

SPIS TREŚCI NUMERU 3(286)

Gdzie kończy się
 Tablica Mendelejewa?
Robert Smolańczuk

Zasada szuffadkowa Dirichleta
 w mechanice
Henryk Żołądek

Zadania

Mała Delta

Aktualności
 (nie tylko) fizyczne

O początkowych cyfrach
 symboli Newtona
Waldemar Pompe

Różne rozkłady
 na sumy kwadratów
*Lew Kurlandczyk
 i Andrzej Nowicki*

Klub 44

Patrz w niebo

Marzec

Gammalimatias

W następnym numerze:

Automaty komórkowe

Okladkę i ilustracje wykonał
Krzysztof Biesaga

Wybór artykułów z *Delta*
 ukazuje się w języku angielskim
 w sieci Internet pod adresem
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:
 Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
 Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
 Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichoński
 str. 1 – wiceprzewodniczący
 Krzysztof Cieśliński
 Jan A. Gaj
 Piotr Goldstein
 Tomasz Hofmokl
 str. 4 Andrzej Hryniewicz
 Wiesław A. Kamiński
 Marta Kicińska-Habior
 str. 7 Krzysztof Maślanka
 Andrzej Mąkowski
 Zdzisław Pogoda
 str. 8 Feliks Przytycki
 Michał Różyczka
 Konrad Rudnicki
 str. 9 Zbigniew Semadeni
 Grzegorz Sitariski
 Andrzej Woszczyk
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
 Wiktor Bartol
 Krzysztof Biesaga
 Wojciech Kopczyński – z-ca red. naczk.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. naczk.
 Tomasz Kwast
 Anna Ludwicka
 Anna Rudnik
 Paweł Strzelecki
 Joanna Udalska
 Anna Wojtyra
 Piotr Zalewski
 Adres Redakcji:
 ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
 tel. 843-02-41(-2) wewn. 21
 PAWELST@MIMUW.EDU.PL
 Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej
 w Warszawie, ul. Mińska 65.
 Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
 prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena
 jednego numeru w 1998 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
 okresu prenumeraty.

str.12 W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
 cena numeru w 1998 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

str.14 **Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje
 dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

str.16 Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1998 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

	krajową	ze zleceniem za granicę	
	5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
	5 III	20 II	na II kwartał,
	5 VI	20 V	na III kwartał,
	5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

Numerzy archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie. Niestety, nie dysponujemy już numerami z lat 1974–1984.

Gdzie kończy się Tablica Mendelejewa?

Robert SMOLAŃCZUK

Pod koniec 1994 roku w ośrodku badawczym GSI (Gesellschaft für Schwerionenforschung) w Darmstadzie w Niemczech międzynarodowy zespół fizyków wytworzył ciężkie pierwiastki o liczbach atomowych $Z = 110$ i $Z = 111$. Pierwiastek o liczbie atomowej $Z = 112$ wyprodukowano w tym samym ośrodku na początku 1996 roku. Układ okresowy pierwiastków chemicznych, nazywany często Tablicą Mendelejewa, wzbogacił się więc o trzy nowe pierwiastki. Nie mają one jeszcze powszechnie uznawanych nazw własnych, są więc oznaczane przez liczby 110, 111 i 112, które są największymi liczbami atomowymi zaobserwowanymi dotychczas.

Znane obecnie pierwiastki Rf (rutherford, $Z = 104$), Db (dubna, 105), Sg (seaborg, 106), Bh (bohr, 107), Hs (has, 108), Mt (meitner, 109), 110, 111 i 112, jak również pierwiastki o liczbach atomowych $Z > 112$, które planuje się wytworzyć w laboratoriach naukowych, nazywane są pierwiastkami superciężkimi. Izotopy każdego z tych pierwiastków, czyli ich jądra atomowe różniące się liczbą neutronów, nazywane są jądrami superciężkimi. Wszystkie znane jądra superciężkie powstały w reakcjach syntezy (złączenia) dwóch lżejszych jąder atomowych, w których bombardowano zjonizowanymi atomami-pociskami tarcze wykonane z bardzo cienkiej warstwy atomów innego pierwiastka.

Synteza pierwiastków 110, 111 i 112 poprzedzona była syntezą pierwiastków Bh, Mt i Hs dokonaną w pierwszej połowie lat osiemdziesiątych również w GSI w Darmstadzie. Zostały one wyprodukowane w układzie doświadczalnym składającym się ze źródła jonów, akceleratora, tarczy, układu selekcyjnego oraz układu detekcyjnego. Źródło jonów dostarcza zjonizowanych atomów-pocisków, które następnie są przyspieszane w akceleratorze do energii umożliwiającej zajście reakcji jądrowej podczas zderzenia wiązki pocisków z tarczą. Tarcza musi być dostatecznie cienka (grubość rzędu $0,5 \text{ mg/cm}^2$), aby produkt syntezy nie ugrzązł w niej. W celu zapobieżenia zbyt szybkiemu przepaleniu tarczy przez wiązkę używa się kilku tarcz umieszczonych na kole wirującym w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku padania wiązki. Wirowanie zapewnia równomierne naświetlanie tarczy i umożliwia wypromieniowanie ciepła między kolejnymi naświetleniami, a więc chłodzenie tarczy. W układzie selekcyjnym, znajdującym się za tarczą, powstałe w wyniku bombardowania tarczy pożądane nieliczne produkty syntezy oddzielane są od tła zawierającego niepożądane produkty reakcji i bardzo liczne atomy-pociski, które przeszły przez cienką tarczę nie wchodząc w reakcję z jej atomami. Układ selekcyjny nazywany jest często filtrem prędkościowym, ponieważ oddziela zjonizowane produkty syntezy i atomy tła za pomocą kombinacji pól magnetycznych i elektrycznych wykorzystując fakt, że ciężkie produkty syntezy mają znacznie mniejszą prędkość od atomów tła. Dzieje się tak dlatego, że w przypadku syntezy względnie lekki pocisk musi podzielić się swą energią kinetyczną ze znacznie cięższym i początkowo nieruchomym jądrem tarczy (ściśle mówiąc – nieruchomym w kierunku padania wiązki), z którym łączy się w jedno jądro przemieszczające się w kierunku układu detekcyjnego. Układ detekcyjny umożliwia zarejestrowanie i zidentyfikowanie produktów syntezy. Jego głównym elementem jest detektor krzemowy, w którym zatrzymują się zsyntetyzowane jądra. Układ detekcyjny mierzy chwilę implantacji oraz położenie i energię kinetyczną zsyntetyzowanego jądra, a także chwilę rozpadu oraz położenie i energię kinetyczną produktów rozpadu zsyntetyzowanego jądra i jąder, które powstają w wyniku kolejnych rozpadów. Zsyntetyzowane w GSI izotopy pierwiastków Bh, Hs, Mt, 110, 111 i 112 rozpadają się przez emisję cząstki α . Rozpad ten zapoczątkowuje łańcuch kolejnych rozpadów α . Czas, upływający między implantacją a pierwszym rozpadem, jest czasem, jaki przeżyło

Rozróżniamy dwa rodzaje jąder atomowych: jądra trwałe oraz takie, które ulegają rozpadowi zmieniającym ich skład, czyli prowadzącym do innych już jąder. Rozpad może zaistnieć tylko wtedy, gdy jest to korzystne energetycznie. Innymi słowy, warunkiem koniecznym każdego rozpadu jest, aby suma mas wszystkich produktów rozpadu była mniejsza od masy układu wyjściowego.

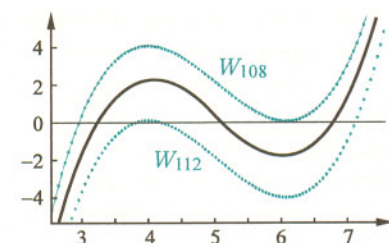
Dla jąder najcięższych najważniejszymi rozpadami są: rozpad α i samorzutne rozszczepienie. Rozpadem α nazywamy wyrzucenie z jądra cząstki α , tj. jądra helu ${}^4\text{He}_2$. Rozszczepienie jądra atomowego polega natomiast na podziale jądra na części (fragmenty) o porównywalnej wielkości.

Wielkością fizyczną charakteryzującą szybkość rozpadu jest czas (okres) połowicznego zaniku $T_{1/2}$. Jest to czas, w którym liczba jąder, w wyniku rozpadu, maleje do połowy.



Rozwiązanie zadania M 840.

Jeśli a, b, c spełniają nasz układ równań, to są one (wobec wzorów Viète'a) pierwiastkami wielomianu $W_r(x) = x^3 - 15x^2 + 72x - r$ dla pewnego $r \in \mathbb{R}$. Obliczając pochodną stwierdzamy, że W_r ma maksimum w $x = 4$ i minimum w $x = 6$, jest rosnący na $(-\infty, 4] \cup [6, \infty)$ i malejący na $[4, 6]$. Wielomian W_r ma 3 pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy $r \in [108, 112]$, przy czym można sprawdzić, że W_{108} ma pierwiastki 3, 6, 6, a W_{112} ma pierwiastki 4, 4, 7. Dla $r \in (108, 112)$ pierwiastki są różne, po jednym w każdym z przedziałów (3, 4), (4, 6), (6, 7). W dodatku każdy punkt każdego z tych trzech przedziałów jest pierwiastkiem pewnego wielomianu W_r (bowiem wykres W_r powstaje z przesuwania wykresu W_{108}).

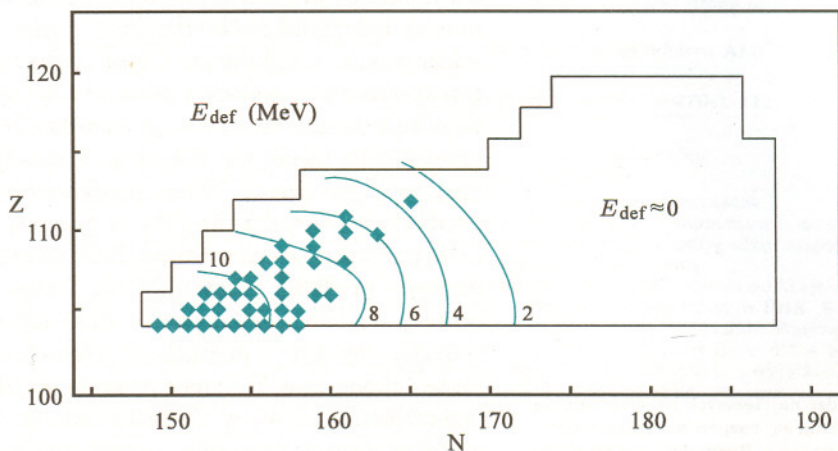


Wynika z tego, ostatecznie, że $A = [3, 7]$.

zsyntetyzowane jądro z dokładnością do czasu przelotu zsyntetyzowanego jądra od tarczy do detektora. Najkrócej żyjącym jądrem superciężkim, jakie może być zaobserwowane po jego zsyntetyzowaniu we współczesnych eksperymentach, jest zatem jądro przeżywające tylko czas przelotu od tarczy do detektora, wynoszący około 1 μ s. Różnica czasu między kolejnymi rozpadami jest czasem, jaki przeżyło dane jądro w łańcuchu. Znajomość przynajmniej jednego jądra (jego własności fizycznych) pozwala zidentyfikować wszystkie jądra w łańcuchu.

