



## SPIS TREŚCI

### NUMERU 4(287)

Automaty komórkowe

*Anna Ludwicka*

Zadania

Satysfakcja Lakatosa

*Jan Baranowski*

O parzystokątach wpisanych i opisanych na okręgach

*Grzegorz Kapustka,*

*Michał Kapustka*

Mała Delta

Słów kilka

na temat narciarstwa

*Krzysztof Rejmer*

Aktualności

(nie tylko) fizyczne

Uogólnienia zadania

Steinhaus'a o liczbie 145

*Józef Kwiatkowski,*

*Andrzej Nowicki*

Klub 44

Patrz w niebo

Kwiecień

Gammalimathias

**W następnym numerze:**

Zasada najmniejszego działania

Okładki i ilustracje wykonała

*Anna Ludwicka*

Wybór artykułów z *Delta*

ukazuje się w języku angielskim

w sieci Internet pod adresem

<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

str. 1

str. 3

str. 4

str. 6

str. 9

str.10

str.11

str.12

str.14

str.16

str.16

str.17

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula

Bogdan Cichocki

– wiceprzewodniczący

Krzysztof Ciesielski

Jan A. Gaj

Piotr Goldstein

Tomasz Hofmkl

Andrzej Hrynkiwicz

Wiesław A. Kamiński

Marta Kicińska-Habior

Krzysztof Maślanka

Andrzej Mąkowski

Zdzisław Pogoda

Feliks Przytycki

Michał Różyczka

Konrad Rudnicki

Zbigniew Semadeni

Grzegorz Sitariski

Andrzej Woszczyk

Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol

Krzysztof Biesaga

Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.

Krystyna Kordos – sekr. red.

Marek Kordos – red. nac.

Tomasz Kwast

Anna Ludwicka

Anna Rudnik

Paweł Strzelecki

Joanna Udalska

Anna Wojtyra

Piotr Zalewski

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa

tel. 843-02-41(-2) wewn. 21

PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano

w Drukarni Naukowo-Technicznej

w Warszawie, ul. Mińska 65.

Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.

#### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące. Cena jednego numeru w 1998 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres co najmniej trzech miesięcy) cena numeru w 1998 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111

#### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 1998 r. wynosi 7 zł 50 gr.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaką”.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.

5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę
5 XII	20 XI
5 III	20 II
5 VI	20 V
5 IX	20 VIII

na I kwartał roku następnego,
na II kwartał,
na III kwartał,
na IV kwartał.

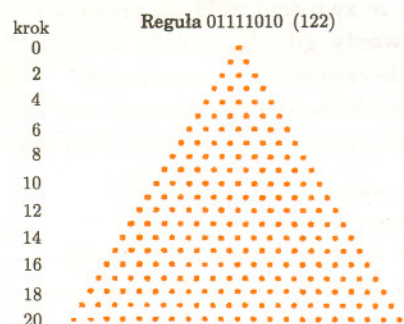
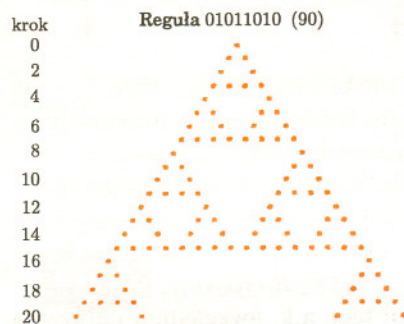
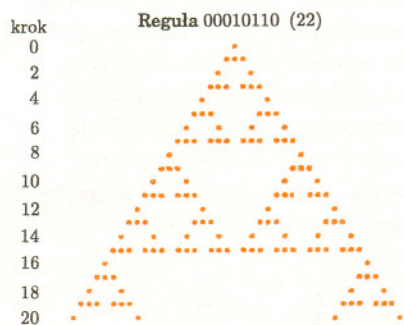
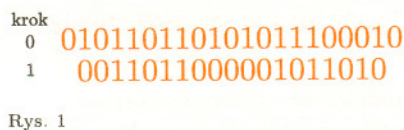
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17, wewn. 2366.

Numerzy archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie. Niestety, nie dysponujemy już numerami z lat 1974–1984.



Automaty komórkowe (nie mylić z telefonami komórkowymi) są matematycznym sposobem opisu zjawisk fizycznych, biologicznych, czy społecznych, w których czas i przestrzeń traktowane są w sposób dyskretny, a elementy przestrzeni wykazują lokalne zależności. Pojęcie to zostało wprowadzone przez von Neumanna i Ulama w 1963 r. Automat komórkowy (a.k.) składa się z komórek, które mogą być przedstawiane jako węzły regularnej siatki, skończonej lub nie. Komórki (węzły siatki) przyjmują wartości ze skończonego zbioru. W skład automatu wchodzi także tzw. *reguła ewolucji* zadana lokalnie, która określa stan danej komórki w zależności od jej stanu, jak i stanów komórek sąsiednich, w poprzednim kroku ewolucji. Przy określaniu ewolucji mogą być uwzględniane także dalej położone komórki, nie tylko te, które bezpośrednio przylegają do danej.



Rys. 2

Najprostsze automaty komórkowe są jednowymiarowe z dwiema możliwymi wartościami: 0 albo 1, a sąsiedztwa są trójelementowe: dana komórka i dwie sąsiednie, po prawej i lewej stronie. Konfiguracją początkową jest w tym przypadku rozkład wartości w komórkach położonych wzdłuż prostej. Reguły ewolucji komórek definiują zmianę wartości komórki  $i$  w kroku czasowym  $t$  (oznacmy ją przez  $w(i, t)$ ) w zależności od wartości komórek  $i, i - 1$  oraz  $i + 1$  w kroku poprzednim ( $t - 1$ ):

$$w(i - 1, t - 1), w(i, t - 1), w(i + 1, t - 1)$$



$$w(i, t)$$

Przykładową regułą jednowymiarowego automatu komórkowego jest:

111	110	101	100	011	010	001	000
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	1	0	1	1	0	1	0

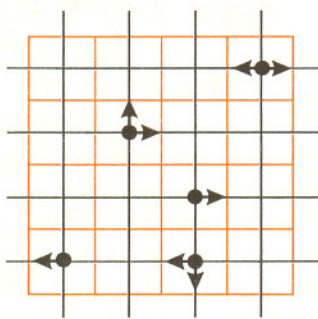
Nazywa się ją *regułą 01011010* zgodnie z tym, co występuje w dolnym wierszu. Lokalne reguły tego typu automatów są opisane ośmiocyfrową liczbą binarną. Jak łatwo można zauważyć, takich różnych reguł jest  $2^8 = 256$ . Ale w rzeczywistości nie wszystkie są sensowne, ponieważ muszą być na nie nałożone pewne dodatkowe warunki. Pierwszy warunek powiada, że reguła jest *nielegalna*, gdy na ostatnim miejscu jest 1. Drugi, że reguły muszą być symetryczne, tzn. 100 i 001 dają tę samą wartość. To uściślenie zostawia tylko 32 *legalne* reguły automatów komórkowych. Rysunek 1 pokazuje ewolucję pewnego stanu a.k., czyli zmianę wartości komórek po jednym kroku czasowym, zgodnie z wyżej wymienioną regułą. Przykładowe ewolucje jednowymiarowych a.k., z konfiguracją początkową:  $\dots 0, 0, 1, 0, 0 \dots$ , pokazane są na rysunku 2.

Ciekawszymi automatami jednowymiarowymi są takie, w których wartości w stanie początkowym przyjmujemy z pewnym prawdopodobieństwem. Rysunek 3 pokazuje przykładową ewolucję a.k. z wartościami początkowymi przyjmowanymi z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  i z cyklicznym warunkiem brzegowym (tzn. lewym sąsiadem komórki pierwszej jest ostatnia komórka po prawej stronie).



Rys. 3

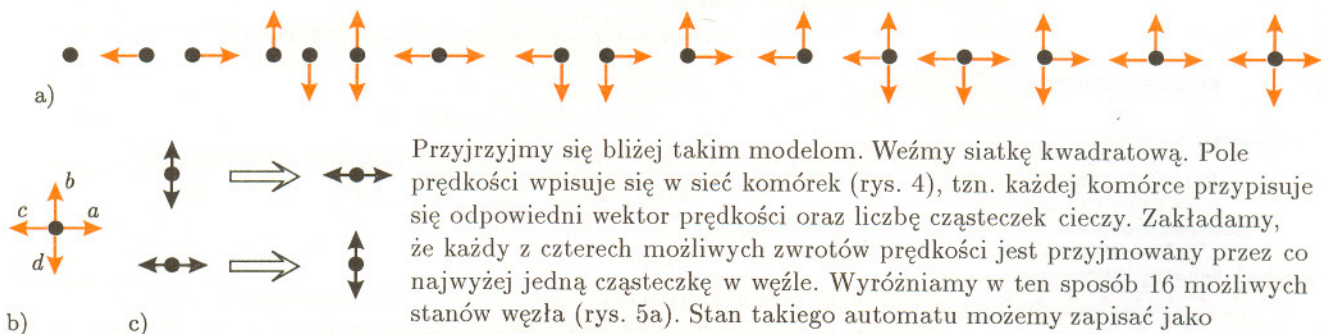




Rys. 4

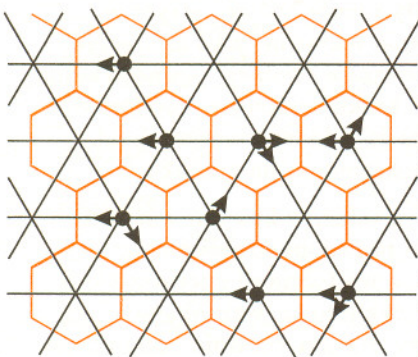
Przejdźmy teraz do automatów komórkowych dwuwymiarowych, które odgrywają znaczącą rolę w modelowaniu matematycznym. Tutaj komórki znajdują się na płaszczyźnie. Mogą one mieć kształty np. kwadratów lub sześcioboków, w zależności od tego, co chcemy modelować. Najprostszym dwuwymiarowym a.k. jest gra *życie* przedstawiona w *Delcie* 1/1997 (str. 10) z komórkami kwadratowymi i regułą: komórka „rodzi się”, gdy ma dokładnie trzech sąsiadów w poprzednim kroku, „umiera”, gdy nie ma sąsiadów, ma tylko jednego sąsiada lub więcej niż trzech (zatłoczenie).

Za pomocą automatów komórkowych można modelować układy fizyczne zawierające wiele dyskretnych elementów z lokalnymi zależnościami. Na poziomie mikroskopowym komórki mogą reprezentować atomy lub wartości pewnych wielkości fizycznych w kryształach. W większości układów na poziomie makroskopowym każdy węzeł w a.k. może reprezentować obszar zawierający wiele cząsteczek, a przypisana mu wartość może wyrażać kilka dozwolonych stanów. W tym przypadku a.k. mogą być używane jako dyskretne modele układów chemicznych opisujących reakcje chemiczne i przestrzenną dyfuzję (rozprzestrzenianie się). Mogą być także wykorzystywane w modelowaniu ewolucji galaktyk lub być narzędziem opisu zjawisk przejść fazowych w fizyce. Także przepływ cieczy można modelować za pomocą automatów dwu- i trójwymiarowych.

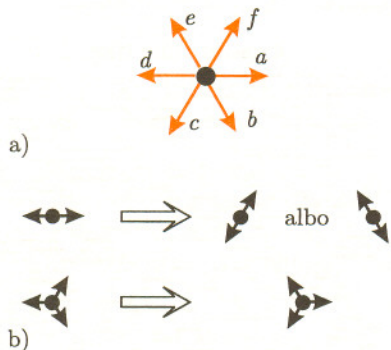


Rys. 5

Przyjrzyjmy się bliżej takim modelom. Weźmy siatkę kwadratową. Pole prędkości wpisuje się w sieć komórek (rys. 4), tzn. każdej komórce przypisuje się odpowiedni wektor prędkości oraz liczbę cząsteczek cieczy. Zakładamy, że każdy z czterech możliwych zwrotów prędkości jest przyjmowany przez co najwyżej jedną cząsteczkę w węźle. Wyróżniamy w ten sposób 16 możliwych stanów węzła (rys. 5a). Stan takiego automatu możemy zapisać jako tablicę czteroelementowych ciągów zer i jedynek:  $E_{ij} = d_{ij}c_{ij}b_{ij}a_{ij}$ , gdzie  $d_{ij}, c_{ij}, b_{ij}, a_{ij} \in \{0, 1\}$  (rys. 5b). Reguła ewolucji tego a.k. uwzględnia naturalną propagację (przemieszczanie cząsteczek zgodnie ze zwrotem wektora prędkości) oraz zderzenia cząsteczek. Zderzenie następuje wtedy, gdy  $E_{ij} = 0101$  lub  $E_{ij} = 1010$ , bo to znaczy, że spotkały się w węźle cząsteczki o przeciwnych zwrotach wektora prędkości. Po zderzeniu cząsteczki będą przemieszczać się w kierunku prostopadłym do kierunku prędkości z poprzedniego kroku (rys. 5c).



