odległe supernowe Ia [2,3]. Wygląda na to, że Wszechświat rozszerza się coraz szybciej, co wskazywałoby na większą od zera wartość stałej kosmologicznej, zwłaszcza jeżeli nie chcielibyśmy rezygnować z modeli inflacyjnych. $\Omega_\Lambda = 0$ byłoby prawie wykluczone i ewentualnie odpowiadałoby bardzo małej gęstości materii. Doniesienie o nowych wynikach ukazało się w renomowanym magazynie naukowym *Science* pod sensacyjnym tytułem: „Astronomowie widzą kosmiczną antygravitację przy pracy” [4] i zostało powtórzone m.in. przez *Gazetę Wyborczą* [5]. Wcześniejszy komentarz w *Nature* był trochę bardziej wyważony [6]. Podobne wnioski opatrzone następującym zastrzeżeniem: wyniki oparte są na małej obserwowanej jasności najodleglejszych supernowych Ia, interpretowanej jako przejaw ich większych odległości. Wśród innych hipotetycznych możliwości wyjaśnienia tego faktu wymieniono: mniejszą absolutną jasność supernowych w młodym Wszechświecie (przeciwnie temu zgodność charakterystyk spektralnych i krzywych jasności z otrzymanymi dla bliższych supernowych); niezależne od długości fali międzygalaktyczne osłabienie światła; systematyczne obciążenie próbki bliskich supernowych poprzez większe prawdopodobieństwo wybierania jaśniejszych z nich.

Jeżeli jednak wyniki i ich interpretacja są prawdziwe, to żyjemy w wiecznie rozszerzającym się Wszechświecie, w którym pusta przestrzeń ma niezerową gęstość energii.

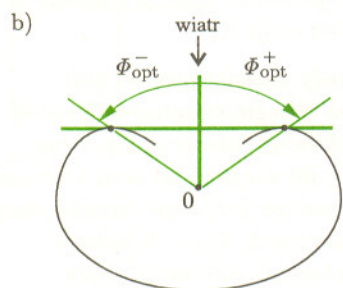
Piotr ZALEWSKI

- [1] A. Goobar, S. Perlmutter, *Astrophys. J.* **450** (1995) 14.
- [2] S. Perlmutter i inni, *Nature* **391** (1998) 51.
- [3] P. Garnavich i inni, *Astrophys. J.* w druku.
- [4] J. Glanz, *Science* **279** (1998) 1298.
- [5] P. Cieśliński, *Gazeta Wyborcza* 27/02/1998 str. 14.
- [6] D. Branch, *Nature* **391** (1998) 23.

Matematyczna teoria sterowania zajmuje się badaniem własności układów sterowania oraz rozwiązywaniem problemów sterowania dla różnych klas takich układów.



Skończenie wymiarowy układ sterowania jest opisywany przez *przestrzeń stanu* tego układu oraz przez zbiór dopuszczalnych prędkości układu. Zmieniający się w czasie *stan układu*, z , interpretowany jako uogólnienie „położenia układu”, to element przestrzeni stanu Z (przestrzeni położeń układu). Zależy on od (zmiennej w czasie) prędkości, która z kolei zależy od drugiej, również zmiennej w czasie wielkości zwanej *sterowaniem*. Przestrzeń stanu musi być tak dobrana, by stanowiła pełną pamięć układu. Znaczy to, że przy danym stanie początkowym $z(t_0)$ oraz danym sterowaniu jako funkcji czasu $t \in [t_0, t_1]$ stan układu $z(t)$ jest wyznaczony jednoznacznie na całym odcinku $[t_0, t_1]$.



Rozważmy prosty przykład. Załóżmy, że obserwujemy z dużej wysokości (np. z samolotu) jezioro, po którym pływa żaglówka. Jeśli wiatr ma stały kierunek i siłę, a doświadczony żeglarz dobiera położenie żagli i steru optymalnie do kierunku płynięcia i kierunku wiatru, to zachowanie żaglówki charakteryzuje wykres jej prędkości w zależności od jej kierunku do wiatru. Przykładowy wykres jest pokazany na rysunku 1. Stanem naszego układu jest punkt na powierzchni jeziora, opisany dwiema współrzędnymi kartezjańskimi, a przestrzenią stanu powierzchnia jeziora. Sterowaniem jest kąt między osią łodzi i kierunkiem wiatru. Wreszcie, sam układ sterowania jest charakteryzowany przez zbiór prędkości, dokładniej, przez zależność prędkości od sterowania, tj. od kąta do wiatru.