Z analizy systematycznego zmniejszania się prawdopodobieństw zajścia reakcji syntezy zmierzonych dla pierwiastków Rf, Db, Sb, Bh, Hs i Mt wynikało, że wytworzenie i zaobserwowanie pierwiastka 110 będzie wymagało podniesienia efektywności układu doświadczalnego około dziesięciokrotnie w stosunku do efektywności, przy której został zaobserwowany pierwiastek Hs w roku 1984. W ciągu 10 lat dokonano istotnych ulepszeń układu doświadczalnego, które pozwoliły podjąć udaną próbę syntezy nie tylko pierwiastka 110, lecz także pierwiastków 111 i 112. Dzięki tym usprawnieniom zaobserwowano cztery jądra $^{269}110_{159}$ w ciągu 12 dni bombardowania tarczy $^{208}\text{Pb}_{126}$ jonami $^{62}\text{Ni}_{34}$ przyspieszonymi do energii 311 MeV. Natężenie wiązki pocisków wynosiło $3 \cdot 10^{12}$ jonów/s. Użycie jako pocisku atomu niklu bogatszego o dwa neutrony zaowocowało wzrostem prawdopodobieństwa zajścia reakcji syntezy. W ciągu 3,5-dniowego bombardowania tarczy ołowiowej jonami $^{64}\text{Ni}_{36}$ o energii 313 MeV zaobserwowano sześć przypadków syntezy jądra $^{271}110_{161}$. Syntezę jądra $^{271}110_{161}$ przeprowadzano także przy nieco innych energiach pocisków. W sumie zarejestrowano dziewięć przypadków syntezy jądra $^{271}110_{161}$. W GSI zaobserwowano ponadto trzy jądra $^{272}111_{161}$ i dwa jądra $^{277}112_{165}$. Zsyntetyzowane jądra $^{269}110_{159}$, $^{271}110_{161}$, $^{272}111_{161}$ i $^{277}112_{165}$ rozpadły się przez emisję cząstki α po czasie rzędu 0,1–1 ms.

Wszystkie wytworzone dotychczas jądra superciężkie są zaznaczone na rysunku 1 kwadracikami. Na osi poziomej odłożona jest liczba neutronów N , a na pionowej liczba protonów Z w jądrze atomowym. Rysunek ten przedstawia także teoretyczne wartości energii deformacji dla parzysto-parzystych (parzyste zarówno Z , jak i N) jąder superciężkich już znanych, jak również tych jeszcze nie odkrytych. Energia deformacji to wartość, o jaką obniża się energia jądra dzięki temu, że przyjmuje ono kształt zdeformowany zamiast kulistego. Energia ta wyrażona jest w megaelektronowoltach (MeV). Jej wartości liczbowe są podane przy poziomicach.



Rys. 1

Jądra atomowe klasyfikujemy jako dobrze zdeformowane ($E_{\text{def}} \gtrsim 2$ MeV), przejściowe ($E_{\text{def}} \lesssim 2$ MeV) lub kuliste ($E_{\text{def}} \approx 0$). Z rysunku 1 wynika, że wszystkie zsyntetyzowane dotychczas jądra superciężkie są dobrze zdeformowane. Niestety, nie mamy na razie eksperymentalnego rozstrzygnięcia, czy jądra te są zdeformowane, czy nie. Z rysunku 1 wynika również, że najcięższe z wyprodukowanych dotychczas jąder, $^{277}112_{165}$, leży bardzo blisko obszaru hipotetycznych kulistych jąder superciężkich ($E_{\text{def}} \approx 0$), które

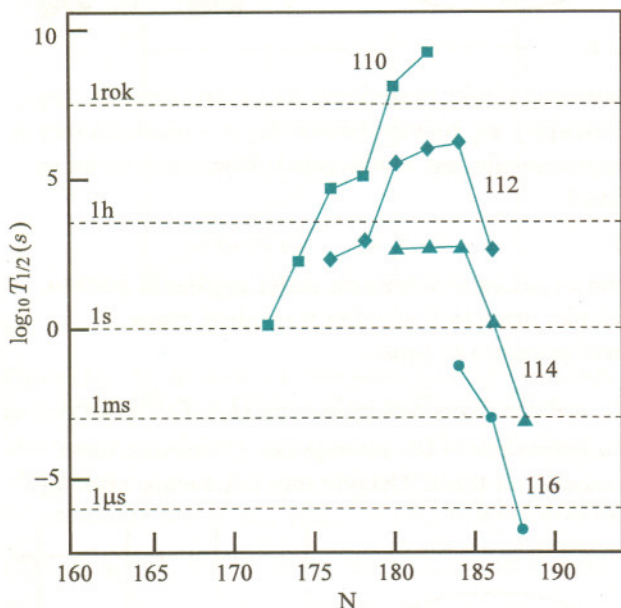
zbudowane są z większej liczby neutronów w porównaniu ze zdeformowanymi jądrami superciężkimi.

Jądra atomowe mogą rozpaść się również poprzez rozpad β^- polegający na emisji elektronu prowadzącej do przemiany danego jądra ${}^A_Z N$ w jądro ${}^A_{(Z+1)}(N-1)$. Możliwa jest też przemiana β^+ (emisja pozytonu) lub wychwyt jednego z elektronów otaczających jądro (WE). Oba te procesy skutkują powstaniem jądra ${}^A_{(Z-1)}(N+1)$. Znaczna liczba jąder atomowych nie ulega żadnej z przemian β^- , β^+ oraz WE. Są to tzw. jądra β -stabilne.

Obliczone czasy połowicznego zaniku $T_{1/2}$ dla wielu kulistych jąder superciężkich, pokazane na rysunku 2, są dostatecznie duże, aby jądra te mogły być gromadzone i przechowywane przez dłuższy czas, gdyby udało się je zsyntetyzować. Na przykład, czas połowicznego zaniku, obliczony dla β -stabilnego jądra ${}^{292}_{110}_{182}$, wynosi 51 lat. Czasy połowicznego zaniku przewidywane dla wielu kulistych izotopów pierwiastków superciężkich, poczynając od Rf, a kończąc na pierwiastku 115, są większe niż 1 sekunda. Umożliwia to badanie własności chemicznych tych pierwiastków, gdyby ich kuliste izotopy zostały zsyntetyzowane. Synteza kulistych izotopów tych pierwiastków otworzyłaby szerokie pole badań dla chemii i fizyki atomowej.

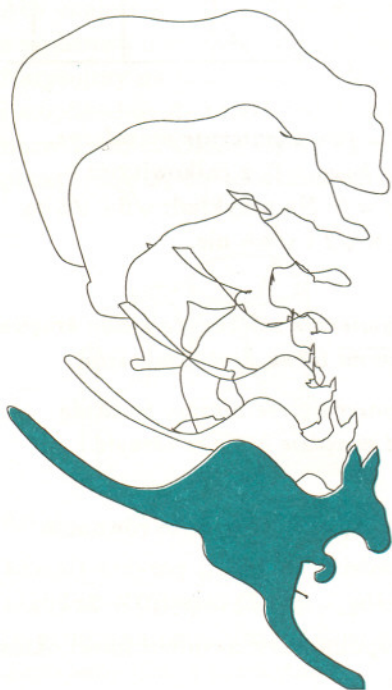
Pamiętać jednak należy, że do obliczenia czasów połowicznego zaniku zastosowany został względnie prosty model opisujący rozpad α . Rozpad ten jest przewidywany jako dominujący dla jąder superciężkich. Użyty model może nie uwzględniać pewnych efektów w dostatecznym stopniu. Może to oznaczać, że kuliste jądra superciężkie są nieco bardziej stabilne w stosunku do przewidywań teoretycznych przedstawionych na rysunku 2.

Wiele zdeformowanych jąder superciężkich udało się wytworzyć w warunkach laboratoryjnych (patrz rys. 1). W niezbyt odległej przyszłości zostaną podjęte próby syntezy kulistych jąder superciężkich. Jądra te cechują się większą liczbą neutronów w porównaniu ze zdeformowanymi jądrami superciężkimi. Do ich syntezy potrzebne są więc pociski o dużej liczbie neutronów, która nie mogła być osiągnięta przy dotychczas stosowanych stabilnych pociskach. Dlatego duże nadzieje na syntezę kulistych jąder superciężkich wiązane są z opanowaniem techniki neutrononadmiarowych wiązek radioaktywnych.



Rys. 2

Przewidywany obszar kulistych jąder superciężkich jest nieco większy od przedstawionego na rysunku 1, gdyż ten ostatni ogranicza się tylko do jąder parzysto-parzystych. Jak wiemy z obserwacji lżejszych jąder, jądro bogatsze o jeden proton bądź proton i neutron od danego jądra parzysto-parzystego ma czas połowicznego zaniku porównywalny, a czasem istotnie większy, od czasu połowicznego zaniku danego jądra parzysto-parzystego. Dzięki tej prawidłowości pierwiastek 121 być może zamknie Tablicę Mendelejewa. Przynajmniej na razie jest prawdopodobnie najcięższym pierwiastkiem, możliwym do zsyntetyzowania po opanowaniu techniki neutrononadmiarowych wiązek radioaktywnych. Rozszerzenie Tablicy Mendelejewa o pierwiastki o $Z \geq 121$ wymaga wynalezienia metody umożliwiającej syntezę i detekcję jąder superciężkich żyjących krócej niż 1 μ s.



Rozwiązanie zadania M 839.

$\sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{m + \dots}}} > \sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{n + \dots}}}$. Dla $k = 1$ mamy oczywiście $\sqrt{m} > \sqrt{n}$. Dla $k = 2$ mamy $\sqrt{m + \sqrt{n}} > \sqrt{n + \sqrt{m}}$, bo $m - n = (\sqrt{m} + \sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n}) > \sqrt{m} - \sqrt{n}$.

Jeśli teraz $x > y > 0$, to $\sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{x}}} > \sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{y}}}$.

bo $m - n > \sqrt{m} - \sqrt{n} > \sqrt{m + x} - \sqrt{n + x} > \sqrt{m + y} - \sqrt{n + x}$.

Przedostatnia nierówność wynika z tego, że dla $m > n > 0$ funkcja $\sqrt{m + x} - \sqrt{n + x}$ jest, dla $x \geq 0$, malejąca.

Wystarczy teraz zastosować indukcję, by otrzymać naszą nierówność.

Zasada szufladkowa Dirichleta w mechanice

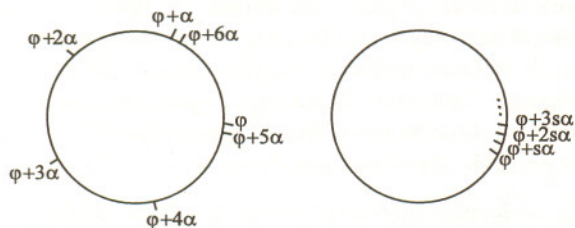
Henryk ŻOŁĄDEK

Zastosowania zasady Dirichleta, które opisujemy poniżej, opierają się na jednym podstawowym zjawisku.