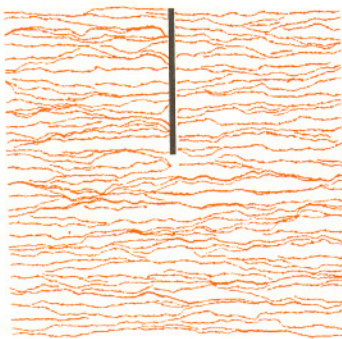
Zakładaliśmy, że w węźle powyższego automatu mogą być co najwyżej cztery cząsteczki. Załóżmy teraz, że może być więcej cząsteczek w węźle. Wtedy będziemy operowali pojęciem gęstości (o wartości z przedziału  $[0, 1]$ ) cząsteczek poruszających się w danym kierunku. Jeszcze bardziej rozbudowanym automatem jest automat opisany na siatce heksagonalnej (sześciobocznej) (rys. 6a). Tutaj stan komórki jest opisany przez ciąg sześcioelementowy. Reguła ewolucji także składa się z propagacji i reguł zderzeń, które pokazuje rysunek 6b.



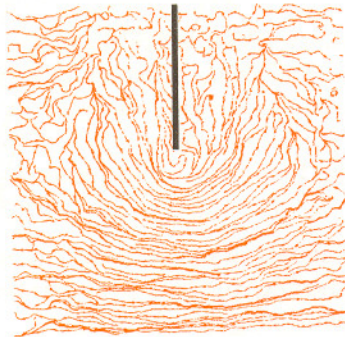
Rys. 6

Jak można się domyślać, metodą automatów komórkowych stosunkowo łatwo tworzy się symulacje komputerowe danego zjawiska. Na rysunku 7 widzimy symulację przepływu cieczy w kanale z prostopadłą do brzegów przeszkodą pokazywaną w pewnych odstępach czasu. Przeszkodę modeluje się wpisując do reguły ewolucji odbicia cząsteczek od niej, tzn. gdy cząsteczka osiągnie daną pozycję (miejsce, w którym jest przeszkoda), w następnym kroku wektor prędkości będzie miał inny zwrot, symulujący odbicie od przeszkody. Takie symulacje pozwalają zobaczyć, jak będą rozkładać się wiry, z jaką siłą ciecz napiera na przeszkodę etc. Wiedza ta jest pomocna konstruktorom zapór i mostów. Opis przepływu cieczy za pomocą a.k. nie jest oderwany od opisu wynikającego z praw zachowania. Już z tych najprostszych reguł ewolucji można wprowadzić równania różniczkowe opisujące badane zjawisko.

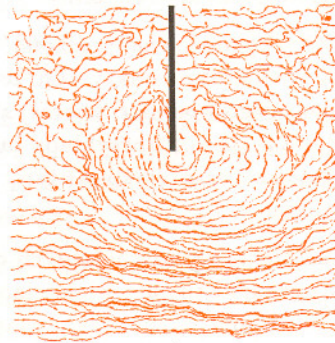




a)



b)



c)



d)

Rys. 7. Symulacja komputerowa przepływu cieczy w kanale z przeszkodą: a) stan początkowy, b) po 100 krokach czasowych, c) po 300 krokach, d) po 500.

Automaty komórkowe służą także do modelowania układów biologicznych, gdyż przyrost liczebności organizmów można przedstawić lokalnymi regułami. Mogą one opisywać populacje nie poruszających się organizmów, np. roślin, z wartościami w komórkach mówiącymi o obecności lub braku organizmu i z lokalnymi ekologicznymi interakcjami. Proste zachowania ludzi mogą być także modelowane automatami komórkowym. Przykładem jest modelowanie rozkładu i ewolucji opinii społecznej np. przed wyborem spośród dwóch kandydatów, komórki (jednostki społeczne) przyjmują wartości TAK albo NIE. Przy modelowaniu tego zjawiska trzeba uwzględnić migrację ludzi, co komplikuje reguły a.k. Życzę Czytelnikom powodzenia w wymyślaniu reguł ewolucji jak najlepiej przybliżających rzeczywistość.



## Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

**M 841.** Niech  $n$  będzie dodatnią liczbą parzystą. Dowieść, że liczby  $1, 2, \dots, n-1$  można tak ustawić w ciąg, by żadna z sum kolejnych liczb ciągu nie była podzielna przez  $n$ .

Rozwiązanie na str. 15

**M 842.** Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ . Niech  $O$  będzie punktem przecięcia odcinków łączących środki przeciwległych boków czworokąta. Dowieść, że  $P_{OAB} + P_{OCD} = P_{OAD} + P_{OBC}$  (gdzie  $P_T$  oznacza pole trójkąta  $T$ ).

Rozwiązanie na str. 16

**M 843.** Dany jest  $2n$  punktów na płaszczyźnie. Dowieść, że są one końcami  $n$  nie przecinających się odcinków.

Rozwiązanie na str. 8

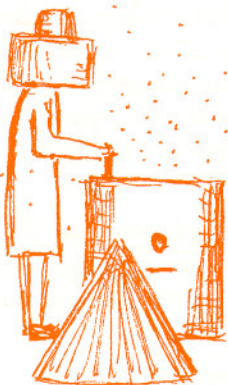
Przygotował Piotr ZALEWSKI

**F 473.** Wśród poszukiwanych nowych cząstek elementarnych występują (w pewnych modelach) cząstki masywne, długożyciowe i silnie oddziałujące z materią (tzn. obdarzone „ładunkiem kolorowym”, jak kwarki czy gluony). Zakładając, że istnieje taka cząstka  $X$  o masie  $m_X = 150 \text{ GeV}/c^2$ , oszacować, ile pionów może powstać w wyniku zderzenia ze swobodnym nukleonem materii detektora, jeżeli pęd  $X$  wynosi  $p = 80 \text{ GeV}/c$ . Przyjąć masę nukleonu  $m = 1 \text{ GeV}/c^2$  oraz pionu  $m_\pi = 0,15 \text{ GeV}/c^2$ . Zakładamy przy tym, że cząstka  $X$  i nukleon nie ulegają destrukcji.

Rozwiązanie na str. 8

**F 474.** Podać jakościowy opis oddziaływania cząstki  $X$  z poprzedniego zadania z materią.

Rozwiązanie na str. 15





Tekst *Liczby i wielościany* w *Delcie* 11/1997 prowokuje mnie do napisania niniejszego. Nie mam złośliwych zamiarów, namawiam do refleksji nad trwałością i ostatecznością wiedzy matematycznej. A że meritum jest dostępne nawet laikowi, tym lepiej.

Imre Lakatos w pięknej książce [1] opisał historię rozwoju pojęcia wielościanu i zmagania paru pokoleń matematyków ze wzorem Eulera. Posłużyła mu ona jako ilustracja jego punktu widzenia na rozwój całej matematyki. Rozwój, który nie jest ani liniowy, ani konsekwentny.

Czytając książkę można się przekonać, jak od połowy XVIII wieku do końca wieku XIX wielokrotnie odkrywano te same fakty. Niejeden widząc coś nowego, niezgodnego z jego wiedzą (i wiarą!) stwierdzał, że to monstrum, że to nie istnieje. Reakcje na kontrprzykłady burzące dotychczasowe poglądy były (i są) różne. Lakatos scharakteryzował typy tych reakcji. Tego jednak lepiej szukać w samej książce.

Do czasu ustalenia założeń istotnych dla wzoru Eulera starano się sobie radzić przez zanegowanie istnienia wielościanów niejednostajnych, przez poprawianie definicji wielościanu, potem poprawianie wzoru. Ktoś nawet stwierdził, że wielościanem może być tylko to, co spełnia wzór...

Historia opisywana przez Lakatosa kończy się dowodem wzoru sformułowanym przez Poincarégo i stosującym się do wielowymiarowych uogólnień.

Przed laty, dzięki krótkiej notatce w *Delcie*, trafiłem na „ciąg dalszy” opisywanych przez Lakatosa przygód umysłu. Wspomniano tam czternastą bryłę archimedesową powstałą przez obrót o  $45^\circ$  części znanej już bryły (*sześcio-ośmiościanu rombowego matego* według nazewnictwa ustalonego przez Romana Dudę podczas tłumaczenia książki *Modele matematyczne*).

Ta nowa bryła jest znakomitym nowym przykładem dla Lakatosa.

Definicja jest dobra, dopóki nie pojawi się coś nowego burzącego dotychczasowy obraz świata. Wówczas definicję się poprawia. Tak zrobili Ball i Coxeter [2]. Piszą oni, że przy próbach skonstruowania modelu tej starszej bryły J.C.P. Miller (*Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1930, ser. A, vol. CCXXIX str. 336) przypadkiem odkrył *pseudo-sześcio-ośmiościan rombowy*. Stało się to więc nie później niż w roku 1930. Dalej stwierdzają, że ta ostatnia bryła jest „tylko lokalnie półforemna”, ale w sensie ogólnym nie, albowiem „cały wielościan powinien wyglądać jednakowo, jeśli patrzeć na niego kolejno w kierunku każdego wierzchołka”. Pierwszy raz w życiu czytałem takie „uściślenie” definicji wielościanu półforemnego. W radzieckim wydaniu [2'] jest na ten temat przypis, w którym tłumacz sugeruje, że jednak brył półforemnych jest 14, a tę jedną można spośród archimedesowych usunąć tylko przez postawienie ścisłych warunków co do symetrii. W ten sposób Ball i Coxeter zamierzali anulować istnienie nowej bryły archimedesowej, rosyjski tłumacz zrobił kroczek ku uznaniu faktu, jednak też myślał o ratowaniu starych poglądów. Przypomina to nieco (nieznaną zapewne młodszemu Czytelnikom) piosenkę Wojciecha Młynarskiego o szachach...

Co do symetrii, bryła znana od dawna ma wszystkie osie i płaszczyzny odziedziczone po sześcianie lub ośmiościanie, z których można ją wyciąć, bryła „nowa” – przypomina bardziej graniastosłup. Te różnice nie są widoczne na pierwszy rzut oka.

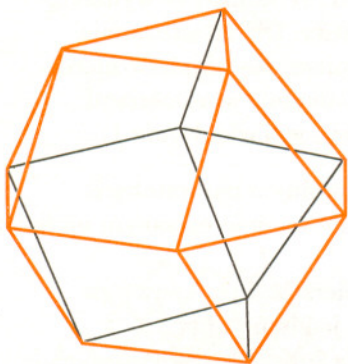
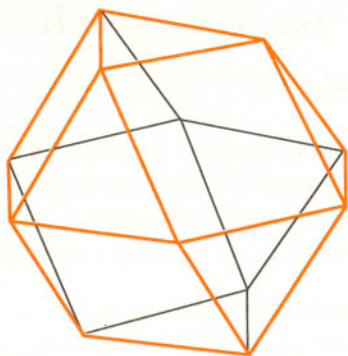
Mogłem przy okazji różnych zajęć wypytywać dzieci 10-letnie, 13-letnie i dorosłych, czy widzą różnice między tymi dwiema bryłami. Rozmawiając ze

Chodzi o wzór  $S - K + W = 2$ , gdzie  $S$  – liczba ścian,  $K$  – liczba krawędzi,  $W$  – liczba wierzchołków.

Żeby wielościan nie chciał spełniać wzoru Eulera, nie wystarczy jego niewypukłość; wzór spełnia każdy wielościan, który, jako powierzchnię, da się bez łatania i rozrywania „nadmuchać” podobnie do piłki lub zwykłego balonika, w odróżnieniu od np. dętki rowerowej; taki „nadmuchiwalny” wielościan jest jednostajny.

Bryła archimedesowa, wielościan półforemny – wielościan, którego wszystkie ściany są foremne, a wszystkie wierzchołki mają przystające naroża. W dostępnej literaturze twierdzi się, że poza dwoma nieskończonymi ciągami graniastosłupów i graniastosłupów skręconych (zwanych czasem antygraniastosłupami: wielokątne podstawy połączone są szlaczkiem trójkątów przypominającym wzór z czapki generalskiej) jest ich dokładnie 13.





mną mieli zawsze modele tych obu brył w zasięgu ręki, mogli je obracać. Około połowy moich rozmówców **żadnej różnicy** nie widziało.

Sądzę że ich oczom wystarczyły przystające naroża (trzy kwadraty i jeden trójkąt) i ogólne wrażenie tej samej „wypukłości”. Młodsze dzieci mówiły wręcz o kulistości.

Tu chciałbym zwrócić uwagę na to, że „przystające naroża” oznacza więcej niż „te same wielokąty”. Spróbujmy podobną operację obracania „kopuły” przeprowadzić z sześć-ośmiościanem. Wyjściowy wielościan ma w każdym wierzchołku sekwencję: kwadrat-trójkąt-kwadrat-trójkąt – wielościan otrzymany po operacji (nie jest na pewno archimedesowy) ma również takie wierzchołki, lecz nie wszystkie: w sześciu wierzchołkach ma kwadrat-kwadrat-trójkąt-trójkąt. Ten ostatni wielościan, podobnie jak sześć-ośmiościan, znany jest dobrze krystalografom, oba nazywają *cubooctaedrem*, jeden *trygonalnym*, drugi *heksagonalnym*.