Oznaczmy przez x i y współrzędne kartezjańskie łódki, a przez $v(\Phi)$ oraz $w(\Phi)$ – współrzędne jej prędkości przy kącie do wiatru Φ . Ruch łódki możemy zapisać (jako układ sterowania) w postaci równań

$$\frac{dx}{dt} = v(\Phi), \quad \frac{dy}{dt} = w(\Phi),$$

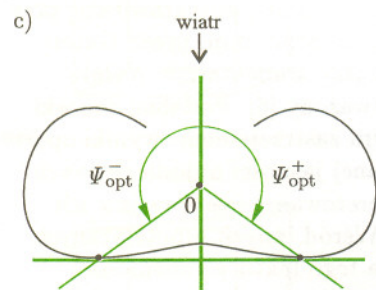
gdzie $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$ oznaczają prędkości zmian odpowiednio x i y (matematycznie są to pochodne funkcji $x(t)$ oraz $y(t)$, jednak dla analizy układu nie będzie to istotne), a funkcje $v(\Phi)$ oraz $w(\Phi)$ są dane za pomocą wykresu (rys. 1).

Najprostszym problemem sterowania jest *problem sterowalności*: pytamy, czy układ można przeprowadzić z punktu z_0 do punktu z_1 za pomocą pewnego sterowania. Jeśli odpowiedź jest twierdząca dla dowolnych punktów z_0 i z_1 przestrzeni stanu Z , to mówimy, że układ jest sterowalny.

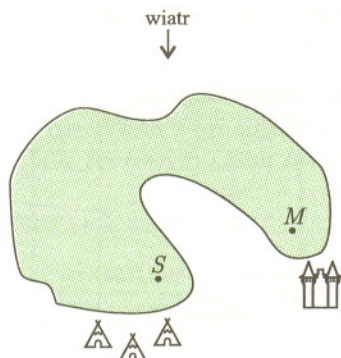
Czy układ opisujący żaglówkę jest sterowalny? Czytelnik odpowie zapewne: *tak*. Oczywiście, kiedy kierunek od punktu z_0 do punktu z_1 nie leży w martwym kącie, można wybrać jako sterowanie stały kąt, odpowiadający kierunkowi od z_0 do z_1 . Gdy kierunek od punktu z_0 do punktu z_1 leży w martwym kącie, należy zmieniać kierunek łódki tak, by na przemian mieć wiatr z prawej lub z lewej (rys. 1b). W języku żeglarskim nazywamy to *halsowaniem*. W ten sposób możemy dotrzeć z punktu z_0 do punktu z_1 leżącego w stosunku do z_0 dokładnie „pod wiatr”, a także omijać przeszkody.

Drugim często stawianym problemem jest *problem optymalnego sterowania*. Polega on np. na znalezieniu sterowania, które przeprowadzi nasz układ z punktu z_0 do punktu z_1 , minimalizując przy tym jakąś ważną dla nas wielkość, np. energię, koszt lub czas.

W regatach żeglarskich wielkością minimalizowaną jest czas dotarcia do mety. Możemy więc sformułować *problem optymalno-czasowy* dla naszej żaglówki tak. Zakładamy, że dany jest akwen, czyli przestrzeń stanu Z , siła i kierunek wiatru oraz żaglówka (którą opisuje zależność prędkości od kąta do wiatru).



Rys. 1. a), b) żaglówka, c) bojer.



Rys. 2

Dla danych punktów z_0 i z_1 w Z szukamy optymalnego sterowania (tzn. kąta żagłówki w stosunku do wiatru jako funkcji czasu), które przeprowadzi łódkę z położenia z_0 do z_1 .

Proponujemy Czytelnikowi rozwiązanie dwu elementarnych zadań dla uczestników regat żeglarskich.

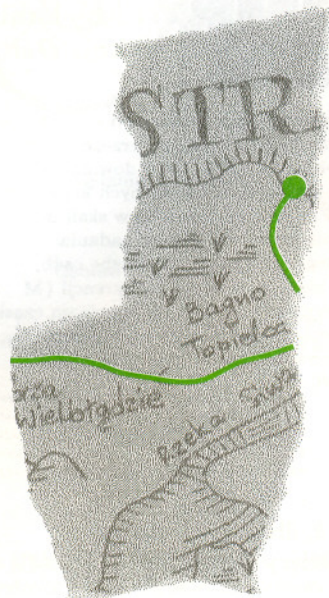
Zadanie 1. Oznaczmy przez Φ_{opt}^+ oraz Φ_{opt}^- kąty, przy których rzut prędkości łódki na kierunek „prosto pod wiatr” jest maksymalny (rys. 1b). Pokaż, że jeśli meta (punkt z_1) leży w martwym kącie, gdy patrzymy z punktu startu z_0 , to dowolne sterowanie, które stosuje naprzemiennie kąty Φ_{opt}^+ oraz Φ_{opt}^- i przeprowadza łódkę z położenia z_0 w z_1 , przeprowadza ją w minimalnym czasie, niezależnym od wybranej drogi.