Niech S^1 będzie okręgiem parametryzowanym przez kąt mod 2π . Rozważmy obrót tego okręgu o kąt α . Obrazy punktu φ przy powtarzaniu obrotu tworzą zbiór

$$\varphi, \varphi + \alpha, \varphi + 2\alpha, \varphi + 3\alpha, \dots \pmod{2\pi}$$

nazywany orbitą punktu φ .



Rys. 1.

Twierdzenie 1.

(a) Jeśli $\alpha/2\pi = p/q$, $q > 0$, jest ułamkiem nieskracalnym, to orbita każdego punktu okręgu jest zbiorem q -elementowym.

(b) Jeśli $\alpha/2\pi$ jest liczbą niewymierną, to orbita każdego punktu okręgu tworzy zbiór wszędzie gęsty na okręgu.

Zbiór A jest wszędzie gęsty na okręgu, jeśli każdy łuk zawiera przynajmniej jeden punkt zbioru A .

Dowód tego twierdzenia, w przypadku (b) przeprowadzony za pomocą zasady szufladkowej Dirichleta, pojawiał się w *Delcie* wiele razy (np. w artykule R. Kołodzieja o Wielkim Twierdzeniu Poncela w numerze 6/1997). Jego zastosowania wykraczają poza mechanikę, o czym można przekonać się np. rozwiązując samodzielnie poniższe zadanie (też już w *Delcie* omawiane).

Zadanie.

Rozważmy ciąg pierwszych cyfr potęg dwójki:

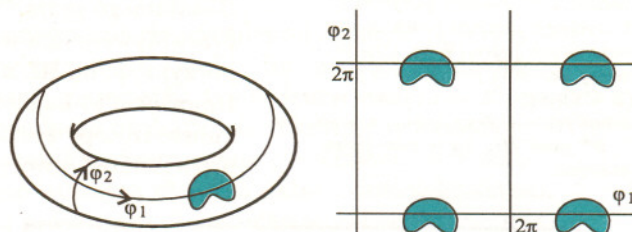
$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, \dots$$

Czy wystąpi w tym ciągu cyfra 7?

Okazuje się, że w zaskakująco dużej liczbie przykładów mechanicznych i geometrycznych zachodzi alternatywa analogiczna do tej z Twierdzenia 1.

Przykład 1. Obmotka torusa. Torus T^2 jest to iloczyn kartezjański dwu okręgów, $T^2 = S^1 \times S^1$; torus wygląda jak powierzchnia dętki (ściślej: jest jej topologicznie równoważny). Wygodnie jest przedstawiać go jako płaszczyznę φ_1, φ_2 zwiniętą w dwu prostopadłych kierunkach: wszystkie linie

$\varphi_1 = 2\pi k$ są utożsamiane; podobnie jest z liniami $\varphi_2 = 2\pi m$.



Rys. 2.

Rozważmy punkt materialny na płaszczyźnie φ_1, φ_2 , poruszający się ruchem bezwładnym i prostoliniowym (przyspieszenie jest równe zero). Równania ruchu są postaci

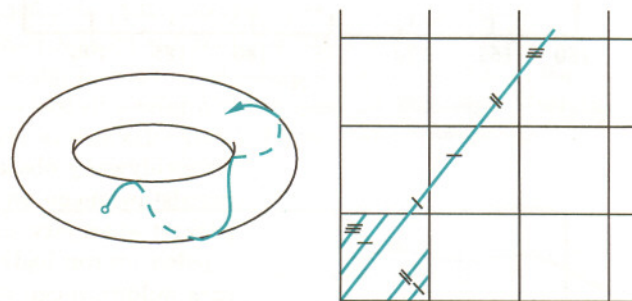
$$(1) \quad \dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2,$$

gdzie ω_1, ω_2 są składowymi stałej prędkości punktu, a kropka oznacza pochodną względem czasu.

Rozwiązaniami są proste

$$(2) \quad \varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \omega_1 t, \quad \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + \omega_2 t.$$

Równania ruchu i ich rozwiązanie (2) można teraz rzutować na torus. Otrzymamy tak zwaną obmotkę.



Rys. 3. Obmotka torusa.

Mówimy, że liczby ω_1, ω_2 są *wymiernie niezależne*, jeśli z równości $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$, z całkowitymi k_1, k_2 , wynika, że $k_1 = k_2 = 0$. Na przykład: $\sqrt{6}$ i $\sqrt{8}$ są wymiernie niezależne, a $\sqrt{2}$ i $\sqrt{8}$ – nie.

Twierdzenie 2.

(a) Jeśli ω_1 i ω_2 są wymiernie zależne, to każda krzywa fazowa (2), rzutowana na torus, jest zamknięta.

(b) Jeśli ω_1 i ω_2 są wymiernie niezależne, to każda krzywa fazowa (2) jest wszędzie gęsta w torusie.

Dowód.

(a) Jeśli $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, to równania z niewiadomą T ,

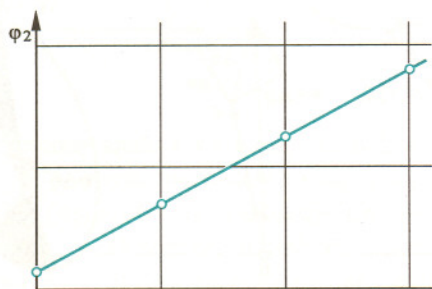
$$\varphi_1(T) = \varphi_1(0) + 2\pi k_2, \quad \varphi_2(T) = \varphi_2(0) - 2\pi k_1,$$

są niesprzeczne. Ich wspólne rozwiązanie stanowi okres krzywej (2) na torusie.

(b) Gdy ω_1 i ω_2 są wymiernie niezależne, to liczba ω_2/ω_1 jest niewymierna. Rozważmy punkty kolejnych przecięć krzywej fazowej (2) z południkiem $\varphi_1 = 0 \pmod{2\pi}$ (rysunek 4). Ich szerokości geograficzne będą równe

$$\varphi_{2,k} = \varphi_{2,0} + 2\pi(\omega_2/\omega_1)k \pmod{2\pi}.$$

To zaś jest orbita punktu $\varphi_{2,0}$ okręgu względem obrotu o kąt $2\pi\omega_2/\omega_1$. Z Twierdzenia 1 wynika, że jest ona gęsta na okręgu. Ponieważ kolejne gałęzie trajektorii (2) w T^2 są równoległe, więc dostajemy stąd gęstość całej krzywej (2) w torusie.



Rys. 4.

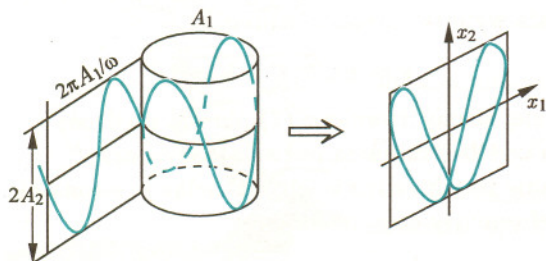
Przykład 2. Krzywe Lissajous. Figury Lissajous można oglądać na oscyloskopie, jeśli poda się dwa niezależne oscylujące napięcia na cewki odchylające. Matematycznie opisują się one następująco.

W prostokąt $|x_1| < A_1$, $|x_2| < A_2$ wpisujemy krzywą

$$(3) \quad x_1 = A_1 \sin(t + \alpha_1), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Poruszający się punkt materialny dokonuje niezależnych drgań: z częstotliwością 1 i amplitudą A_1 w poziomie i z częstotliwością ω i amplitudą A_2 w pionie.

Aby znaleźć kształt tej krzywej, weźmy walec z podstawą o promieniu A_1 i taśmę o szerokości $2A_2$. Narysujmy na taśmie sinusoidę o okresie $2\pi A_1/\omega$ i amplitudzie A_2 i naklejmy ją na powierzchnię boczną walca. Okaże się wtedy, że rzut sinusoidy na płaszczyznę x_1, x_2 to właśnie krzywa Lissajous.



Rys. 5.

Kształt krzywej Lissajous w istotny sposób zależy od liczby ω . Na przykład, dla $\omega = 1$ i $\alpha_1 = \alpha_2$ krzywa (3) to przekątna prostokąta. Dla $\omega = 1$ i $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$ dostajemy drugą przekątną.

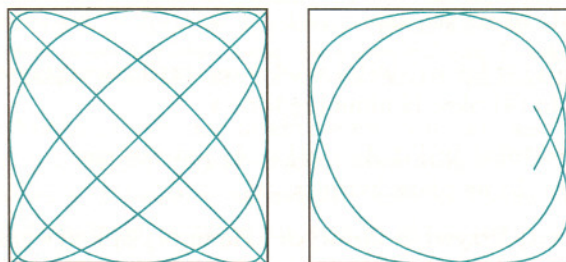
Zadanie.

(a) Wykazać, że dla $\omega = 1$ pozostałe krzywe Lissajous są elipsami o środku w 0. Prześledzić, jak zmieniają się przy zmianie α_2 z α_1 .

(b) Dowiedzieć się, co to są wielomiany Czebyszewa i wykazać, że dla $\omega = n$, $\alpha_1 = -\pi/2$, $\alpha_2 = -n\pi/2$ krzywa Lissajous leży w wykresie wielomianu Czebyszewa.

Twierdzenie 3.

(a) Jeśli ω jest liczbą wymierną, to krzywa Lissajous jest krzywą okresową (zamkniętą). (b) Jeśli ω jest liczbą niewymierną, to krzywa Lissajous zapęłnia gęsto ekran oscyloskopu.



Rys. 6. Przykłady krzywych Lissajous.

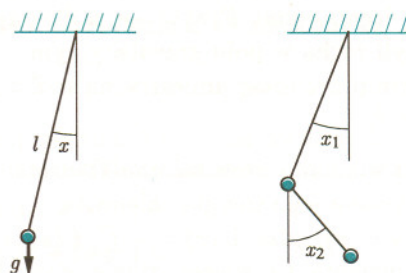
Dla dowodu tego twierdzenia potrzebny nam będzie

Przykład 3. Małe drgania układu niezależnych wahań. Równanie wahań w przybliżeniu dla małych drgań (tzn. tam, gdzie $\sin x \approx x$) ma postać

$$\ddot{x} = -(g/l)x$$

(g jest przyspieszeniem ziemskim). Można zawsze dobrać skalę czasu tak, aby współczynnik przy x wynosił 1. Załóżmy, że mamy dwa niezależne takie wahań (np. jedno podwieszono pod drugim); odpowiada im układ równań

$$(4) \quad \ddot{x}_1 = -x_1, \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2.$$



Rys. 7.