Widać, że trudno było przez stulecia od czasów Archimedesza znaleźć tę czternastą bryłę. Domyślały się, jak Miller do tego doszedł. Nie kleił zapewne modelu z jednej siatki, lecz z kawałków, być może z pojedynczych ścianek i w odpowiednim momencie popełnił błąd.

Zalgaler zaś klasyfikował, porządkował, zestawiał wszelkie układy ścian foremnych tworzące wielościany wypukłe. Robił to bardziej systematycznie, niż przyjęło się przeprowadzać dowód istnienia trzynastu brył archimedesowych.

Epilogiem niech będzie stwierdzenie, że ostatnio w *Delcie* przeczytałem, że nowa bryła została odkryta dopiero przez Zalgalera w latach pięćdziesiątych.

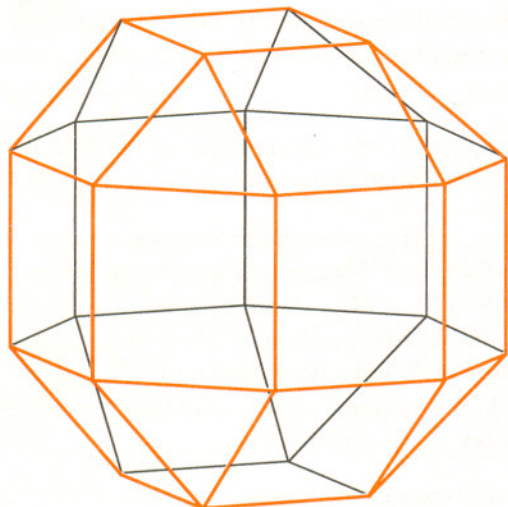
Rysunki, które pojawiły się w *Delcie* 11/1997, martwią Naczelnego Redaktora. Małą pociechą jest zapewne, że przedstawiają one w istocie to, co miały przedstawiać. Jeśli na rysunku widzimy sześć-ośmiościan rombowy mały – być może jest to ta nowa bryła, ale to, co ją różni, jest schowane z tyłu. Pewność możemy mieć dopiero, gdy zobaczymy rysunek z pokazanymi krawędziami zasłoniętymi.

Lakatos, gdyby żył, przy obserwacji losów jednej bryłki miałby niezłą uciechę. Jego książkę polecam, zwłaszcza po francusku – tłumacze wzbogacili ją i pisali w swoim języku. Ojczystym językiem Lakatosa był węgierski, a pisał po angielsku.

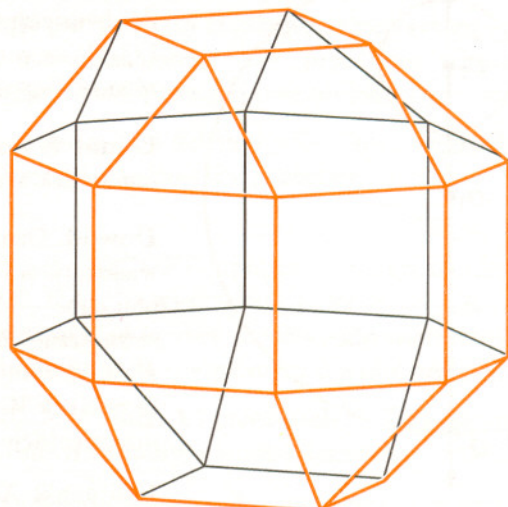
P.S. W rozmowie przed kilku laty zgodziliśmy się z profesorem Dudą nazywać tę nieszczęsną bryłę nie dla wszystkich archimedesową *sześć-ośmiościanem rombowym małym skręconym*.

#### Literatura

- [1] I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge 1976.
- [1'] I. Lakatos, *Preuves et réfutations*, Hermann, Paris 1984.
- [2] W.W.R. Ball, H.S.M. Coxeter, *Mathematical Recreations and Essays*, University of Toronto Press 1974 (XII wydanie).
- [2'] W.W.R. Ball, H.S.M. Coxeter, *Matematyckeskie esse i razwleczenija*, Mir, Moskwa 1986.
- [3] H.M. Cundy, A.P. Rollet, *Modele matematyczne*, PWN, Warszawa 1967.
- [4] V.A. Zalgaler, *Convex Polyhedra with Regular Faces*; II wydanie: Consultants Bureau, New York 1969.



sześć-ośmiościan rombowy mały



sześć-ośmiościan rombowy mały skręcony

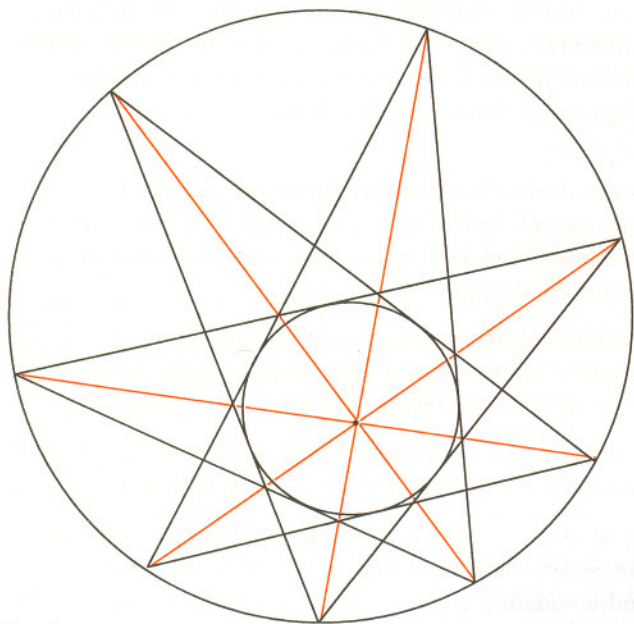


# O parzystokątach wpisanych i opisanych na okręgach

Grzegorz KAPUSTKA, Michał KAPUSTKA

W poniższym tekście termin wielokąt będzie oznaczać wielokąt wypukły lub gwiaździsty. *Parzystokątem* nazwiemy wielokąt o parzystej liczbie wierzchołków. Rozważane dalej wielokąty są przeważnie wpisane w okrąg i jednocześnie opisane na innym okręgu; mówimy wówczas krótko, że wielokąt jest *wpisany i opisany na okręgach*.

Niniejszy artykuł stanowi skrót pracy nagrodzonej złotym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1997 roku.



Rys. 1

Naszukujemy, bez nadmiernego wnikania w formalne szczegóły, kilka własności parzystokątów wpisanych i opisanych na okręgach. Własności te wynikają z dwóch prostych lematów. Dla zilustrowania używanych metod zajmiemy się najpierw nieco dokładniej dwiema (dualnymi) własnościami przedstawionymi poniżej, w Twierdzeniu 1.

**Twierdzenie 1.** W dowolnym parzystokącie wpisanym w okrąg i jednocześnie opisanym na innym okręgu

- (1) proste łączące wierzchołki przeciwległe przecinają się w jednym punkcie;
- (2) punkty przecięcia prostych zawierających boki przeciwległe leżą na jednej prostej.

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy dwa nietrudne lematy.

**Lemat 1.** Dwa okręgi, położone jeden wewnątrz drugiego, można przekształcić przez rzut środkowy na dwie elipsy współśrodkowe.

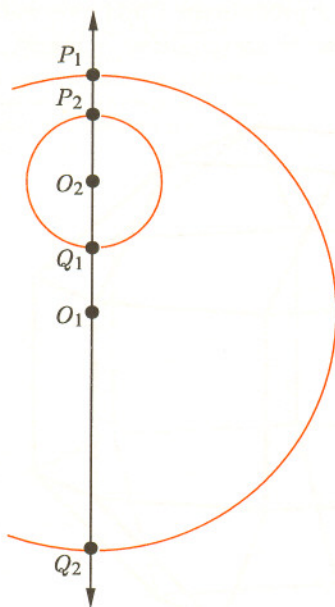
**Dowód.** Punkty przecięcia prostej  $O_1O_2$  z okręgami oznaczmy kolejno przez  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  (patrz rys. 2). Rozważmy płaszczyznę  $S$  prostopadłą do płaszczyzny obu okręgów i zawierającą ich środki. Z odpowiednio dobranego punktu  $A \in S$  wykonujemy teraz taki rzut środkowy, aby żaden punkt odcinka  $P_1Q_2$  nie przeszedł do nieskończoności, a obrazy odcinków  $P_1P_2$  i  $Q_1Q_2$  miały równe długości. Wystarczy w tym celu wybrać tak punkt  $A \in S$ , by odcinki  $P_1P_2$  i  $Q_1Q_2$  były z niego widoczne pod tym samym kątem (takich punktów jest wiele; dobór jednego z nich ilustruje rysunek 3).

Łatwo sprawdzić, że rzut środkowy z punktu  $A$  na płaszczyznę  $S_1$  prostopadłą do dwusiecznej kąta  $P_1AQ_2$  spełnia żądane warunki. (Obrazy odcinków  $P_1P_2$  i  $Q_1Q_2$  są wówczas symetryczne względem dwusiecznej kąta  $P_1AQ_2$ , a zatem są równej długości.) ■

**Lemat 2.** Dowolny parzystokąt wpisany i opisany na elipsach współśrodkowych ma środek symetrii, który jest zarazem wspólnym środkiem symetrii obu elips.

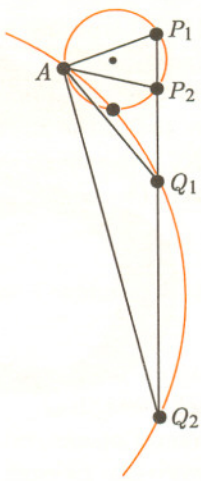
**Dowód.** Oznaczmy przez  $W_1, W_2, \dots, W_{2n}$  wierzchołki rozpatrywanego wielokąta, a ich obrazy w symetrii środkowej względem wspólnego środka  $A$  obu elips – odpowiednio przez  $W'_1, W'_2, \dots, W'_{2n}$ . Ustalmy orientację elipsy zewnętrznej  $E$  jak na rysunku 4. Rozważmy przekształcenie  $p$  elipsy  $E$  na  $E$ , w którym obraz  $p(W)$  punktu  $W \in E$  jest takim punktem elipsy  $E$ , że odcinek  $Wp(W)$  jest styczny do wewnętrznej elipsy, a łuk skierowany  $Wp(W)$  ma orientację zgodną z wybraną orientacją elipsy  $E$ .

Jeśli punkt  $X \in E$  należy do skierowanego łuku  $YZ \subset E$ , to oczywiście  $p(X)$  leży na łuku skierowanym  $p(Y)p(Z)$ . Przez indukcję dostajemy stąd

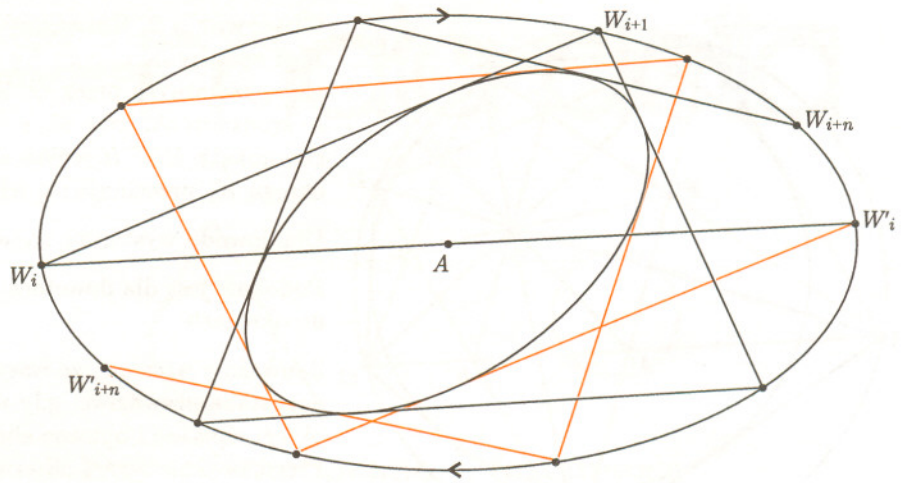


Rys. 2





Rys. 3



Rys. 4

$$(1) \quad (X \in YZ \subset E) \Rightarrow (p^n(X) \in p^n(Y)p^n(Z) \subset E).$$

Przypuśćmy teraz, że pewne dwa przeciwległe wierzchołki parzystokąta, np.  $W_i$  oraz  $W_{i+n}$ , nie są środkowo-symetryczne względem punktu  $A$ , tzn.  $W'_i \neq W_{i+n}$  oraz  $W_i \neq W'_{i+n}$ . Załóżmy ponadto bez zmniejszenia ogólności, że

$$(2) \quad W_{i+n} \in W_i W'_i \subset E$$

(w przeciwnym przypadku dalsze postępowanie jest analogiczne). Ponieważ rozpatrujemy wielokąt wpisany i opisany na elipsach, więc  $p^n(W_k) = W_{k+n}$ ,  $p^n(W'_k) = W'_{k+n}$  (przyjmujemy oczywiście  $W_{j+2n} = W_j$ ). Zatem, na mocy (1) mamy

$$(3) \quad W_i \in W_{i+n} W'_{i+n} \subset E.$$

Z warunków (2) i (3) wynika, że łuki skierowane  $W_{i+n} W'_i$  oraz  $W'_{i+n} W_i$  mają przeciwną orientację. Z drugiej strony, jeden z nich jest obrazem drugiego w symetrii środkowej, która zachowuje orientację. Otrzymana sprzeczność kończy dowód lematu. ■