Zadanie 2. Znajdź sterowanie minimalno-czasowe przeprowadzające łódkę z punktu startu S do mety M na akwenu przedstawionym na rysunku 2.

Czytelnik, który kiedykolwiek obserwował regaty bojerowe, zauważył zapewne ze zdziwieniem, że bojery halsują również wtedy, gdy poruszają się z wiatrem. Wynika to z tego, że charakterystyka prędkości bojera w zależności od kąta do wiatru ma zakłębienie do wewnątrz również w kierunku „z wiatrem”, jak na rysunku 1c. Sternik bojera maksymalizuje więc rzut prędkości na kierunek „dokładnie z wiatrem”, wybierając jeden z kierunków Ψ_{opt}^+ oraz Ψ_{opt}^- .

Z analizy tych przykładów możemy wysnuć ogólny wniosek. Zjawisko halsowania, tzn. kolejnej zmiany kierunków prędkości między skończoną ich liczbą (równą 2 w przestrzeni o wymiarze 2) występuje wtedy, gdy zbiór prędkości nie jest wypukły.

W następnym artykule opiszemy model matematyczny i niektóre problemy sterowania dla samochodu z przyczepkami.



Artykuły o samochodzie z przyczepkami szukajcie w *Delcie* 7/1998.



Zadania

Redaguje *Lukasz WIECHECKI*

M 844. Na każdej z $n > 2$ planet jest astronom, który obserwuje najbliższą planetę. Zakładając, że n jest liczbą nieparzystą, a odległości między planetami są parami różne, dowieść, że istnieje planeta nieobserwowana.
Rozwiązanie na str. 5

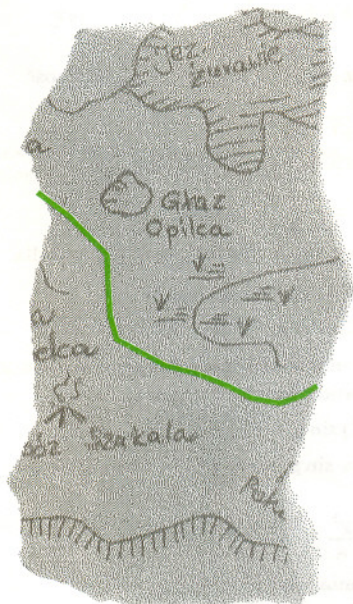
M 845. Dowieść, że spośród n -kątów opisanych na danym kole, n -kąt foremny ma najmniejsze pole.
Rozwiązanie na str. 6

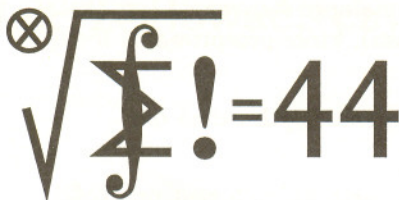
M 846 (Problem Fagnano). Dany jest trójkąt ostrokątny SLD . Wśród takich trójkątów ROP , że $R \in SL$, $O \in LD$, $P \in DS$ znaleźć trójkąt o minimalnym obwodzie.
Rozwiązanie na str. 4

Przygotował *Stanisław BAŻAŃSKI*

F 475. Źródło światła znajduje się w punkcie Z o współrzędnych $(0, a)$, przy czym wymiar przestrzeni w kierunku prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez promień padający i załamany został zaniedbany. Posługując się warunkiem koniecznym wynikającym z zasady Fermata, że w przybliżeniu optyki geometrycznej promień światła rozchodzi się po drodze o najkrótszym czasie przebiegu, określić, w jakim kierunku należy wysłać światło, żeby dotarło do punktu E ekranu o współrzędnych $(d, -b)$, zakładając, iż w ośrodku w półpłaszczyźnie $y > 0$ światło rozchodzi się z prędkością v_1 , a dla $y < 0$ prędkość ta jest równa v_2 . Wyprowadzić stąd prawo Snelliusa.
Rozwiązanie na str. 4

F 476. W sytuacji opisanej w zadaniu **F 475** wykazać, stosując rozumowanie geometryczne, że czas przebiegu światła od Z do E wzdłuż drogi rzeczywistej, spełniającej prawo Snelliusa, jest mniejszy niż wzdłuż dowolnej innej hipotetycznej drogi łączącej te punkty, składającej się z dwóch odcinków ze wspólnym punktem na granicy ośrodków.
Rozwiązanie na str. 3





Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1998

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 345 ($WT=1,46$) i 346 ($WT=3,07$)
z numeru 9/1997

Tomasz Rawlik	- Braunschweig	47,24
Maciej Mostowski	- Warszawa	38,72
Witold Bednarek	- Łódź	31,89
Bogumila Piotrowska	- Zielona Góra	30,88

Pan Rawlik (z Gliwic) już jedenaście lat temu został Weteranem **Klubu 44 M**; rok później rozstał się z nami, ale nie na zawsze – parę miesięcy temu odezwał się z odległego o tysiąc kilometrów Brunszwiku i włączył ponownie do Ligi, aby oto po raz czwarty zgromadzić magiczne 44 punkty.