Energia każdego z wahań składa się z energii kinetycznej $\frac{1}{2}v_i^2$, gdzie $v_i = \dot{x}_i$, oraz z energii potencjalnej $\frac{1}{2}x_1^2$ (lub $\frac{1}{2}\omega^2 x_2^2$) i jest stała:

$$(5) \quad \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 = E_1, \quad \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x_2^2 = E_2.$$

Równania (5) określają w czterowymiarowej przestrzeni x_1, x_2, v_1, v_2 dwuwymiarową powierzchnię. Jest to iloczyn kartezjański krzywych zadanych w płaszczyznach fazowych x_1, v_1 i x_2, v_2 obydwu układów. Ponieważ krzywe te są topologicznie

okręgami, więc układ równań (5) opisuje torus T^2 w $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, v_1, v_2)\}$.

Lemat. Równania (4) mają rozwiązania postaci (3).

Rzeczywiście, przekonujemy się o tym różniczkując dwukrotnie funkcje $x_{1,2}(t)$. Przy okazji sprawdzamy, że $v_1 = A_1 \cos(t + \alpha_1)$, $v_2 = \omega \cos(\omega t + \alpha_2)$.

Jeśli teraz $A_1^2 = 2E_1$, $A_2^2 = 2E_2$, to krzywa fazowa $\{x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t)\}$ leży na torusie (5).

Wprowadźmy jeszcze zmienne kątowe φ_1, φ_2 na torusie tak, aby

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = v_1/x_1, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = v_2/\omega x_2.$$

Wtedy okaże się, że:

1) $\varphi_1(t) = t + \alpha_1$, $\varphi_2(t) = \omega t + \alpha_2$, czyli rozwiązanie układu (4) określa obrotkę torusa.

2) Prostokąt $|x_1| < A_1$, $|x_2| < A_2$ jest rzutem torusa (5) na płaszczyznę x_1, x_2 .

3) Rzuty krzywych fazowych układu (4) są krzywymi Lissajous w prostokącie.

Stąd wynika Twierdzenie 3.

Przykład 4. Ruch w polu centralnym.

Niech $\vec{x} = (x_1, x_2)$ oznacza wektor w \mathbb{R}^2 i niech $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ oznacza jego długość. Oznaczmy przez $\vec{e}_r = \vec{x}/r$ jednostkowy wektor w kierunku $\vec{x} \neq 0$, a przez $\vec{e}_\varphi = (-x_2, x_1)/r$ jednostkowy wektor w kierunku zmian kąta biegunowego φ (rys. 8). Mamy $\vec{x} = r\vec{e}_r$.

Ruch punktu materialnego w centralnym polu sił jest opisany wzorem Newtona

$$\ddot{\vec{x}} = F(r)\vec{e}_r.$$

Na przykład, dla wahadła sferycznego w przybliżeniu dla małych drgań mamy $F(r) = -r$, a dla zagadnienia Keplera (czyli ruchu w polu grawitacyjnym wytworzonym przez masę umieszczoną w $\vec{x} = 0$) jest $F(r) = -cr^{-2}$.

Z mechaniki wiadomo, że w takim układzie jest zachowywana jego energia całkowita $E = |\dot{\vec{x}}|^2/2 + U(r)$, gdzie $U(r) = -\int_{r_0}^r F(s)ds$ jest energią potencjalną. Co więcej, drugie prawo Keplera mówi, że zachowany jest moment pędu punktu względem początku układu współrzędnych.

Moment pędu to iloczyn wektorowy promienia wodzącego \vec{x} i wektora pędu $\dot{\vec{x}}$ (masę przyjęliśmy równą 1). Mamy zatem

$$M = |\vec{x} \times \dot{\vec{x}}| = |x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1| = \text{const}.$$

Zadanie.

Udowodnić, że $M(t) = \text{const}$ i że jest to równoważne stałości prędkości połowej: w jednakowych odstępach czasu wektor wodzący zakreśla równe pola (rys. 8).

Niestety, teraz musimy dokonać pewnych przekształceń. Chcemy rozdzielić zmienne i dlatego przejdziemy do biegunowego układu współrzędnych r, φ .

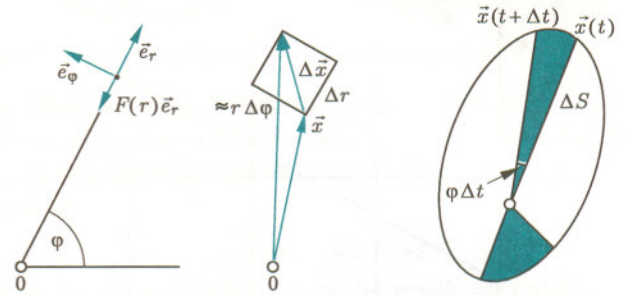
Lemat. Zachodzą zależności:

$$(6) \quad \ddot{\vec{x}} = \ddot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi$$

oraz

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r.$$

Dowód na podstawie rysunku 8 pozostawiamy Czytelnikowi.



Rys. 8.

Z lematu wynika, że

$$M = |(r\vec{e}_r) \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)| = r^2\dot{\varphi}, \quad \text{dla } \dot{\varphi} > 0.$$

Aby zapisać równania Newtona w nowych współrzędnych, różniczkujemy równanie (6) wykorzystując powyższe wzory. Dostaniemy

$$\ddot{\vec{x}} = (\ddot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi.$$

Ponieważ siła wynosi $F(r)\vec{e}_r$, więc porównanie składowych radialnych daje $\ddot{r} = F(r) + r\dot{\varphi}^2$. Jeśli uwzględnimy prawo zachowania momentu pędu

$$(7) \quad \dot{\varphi} = M/r^2,$$

to zmienna r wydzieli się: otrzymamy równanie

$$\ddot{r} = -V'(r),$$

gdzie $V(r) = U(r) + M^2/2r^2$ jest tzw. efektywną energią potencjalną. Jednokrotne scałkowanie prowadzi do prawa zachowania energii, $\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) \equiv E$, które pozwala wyliczyć prędkość zmian r :

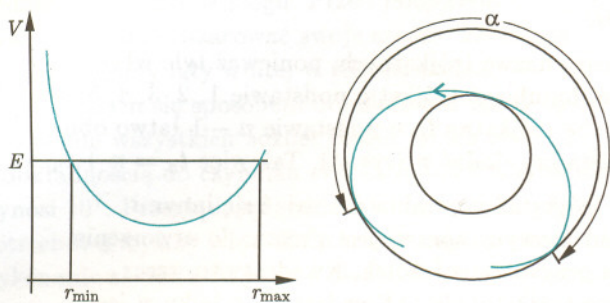
$$\dot{r} = \pm \sqrt{2(E - V(r))}.$$

Z drugiej strony, równanie (7) określa prędkość zmian φ . Oba równania pozwalają wyznaczyć równanie trajektorii $\varphi = \varphi(r)$. Dzieliąc je stronami, czyli eliminując czas, dostajemy

$$(8) \quad \frac{d\varphi}{dr} = \frac{M/r^2}{\pm \sqrt{2(E - V(r))}}.$$

To równanie można po prostu scałkować (choć nie zawsze odpowiednia całka wyraża się przez kwadratury). My ograniczymy się do opisu ruchu.

Załóżmy, że wykres efektywnego potencjału ma kształt pokazany na rysunku 9. Równanie (8) może zachodzić tylko dla $V(r) < E$, czyli w pierścieniu $r_{\min} \leq |\vec{x}| \leq r_{\max}$. Ten pierścień pełni rolę prostokąta z teorii figur Lissajous.



Rys. 9.

Gdy w (8) mamy znak + i r rośnie, to rośnie także i φ . W pewnym momencie r osiąga wartość maksymalną (apocentrum). Następuje zmiana znaku w pierwiastku, r zaś zaczyna maleć. Potem r osiąga perycentrum r_{\min} , znowu zaczyna rosnąć i sytuacja powtarza się.

Nietrudno tu dostrzec obroty, np. kolejne powroty na okrąg apocentryczny. Jeśli kąt α z rysunku 9 jest niewspółmierny z π , to trajektoria dowolnego punktu jest gęsta w pierścieniu, a w przeciwnym przypadku jest krzywą zamkniętą. Można tutaj też znaleźć torus $T^2 \subset \mathbb{R}^4$ z obmotką, której rzut jest naszą trajektorią.

Jako ciekawostkę przytoczę przekształcenie (znajdzone przez K. Bolina), które zamienia układ wahadła sferycznego w układ Keplera: jeśli zespolona funkcja $z = z(t) = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ spełnia równanie Hooke'a $\ddot{z} = -z$, to zmienna $Z = z^2$ z nowym czasem τ , dla którego moment pędu pozostaje stały, spełnia równanie powszechnego ciążenia $d^2Z/d\tau^2 = -cZ/|Z|^3$. Otrzymuje się stąd okresowość orbit keplerowskich, a nawet więcej, można wykazać, że gdy zmienna $z(t)$ zakreśla elipsę o środku w 0, to $Z(\tau) = z^2(t)$ zakreśla elipsę z ogniskiem w 0 (pierwsze prawo Keplera). Zainteresowanym polecam książkę V.I. Arnolda *Huygens i Barrow, Newton i Hooke* (po rosyjsku).

Przykłady, których nie udało się nam omówić, to m.in. geodezyjne na powierzchni obrotowej i na elipsoidzie trójosiowej, oraz ogólne całkowalne układy hamiltonowskie. Okazuje się, że jeśli układ jest całkowalny, to przestrzeń jego możliwych położen rozbija się na torusy, na których trajektorie tworzą obmotki (twierdzenie Liouville'a–Arnolda).



Zadania

Redaguje Łukasz WIECHECKI

M 838. Dany jest taki trójkąt ABC , że $|AB| = |BC|$ oraz $\angle BAC = 80^\circ$. Punkt T należy do odcinka BC i $|BT| = |AC|$. Znaleźć kąt TAC .

Rozwiązanie na str. 12

M 839. Niech n, m, k będą liczbami naturalnymi, $m > n$. Która liczba jest większa:

$$\sqrt{n + \sqrt{m + \sqrt{n + \dots}}} \quad \text{czy} \quad \sqrt{m + \sqrt{n + \sqrt{m + \dots}}}$$

W każdym z powyższych wyrażeń jest k pierwiastków kwadratowych, a n i m występują na przemian.

Rozwiązanie na str. 3

M 840. Wyznaczyć taki najmniejszy przedział A liczb rzeczywistych, że dla każdego $a \in A$ istnieją $b, c \in A$, spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + b + c = 15, \\ ab + ac + bc = 72. \end{cases}$$

Rozwiązanie na str. 2

Przygotowali Eryk i Wojciech KOPCZYŃSCY

Poniższe zadania łatwo jest rozwiązać stosując rachunek całkowity. Zachęcamy do rozwiązania ich bez stosowania rachunku całkowitego.

F 471. Obliczyć energię potencjalną samooddziaływania grawitacyjnego jednorodnej kuli o masie M i promieniu R .

Rozwiązanie na str. 13

F 472. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego stożka o masie M i promieniu podstawy R względem osi symetrii.

Rozwiązanie na str. 13





Liczby wielokątne

Liczby 1, 3, 6, 10, 15, ... noszą nazwę trójkątnych, ponieważ tyle właśnie klocków (czy kótek) potrzeba, by ułożyć trójkąt o podstawie 1, 2, 3, 4, 5, itd. (p. *Delta* 2/1997). Znając liczbę trójkątną t_n o podstawie $n - 1$ łatwo obliczyć następną, o podstawie n : wystarczy dodać n (rys. 1). Tak więc $t_n = n + t_{n-1}$.