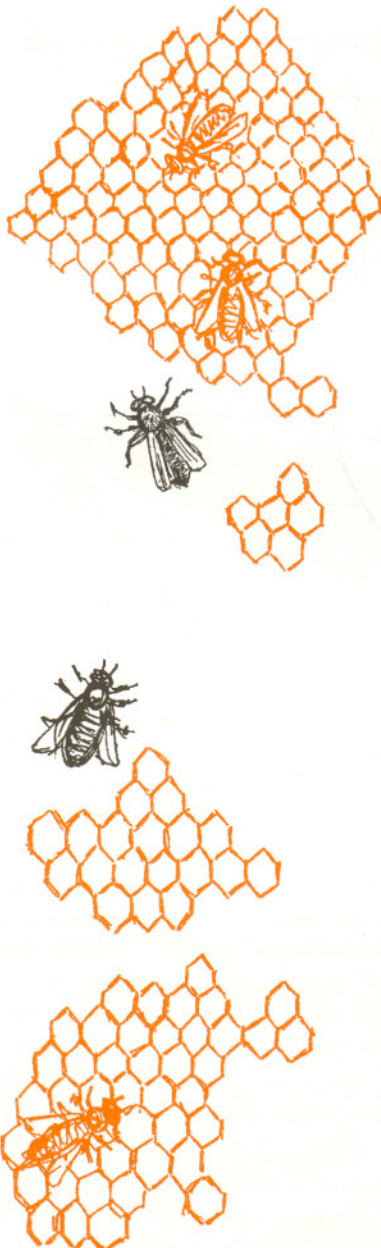
**Dowód twierdzenia 1.** Po wykonaniu rzutu opisanego w lemacie 1 okręgi wpisany i opisany przekształcą się na elipsy współśrodkowe, wpisaną i opisaną, odpowiednio. Na mocy lematu 2 parzystokąt zostanie przekształcony na parzystokąt środkowo-symetryczny. Przekątne łączące wierzchołki przeciwległe parzystokąta środkowo-symetrycznego przecinają się oczywiście w środku symetrii. Zatem, w parzystokącie pierwotnym przekątne też przecinają się w jednym punkcie, co kończy dowód tezy (1). Teza (2) ma charakter dualny. Boki przeciwległe parzystokąta środkowo-symetrycznego są równoległe (tzn. przecinają się w nieskończoności); zatem przedłużenia boków przeciwległych w pierwotnym parzystokącie przecinają się na jednej prostej. ■

Na podstawie udowodnionych lematów można dokonać wielu interesujących obserwacji. Oto niektóre z nich. Szczegółowe dowody pozostawiamy zainteresowanym Czytelnikom.

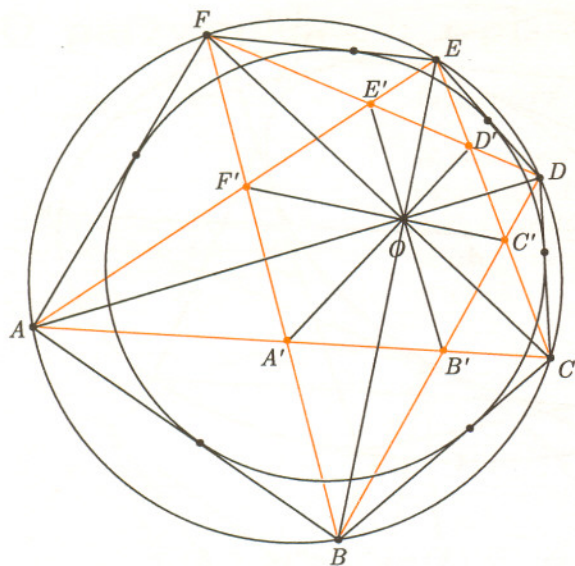
**Obserwacja 1.** Rozważmy sześciokąt  $ABCDEF$  wpisany i opisany na okręgach. Jego przekątne  $AC, BD, CE, DF, EA, FB$  wyznaczają nowy sześciokąt  $A'B'C'D'E'F'$  (rys. 5). Wówczas przekątne łączące przeciwległe wierzchołki tych sześciokątów przecinają się w jednym punkcie – wspólnym dla obu sześciokątów.

Aby ją uzasadnić, wystarczy zastosować lemat 1 i przekształcić oba sześciokąty na sześciokąty środkowo-symetryczne o wspólnym środku symetrii.

Podobnie jest dla dowolnego parzystokąta  $A_1 A_2 \dots A_{2n}$  wpisane go i opisanego na okręgach.







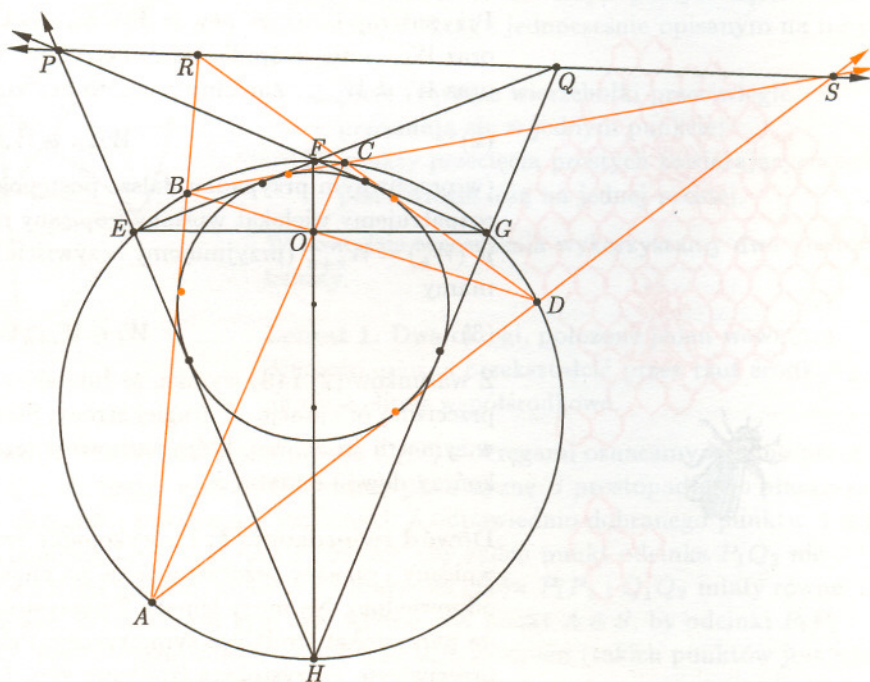
Rys. 5

**Obserwacja 2.** Rozważmy czworokąt  $ABCD$  wpisany w okrąg  $K_1$  i opisany na okręgu  $K_2$  (rys. 6). Oznaczmy punkt przecięcia jego przekątnych przez  $O$ . Wówczas punkt  $O$  jest współliniowy ze środkami okręgów  $K_1$  i  $K_2$ , a ponadto, przekątne każdego czworokąta  $EFGH$  wpisane w okrąg  $K_1$  i opisanego na okręgu  $K_2$  przecinają się właśnie w punkcie  $O$ .

Dla dowodu wystarczy znów zastosować lemat 1.

Podobnie jest dla dowolnego parzystokąta wpisanego i opisanego na okręgach.

Zauważmy wreszcie, że wszystkie wymienione twierdzenia pozostaną prawdziwe, gdy w rozważaniach zastąpimy okręgi wpisane i opisanie elipsami wpisanymi i opisanymi. Przedstawione wyżej obserwacje mają oczywisty związek z Wielkim Twierdzeniem Ponceleta (patrz np. *Delta* 6/1997). Wykorzystując lematy 1 i 2 można udowodnić niektóre szczególne przypadki tego twierdzenia, np. dla czworokąta i okręgów.



Rys. 6

### Bibliografia

- [1] H. S. M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, PWN, Warszawa 1967.
- [2] *Szkola geometrii. Odczyty kaliskie*, WSiP, Warszawa 1993.
- [3] G. H. Niewęgłowski, *Geometria*, Paryż 1869.



### Rozwiązanie zadania M 843.

Wśród skończonej liczby możliwych połączeń danych  $2n$  punktów  $n$  odcinkami wybierzmy to, dla którego suma długości tych odcinków jest najmniejsza. Udowodnimy, że wtedy żadne dwa odcinki nie przecinają się. Gdyby bowiem pewne dwa odcinki  $A_1A_2, B_1B_2$  z naszego połączenia przecinały się, to co najmniej jedna z nierówności

$$|A_1B_1| + |A_2B_2| < |A_1A_2| + |B_1B_2|,$$

$$|A_1B_2| + |A_2B_1| < |A_1A_2| + |B_1B_2|$$

byłaby spełniona (jeśli odcinki  $A_1A_2, B_1B_2$  przecinają się w jednym punkcie, to spełnione są obie nierówności, w przeciwnym przypadku tylko jedna z nich). To oznaczałoby jednak, że suma nie była najmniejsza.



### Rozwiązanie zadania F 473.

W oddziaływaniach wysokich energii suma mas wszystkich końcowych cząstek musi być mniejsza od masy całkowitej układu  $M$  zderzających się cząstek. Ogólnie, dla układu  $n$  cząstek mamy

$$M^2 c^2 = \left( \sum_1^n E_i \right)^2 - \left( \sum_1^n p_i c \right)^2.$$

W naszym przypadku

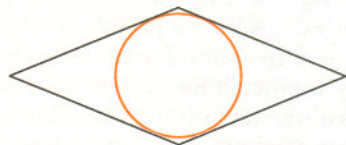
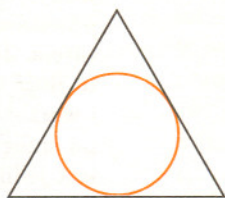
$$M = \sqrt{(E/c^2 + m)^2 - (p/c)^2},$$

gdzie  $E = \sqrt{(m_X c^2)^2 + (pc)^2}$  jest energią cząstki  $X$  w układzie spoczywającego nukleonu. Po prostym przekształceniu i podstawieniu danych otrzymujemy

$$M = \sqrt{m_X^2 + m^2 + 2mE/c^2} \approx 151,13 \text{ GeV}/c^2.$$

W takim razie  $M - m_X - m < m_\pi$ , a więc piony nie mogą w tej reakcji powstawać.





## Wielokąt równoboczny i foremność

Trójkąt równoboczny jest foremny, to znaczy ma również wszystkie kąty równe. Czworokąt równoboczny, czyli romb, nie musi być foremny, tym bardziej wielokąt równoboczny o większej liczbie boków.

A czy warunek, by wielokąt równoboczny był opisany na okręgu, coś tu zmienia? Dla trzech boków nic, bo każdy trójkąt jest opisany na jakimś okręgu. Dla czworokąta nic nie poprawia, bo każdy romb też jest opisany na jakimś okręgu. A dla pięciokąta?

Kilka prób narysowania pięciokąta równobocznego opisanego na okręgu przekonuje nas, że chyba tu jest jakoś inaczej niż z czworokątami – wygląda na to, że równoboczny pięciokąt opisany na okręgu foremny być musi. I tak jest w istocie. Nawet więcej:

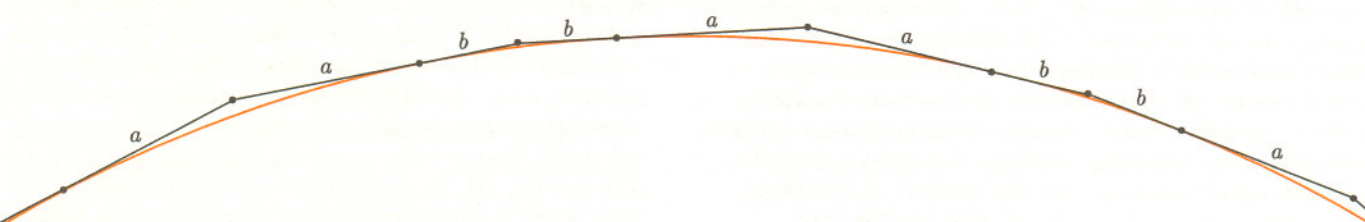
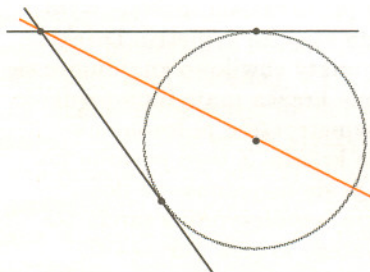
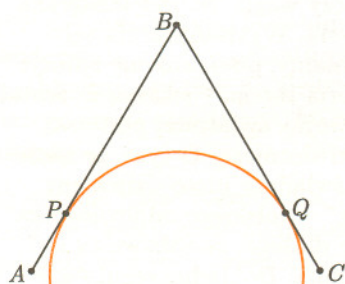
*nieparzystokąt równoboczny opisany na okręgu jest foremny.*

I nic więcej: *dla każdego parzystego  $n > 2$  istnieje  $n$ -kąt równoboczny opisany na okręgu i nieforemny.*

Aby tego dowiedzieć, dogodnie jest wykazać w ogólnym przypadku to, co widać na rysunku rombu:

jeśli kolejne boki  $AB$  i  $BC$  wielokąta równobocznego opisanego na okręgu styczne są do niego w punktach  $P$  i  $Q$ , to  $PB = BQ$  i  $AP = QC$ .