Zadania z matematyki nr 361, 362

Redaguje Marcin E. KUCZMA

361. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie k , dla których istnieje wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełniający warunki: $P(0) \neq P(1)$, $0 \leq P(j) \leq k$ dla $j = 0, 1, \dots, k + 1$.

362. Cztery różne okręgi $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ o jednakowym promieniu r przechodzą przez wspólny punkt S i przecinają się kolejno parami:

$$\omega_i \cap \omega_{i+1} = \{S, P_i\} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 4 \quad (\omega_5 = \omega_1);$$

przy tym punkty P_1, P_2, P_3, P_4 leżą na okręgu Ω o promieniu R , a środek okręgu Ω leży w odległości d od punktu S . Znaleźć związek (równanie algebraiczne) między liczbami r, R, d . Czy każda trójka liczb dodatnich spełniająca ów związek jest wyznaczona przez pewną czwórkę okręgów $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$?

Zadanie 362 zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1998

Przypominamy treść zadań:

353. Dowieść, że każdą liczbę całkowitą dodatnią da się przedstawić w postaci sumy pewnej liczby składników całkowitych dodatnich nie mających dzielników pierwszych różnych od 2 i 3, przy czym żaden z tych składników nie dzieli się przez żaden inny składnik.

354. Udowodnić nierówność

$$\operatorname{tg}(\sin \theta) < \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta} \quad \text{dla } \theta \in (0, \pi).$$

354. Oznaczając $\sin \theta$ przez x mamy udowodnić nierówność

$$\operatorname{tg} x < \frac{2x}{2 - x^2} \quad \text{dla } x \in (0, 1);$$

jest ona równoważna nierówności $f(x) < 1$, gdzie

$$f(x) = \frac{2 - x^2}{2x} \operatorname{tg} x.$$

Ponieważ $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$, wystarczy dowieść, że $f'(x) < 0$ dla $x \in (0, 1)$; to zaś sprowadza się do wykazania, że

$$(2 + x^2) \sin x \cos x > 2x - x^3$$

(pomijamy szczegóły obliczenia pochodnej). Przyjmijmy $y = 2x$; ostatnia nierówność jest równoważna następującej:

$$(8 + y^2) \sin y > 8y - y^3.$$

Wobec znanego oszacowania $\sin y > y - y^3/6$ (dla $y > 0$) pozostaje sprawdzić, że

$$y - \frac{y^3}{6} > \frac{8y - y^3}{8 + y^2}.$$

Ta prosta nierówność wielomianowa przybiera po przekształceniu postać $y^3(4 - y^2) > 0$ i jest spełniona (w szczególności) dla $y \in (0, 2)$. Zatem $f'(x) < 0$ dla $x \in (0, 1)$, i dowód jest zakończony.

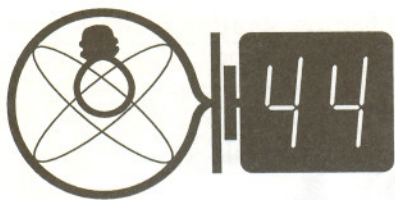
353. Stosujemy indukcję. Liczba 1 ma omawianą własność. Ustalmy $n \geq 2$ i założmy, że każda dodatnia liczba całkowita mniejsza od n ma przedstawienie, o jakim mowa. Należy dowieść, że również liczba n ma takie przedstawienie.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, to wystarczy pomnożyć przez 2 każdy składnik przedstawienia liczby $n/2$. Jeżeli n jest całkowitą potęgą trójki, to nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy więc, że n jest liczbą nieparzystą, spełniającą dla pewnej liczby całkowitej $j \geq 1$ nierówność $3^j < n < 3^{j+1}$.

Liczba $k = (n - 3^j)/2$ jest mniejsza od n , więc w myśl przesłanki indukcyjnej $k = \sum 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i}$ (dla pewnego układu wykładników $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m \geq 0$), przy czym żaden składnik tej sumy nie dzieli się przez żaden inny składnik. Zauważmy, że $\beta_i < j$ dla $i = 1, \dots, m$; gdyby bowiem dla pewnego i zachodziła nierówność $\beta_i \geq j$, znaczyłyby to, że $k \geq 3^j$, a więc $n = 3^j + 2k \geq 3^{j+1}$, wbrew określeniu wykładnika j . Zatem wzór

$$n = 3^j + \sum 2^{\alpha_i+1} 3^{\beta_i}$$

daje żądane przedstawienie liczby n ; teza zadania wynika na podstawie zasady indukcji.