Jeśli można rozważać liczby trójkątne, to czemu nie zająć się innymi wielokątami? Z liczbami kwadratowymi sprawa jest prosta: do utworzenia kwadratu o boku n potrzeba oczywiście n^2 kótek. Kwadraty to, rzecz jasna, zupełnie inne figury niż trójkąty, ale... Kwadrat k_n o boku n jest sumą dwóch trójkątów o podstawach odpowiednio n i $n - 1$ (rys. 2), zatem $k_n = n + 2 \cdot t_{n-1}$.

A co z pięciokątami? Najprostszy (trywialny) pięciokąt może się składać z jednego kółka, następny, o boku z dwóch kótek, potrzebuje ich pięć; aby z niego otrzymać trzeci, trzeba dodać $2 \cdot 3 + 1$ kótek itd. Ogólniej, aby otrzymać n -ty pięciokąt z $(n - 1)$ -ego, trzeba do tego ostatniego dodać $2 \cdot n + (n - 2)$ kótek. Pięciokąty to, rzecz jasna, zupełnie inne figury niż trójkąty, ale... Pięciokąt p_n o boku n jest sumą trzech trójkątów o podstawach $n - 1$ i jeszcze n kótek (rys. 3), więc $p_n = n + 3 \cdot t_{n-1}$.

Zachęcam do przyjrzenia się sześciokątom, siedmiokątom itd. Czy jest prawdą, że m -kąąt o boku n można ułożyć z n kótek i $(m - 2)$ trójkątów o podstawie $n - 1$?

Zanim przekonacie się o prawdziwości czy fałszywości powyższego twierdzenia, zauważmy, że prawie geometryczną procedurę budowania liczb wielokątnych można opisać w prosty sposób arytmetycznie. Otóż, wypiszmy na początek rząd samych jedynek, a pod nim rząd kolejnych liczb naturalnych:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Odnotujmy, że każda liczba w dolnym rzędzie (prócz jedynki) jest sumą liczby, która ją poprzedza w tym samym rzędzie, i tej, która jest bezpośrednio nad nią.

Teraz dopiszmy na dole trzeci rząd liczb, utworzonych w sposób opisany przed chwilą: zaczniemy od 1, a potem na k -tym miejscu będziemy wpisywać sumę liczby z miejsca $(k - 1)$ -ego i liczby stojącej nad miejscem k . Otrzymamy ciąg liczb trójkątnych:

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

Do arytmetycznego opisu kwadratów zastosujemy tę samą procedurę, zaczynając jednak od rzędu samych dwójek. Oto rezultat:

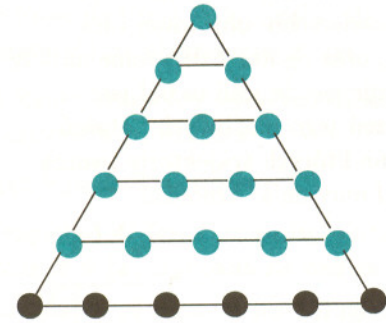
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Dla pięciokątów zaczniemy od rzędu trójek (czy to przypadek, że $3 = 5 - 2$, tak jak $2 = 4 - 2$ i $1 = 3 - 2$?).

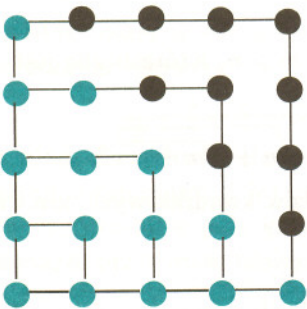
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
1	5	12	22	35	51	70	92	117	145

Otrzymaliśmy liczby pięciokątne (sprawdźcie sami!).

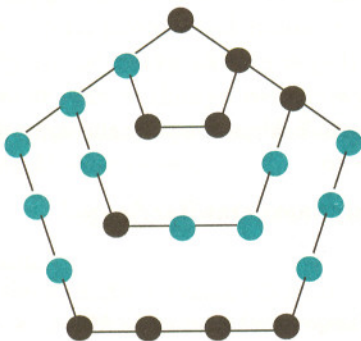
Jak obliczyć liczby sześciokątne, siedmiokątne itd.? Zapewne domyślacie się, jak postąpić – ale dlaczego właśnie tak?



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Szukanie igły w stogu siana można potraktować jako wyzwanie. Zwłaszcza jeżeli *standardowa teoria stogów siana* przewidywałaby np. obecność średnio jednej igły w stogu. Przed podjęciem wyzwania warto oszacować swoje szanse. Załóżmy, że poszukujemy igły białej w źdźbło siana. Narzucającym się sposobem odnalezienia zguby byłoby przejrzanie wszystkich źdźbeł stogu. Ile ich jest? Z dokładnością do czynnika $e^{\pm\pi}$ ta ładna liczba mnoga wynosi 10^7 . Przeglądając jedno źdźbło na sekundę potrzebowalibyśmy więc około trzech miesięcy na wykonanie zadania. Wygląda nieźle. Szkopuł w tym, jak w ciągu sekundy uzyskać pewność co do obecności igły w źdźbło?

Z takim zadaniem postanowili zmierzyć się fizycy z eksperymentu E787 przy akceleratorze AGS (Alternating Gradient Synchrotron) w ośrodku BNL w Brookhaven w Stanach Zjednoczonych. Poszukiwaną igłą był bardzo rzadki rozpad naładowanego kaonu na pion, neutrino i anty-neutrino $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$.

Dodatni kaon jest stanem związanym anty-kwarku dziwnego \bar{s} i kwarku górnego u . Jego średni czas życia wynosi około 10 ns, co wystarcza do przebycia od kilku do kilkudziesięciu metrów w detektorze. Za rozpad kaonu odpowiedzialne są oddziaływania słabe, czyli te same, które powodują rozpad jąder radioaktywnych czy też reakcje termojądrowe we wnętrzu naszego Słońca. Rozpady poprzez oddziaływania słabe są „słabe”, ponieważ nośnikiem tych oddziaływań jest naładowany bozon pośredniczący W^\pm o masie kilkadziesiąt razy większej od masy protonu. Cząstka ta pojawia się w rozpadach słabych jako stan wirtualny, a wtedy jej zasięg – zgodnie z zasadą nieoznaczoności – jest bardzo mały, co odpowiada małym amplitudom przejścia i długim (jak na niestabilne cząstki elementarne) czasom życia.

W przypadku poszukiwanego rozpadu kwark \bar{s} musi przejść na kwark \bar{d} o tym samym ładunku. Tego typu oddziaływania, tzw. neutralne prądy zmieniające zapach, są w pierwszym przybliżeniu zabronione w Modelu Standardowym. Mogą zachodzić tylko przez tzw. diagramy pętlowe. W języku grafów Feynmana mówimy, że kwark \bar{s} przechodzi w parę wirtualnych cząstek tW^+ , a następnie jedna z nich (ale nie wiadomo która) emituje wirtualny neutralny bozon pośredniczący Z^0 (rozpadający się na parę $\nu\bar{\nu}$), tak że „odchudzona” para tW^+ może połączyć się w kwark \bar{d} . Jak widać, poszukiwany rozpad wymaga wyprodukowania aż trzech wirtualnych, a nominalnie bardzo ciężkich cząstek. Przewidywane

prawdopodobieństwo wybrania przez kaon akurat tego kanału rozpadu wynosi 10^{-10} .

Gdyby zastosować tempo przeszukiwania z przykładu ze stogiem, sukcesu należałoby spodziewać się już za jakieś... cztery tysiące lat. Ponieważ niełatwo znaleźć stabilne źródło finansowania na czterdzieści wieków, więc naukowcy z E787 skrócili czas oglądania swoich „źdźbeł”. Eksperyment został zaprojektowany tak, że średnio co mikrosekundę w jednej z małych cel w centralnej części detektora zatrzymywał się jeden kaon. Ponieważ neutrino uciekały z detektora bez śladu, więc sygnaturą poszukiwanego rozpadu był pojedynczy naładowany ślad wychodzący z tej samej celi po czasie zgodnym ze średnim czasem życia kaonu. Ślad ten musiał zostać zidentyfikowany jako pion poprzez sekwencyjny rozpad dodatniego pionu na dodatni mion i neutrino mionowe $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$, a następnie mionu na pozyton i odpowiednie neutrino $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$.

Aby wyeliminować tło związane z ucieczką innych cząstek przez minimalne nieszczelności detektora (co mogłoby imitować rozpad z neutrinami) lub z bardzo mało prawdopodobną błędną identyfikacją (np. wzięciem za pion mionu z dominującego rozpadu $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$), wybrano szczególne „okno” energii pionu odpowiadające sytuacji, w której pion leci w kierunku przeciwnym do pary neutrino o małym kącie rozlotu. Wtedy pęd pionu jest z jednej strony większy niż w innych rozpadach wielociałowych, a z drugiej strony, mniejszy niż w bezpośrednim dwuciałowym rozpadzie kaonu na (lżejszy od pionu) mion i neutrino mionowe. Decydującym o sukcesie aspektem eksperymentu było mierzenie energii pionu na trzy niezależne sposoby (pomiar zakrzywienia toru w polu magnetycznym, pomiar kalorymetryczny i pomiar zasięgu). Pozwoliło to nie tylko na obniżenie spodziewanego tła do poziomu $0,08 \pm 0,03$ przypadku w całej próbce, ale również na precyzyjne sprawdzenie poprawności metody.

Efektywność selekcji wyznaczono na 0,2%, przebadano $1,5 \cdot 10^{12}$ kaonów i w tym sianie... znaleziono jedną igłę. Wyznaczone prawdopodobieństwo rozpadu $4,2_{-3,5}^{+9,7} \cdot 10^{-10}$ jest najmniejszym dotychczas zmierzonym niezerowym stosunkiem rozgałęzienia. Jest on zgodny z przewidywaniami Modelu Standardowego. Może być interpretowany jako pomiar prawdopodobieństwa przejścia kwarku t w kwark d oraz nakłada istotne ograniczenia na możliwe rozszerzenia Modelu Standardowego, w których rozpad mógłby zachodzić poprzez inne stany wirtualne.

Piotr ZALEWSKI

na podstawie *Physics Today, Phys. Rev. Lett.* 79, 2204, 1997

O początkowych cyfrach symboli Newtona

Waldemar POMPE

Grzegorz Bartczak i Andrzej Nowicki (*Początkowe cyfry symboli Newtona*, *Delta* 9/1997, str. 14) dowodzą następującego ciekawego twierdzenia:

Twierdzenie 1. Niech C i k będą dowolnymi liczbami naturalnymi. Wówczas istnieje taka liczba naturalna n , że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby $\binom{n}{k}$ pokrywają się odpowiednio z cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C .