Istotnie, pierwsza równość wynika stąd, że figura złożona z okręgu i dwóch stycznych do niego ma oś symetrii – prostą łączącą punkt ich przecięcia ze środkiem okręgu; druga równość to wynik odjęcia równych odcinków z pierwszej równości od, z założenia, równych boków.



Wyobraźmy sobie teraz wielokąt równoboczny, nieforemny i opisany na okręgu. Wobec nieforemności przynajmniej jeden bok nie jest styczny do okręgu w swoim środku. Rozpocznijmy od niego wędrówkę po obwodzie wielokąta – spotykać będziemy kolejno odcinki wyznaczone przez wierzchołki i punkty styczności tylko dwóch długości  $a$  i  $b$  i to w sekwencji (zaczniemy od wierzchołka):  $abbaabba \dots$ . Gdyby liczba par była nieparzysta, to na końcu byłoby  $\dots abbaab$ , co nie zgadza się z udowodnioną

przed chwilą prawdziwością. Sprzeczność. Ponieważ wielokąt równoboczny można jednak opisać na okręgu, więc musimy odrzucić albo przypuszczenie, że nie jest on foremny, albo przypuszczenie, że jest on nieparzystokątem.

Dowodzi to pierwszego wyróżnionego kursywą stwierdzenia. Dowód drugiego musi być konstruktywny, ale nie jest trudny i zostawiamy go Czytelnikom.

*Małą Deltę przygotował Marek KORDOS*



Powszechnie uważa się, że jazda na nartach lub łyżwach możliwa jest dzięki cienkiej warstwie wody powstającej pomiędzy powierzchnią narty i śniegiem, która działa jak smar, zmniejszając siły tarcia. Znacznie gorzej jest z wytłumaczeniem przyczyny, dzięki której taka warstwa powstaje. Często można usłyszeć, że jest to spowodowane obniżeniem się temperatury topnienia na skutek wzrostu ciśnienia. W przypadku narciarza jest to zupełny absurd, ponieważ powierzchnia nart jest większa niż powierzchnia jego stóp, więc poza przypadkiem jazdy na samych krawędziach, o żadnym wzroście ciśnienia nie może być mowy. Jednak w przypadku łyżew istotnie tak mogłoby być. Wystarczy jednak obliczyć przyrost ciśnienia, a następnie popatrzeć na diagram fazowy wody, żeby przekonać się, że przyrost ten jest niewystarczający. Poza tym pojawia się zasadne pytanie: dlaczego topnienie miałyby następować wyłącznie na granicy narty i śniegu, a nie w całej jego objętości poddanej ścisłaniu?

Istnieje mało znane wśród niespecjalistów (a szkoda) zjawisko topnienia powierzchniowego, polegające na tym, że na granicy substancji pozostającej w kontakcie z podłożem może pojawić się cienka warstwa zaabsorbowanej „pseudocieczy”, nawet w warunkach termodynamicznych, w których fazą stabilną jest faza stała, i daleko od powierzchni kontaktu istnieje jedynie ta faza. Warunkiem koniecznym jest, by napięcie powierzchniowe takiej warstwy (na które składają się: napięcie powierzchniowe pomiędzy cieczą i fazą stałą, napięcie powierzchniowe pomiędzy cieczą i podłożem, oraz potencjał oddziaływania obu powierzchni), było mniejsze od napięcia powierzchniowego pomiędzy fazą stałą a suchym podłożem. Równowagową grubość powstającej warstwy „pseudocieczy” można obliczyć znajdując minimum potencjału oddziaływania obu powierzchni (jeśli szczęśliwie znamy ten potencjał). Topnienie powierzchniowe jest konsekwencją istnienia dodatkowych oddziaływań cząsteczek substancji znajdujących się blisko podłoża z cząsteczkami podłoża. Posłużyliśmy się nazwą „pseudociecz”, żeby zaakcentować, że nie jest to stabilna termodynamicznie faza i może istnieć jedynie dzięki tym dodatkowym oddziaływaniom. Nie zważając na oburzenie narciarzy, popatrzymy przez chwilę na nartę jako podłoże, z którym kontaktuje się substancja (śnieg). Czy zatem zjawisko topnienia powierzchniowego jest właśnie tą przyczyną, dla której jazda na nartach jest możliwa? Raczej (a nawet na pewno) nie, jest ono na to zbyt subtelne.

Drugim powszechnie znanym i w przeciwieństwie do zmiany temperatury topnienia sensownym wytłumaczeniem przyczyny tworzenia się warstewki wody, jest topnienie powierzchni śniegu na skutek powstawania ciepła spowodowanego działaniem sił tarcia. Jeśli temperatura jest niższa niż  $-25^{\circ}\text{C}$ , to ilość wydzielającego się ciepła jest zbyt mała i warstewka wody nie powstaje, a jazda na nartach po śniegu jest równie trudna jak po piasku. Świat jest jednak bogatszy i bardziej skomplikowany, niż nam się wydaje. Czasami jest tak, że całkiem różne zjawiska są przyczyną podobnych lub wręcz identycznych efektów. Podobnie może być i w tym przypadku. Okazuje się bowiem, że współczynnik tarcia pomiędzy dwiema suchymi powierzchniami gwałtownie maleje, jeśli temperatura wzrośnie na tyle, że jest tylko o kilka stopni niższa od temperatury topnienia ciała o niższej temperaturze topnienia. A zatem warstewka cieczy wcale nie jest konieczna do zredukowania sił tarcia. Wytłumaczenia tego zjawiska, niestety, nie znamy, ponieważ nie istnieje żadna zadowalająca teoria tarcia. Ciekawe, że zostało to odkryte w czasie II wojny światowej podczas badań nad bronią przeciwlotniczą. O tym, że może odgrywać istotną rolę, świadczy nieco dziwny sport o nazwie „curling” – polskiego odpowiednika tej nazwy brak. Pewnie dlatego, że zabawa ta jest u nas praktycznie nieznana. Dokładne reguły gry nie są dla nas istotne. Polega ona na puszczaniu po lodzie ciężkich, około 20-kilogramowych krążków, które nie tylko poruszają się ruchem postępowym, ale obracają się dookoła swej osi symetrii. Dzięki ruchowi obrotowemu punkty chwilowo znajdujące się na lewej spodniej stronie krążka mają inną prędkość niż ich odpowiedniki symetrycznie położone na prawej spodniej stronie krążka. Z tego powodu po obu stronach wydzielają się niejednakowe ilości ciepła, a zatem redukcja współczynnika tarcia też nie jest jednakowa i dlatego krążek porusza się nie po linii prostej, lecz zakrzywionej w prawo lub w lewo, w zależności od kierunku obrotu. Zjawisko to byłoby bardzo trudne do wytłumaczenia, gdyby w grę wchodziło zredukowanie współczynnika tarcia przez warstwę wody. Dodajmy jeszcze, że zawodnicy chcąc przedłużyć drogę krążka, gdy ma on już bardzo małą prędkość, intensywnie pocierają lód znajdujący się na jego drodze. Ale to jest akurat zasadne niezależnie od tego, które z podanych wyjaśnień mechanizmu redukcji tarcia jest w tym przypadku poprawne.

Informujemy, że w dniach 25–26 września 1998 roku w Krakowie odbędzie się Krakowski Jarmark Doświadczeń Pokazowych z Fizyki, organizowany przez Krakowski Oddział PTF przy współdziałaniu Wydziału Fizyki i Techniki Jądrowej AGH oraz Instytutu Fizyki UJ. Dla zdobywców pierwszych miejsc przewidziane są godziwe nagrody, a także nagroda publiczności.

Dokładniejsze informacje można uzyskać od Przewodniczącego Komitetu Organizacyjnego, dr hab. Andrzeja Zięby (Wydział Fizyki i Techniki Jądrowej AGH, ul. Reymonta 19, 30-059 Kraków; e-mail: jarfiz@novell.ftj.agh.edu.pl).



## Aktualności (nie tylko) fizyczne

Od dawna marzeniem ludzkości jest możliwość natychmiastowego przenoszenia się z miejsca na miejsce. Znanym (no, może nie wszystkim) przypadkiem teleportacji była podróż pewnego studenta Uniwersytetu Warszawskiego z bocznicy kolejowej w Zakopanem na bocznice kolejową na Grochowie, bez jakiegokolwiek śladu w jego świadomości. Niestety, ponieważ informacja o tym sukcesie nie została opublikowana, pierwszeństwo przypadnie Antonowi Zilingerowi z Wiednia oraz Francesco De Martini z Rzymu, których zespoły doprowadziły (niezależnie) do doświadczalnego potwierdzenia kwantowej teleportacji, jak donosi *Nature* z 11 grudnia 1997 roku.

Żyjemy w świecie kwantowym, którego podstawową cechą jest brak możliwości uzyskania pełnej informacji o stanie jego dowolnej części (nie licząc potwierdzających regułę wyjątków). Dowiadując się czegoś automatycznie gubimy informację komplementarną. Nie potrafimy przekonać się np. jakbyśmy czuli się po zjedzeniu danego pączka raz świeżego, a raz czerstwego, bo nie możemy go zjeść dwa razy.

Aby uściślić nasze rozważania, rozpatrzmy układ kwantowy, który może znajdować się w dowolnej superpozycji dwóch ortogonalnych stanów bazowych

$$(1) \quad |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są dowolnymi liczbami zespolonymi spełniającymi warunek  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Przykładem może być polaryzacja fotonu. Niech  $|0\rangle$  odpowiada polaryzacji horyzontalnej, a  $|1\rangle$  wertykalnej. Aby zbadać polaryzację fotonu w stanie  $|\psi\rangle$ , możemy skierować go na płytkę półprzepuszczalną, która przepuszcza (odbija) fotony o polaryzacji horyzontalnej (odpowiednio wertykalnej). Nasz foton zostanie przepuszczony (odpowiednio odbity) z prawdopodobieństwem  $|\alpha|^2$  (odpowiednio  $|\beta|^2$ ), przechodząc jednocześnie do stanu  $|0\rangle$  (odpowiednio  $|1\rangle$ ). Dowiedzieliśmy się jedynie, że foton miał niezerową polaryzację horyzontalną (odpowiednio wertykalną), a pączek już zjedzony.

Powyższy przykład uzmysławia trudności, jakie napotykamy przy próbie poznania stanu kwantowego. Okazuje się jednak, że o ile tylko nie jesteśmy zbyt wścibscy, to mechanika kwantowa pozwala nam na robienie rzeczy naprawdę zadziwiających. W szczególności, jeżeli zrezygnujemy z poznania polaryzacji fotonu, to w odpowiednich warunkach możemy spowodować jego zniknięcie i pojawienie się w zupełnie innym, dowolnie odległym miejscu czasoprzestrzeni.

Aby dokonać kwantowej teleportacji fotonu 1 w stanie opisanym równaniem (1), potrzebne jest przygotowanie układu dwóch kwantowo skorelowanych fotonów 2 i 3 znajdujących się w całkowicie

antysymetrycznym stanie

$$(2) \quad |\Psi^-\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3).$$

Stan ten nie zawiera żadnej informacji o polaryzacji fotonów 2 i 3 z osobna. Mówi tylko, że polaryzacje te są ortogonalne. W następnym kroku należy przeprowadzić fotony 1 i 2 do analogicznego stanu  $|\Psi^-\rangle_{12}$ . W tym momencie tracimy informację o indywidualnej polaryzacji fotonów 1 i 2. Wiemy tylko, że są ortogonalne, tzn. że znaleźliśmy foton 2 w stanie ortogonalnym do fotonu 1, ale wtedy foton 3 też musiał być w stanie ortogonalnym do fotonu 2. Jest to możliwe, tylko jeżeli foton 3 ma teraz polaryzację identyczną z początkową polaryzacją fotonu 1. Można to zapisać jako

$$(3) \quad (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1)|\Psi^-\rangle_{23} \rightarrow |\Psi^-\rangle_{12}(\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3),$$

czyli: foton 1 „stopił się” z fotonem 2 w antisymetrycznym skorelowanym stanie kwantowym  $|\Psi^-\rangle_{12}$ , pojawiając się jednocześnie jako foton 3.