Zadania z fizyki nr 258, 259

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 VII 1998

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 246 ($WT=1,25$) i 247 ($WT=2,85$)
z numeru 11/1997

Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	42,92
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	27,46
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	18,68
Tomasz Wietecha	- Tarnów	10,76
Aleksander Surma	- Myszków	10,55

258. Jednym ze „ślepych zaułków” w rozwoju motoryzacji były projekty samochodu trójkołowego. Obliczyć maksymalną prędkość v' , z jaką taki samochód mógłby na poziomej jezdni wykonać zakręt bez przewrócenia się, jeśli maksymalna prędkość samochodu czterokołowego na tym zakręcie wynosi $v = 60$ km/h. Trójkołowiec ma dwa koła w przedniej osi odległe od siebie o d i jedno koło tylne odległe od środka przedniej osi o l , przy czym tę samą wartość d ma odległość między kołami w osi samochodu czterokołowego. Środek masy obu samochodów leży na tej samej wysokości h nad jezdnią, a nacisk na każde z kół jest jednakowy (w samochodzie stojącym). Pominąć efekty związane z przyspieszaniem lub hamowaniem, a także ze zmianą promienia skrętu (rozpatrujemy ruch jednostajny po okręgu); ponadto przyjąć, że promień skrętu jest znacznie większy od rozmiarów samochodu.

259. Czy można z trzech jednakowych soczewek skupiających skonstruować lunetę powiększającą trzykrotnie i dającą obraz: a) prosty, b) odwrócony? Jeśli tak, to jakie powinny być odległości między kolejnymi soczewkami?

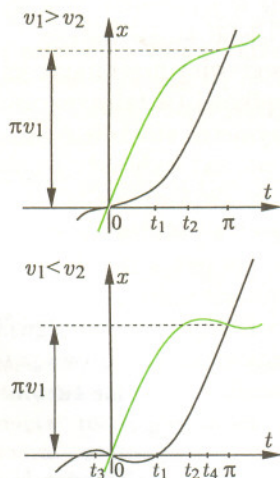
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1998

Przypominamy treść zadań:

250. Długopis pozostawia ślad na podłożu wtedy, gdy kąt jego odchylenia od prostopadłej do podłoża nie przekracza wartości α . Jeśli początkowy kierunek długopisu jest zmienną przypadkową, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wirujący długopis spadając na stół pozostawi na nim ślad? Uwzględniamy tylko pierwsze uderzenie o stół. Środek masy długopisu leży w połowie jego długości i porusza się pionowo z prędkością v_1 (przyspieszenie grawitacyjne należy pominąć), a prędkość obiegowa końca długopisu

wokół środka jest równa v_2 , przy czym płaszczyzna tego ruchu jest pionowa. Liczbową wartość prawdopodobieństwa podać dla $v_1 = 2$ m/s, $v_2 = 3$ m/s i trzech wartości α : 40° , 60° , 85° .

251. W miejscowości A występuje w danej chwili całkowite zaćmienie Słońca, miejscowość B leży na granicy obszaru zaćmienia częściowego, a miejscowość C leży w połowie odległości między A i B . Ile wynosi w przybliżeniu stosunek natężeń oświetlenia powierzchni Ziemi I_C/I_B ?



Rys. 1. Wykres funkcji $x_p(t)$ oznaczono kolorem, a funkcji $x_n(t)$ - czernią.

250. Zależność pionowej współrzędnej położenia jednego z końców długopisu (np. piszącego) od czasu wyraża się wzorem $x_p(t) = v_1 t + (v_2/\omega) \sin(\omega t)$, gdzie osi x nadano zwrot w dół, a ω jest prędkością kątową, którą dalej przyjmijemy równą jedności (odpowiada to nieistotnej zmianie skali czasu i położenia). Dla drugiego (niepiszącego) końca plus we wzorze należy zastąpić minusem, tzn. $x_n(t) = v_1 t - v_2 \sin t$. Na rysunku 1 wykresy obu funkcji przedstawiono w dwóch wariantach: $v_1 > v_2$ i $v_1 < v_2$, przy czym $t = 0$ odpowiada chwili, w której długopis jest równoległy do stołu, a $t_1 = (\pi/2) - \alpha$ i $t_2 = (\pi/2) + \alpha$ ograniczają zakres położenia, w których uderzenie pozostawi ślad. Moment uderzenia o stół wyznaczamy jako chwilę, w której którakolwiek z funkcji x_p i x_n przekroczy pewną wartość X , a ponieważ przypadkowy kąt początkowy jest równoważny przypadkowemu wyborowi X , więc szukane prawdopodobieństwo p jest równe stosunkowi długości odcinka na osi pionowej, wewnątrz którego uderzenie następuje pod właściwym kątem, do odcinka $2\pi v_1$ odpowiadającego jednemu obrotowi długopisu. Stąd w przypadku $v_1 > v_2$ rozwiązaniem jest