Autorzy pytają też, czy powyższą własność mają liczby postaci $\binom{2n}{n}$ lub $n!$. W przypadku liczb $n!$ odpowiedź jest pozytywna, a pytanie pojawiało się już na olimpiadach matematycznych w różnych krajach (patrz np. *Delta* 11/1994, str. 16). Poniżej uogólnimy twierdzenie 1, a także udowodnimy, że istotnie liczby $\binom{2n}{n}$ mają własność opisaną w powyższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2. Dany jest ciąg (a_n) liczb dodatnich rozbieżny do nieskończoności oraz liczba naturalna C . Jeśli

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 + \frac{1}{C},$$

to ciąg (a_n) zawiera nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby C .

Oto przykład zastosowania twierdzenia 2. Niech W będzie wielomianem stopnia dodatniego o współczynnikach rzeczywistych, którego współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni. Wówczas począwszy od pewnego miejsca ciąg $(W(n))$ jest ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich, $W(n) \rightarrow \infty$ dla $n \rightarrow \infty$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W(n+1)}{W(n)} = 1$. Zatem, dla każdej liczby naturalnej C w ciągu $(W(n))$ występuje nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego są odpowiednio równe cyfrom liczby C . W szczególności, biorąc $W(x) = \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$, otrzymujemy twierdzenie 1.

Dowód twierdzenia 2: Rozpatrzmy przedziały:

$$(2) \quad [j + \log C, j + \log(C+1)], \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Na mocy ciągłości i monotoniczności funkcji logarytmicznej nierówność (1) możemy przepisać w następującej równoważnej postaci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log a_{n+1} - \log a_n) < \log(C+1) - \log C.$$

Istnieje więc taka liczba naturalna m , że dla każdej liczby naturalnej $n \geq m$

$$\log a_{n+1} - \log a_n < \log(C+1) - \log C.$$

Innymi słowy, od pewnego miejsca różnice między kolejnymi wyrazami ciągu $(\log a_n)$ są mniejsze niż długość każdego z przedziałów (2). A ponieważ $\log a_n \rightarrow \infty$, więc któryś z wyrazów ciągu $(\log a_n)$ znajdzie się wewnątrz któregoś z przedziałów (2). Dla pewnych $k, m \in \mathbb{N}$ mamy wówczas

$$k + \log C \leq \log a_m < k + \log(C+1),$$

czyli $C \cdot 10^k \leq a_m < (C+1) \cdot 10^k$. Początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego a_m pokrywają się więc z kolejnymi cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C .

Udowodnimy teraz, że takich liczb a_m jest nieskończenie wiele. Przypuśćmy, że tych liczb w ciągu (a_n) jest skończenie wiele i niech a_{m_0} będzie ostatnią z nich. Wtedy ciąg $(a_{m_0+n})_{n=1}^{\infty}$ spełnia założenia twierdzenia 2. Zatem dla pewnego $p > m_0$ początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby a_p pokrywają się z odpowiednimi cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C , wbrew przypuszczeniu, że a_{m_0} była ostatnią taką liczbą. ■

Twierdzenie 2 nie stosuje się do ciągu $a_n = \binom{2n}{n}$, który – mówiąc nieścisłe – zbyt szybko rośnie. Podstawą do dalszych rozważań będzie następujące twierdzenie, które w *Delcie* wielokrotnie już było omawiane.



Twierdzenie 3. Dana jest liczba niewymierna dodatnia α oraz liczby rzeczywiste $a < b$. Niech $x \geq a$. Wówczas istnieje taka liczba naturalna m , że któryś z wyrazów skończonego ciągu

$$x_n = x + n\alpha, \quad \text{gdzie } n = 0, 1, 2, \dots, m,$$

leży w jednym z przedziałów (a, b) , $(1 + a, 1 + b)$, $(2 + a, 2 + b)$, ...
Liczbę m możemy obliczyć znając jedynie liczby α i $b - a$.

Korzystając z tego rezultatu udowodnimy

Twierdzenie 4. Dany jest ciąg liczb dodatnich (a_n) . Jeśli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g > 1$$

i $\log g$ jest liczbą niewymierną, to dla dowolnej liczby naturalnej C w ciągu (a_n) występuje nieskończenie wiele wyrazów, których początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego są odpowiednio równe cyfrom rozwinięcia dziesiętnego liczby C .

Dowód: Skorzystamy z twierdzenia 3 dla $\alpha = \log g$ oraz $a = \frac{2}{3} \log C + \frac{1}{3} \log(C + 1)$, $b = \frac{1}{3} \log C + \frac{2}{3} \log(C + 1)$. Ponieważ

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\log a_{n+1} - \log a_n) = \log g > 0,$$

więc $\log a_n \rightarrow \infty$. Zatem bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\log a_n \geq a$ dla każdego n . Skoro znamy już liczby α i $b - a$, możemy obliczyć odpowiadającą im liczbę m , o której jest mowa w twierdzeniu 3. Na mocy równości (4) istnieje taka liczba naturalna s , że

$$|\log a_{n+1} - \log a_n - \alpha| < \frac{b - a}{m} \quad \text{dla każdego } n \geq s.$$

Przyjmijmy $x = \log a_s$. Wówczas, na mocy twierdzenia 3, istnieje taka liczba naturalna k oraz liczba $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, że

$$(5) \quad k + a < \log a_s + j\alpha < k + b.$$

Z drugiej zaś strony, z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$|\log a_{s+j} - \log a_s - j\alpha| \leq |\log a_{s+j} - \log a_{s+j-1} - \alpha| + \\ + |\log a_{s+j-1} - \log a_{s+j-2} - \alpha| + \dots + |\log a_{s+1} - \log a_s - \alpha| < j \cdot \frac{b - a}{m} \leq b - a.$$

Stąd

$$(6) \quad -b + a < \log a_{s+j} - \log a_s - j\alpha < b - a.$$

Dodając stronami nierówności (5) i (6) dostajemy

$$k + \log C < \log a_{s+j} < k + \log(C + 1), \quad \text{czyli } C \cdot 10^k < a_{s+j} < (C + 1) \cdot 10^k.$$

Oznacza to, że początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczby a_{s+j} pokrywają się z odpowiednimi cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C . Dowód, że takich liczb w ciągu (a_n) jest nieskończenie wiele, jest identyczny jak w przypadku twierdzenia 2, więc go pominiemy. ■

Zastosujmy twierdzenie 4 do ciągu $a_n = \binom{2n}{n}$. Mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 2}{n + 1} = 4.$$

Z twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze wynika, że liczba $\log 4$ jest niewymierna. Zatem

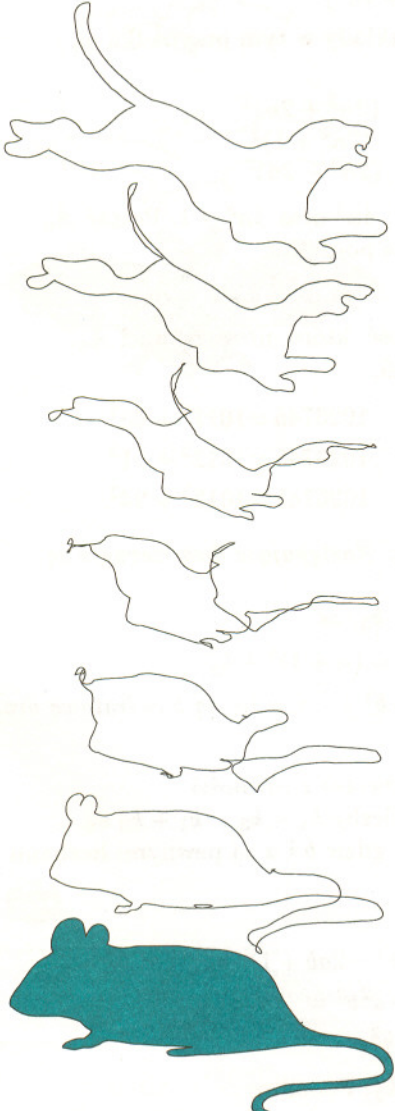
dla dowolnej liczby naturalnej C istnieje nieskończenie wiele liczb postaci $\binom{2n}{n}$, których początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego pokrywają się z cyframi rozwinięcia dziesiętnego liczby C .

Twierdzenie 4 stosuje się również do wielu innych ciągów, na przykład: $a_n = 2^n$, $a_n = 7^n$ lub ogólnie $a_n = k^n$, gdzie k jest liczbą naturalną nie będącą całkowitą potęgą liczby 10. Można też wziąć

$$a_n = \binom{3n}{n}, \quad a_n = 2^n \cdot n^2, \quad a_n = \lfloor 5^n \cdot \sqrt{n} \rfloor, \quad a_n = \left\lfloor \frac{17^n + \pi n}{\sqrt[3]{n} + n^7} \right\rfloor$$

oraz wiele innych.

Zakończmy pytaniem do Czytelników: Czy istnieje taka liczba naturalna k , że rozwinięcia dziesiętne liczb 2^k i 5^k rozpoczynają się od układu cyfr 1998?



Różne rozkłady na sumy kwadratów

Lew KURLANDCZYK i Andrzej NOWICKI

Sankt Petersburg, Toruń, 22 września 1997 r.

Liczba 1105 jest najmniejszą liczbą naturalną mającą cztery różne rozkłady na sumę dwóch kwadratów liczb naturalnych:

$$\begin{aligned} 1105 &= 24^2 + 23^2 \\ 1105 &= 31^2 + 12^2 \\ 1105 &= 32^2 + 9^2 \\ 1105 &= 33^2 + 4^2. \end{aligned}$$

W rozkładach występują kolejne liczby naturalne: 31, 32 i 33. Podobną własność mają liczby 12025, 66625 oraz 252601:

$$\begin{array}{lll} 12025 = 107^2 + 24^2 & 66625 = 255^2 + 40^2 & 252601 = 499^2 + 60^2 \\ 12025 = 108^2 + 19^2 & 66625 = 256^2 + 33^2 & 252601 = 500^2 + 51^2 \\ 12025 = 109^2 + 12^2, & 66625 = 257^2 + 24^2, & 252601 = 501^2 + 40^2. \end{array}$$

Każda z nich ma co najmniej trzy różne rozkłady na sumę dwóch kwadratów i w rozkładach występują trzy kolejne liczby naturalne. Takich liczb naturalnych istnieje nieskończenie wiele. Omawianą własność ma, na przykład, każda liczba naturalna A_n określona wzorem

$$A_n = (1 + 4n^2)(1 + 4n^4),$$

gdzie n jest liczbą naturalną większą od 1. Rozkłady w tym przypadku są następujące:

$$\begin{aligned} A_n &= (4n^3 - 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2 \\ A_n &= (4n^3)^2 + (2n^2 + 1)^2 \\ A_n &= (4n^3 + 1)^2 + (2n^2 - 2n)^2. \end{aligned}$$

Występują tu kolejne liczby naturalne: $4n^3 - 1$, $4n^3$ oraz $4n^3 + 1$. Postać A_n mają wszystkie liczby, które przedstawiliśmy na początku:

$$1105 = A_2, \quad 12025 = A_3, \quad 66625 = A_4, \quad 252601 = A_5.$$

Istnieją jednak liczby mające omawianą własność, które nie są postaci A_n . Takimi są, na przykład, liczby 292825 i 1026745:

$$\begin{array}{ll} 292825 = 539^2 + 48^2 & 1026745 = 1011^2 + 68^2 \\ 292825 = 540^2 + 35^2 & 1026745 = 1012^2 + 51^2 \\ 292825 = 541^2 + 12^2, & 1026745 = 1013^2 + 24^2. \end{array}$$

Twierdzenie. Niech M będzie liczbą naturalną. Następujące dwa warunki są równoważne:

(1) istnieją takie liczby naturalne $n > 1$, k_1 , k_2 , k_3 , że

$$M = (n - 1)^2 + k_1^2 = n^2 + k_2^2 = (n + 1)^2 + k_3^2;$$

(2) istnieją takie liczby naturalne $b > a$, że $a^2 + b^2 + 1$ jest liczbą kwadratową oraz $M = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$.