Już widzę, jak wielbiciele science-fiction zacierają ręce. Nie tak szybko. Co prawda kwantowa teleportacja jest sprzeczna z tzw. zdrowym, czyli niekwantowym rozsądkiem, ale nie powoduje np. przekazywania informacji z prędkością większą niż prędkość światła. Powodem jest to, że choć zawsze można „stopić” dwa fotony (o tej samej energii), to tylko raz na cztery razy znajdą się one w antisymetrycznym stanie  $|\Psi^-\rangle$  (baza układu polaryzacji dwóch fotonów jest czteroelementowa). W takim razie odbiorca fotonu 3, aby mieć pewność co do jego autentyczności, musi poczekać na wiadomość przesłaną zwykłą pocztą o tym, w jakim stanie znalazł się układ fotonów 1 i 2.

W praktycznej realizacji kwantowej teleportacji najważniejsze jest umiejętne „stopienie” fotonów 1 i 2. Aby tego dokonać, należy spowodować, by stały się one nierozróżnialne. Zespół wiedeński doprowadził do tego kierując je jednocześnie, z kierunków prostopadłych S i E, na płytkę półprzepuszczalną umieszczoną na linii SE-NW. Z mechaniki kwantowej wynika, że zarejestrowanie ich po jednym w kierunku W i N jest możliwe tylko dla stanu antisymetrycznego (w pozostałych trzech przypadkach oba fotony pojawią się albo w kierunku W, albo w kierunku N). Wystarczyło więc zaobserwować korelację odpowiedzi detektorów umieszczonych w W i N, aby mieć pewność, że foton 1 zamienił się na foton 3.

Po dalsze szczegóły oraz materiał do zastanawiania się nad „rozsądkiem kwantowym” odsyłam do *Nature* oraz cytowanej tam literatury, obiecując, że jeszcze do tego wrócimy. A póki co proponuję nie udawać fotonów i ze środków komunikacji zbiorowej korzystać w sposób świadomy.

Piotr ZALEWSKI

na podstawie *Nature* 390 (1997) 551-552; 575-579



# Uogólnienia zadania Steinhausa o liczbie 145

Józef KWIATKOWSKI, Andrzej NOWICKI

Hugo Steinhaus w książeczce *100 zadań* podaje (jako zadanie do udowodnienia) następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1.** *Napiszmy dowolną liczbę naturalną w dziesiętkowym układzie pozycyjnym i obliczmy sumę kwadratów cyfr tej liczby. Z otrzymaną liczbą zróbmy to samo i postępujemy w ten sam sposób dalej. Jeżeli ten proces nie doprowadzi nas do jedynki (po czym, oczywiście, jedynka będzie powtarzać się bezustannie), to doprowadzi na pewno do liczby 145, po czym wystąpi cykl*

145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89,

który będzie się powtarzać.

Startując, na przykład, od liczby 5 699 999 i powtarzając opisaną w twierdzeniu procedurę, otrzymamy ciąg:

5 699 999, 466, 88, 128, 69, 117, 51, 26, 40, 16, 37, 58, 89, 145.

Startując natomiast od liczby 688 888 mamy:

688 888, 356, 70, 49, 97, 130, 10, 1.

Twierdzenie to można udowodnić w następujący sposób.

**Dowód.** Niech  $n$  będzie daną liczbą naturalną. Niech  $k$  będzie liczbą cyfr liczby  $n$  oraz niech  $n'$  oznacza sumę kwadratów cyfr liczby  $n$ . Jeśli  $k \geq 4$ , to  $k < 10^{k-3}$  i wówczas:

$$n' \leq 9^2 k = 81k < 100k < 10^2 \cdot 10^{k-3} = 10^{k-1}.$$

Jeśli więc  $k \geq 4$ , to liczba cyfr liczby  $n'$  jest mniejsza od liczby cyfr liczby  $n$ . Wystarczy zatem wykazać, że badaną własność mają wszystkie liczby naturalne mniejsze od 1000. Jeśli  $n < 1000$ , to  $n' \leq 999' = 3 \cdot 9^2 = 243$ . Możemy więc ograniczyć się tylko do liczb naturalnych  $n$  mniejszych lub równych 243. Z łatwością sprawdzamy, że wszystkie takie liczby spełniają tezę. ■

Podobne twierdzenie można udowodnić dla sumy sześciątów. Spójrzmy najpierw na przykłady.

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153,$$

$$3^3 + 7^3 + 0^3 = 370,$$

$$3^3 + 7^3 + 1^3 = 371,$$

$$4^3 + 0^3 + 7^3 = 407.$$

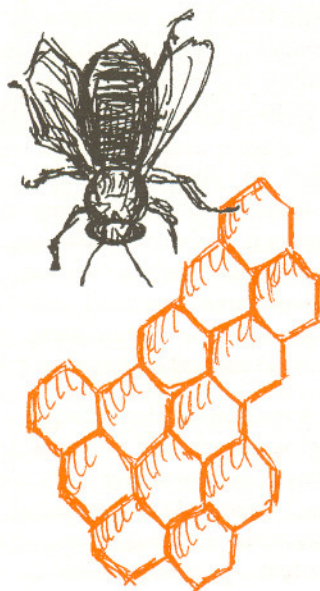
Oznaczmy przez  $s(n)$  sumę sześciątów cyfr liczby naturalnej  $n$ . Z przykładów tych wnioskujemy, że istnieją 4 liczby naturalne  $n$ , różne od 1, spełniające równość  $s(n) = n$ . Liczbami tymi są: 153, 370, 371 oraz 407. Można wykazać, że innych liczb o takiej własności nie ma. Istnieją dokładnie dwie pary  $(a, b)$  liczb naturalnych spełniających równości:  $s(a) = b$ ,  $s(b) = a$ . Są to pary: (136, 244) i (919, 1459). Istnieją ponadto (dokładnie dwie) trójki  $(a, b, c)$ , takie, że  $s(a) = b$ ,  $s(b) = c$  i  $s(c) = a$ . Trójkami tymi są: (55, 250, 133) oraz (160, 217, 352).

**Twierdzenie 2.** *Napiszmy dowolną liczbę naturalną w dziesiętkowym układzie pozycyjnym i obliczmy sumę sześciątów cyfr tej liczby. Z otrzymaną liczbą zróbmy to samo i postępujemy w ten sam sposób dalej. Proces ten doprowadzi nas zawsze do jednej z liczb: 1, 55, 136, 153, 160, 370, 371, 407, 919.*

**Dowód.** Niech  $n$  będzie daną liczbą naturalną i niech  $k$  będzie liczbą cyfr liczby  $n$ . Jeśli  $k \geq 5$ , to  $k < 10^{k-4}$  i wówczas:

$$s(n) \leq 9^3 k < 10^3 k < 10^3 \cdot 10^{k-4} = 10^{k-1}.$$

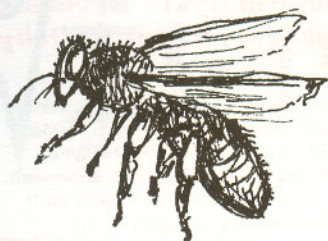
Jeśli więc  $k \geq 5$ , to liczba cyfr liczby  $s(n)$  jest mniejsza od liczby cyfr liczby  $n$ . Wystarczy zatem wykazać, że badaną własność mają wszystkie liczby naturalne mniejsze od 10 000. Jeśli  $n < 10\,000$ , to  $s(n) \leq s(9999) = 4 \cdot 9^3 = 2916$ .



Trójki i pary, o których mowa obok, są jednoznaczne z dokładnością do permutacji cyklicznych – np. trójek (55, 250, 133) i (250, 133, 55) nie uważamy za różne.

Pan Józef Kwiatkowski, współautor artykułu, jest nauczycielem matematyki w Raciążu.





Możemy więc ograniczyć się tylko do liczb naturalnych  $n$  mniejszych lub równych 2916. Z łatwością sprawdzamy (na przykład za pomocą komputera), że wszystkie takie liczby spełniają tezę. ■

Następne dwa twierdzenia dotyczą sum czwartych i piątych potęg.

**Twierdzenie 3.** *Proces polegający na obliczaniu sumy czwartych potęg cyfr liczby naturalnej doprowadzi nas zawsze do jednej z liczb: 1, 1138, 1634, 2178, 8208, 9474.*

**Twierdzenie 4.** *Proces polegający na obliczaniu sumy piątych potęg cyfr liczby naturalnej doprowadzi nas zawsze do jednej z liczb: 1, 244, 4150, 4151, 8294, 8299, 9044, 9045, 10 933, 24 584, 54 748, 58 618, 89 883, 92 727, 93 084, 194 979.*

Dowody są podobne do dowodów twierdzeń 1 i 2; pozostawiamy je jako zadanie dla Czytelników. Z dowodów tych wynikają następujące interesujące równości.

$$1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 = 1634$$

$$8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4 = 8208$$

$$9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4 = 9474$$

$$4^5 + 1^5 + 5^5 + 0^5 = 4150$$

$$4^5 + 1^5 + 5^5 + 1^5 = 4151$$

$$5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5 = 54748$$

$$9^5 + 2^5 + 7^5 + 2^5 + 7^5 = 92727$$

$$9^5 + 3^5 + 0^5 + 8^5 + 4^5 = 93084$$

$$1^5 + 9^5 + 4^5 + 9^5 + 7^5 + 9^5 = 194979$$

Innych równości tego typu nie ma.

Załóżmy teraz, że  $f(x) = a_s x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$  jest wielomianem jednej zmiennej  $x$  o nieujemnych współczynnikach całkowitych. Za pomocą tego wielomianu definiujemy funkcję  $F$ , działającą ze zbioru liczb naturalnych do zbioru liczb naturalnych. Robimy to w następujący sposób. Niech  $n$  będzie daną liczbą naturalną. Niech  $c_1, c_2, \dots, c_k$  będą cyframi (w dziesiętkowym układzie pozycyjnym) liczby  $n$ . Wówczas przyjmujemy:

$$F(n) = f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_k).$$

Np. jeśli  $f(x) = 3x^2 + 9$ , to  $F(201) = f(2) + f(0) + f(1) = 21 + 9 + 12 = 42$ .

Napiszmy dowolną liczbę naturalną  $n$ . Obliczmy  $F(n)$ . Z otrzymaną liczbą zrobmy to samo i postępujemy w ten sam sposób dalej. Otrzymamy wówczas ciąg:

$$n, F(n), F(F(n)), F(F(F(n))), \dots$$

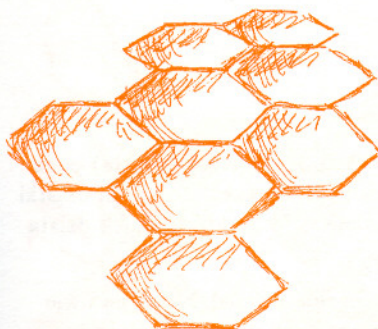
Każdy ciąg takiej postaci nazwijmy  $f$ -ciągiem. Dla przykładu następujące dwa ciągi są  $f$ -ciągami dla  $f(x) = 3x^2 + 9$ .

$$201, 42, 78, 357, 276, 294, 330, 81, 213, 69, 369, 405, 150, 105, 105, \dots$$

$$899, 741, 225, 126, 150, 105, 105, \dots$$

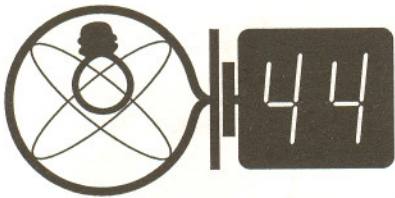
Pierwszy z tych ciągów powstał dla  $n = 201$ , a drugi dla  $n = 899$ . W jednym i drugim ciągu pojawiła się liczba 105, która powtarza się bezustannie. To nie jest przypadek. Okazuje się, że jeśli  $f(x) = 3x^2 + 9$ , to w każdym  $f$ -ciągu pojawi się liczba 105. Łatwo to udowodnić. Dowód jest podobny do dowodów twierdzeń 1 i 2. Widzimy więc, że istnieją takie wielomiany  $f(x)$ , że w każdym  $f$ -ciągu występuje zawsze ta sama liczba naturalna  $m_f$ . Kilka przykładów takich wielomianów  $f(x)$  wraz z ich liczbą  $m_f$  przedstawiamy obok.

Do tej pory rozważaliśmy tylko dziesiętkowy układ pozycyjny. Przy definiowaniu  $f$ -ciągów wykorzystaliśmy funkcję  $F$  zdefiniowaną za pomocą cyfr układu dziesiętnego. Podobną funkcję  $F$  możemy zdefiniować wykorzystując cyfry dowolnego ustalonego systemu pozycyjnego. Otrzymamy wówczas nowe  $f$ -ciągi, które również mają ciekawe własności. Jeśli, na przykład,  $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$  i ustalonym systemem pozycyjnym jest system trójkowy, to w każdym  $f$ -ciągu występuje liczba, której zapisem dziesiętnym jest 145. Jeśli natomiast  $f(x) = 2x^2 + 5$  i ustalonym systemem jest system siódemkowy, to w każdym  $f$ -ciągu występuje 81 lub 25 lub 145.