$$(*) \quad p = (x_p(t_2) - x_p(t_1))/2\pi v_1 = \alpha/\pi.$$

W przypadku $v_1 < v_2$ musimy rozpatrzyć także lokalne maksima w chwilach t_3 i t_4 . Obliczamy

$$\cos t_3 = v_1/v_2, \quad t_3 = -\arccos(v_1/v_2),$$

$$x_n(t_3) = -v_1 \arccos(v_1/v_2) + \sqrt{v_2^2 - v_1^2},$$

$$t_4 = \pi + t_3 = (\pi/2) + \arcsin(v_1/v_2),$$

$$x_p(t_4) = x_n(t_3) + \pi v_1 = v_1 \arcsin(v_1/v_2) + \sqrt{v_2^2 - v_1^2} + \pi v_1/2.$$

Rozwiązanie opisane wzorem (*) pozostanie słuszne pod warunkiem, że $x_p(t_1) > x_n(t_3)$ oraz $t_4 > t_2$, co oznacza, że długopis uderzy w stół pod zbyt dużym kątem i nie zostawi śladu zarówno wtedy, gdy uderzy bardzo mocno (wcześniej niepiszący koniec prawie dotknie stołu), jak i wtedy gdy uderzy bardzo słabo. Tak jest w przypadku $\alpha = 40^\circ$, zatem wtedy $p = 40/180 = 0,222$. Gdy $\alpha = 60^\circ$, spełniony jest pierwszy z podanych warunków, ale nie drugi - wtedy prawdopodobieństwo dane jest wzorem

$$p = (x_p(t_4) - x_p(t_1))/2\pi v_1,$$

a wartością liczbową jest $p = 0,341$. Dla kąta $\alpha = 85^\circ$ żaden z warunków nie jest spełniony, czyli $p = 0,5$ (każde uderzenie piszącym końcem pozostawia ślad).

251. Przyjmijmy następujące uproszczenia (z których żadne nie wprowadza do wyniku błędów przekraczających kilku procent): średnica tarczy Słońca jest równa średnicy tarczy Księżyca, tzn. całkowite zaćmienie występuje tylko w jednym punkcie; pomijamy zakrzywienie powierzchni Ziemi na drodze ACB ; jasność powierzchniową tarczy słonecznej uważamy za stałą. Przy tych założeniach obserwator w C stwierdzi, że zasłaniająca Słońce tarcza Księżyca jest przesunięta względem tarczy Słońca o promień obu okręgów, a pole części niezasłoniętej (rys. 2) wynosi $r^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. Stąd $I_C/I_B \approx \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,61$.



Rys. 2

Gwiazdy kończą swoje życie w sposób mniej lub bardziej gwałtowny. Jeżeli masa gwiazdy jest zbliżona lub niewiele większa od słonecznej, to pod koniec stadium czerwonego olbrzyma gwiazda dość łagodnie odrzuca warstwy zewnętrzne, które przez pewien czas tworzą wokół niej tzw. mgławicę planetarną. Taka młoda mgławica jest najczęściej symetryczna, a w jej środku znajduje się mała, gorąca gwiazda, czyli dawny czerwony olbrzym.

Jednak w trakcie rozprężania się mgławica planetarna napotyka opór materii międzygwiazdowej, ulega więc zniekształceniu przy spotkaniach z obłokami materii, a ponadto jej średnia prędkość musi zrównać się z prędkością otaczającego ją ośrodka międzygwiazdowego – jeżeli jej macierzysta gwiazda poruszała się inaczej. Sama gwiazda, jako obiekt zwarty, nie doznaje praktycznie żadnego oporu i ciągle porusza się z dawną prędkością. Dlatego w starych mgławicach planetarnych gwiazdy centralnej często już nie ma.

To samo dotyczy mgławic powstałych w wyniku eksplozji gwiazd masywniejszych, czyli w wyniku wybuchu supernowych. Obecnie już wiadomo, że wybuch supernowej to nie jest po prostu gwałtowne odrzucenie otoczki. Przede wszystkim wybuch ten może nastąpić bardzo niesymetrycznie, co nietrudno sobie wyobrazić pamiętając, że przed wybuchem gwiazda ma jakąś prędkość obrotową, pole magnetyczne, może też być składnikiem układu podwójnego itd. W tej sytuacji dziwne by nawet było, gdyby zapadała się, a następnie eksplodowała całkiem symetrycznie. Jednak w trakcie wybuchu zachodzą z pewnością jeszcze inne, nie poznane dotychczas procesy, a dowodem tego jest bardzo skomplikowany obraz rentgenowski mgławicy otaczającej pulsara w Żaglach (Vela pulsar). Pulsar ten jest odległy o około 500 pc i powstał w wyniku eksplozji supernowej około 15 000 lat temu. Sama mgławica jest akurat dość symetryczna, ale pulsar leży wyraźnie nie w jej środku. Wokół mgławicy obserwatorzy dopatrzyli się kilku tzw. pocisków, stożkowatego kształtu zgęszczeń gazu, które wyleciały z wnętrza mgławicy przebijając jej powierzchnię. Ich kształt dowodzi naddźwiękowej prędkości (w tamtym ośrodku) i umożliwia nawet oszacowanie tej prędkości, a osie symetrii stożków dość zgodnie celują prawie w pulsara. Wygląda to, jakby pociski wyleciały z pulsara już po powstaniu samej mgławicy, a więc że aktywność gwiazdy nie kończy się wraz z wybuchem. Sprawę komplikuje dżet wybiegający z pulsara. Odkrywcy dżetu twierdzą, że energia potrzebna do jego utrzymania jest w przybliżeniu równa energii traconej przy zmniejszaniu się tempa rotacji pulsara. Mógłby więc tam działać jakiś niezwykle mechanizm zamieniający energię obrotową gwiazdy w energię dżetu, co czyniłoby z tego pulsara kosmiczny silnik odrzutowy, i to – jak pół żartem pół serio twierdzą obserwatorzy – silnik konkretnie turbinowy, w nim bowiem ruch obrotowy turbiny daje ukierunkowany ciąg.

Tomasz KWAST

Maj

Po zmroku wysoko na niebie zobaczymy Wielką Niedźwiedzicę, a przedłużając łuk utworzony przez cztery gwiazdy jej ogona trafiamy najpierw na Arktura (α Wolarza) i dalej na Spikę (α Panny), leżącą ponadto bardzo blisko ekliptyki. Gwiazdozbiór Panny jest ciekawy z kilku względów. Przede wszystkim znajduje się tam bogata (kilka tysięcy członków) i rozległa (30 Mpc) gromada galaktyk. Co więcej, jej odległość, a dokładniej – odległość jej centralnej części, jest mniejsza niż jej rozmiary, a więc nasza Galaktyka należy do gromady w Pannie. Największą i najmasywniejszą jest galaktyka M 87, olbrzymia galaktyka eliptyczna, ponadto aktywna. Można ją próbować dostrzec przez niewielki teleskop

– jej jasność wynosi 9,2 mag. W Pannie leży też (koło γ Panny) najbliższy kwazar 3C273 odkryty w 1963 r. Jego jasność wynosi około 13 mag, a więc w zasadzie można go próbować odszukać za pomocą większego amatorskiego teleskopu.

Pełnia Księżyca w maju wypada 11. Księżyc zbliży się mocno do Jowisza 20 V (zakryje go nawet, ale zakrycia z Polski nie będzie widać). Jowisz w maju znajduje się na granicy Wodnika i Ryb, Saturn na granicy Ryb i Barana, Wenus w Rybach – te trzy planety widać więc w drugiej połowie nocy, praktycznie nad ranem. Mars jest w Byku, a więc zbyt blisko Słońca i nie widać go.

T.K.

CYFROMANIA (5)

Wykorzystując zdobyte doświadczenie spróbujmy odpowiedzieć na pytanie: Jakie końcówki mogą mieć potęgi niektórych liczb większych od 3? Czego ciekawego można sobie od nich zażyczyć?

Potęgi czwórki.

Potęgi czwórki są to potęgi dwójki, które... chwila zastanowienia... dają resztę z dzielenia przez 5 równą 1 lub 4. Stąd od razu dostajemy charakteryzację:

WNIOSEK: Liczba $1 < r < 10^k$ może być k -cyfrową końcówką potęgi czwórki (o wykładniku nie mniejszym niż $\frac{k}{2}$) wtedy i tylko wtedy, gdy r dzieli się przez 2^k oraz daje resztę 1 lub 4 przy dzieleniu przez 5.

Potęgi piątki.