$f(x)$	$m_f$
$2x + 2$	14
$3x$	27
$3x + 1$	26
$3x + 2$	25
$6x$	54
$6x + 5$	52
$2x^2 + 2x + 1$	191
$3x^2 + 9$	105
$3x^2 + 3x + 4$	162
$3x^2 + 6x + 5$	273
$5x^2 + 5x$	10
$6x^2 + 6x + 6$	426
$x^3 + x + 8$	228
$x^3 + x^2$	152
$x^3 + x^2 + 4x + 7$	33
$x^3 + 2x^2 + 3x + 5$	596
$x^3 + 2x^2 + 7x + 1$	647
$x^3 + 2x^2 + 7x + 7$	185





### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Czołówka ligi zadaniowej

### Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 244 ( $WT=2,89$ ) i 245 ( $WT=2,54$ )  
z numeru 10/1997

Przemysław Gadziński – Środa Śl. 42,92  
Andrzej Idzik – Bolesławiec 23,36  
Andrzej Nowogrodzki – Chocianów 18,68

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1998

### Zadania z fizyki nr 256, 257

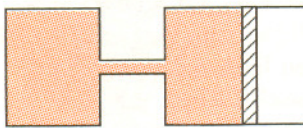
Redaguje Jerzy B. BROJAN

**256.** Jednorodny strumień równoległe biegnących cząstek (np. strumień światła) pada na kulę: a) odbijającą cząstki sprężysto (z zwierciadło kuliste), b) taką, do której cząstki się „przyklejają” (czarna). Jeżeli promień kul jest jednakowy, to na którą z nich działa większa siła? A może siły są jednakowe?

**257.** Naczynie z gazem jest izolowane termicznie od otoczenia i przedzielone na dwie części, z których jedna jest zamknięta tłokiem wywierającym na gaz stałe ciśnienie  $p$  (rys. 1). Jeżeli grzałka elektryczna dostarczy do wnętrza pewną ustaloną ilość ciepła  $Q$ , to w którym przypadku tłok przesunie się bardziej:

- gdy podgrzejemy lewą część naczynia,
- gdy podgrzejemy prawą część naczynia,
- gdy połowę ciepła dostarczymy lewej części, a połowę – prawej?

Kanałik łączący obie części naczynia jest tak wąski, że temperatura nie ulega wyrównaniu.



Rys. 1

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1997

Przypominamy treść zadań:

**248.** Kasia i Basia siedzą na huśtawce opartej na dwóch podpórkach odległych od siebie o  $d$  i połączonych z tłokami o powierzchniach  $S_1$  i  $S_2$  wywierającymi parcie na ciecz (rys. 2); odległości dziewczynek od punktów podparcia wynoszą odpowiednio  $l_1$  i  $l_2$ . Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry oraz ciężary dziewczynek  $P_1$  i  $P_2$ , aby huśtawka pozostawała w równowadze? Ciężar huśtawki i tłoków pominać.

**249.** „Czarna skrzynka” zawiera układ oporników i cztery wyprowadzenia, przy czym do dwóch spośród nich przykładamy ustalone napięcie  $U$  ze źródła zasilania, a do pozostałych dwóch dołączamy woltomierz o bardzo wielkim oporze własnym i mierzymy napięcie  $U'$ . Istnieje sześć możliwych sposobów przyłączenia zasilania i woltomierza do „czarnej skrzynki”, a zatem sześć możliwych wartości  $U'$ . Zaprojektować możliwie najprostszy schemat „czarnej skrzynki”, taki, aby wśród nich znalazły się  $U' = 0,75U$ ,  $U' = 0,5U$  i  $U' = 0,25U$ .

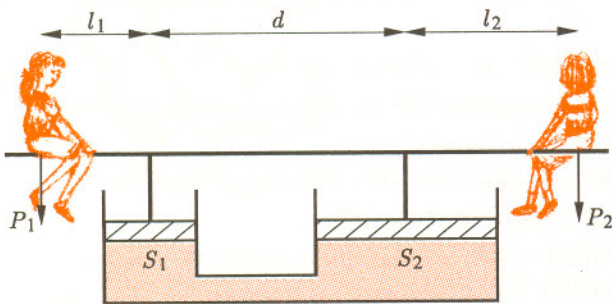
**248.** Gdy lewy tłok przesunie się w dół o  $x_1$ , prawy przesunie się w górę o  $x_2 = x_1 S_1 / S_2$  (możemy założyć nieściśliwość cieczy). Oznacza to, że dźwignia obróci się względem punktu odległego o  $d_1 = d S_2 / (S_1 + S_2)$  od lewego pręta i o  $d_2 = d S_1 / (S_1 + S_2)$  od prawego. Punkt ten można uznać za punkt podparcia dźwigni, skąd wynika warunek równowagi

$$P_1(l_1 + d_1) = P_2(l_2 + d_2),$$

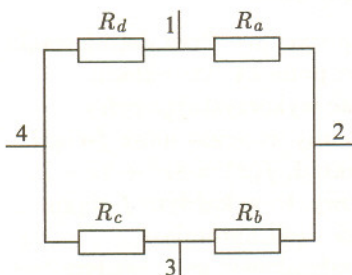
czyli

$$P_1(l_1 S_1 + l_1 S_2 + d S_2) = P_2(l_2 S_1 + l_2 S_2 + d S_1).$$

**249.** Jedno z rozwiązań (czy najprostsze, okaże się po przejrzaniu listów od Czytelników) jest przedstawione na rysunku 3, gdzie wartości oporu spełniają związki:  $R_b = R_a(\sqrt{217} - 1)/36$ ,  $R_c = 3R_b - R_a = R_a(\sqrt{217} - 13)/12$ ,  $R_d = 9R_b = R_a(\sqrt{217} - 1)/4$ . Wtedy  $U' = 0,75U$  otrzymujemy po przyłączeniu napięcia  $U$  do wyjść 2 i 3, a woltomierza do wyjść 1 i 4;  $U' = 0,5U$  – po przyłączeniu napięcia do 2 i 4, a woltomierza do 1 i 3;  $U' = 0,25U$  – po przyłączeniu napięcia do 1 i 4, a woltomierza do 2 i 3.

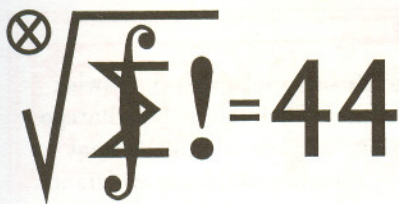


Rys. 2



Rys. 3





## Zadania z matematyki nr 359, 360

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 1998

**359.** Czy istnieje para funkcji  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniających dla każdej liczby  $x \in \mathbb{R}$  równania  $f(g(x)) = x^2$  oraz  $g(f(x)) = x^4$ ?

**360.** Dany jest ciąg liczb rzeczywistych  $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$  o następującej własności: po odrzuceniu dowolnego wyrazu pozostałe można podzielić na takie dwie grupy po  $n$  wyrazów, że suma wyrazów w pierwszej grupie jest równa sumie wyrazów w drugiej. Dowieść, że wszystkie wyrazy ciągu są równe.

Twierdzenie podane w zadaniu 360, przy dodatkowym założeniu, że liczby  $a_i$  są całkowite, było kiedyś zadaniem olimpijskim (patrz: J. Browkin, *Zadania z olimpiad matematycznych*, tom 5, WSiP, Warszawa 1980, zadanie 82). Uogólnienie na przypadek ciągów o wyrazach rzeczywistych zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1997

Przypominamy treść zadań:

**351.** Wyznaczyć największą liczbę naturalną  $n$ , dla której istnieją czteroelementowe zbiory  $A_1, \dots, A_n$  o własności: każdy zbiór  $A_i$  ma z każdym innym zbiorem  $A_j$  dokładnie jeden element wspólny, ale nie istnieje wspólny element wszystkich zbiorów  $A_i$ .

**352.** Funkcja różniczkowalna  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełnia wraz z pewną funkcją  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  równanie  $f(x) = g(f'(x))$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Dowieść, że funkcja  $f$  jest wypukła lub wklęsła.

**351.** Załóżmy, że  $A_1, \dots, A_n$  są zbiorami czteroelementowymi o zadanej własności. Niech  $A_1 = \{a, b, c, d\}$ . Niech  $I_a$  będzie zbiorem tych numerów  $i$  ( $2 \leq i \leq n$ ), dla których  $a \in A_i$ . Analogicznie określamy zbiory  $I_b, I_c, I_d$ . Zbiór  $A_1$  ma z każdym innym zbiorem  $A_i$  dokładnie jeden element wspólny. Stąd wynika, że zbiory  $I_a, I_b, I_c, I_d$  są rozłączne, a ich suma jest całym zbiorem  $\{2, \dots, n\}$ . Można przyjąć (zmieniając ewentualnie oznaczenia), że  $I_a$  jest najliczniejszym z tych czterech zbiorów. Załóżmy, że liczy on  $m$  elementów. Zachodzi więc nierówność  $m \geq (n-1)/4$ .

Możemy też założyć (w razie potrzeby znów zmieniając oznaczenia), że  $I_a = \{2, \dots, m+1\}$ . Wobec tego  $a \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m+1}$ . W myśl postulowanej własności,  $a$  nie jest elementem wszystkich zbiorów  $A_i$ ; tak więc  $m+1 < n$  oraz  $a \notin A_n$ . Każdy ze zbiorów  $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$  zawiera jakiś element zbioru  $A_n$ ; są to różne elementy (bo każde dwa zbiory  $A_i, A_j$  o numerach  $1 \leq i < j \leq m+1$  mają już wspólny element  $a$ ). W takim razie liczba tych zbiorów nie przekracza 4, a to znaczy, że  $m \leq 3$ . W połączeniu z uzyskaną wcześniej nierównością daje to oszacowanie  $n \leq 13$ .

Nietrudno sprawdzić, że określając

$$A_i = \{i-11, i-5, i-1, i, i+2, i+8, i+12\} \cap \{1, \dots, 13\}$$

dla  $i = 1, \dots, 13$  otrzymujemy przykład trzynastu zbiorów spełniających podane warunki. Zatem  $n = 13$  jest największą możliwą wartością  $n$ .

**352.** Wystarczy wykazać, że  $f'$  jest funkcją monotoniczną. Przypuśćmy więc, że tak nie jest. Dla pewnej trójki liczb rzeczywistych  $a < b < c$  zachodzą wówczas nierówności

$$f'(a) < f'(b) > f'(c) \quad \text{lub} \quad f'(a) > f'(b) < f'(c);$$

przyjmijmy pierwszy wariant (drugi jest analogiczny).

Weźmy dowolną liczbę  $w$  spełniającą związki  $f'(b) > w > \max\{f'(a), f'(c)\}$ . Pochodna każdej funkcji różniczkowalnej rzeczywistej ma własność Darboux. Istnieją więc liczby  $u \in (a; b)$  oraz  $v \in (b; c)$  spełniające równanie  $f'(u) = w = f'(v)$ . Zgodnie z założeniem,  $f(u) = g(f'(u))$  oraz  $f(v) = g(f'(v))$ . Tak więc  $f(u) = f(v)$ . Niech  $p$  i  $q$  będą punktami przedziału  $\langle u; v \rangle$ , w których funkcja  $f$  osiąga swoje wartości ekstremalne na tym przedziale:

$$f(p) = \min_{u \leq x \leq v} f(x), \quad f(q) = \max_{u \leq x \leq v} f(x).$$

Z równości  $f(u) = f(v)$  oraz  $f'(u) = f'(v)$  wynika, że  $f'(p) = f'(q) = 0$ ; zatem  $f(p) = g(0) = f(q)$ . Stąd wniosek, że funkcja  $f$  jest na przedziale  $\langle u; v \rangle$  stała, i wobec tego  $f'(x) = 0$  dla  $x \in \langle u; v \rangle$ . Ale  $f'(b) > w = f'(u)$ . Otrzymana sprzeczność kończy dowód.



### Rozwiązanie zadania F 474.

Cząstka  $X$  jest przyzwolta i natychmiast po powstaniu ubiera się (podobnie jak kwarki) tworząc egzotyczny hadron. Jeżeli jej pęd jest znacząco większy od  $m_X c/2$ , to cząstka  $X$  wywołuje kaskady hadronowe, jak normalny hadron (porównaj rozwiązanie zadania poprzedniego), ale po każdym zderzeniu odradza się w nowej „krecji”. Jeżeli jednak jej pęd spadnie poniżej około  $m_X c/2$ , to przestaje wywoływać kaskady (może co najwyżej nadal zmieniać swoje hadronowe ubranko) i pomimo silnego oddziaływania prawie nie traci energii w materii detektora, co pozwala jej z niego wyjść jak cząstce słabo oddziałującej, takiej jak mion.



### Rozwiązanie zadania M 841.

Ustawienie może być następujące:  $x_k = k$  dla  $k$  nieparzystych i  $x_k = n - k$  dla  $k$  parzystych ( $k \leq n - 1$ ).