Reszta z dzielenia 5^n przez 5^k jest równa zero, jeśli tylko $n \geq k$. Ciekawą rzeczą jest więc zbadanie przy ustalonym k ciągu reszt z dzielenia 5^n przez 2^k . Okresy O_k takich ciągów reszt wynoszą: $O_1 = O_2 = 1$ oraz $O_k = 2^{k-2}$ dla $k \geq 3$. Zatem potęgi piątki o dużym wykładniku dopuszczają:

1 końcówkę 1-cyfrową (jest to 5);

1 końcówkę 2-cyfrową (jest to 25);

2 końcówki 3-cyfrowe (są to 125 i 625);

4 końcówki 4-cyfrowe (są to 3125, 8125, 0625 i 5625).

W każdym następnym przypadku mamy 2 razy więcej możliwych końcówek. Końcówka k -cyfrowa ($k \geq 2$) „pamięta” resztę z dzielenia $(k+1)$ -szej cyfry przez 5 od końca – można ją więc uzupełnić do końcówki $(k+1)$ -cyfrowej na 2 sposoby.

Końcówka k -cyfrowa musi dawać przy dzieleniu przez 2^k jedną z 2^{k-2} dopuszczalnych reszt. Możliwych reszt nieparzystych jest 2^{k-1} , a zatem dobra jest (średnio) co druga. Chwila zastanowienia pozwala scharakteryzować te, które są dopuszczalne, dając:

WNIOSEK: Liczba $1 < r < 10^k$ może być k -cyfrową końcówką potęgi piątki o dużym wykładniku wtedy i tylko wtedy, gdy r dzieli się przez 5^k oraz daje resztę 1 przy dzieleniu przez 4.

Potęgi szóstki.

Duże potęgi szóstki dzielą się przez 2^k . Przy dzieleniu przez 5^1 dają resztę 1. Zatem okres O_k ciągu reszt z dzielenia 6^n przez 5^k wynosi 5^{k-1} .

WNIOSEK: Liczba $1 < r < 10^k$ może być k -cyfrową końcówką potęgi szóstki o dużym wykładniku wtedy i tylko wtedy, gdy r dzieli się przez 2^k oraz ma ostatnią cyfrę 6.

Tak więc idąc od końca mamy w potędze szóstki: cyfrę 6, cyfrę nieparzystą i dalej na k -tym miejscu cyfrę, której parzystość jest wyznaczona przez końcówkę $(k-1)$ -cyfrową.

Potęgi siódemki.

Dzielenie 7^n przez 2^k daje reszty tworzące ciąg okresowy o okresie O_k danym wzorami:

$$O_1 = 1,$$

$$O_2 = O_3 = O_4 = 2,$$

$$O_k = 2^{k-3} \quad \text{dla } k \geq 5.$$

Okres P_k ciągu reszt z dzielenia 7^n przez 5^k wynosi

$$P_1 = P_2 = 4,$$

$$P_k = 4 \cdot 5^{k-2} \quad \text{dla } k \geq 3.$$

Długość okresu ciągu reszt z dzielenia 7^n przez 10^k , a tym samym ilość dopuszczalnych końcówek k -cyfrowych, wynosi $R_k = NWW(O_k, P_k)$ i jest dana wzorami:

$$R_1 = R_2 = 4,$$

$$R_3 = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$R_4 = 4 \cdot 5^2 = 100,$$

$$R_5 = 4 \cdot 5^3 = 500 \quad (\text{są to końcówki podzielne przez } 800 \text{ z resztą } 1, 7, 49 \text{ lub } 343),$$

$$R_6 = 8 \cdot 5^4 = 5000$$

i ogólnie $R_k = 2^{k-3} \cdot 5^{k-2} = 5 \cdot 10^{k-3}$ dla $k \geq 6$.

Widzimy, że $R_k = 10 \cdot R_{k-1}$ dla $k \geq 6$. Oznacza to, że jeżeli r_5 jest dopuszczalną końcówką 5-cyfrową, to $r_6 = 10^5 c + R_5$ jest dopuszczalną końcówką 6-cyfrową dla $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, czyli szóstą cyfrę od końca możemy wybierać dowolnie. To samo dotyczy k -tej ($k \geq 6$) cyfry od końca.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (2'')

Wyjaśnienie oszustwa (2') – tym razem poprawne:

$\sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{2} - 1$, skąd $w = \sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2} = -1$, a więc w jest liczbą wymierną!

Oszustwo polegało na dzieleniu przez $w + 1 = 0$.

JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (4)

ZADANIE: Na sferze o promieniu 10 opisano czworościan o polu powierzchni 1200. Obliczyć objętość tego czworościanu.

Rozwiązanie: Wielościan o polu powierzchni P opisany na sferze o promieniu R ma objętość $V = \frac{P \cdot R}{3}$, co w naszym przypadku jest równe 4000.

JWR

Korespondencję do Γ -limatiasu prosimy kierować pod adresem:

Jarosław Wróblewski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Plac Grunwaldzki 2/4, 50-384 WROCLAW; e-mail: jwr@math.uni.wroc.pl