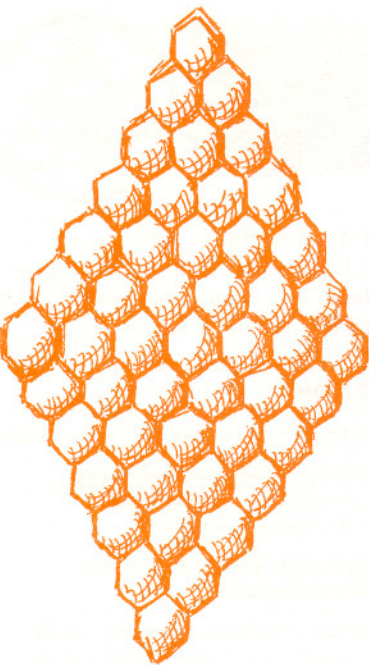
Wtedy dla ciągu  $s_m = \sum_{i=1}^m x_i$  zachodzi  $n | s_{2k-1} - k$  (gdyż

$$s_{2k-1} = k^2 + (k-1)n - (k-1)k = (k-1)n + k, \text{ podobnie}$$

$n | s_{2k} - (n - k)$ . Rozpatrując wszystkie cztery możliwości parzystości bądź nieparzystości  $i$  i  $j$  stwierdzamy, że  $x_{i+1} + \dots + x_j = s_i - s_j$  nie jest podzielne przez  $n$  dla  $0 < i < j < n$ .

Pytanie dodatkowe: Ile jest takich ustawień?





Wybuch supernowej to jedno z najefektowniejszych i najciekawszych zjawisk w Kosmosie. W danej galaktyce supernowe wybuchają co kilkaset lat, dlatego śledząc jedynie niezbyt odległe galaktyki można zaobserwować kilkadziesiąt supernowych rocznie. Jednak w naszej Galaktyce ostatnią eksplozję widziano w 1604 r. – była to tzw. supernowa Keplera. Co prawda w 1987 r. wybuchła supernowa bardzo blisko, bo w Wielkim Obłoku Magellana – jednak formalnie było to poza naszą Galaktyką.

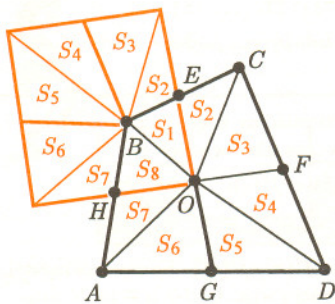
W maksimum jasności supernowa świeci z mocą porównywalną z łączną mocą wszystkich gwiazd galaktyki, zdawałoby się więc, że takiego wydarzenia w naszej Galaktyce nie sposób przeoczyć. Tymczasem wszystko wskazuje na to, że jednego takiego błysku naprawdę nie zauważono. Mianowicie radioźródłem Cassiopeia A jest bardzo słaba w zakresie optycznym, rozprężająca się mgławica, z której tempa ekspansji oceniono, że musiała powstać między 1660 a 1675 rokiem. Przecież wtedy istniały już teleskopy i obserwatoria! Przypuszcza się, że blask eksplozji mogły przesłonić wyjątkowo gęste obłoki tworzonego wtedy pyłu, choć sprawa nie jest do końca rozwiązana.

Wybuchowi supernowej towarzyszy wyrzucenie z prędkością tysięcy kilometrów na sekundę znacznej części materii gwiazdy. Materia ta może wtedy zgęszczać napotkaną materię międzygwiazdową i inicjować w ten sposób powstawanie nowych gwiazd, lub też po prostu rozplynać się w przestrzeni. Wielka, bo mająca około  $3^\circ$  średnicy, Mgławica Pierzasta w Łabędziu to pozostałość po bardzo dawnej eksplozji. Młodsza jest Mgławica Krab w Byku, licząca niecałe 950 lat. Oba te wybuchy nastąpiły w naszej Galaktyce. Ale na jeszcze wcześniejszym etapie życia ujrano mgławicę powstałą w 1993 r. przy wybuchu supernowej w galaktyce M 81 w Wielkiej Niedźwiedzicy. Grupa hiszpańskich radioastronomów już po ośmiu miesiącach od wybuchu – co jest rekordem – uzyskała za pomocą interferometrii wielkobazowej radiowy obraz ekspandującej mgławicy. Po tych ośmiu miesiącach mgławica miała średnicę 2 milisekund łuku, co przy odległości galaktyki wynoszącej 12 mln lat świetlnych odpowiada w przybliżeniu miesiącowi świetlnemu. Obraz mgławicy już wtedy wykazywał niewielką asymetrię. Może to oznaczać, że np. supernowa była składnikiem układu podwójnego. Szkoda, że wybuchów supernowych nie umiemy jeszcze przewidywać.

Tomasz KWAST



**Rozwiązanie zadania M 842.**  
Rozcinamy dany czworokąt na cztery czworokąty wzdłuż odcinków łączących środki przeciwległych boków. Następnie składamy je tak, by punkty  $A, B, C, D$  zeszły się w jednym punkcie i powstał równoległobok.



Dokładniej: Niech  $E, F, G, H$  będą środkami odcinków  $BC, CD, DA, AB$  odpowiednio. Czworokąt  $BEOH$  pozostaje na swoim miejscu,  $ECFO$  obracamy wokół  $E$  o  $180^\circ$ ,  $AHOG$  wokół  $H$  o  $180^\circ$ , natomiast  $OFDG$  przesuwamy o wektor  $\overrightarrow{DB}$ . Każda z rozważanych w zadaniu sum pól, czyli  $S_1 + S_2 + S_5 + S_6$  i  $S_3 + S_4 + S_7 + S_8$  (gdzie  $S_i$  to pole odpowiedniego trójkąta – patrz rysunek), równa jest połowie pola otrzymanego równoległoboku – są to sumy pól dwóch trójkątów o równych i równoległych podstawach oraz sumie wysokości równej odpowiedniej wysokości równoległoboku.

## Kwiecień

W kwietniowe wieczory najokazalej widać na niebie gwiazdozbiór Lwa. Pod nim, tzn. niżej w kierunku południowym, rozciąga się w przybliżeniu równoległe do horyzontu bardzo długi gwiazdozbiór Węża Wodnego (zwanego coraz częściej Hydram) – jeden z najdłuższych na całym niebie, lecz zawierający niezbyt jasne gwiazdy. Najjaśniejsza gwiazda Lwa, Regulus, leży niemal dokładnie na ekliptyce. Jest gwiazdą wielokrotną. Najjaśniejszym składnikiem (1,34 mag) jest gorąca gwiazda ciągu głównego o temperaturze 10 000 K. Towarzyszem jest układ podwójny o jasnościach składników 7,6 i 13 mag. Cały układ leży w odległości 20 pc. Nazwę, oznaczającą Małego Króla, nadał gwieździe Kopernik. Około  $10^\circ$  nad Regulusem znajduje się radiant listopadowego roju meteorów – leonidów. W 1966 r. obserwowano wyjątkowo obfity deszcz tych meteorów pochodzących z rozpadu komety Tempel-Tuttle.

Wenus i Jowisz w kwietniu znajdują się w Wodniku, Saturn w Rybach, a Mars w Baranie. Wszystkie te planety można próbować odszukać na wschodnim niebie nad ranem, z tym że Marsa zobaczyć raczej się nie da, bo jest za blisko Słońca. Pełnia Księżyca wypada 11 IV. Księżyc mocno zbliży się do Aldebarana 1 IV, a zakryje go 28 IV, zbliży się ponadto do Jowisza i Wenus 23 IV.

T.K.



## CYFROMANIA (4)

Kontynuujemy rozważania z poprzedniego Γ-limatiasu mające doprowadzić nas do scharakteryzowania możliwych końcówek potęg trójki.

$k = 3$ . Okres ciągu reszt z dzielenia potęg trójki przez 1000 wynosi  $NWW(100, 2) = 100 = 5 \cdot 20$ . Każda końcówka dwucyfrowa może być uzupełniona do trzycyfrowej przez dopisanie jednej z 5 cyfr – parzystej lub nieparzystej (p lub n). Bezpośrednie wyciszenie reszt z dzielenia potęg trójki przez 200 pokazuje, że trzecia cyfra od końca musi być (przy danych ostatnich 2 cyfrach):

01 – p	21 – n	41 – p	61 – n	81 – p
03 – p	23 – n	43 – p	63 – n	83 – p
07 – n	27 – p	47 – n	67 – p	87 – n
09 – p	29 – n	49 – p	69 – n	89 – p

W dziewięciu przypadkach trzecie cyfry od końca są nieparzyste. Szansę na rozwiązanie drugiej części zadania dają więc końcówki: 707, 121, 323, 929, 747, 161, 363, 969 i 787.

$k = 4$ . Okres wynosi  $NWW(500, 4) = 500$ , czyli 5 razy więcej niż poprzednio. Znowu, każda końcówka trzycyfrowa powtarza się z okresem 100. Okres 100 ma też ciąg reszt z dzielenia potęg trójki przez 2000, zatem 500 dopuszczalnych reszt z dzielenia przez 10000 powstaje przez dodanie do 100 reszt z dzielenia przez 2000 liczb: 0, 2000, 4000, 6000 i 8000. Tak więc każda końcówka trzycyfrowa „pamięta” parzystość czwartej cyfry od końca,

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI

(2') *Wyjaśnienie oszustwa (2)*: Podany dowód jest błędny. Suma liczb niewymiernych nie musi być liczbą niewymierną. Poprawny dowód wymaga nieco bardziej subtelnych rozważań.

*Rozwiązanie*: Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\sqrt{3} - \sqrt{8} - \sqrt{2}$  jest wymierna i oznaczmy ją przez  $w$ . Wtedy

$$w = \sqrt{3} - \sqrt{8} - \sqrt{2},$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{8},$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2},$$

$$2\sqrt{2}(w + 1) + (w - 1)(w + 1) = 0.$$

Dzieliąc ostatnią równość przez  $w + 1$  otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby  $w$ , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

JWR

ale poza postulatem parzystości lub nieparzystości ta czwarta cyfra może być dowolna.

$k \geq 5$ . Okres wynosi  $NWW(5^{k-1} \cdot 4, 2^{k-2}) = 5 \cdot 10^{k-2}$ , czyli 10 razy więcej niż dla  $k - 1$ . Zatem potęgi trójki przyjmują 10 razy więcej końcówek  $k$ -cyfrowych niż  $(k - 1)$ -cyfrowych, a to znaczy, że na  $k$ -tą cyfrę od końca nie ma żadnych ograniczeń i możemy ją zapostulować w sposób dowolny.

Powyższe rozważania porządkuje następujące spostrzeżenie. Potęgi trójki przy dzieleniu przez 80 dają ciąg reszt okresowy z okresem 4. Zatem tylko 4 reszty z dzielenia przez 80 są dopuszczalne: 1, 3, 9 i 27.

Przy dzieleniu przez  $10^4$  otrzymujemy 500 możliwych reszt. Ponieważ  $\frac{10^4}{80} = 125 = \frac{500}{4}$ , więc dopuszczalnymi resztami z dzielenia potęg trójki przez  $10^4$  są wszystkie te reszty, które dzielą się przez 80 z resztą 1, 3, 9 lub 27.

Pozwala to scharakteryzować końcówki potęg trójki:

**Wniosek**: Liczba  $0 < r < 10^k$  może być  $k$ -cyfrową końcówką potęgi trójki wtedy i tylko wtedy, gdy:  $r$  daje z dzielenia przez 80 resztę 1, 3, 9 lub 27 (dla  $k \geq 4$ ),  $r$  daje z dzielenia przez 40 resztę 1, 3, 9 lub 27 (dla  $k = 3$ ),  $r$  daje z dzielenia przez 20 resztę 1, 3, 7 lub 9 (dla  $k = 2$ ),  $r$  jest równe 1, 3, 7 lub 9 (dla  $k = 1$ ).

Stosując powyższe kryterium do dziewięciu wybranych poprzednio końcówek trzycyfrowych stwierdzamy, że czwarta cyfra od końca musi być:

707 – n	929 – n	363 – n
121 – n	747 – p	969 – p
323 – p	161 – p	787 – n

Zatem druga część zadania ma odpowiedź pozytywną. Są 4 liczby dwucyfrowe, które na końcu potęgi trójki mogą się znaleźć powtórzone dowolnie wiele razy: 23, 47, 61 i 69.

JWR

(3') *Wyjaśnienie oszustwa (3)*: Podstawienie  $t = e^{1/x}$  nie jest ciągłe na przedziale całkowania  $[-1, 1]$ , gdyż nie jest określone w 0. Obrazem przedziału całkowania nie jest przedział  $[\frac{1}{e}, e]$ , lecz jego dopełnienie w  $(0, \infty)$ .

Poprawny rachunek powinien wyglądać następująco:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx =$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} =$$

$$= - \int_{1/e}^0 \frac{dt}{t^2 + 1} - \int_0^e \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= \int_0^{1/e} \frac{dt}{t^2 + 1} + \int_e^\infty \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctg t \Big|_0^{1/e} + \arctg t \Big|_e^\infty =$$

$$= \arctg \frac{1}{e} + \frac{\pi}{2} - \arctg e = 2 \arctg \frac{1}{e}$$

lub, jak kto woli,  $\pi - 2 \arctg e$ .

JWR