Dowód. Załóżmy, że zachodzi warunek (1). Wówczas z równości $4n = (n + 1)^2 - (n - 1)^2 = k_1^2 - k_3^2$ wynika, że liczby $k_1 - k_3$ i $k_1 + k_3$ są parzyste. Niech $k_1 - k_3 = 2a$ oraz $k_1 + k_3 = 2b$, gdzie b i a są pewnymi liczbami naturalnymi, przy czym $b > a$.

Wtedy $k_1 = b + a$, $k_3 = b - a$, $n = ab$ oraz

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 1 &= (a^2 + b^2 + 2ab) + (a^2b^2 - 2ab + 1) - a^2b^2 = \\ &= (a + b)^2 + (ab - 1)^2 - a^2b^2 = \\ &= k_1^2 + (n - 1)^2 - n^2 = k_2^2, \end{aligned}$$

czyli $a^2 + b^2 + 1$ jest liczbą kwadratową równą k_2^2 . Ponadto $M = n^2 + k_2^2 = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1$. Wykazaliśmy więc implikację (1) \implies (2).



Rozwiązanie zadania M 838.

Niech O będzie środkiem koła (o promieniu R) opisanego na trójkącie ABC , a T' przecięciem prostej AO z odcinkiem BC . Wtedy $\angle OBA = \frac{1}{2}\angle CBA = 10^\circ = \angle OAB$, skąd $\angle BOT' = 20^\circ$, $\angle BT'O = 150^\circ$. Zatem z twierdzenia sinusów w trójkątach OBT' i ABC mamy

$$|BT'|/\sin 20^\circ = |OB|/\sin 150^\circ = 2R,$$

$$|AC|/\sin 20^\circ = 2R,$$

czyli $|BT'| = |AC|$. Z tego wynika, że $T' = T$ i $\angle TAC = 70^\circ$.

Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek (2). Wówczas przyjmujemy:

$$n = ab, \quad k_1 = a + b, \quad k_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 1}, \quad k_3 = b - a$$

i bez trudu sprawdzamy, że zachodzi warunek (1).

Powyższe twierdzenie opisuje wszystkie liczby naturalne mające rozkłady na sumę dwóch kwadratów, w których występują kwadraty trzech kolejnych liczb naturalnych.

Pytanie. Czy w rozkładach danej liczby naturalnej na sumę dwóch kwadratów mogą pojawić się kwadraty czterech kolejnych liczb naturalnych?

Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Przypuśćmy bowiem, że dla pewnych liczb naturalnych $n > 1$, k_1 , k_2 , k_3 i k_4 zachodzą równości

$$(n-1)^2 + k_1^2 = n^2 + k_2^2 = (n+1)^2 + k_3^2 = (n+2)^2 + k_4^2.$$

Wykorzystując dwukrotnie udowodnione twierdzenie stwierdzamy, że istnieją wówczas takie liczby naturalne a, b, c, d , że $b > a$, $d > c$, $cd = n + 1 = ab + 1$, $a^2 + b^2 + 1 = (c + d)^2$ oraz $c^2 + d^2 + 1 = (b - a)^2$.

Przypuśćmy teraz, że a jest liczbą parzystą. Wtedy liczby c i d są nieparzyste (gdyż $cd = ab + 1$), a zatem liczba $a^2 + b^2 + 1$ (która jest równa $(c + d)^2$) jest podzielna przez 4. Ale a^2 jest podzielne przez 4, więc przez 4 podzielna jest liczba $b^2 + 1$. Otrzymaliśmy sprzeczność. Liczba postaci $b^2 + 1$ nigdy nie jest podzielna przez 4. Resztą z dzielenia tej liczby przez 4 jest 1 (gdy b jest parzyste) lub 2 (gdy b jest nieparzyste).

Wykazaliśmy zatem, że a jest liczbą nieparzystą. W ten sam sposób wykazujemy, że b jest liczbą nieparzystą. Następnie wykazujemy (w podobny sposób), że liczby c i d są również nieparzyste. Teraz patrzymy na równość

$$a^2 + b^2 + 1 = (c + d)^2.$$

Lewa strona tej równości jest liczbą nieparzystą, a prawa strona jest liczbą parzystą. Sprzeczność ta kończy nasze uzasadnienie negatywnej odpowiedzi na postawione pytanie.

Na zakończenie spójrzmy jeszcze na rozkłady liczby 120250.

$$\begin{aligned} 120250 &= 255^2 + 235^2 \\ 120250 &= 297^2 + 179^2 \\ 120250 &= 305^2 + 165^2 \\ 120250 &= 315^2 + 145^2 \\ 120250 &= 339^2 + 73^2 \\ 120250 &= 341^2 + 63^2 \\ 120250 &= 343^2 + 51^2 \\ 120250 &= 345^2 + 35^2 \end{aligned}$$

Występują tu cztery kolejne liczby nieparzyste: 339, 341, 343 i 345.



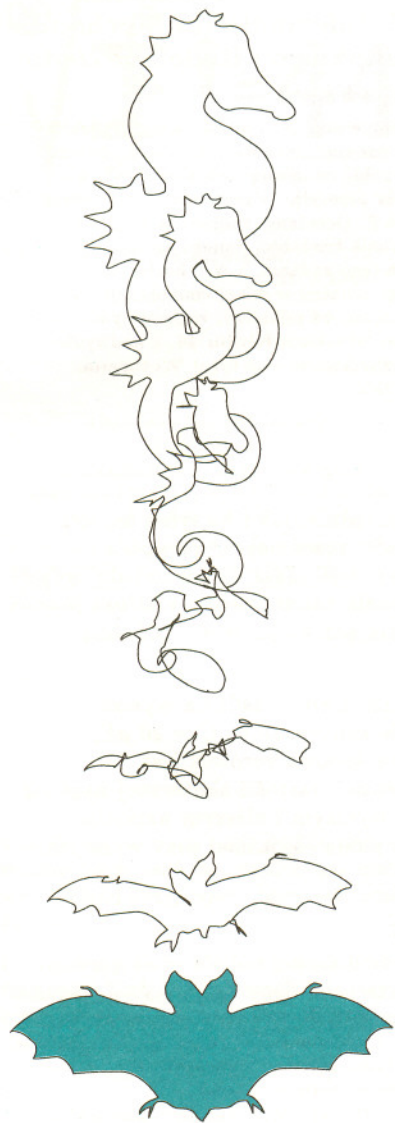
Rozwiązanie zadania F 471.

Niech $a = M/R^3$. Oznaczmy szukaną energię przez $V(M, R)$. Energia ta musi być ujemna i ze względów wymiarowych wprost proporcjonalna do M^2 , a odwrotnie proporcjonalna do R : $V(M, R) = -kM^2G/R$, gdzie G jest stałą grawitacyjną, a k współczynnikiem liczbowym. Jeśli zwiększymy (przy stałej gęstości) promień o ΔR , to energia zwiększy się o ΔV . Obliczamy, że $\Delta V = V(a(R + \Delta R)^3, R + \Delta R) - V(aR^3, R) = -ka^2G(R + \Delta R)^5 + ka^2GR^5 = -5ka^2GR^4\Delta R + O((\Delta R)^2)$, dla $\Delta R \rightarrow 0$.

(Piszemy $g(x) = O(f(x))$, dla $x \rightarrow x_0$, jeśli dla pewnej stałej C i dla pewnego otoczenia x_0 nierówność $|g(x)| \leq C|f(x)|$ zachodzi dla każdego $x \neq x_0$ należącego do tego otoczenia.)

Z drugiej strony, rozważając energię potencjalną oddziaływania grawitacyjnego pomiędzy kulą o promieniu R a otaczającą ją warstwą kulistą o promieniu wewnętrznym R i zewnętrznym $R + \Delta R$ (oba ciała mają jednakową gęstość), otrzymamy $-\Delta MMG/R \leq \Delta V \leq -\Delta MMG/(R + \Delta R)$, gdzie $\Delta M = a(R + \Delta R)^3 - aR^3 = 3aR^2\Delta R + O((\Delta R)^2)$, dla $\Delta R \rightarrow 0$, jest masą warstwy kulistej. Zatem $\Delta V = -3a^2GR^4\Delta R + O((\Delta R)^2)$, dla $\Delta R \rightarrow 0$. Porównując oba wyrażenia na ΔV i pomijając poprawki kwadratowe w ΔR (w tym energię samooddziaływania warstwy kulistej), otrzymamy $k = 3/5$. Ostatecznie,

$$V(M, R) = -\frac{3M^2G}{5R}.$$



Rozwiązanie zadania F 472.

Namawiamy do prawie dosłownego powtórzenia rozumowania przytoczonego w rozwiązaniu poprzedniego zadania. Wynik,

$$I(M, R) = \frac{3MR^2}{10},$$

nie zależy od kąta rozwarcia stożka.



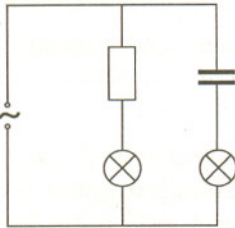
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 1998

Skrót regulaminu

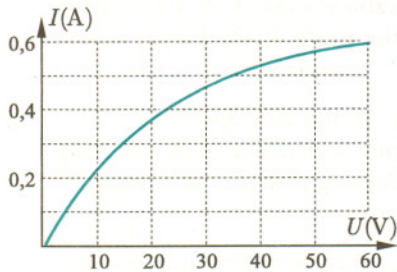
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1998.

Zadania z fizyki nr 254, 255

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1



Rys. 2

254. Samochodzik-zabawka ma napęd zarówno na przednią, jak i na tylną oś, lecz wskutek błędu konstrukcyjnego na każdych 10 obrotów przedniej osi przypada 11 obrotów tylnej osi (promień kółek jest jednakowy). Jeśli masa samochodzika wynosi 300 g, obie osie są jednakowo obciążone, a współczynnik tarcia kółek o podłoże jest równy 0,6, to jaka jest minimalna moc silnika pozwalająca na jazdę z prędkością 15 cm/s po torze poziomym?

255. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 częstotliwość zasilania wynosi $f = 50$ Hz, oporność opornika $R = 100 \Omega$, pojemność kondensatora $C = 20 \mu F$, a żarówki są jednakowe. Charakterystyka prądowo-napięciowa żarówek jest przedstawiona na rysunku 2. Okazało się, że przy pewnej wartości skutecznej napięcia źródła U żarówki paliły się jednakowo silnie, a przy wyższym i niższym napięciu – niejednakowo. Obliczyć wartość U . Która żarówka paliła się jaśniej przy wyższym, a która przy niższym napięciu?

Rozwiązanie zadań z fizyki z numeru 11/1997

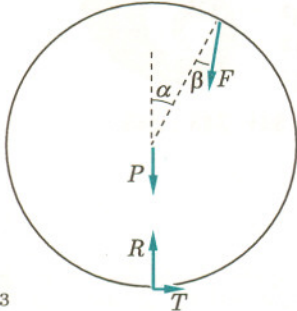
Przypominamy treść zadań:

246. Trzy jednakowe jednorodnie walce ułożono równolegle w „piramidę” na poziomym stole tak, że ich środki utworzyły trójkąt równoboczny. Jakie warunki muszą spełniać: współczynnik tarcia μ_1 górnego walca o dolne oraz współczynnik tarcia μ_2 między walcami a stołem, aby takie ustawienie było możliwe? Dla uproszczenia pomijamy wzajemne oddziaływanie między dolnymi walcami.

247. Transformator składa się z trzech uzwojeń osadzonych na wspólnym rdzeniu (zamiast – jak zwykle – dwóch). Do pierwszego uzwojenia o n_1 zwojach przyłożono napięcie przemienne

o amplitudzie U_1 i częstotliwości ω , do drugiego uzwojenia o n_2 zwojach przyłączono cewkę o indukcyjności L , a do trzeciego uzwojenia o n_3 zwojach – kondensator o pojemności C . Wyznaczyć amplitudę natężenia prądu płynącego przez pierwsze uzwojenie. Przy jakich wartościach parametrów obserwujemy rezonans?

Obowiązują standardowe założenia charakteryzujące transformator doskonały – pomijamy straty energii, zakładamy, że przez każdy zwoj przechodzi jednakowy strumień pola oraz przyjmujemy, że impedancja uzwojeń jest znacznie większa od impedancji kondensatora i przyłączonej cewki.



Rys. 3

246. Rozpatrując siły działające na jeden z dolnych walców (rys. 3), dochodzimy do następujących wniosków:

- Kąt α jest równy 30° , natomiast, aby łączny moment sił względem linii zetknięcia ze stołem był równy zeru, siła F działająca ze strony górnego walca musi leżeć na prostej przechodzącej przez tę linię. Stąd wynika $\beta = \alpha/2 = 15^\circ$.
- Rozkładając F na składowe – styczną $F \sin \beta$ i normalną $F \cos \beta$ – przekonujemy się, że poślizg kul o siebie nie nastąpi, jeśli $\mu_1 \geq \tan \beta$.
- Pionowa składowa siły F wynosi $(1/2)P$, gdzie P – ciężar górnego walca. Zatem pozioma składowa F wynosi $(1/2)P \tan \beta$, a z drugiej strony jest ona równa sile tarcia T o stół. Ponieważ $R = (3/2)P$, więc otrzymujemy warunek braku poślizgu o stół w postaci $\mu_2 \geq (1/3) \tan \beta$. Podsumowując, $\mu_1 \geq \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3} \approx 0,268$, $\mu_2 \geq (2 - \sqrt{3})/3 \approx 0,089$.

247. Zgodnie z założeniem o jednakowej wartości strumienia Φ dla każdego zwoju, napięcia na wszystkich uzwojeniach drgają w jednakowej fazie, a ich amplitudy spełniają związek

$$\frac{U_1}{n_1} = \frac{U_2}{n_2} = \frac{U_3}{n_3}$$

Strumień pola magnetycznego w rdzeniu jest równy sumie przyczynków od każdego ze zwojów, zgodnie ze wzorem

$$\Phi = L_0(n_1 I_1 + n_2 I_2 + n_3 I_3),$$

gdzie I_1, I_2 i I_3 są chwilowymi wartościami natężeń prądu. Wspomniane założenie o małej impedancji kondensatora i cewki oznacza, że I_1, I_2 i I_3 są duże, a dokładniej – że suma w nawiasie po prawej stronie wzoru ma wartość

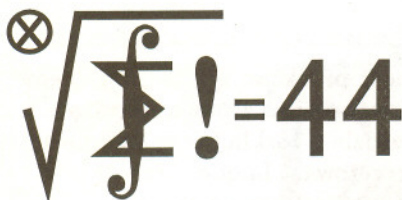
znacznie mniejszą od każdego ze składników (porównaj analogiczne rozumowanie dla „zwykłego” transformatora, np. §19 w podręczniku J. Gintera dla III klasy liceum). Uwzględniając przeciwne fazy I_2 i I_3 otrzymujemy przybliżony związek między amplitudami prądów (które dalej oznaczamy – niezbyt konsekwentnie – tymi samymi symbolami I_1, I_2 i I_3)

$$n_1 I_1 = |n_2 I_2 - n_3 I_3|.$$

Podstawiamy $I_2 = U_2 / (L\omega)$, $I_3 = U_3 C \omega$ i znajdujemy

$$I_1 = \frac{U_1}{n_1} \left| \frac{n_2^2}{L\omega} - n_3^2 C \omega \right|.$$

Warunek rezonansu ma postać $n_2^2 L C \omega^2 = n_3^2$.



Zadania z matematyki nr 357, 358

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 V 1998

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 242 (WT=1,50) i 243 (WT=3,00)
z numeru 9/1997

Przemysław Gadziński - Środa Śl. 40,82
Andrzej Idzik - Bolesławiec 21,55
Jarosław Łazuka - Warszawa 21,27
Andrzej Nowogrodzki - Chocianów 17,37

357. Rozważamy graf skierowany (o skończeniu wielu wierzchołkach), w którym każde dwa różne wierzchołki a, b są połączone dokładnie jedną z dwóch zorientowanych krawędzi: $a \rightarrow b$ lub $b \rightarrow a$. Ponadto każda krawędź jest pomalowana albo na żółto, albo na czerwono. Udowodnić, że istnieje wierzchołek, z którego można do każdego innego wierzchołka dotrzeć wzdłuż krawędzi jednego koloru, w kierunku zgodnym z ich orientacją. (Do różnych wierzchołków docelowych mogą prowadzić drogi różnych kolorów.)

358. Liczby rzeczywiste a_1, \dots, a_n spełniają dla każdej liczby rzeczywistej x nierówność

$$a_1 \sin^2 x + a_2 \sin^2 2x + a_3 \sin^2 3x + \dots + a_n \sin^2 nx \geq 0.$$

Czy stąd wynika, że $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq 0$?

Zadanie 358 zaproponował pan Krzysztof Oleszkiewicz z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1997

Przypominamy treść zadań:

349. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n , dla której istnieje ciąg liczb naturalnych x_0, x_1, \dots, x_n o własnościach:

$$x_i > 2 \text{ dla } i = 0, 1, \dots, n-1; \quad x_n = 2;$$

x_{i+1} jest najmniejszą liczbą naturalną nie będącą dzielnikiem liczby x_i .

350. W trójkącie ostrokątnym ABC , który nie jest równoboczny, poprowadzono wysokości AD, BE, CF . Punkty G_A, G_B, G_C są (odpowiednio) środkami ciężkości trójkątów EAF, FBD, DCE , a punkty O_A, O_B, O_C są środkami okręgów opisanych na tych trójkątach. Udowodnić, że proste $O_A G_A, O_B G_B, O_C G_C$ (czyli proste Eulera tych trzech trójkątów) przecinają się w jednym punkcie.

349. Niech x_0, x_1, \dots, x_n będzie ciągiem o podanych własnościach. Jeśli x_0 jest liczbą nieparzystą, to $x_1 = 2$, czyli $n = 1$. Dalej przyjmijmy, że x_0 jest liczbą parzystą, i wobec tego $x_1 > 2$.

Przypuśćmy, że x_1 nie jest potęgą liczby pierwszej; jest więc iloczynem liczb $a, b > 1$ względnie pierwszych. Liczby te, jako mniejsze od x_1 , są dzielnikami liczby x_0 (w myśl określenia x_1).

A skoro są względnie pierwsze, ich iloczyn $x_1 = ab$ też jest dzielnikiem x_0 - wbrew określeniu x_1 .

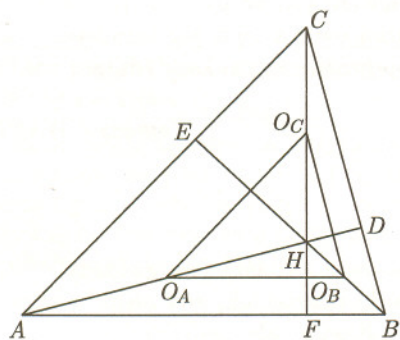
Zatem x_1 jest potęgą liczby pierwszej. Jeżeli $x_1 = 2^k, k > 1$, to $x_2 = 3, x_3 = 2$, więc $n = 3$. Jeżeli zaś $x_1 = p^k, p > 2, k \geq 1$, to $x_2 = 2$, więc $n = 2$. Wykazaliśmy w ten sposób, że $n \leq 3$.

Przykład ciągu (6, 4, 3, 2) pokazuje, że $n = 3$ jest maksymalną możliwą wartością n .

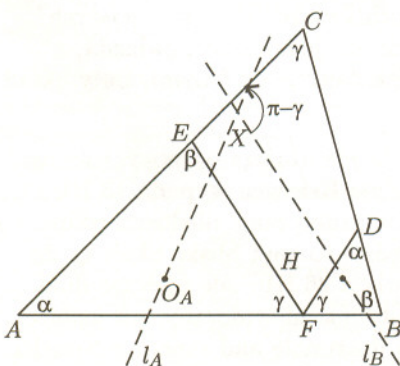
350. Oznaczmy te trzy proste Eulera odpowiednio przez ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C . Przyjmijmy, że trójka punktów (A, B, C) jest zorientowana dodatnio (poruszając się od punktu A do C wzdłuż łamanej ABC mamy wewnątrz trójkąta ABC po lewej stronie). Niech H będzie punktem przecięcia wysokości AD, BE, CF . Kąty $\angle AEH$ i $\angle AFH$ są proste, więc środek O_A okręgu opisanego na trójkącie EAF pokrywa się ze środkiem odcinka AH . Podobnie punkty O_B i O_C są środkami odcinków BH i CH . Zatem trójkąt $O_A O_B O_C$ jest podobny do trójkąta ABC (rys. 1).

Jeśli $\angle BCA = \gamma$, to także $\angle AFE = \angle BFD = \gamma$ (rys. 2) i wobec tego trójkąt FEA jest obrazem trójkąta FBD w przekształceniu (podobieństwie) będącym złożeniem obrotu wokół punktu F o kąt $\pi - \gamma$ w kierunku dodatnim z pewną jednokładnością o środku F . Obrazem prostej ℓ_B w tym przekształceniu jest prosta ℓ_A . Stąd wynika, że proste ℓ_A i ℓ_B przecinają się w takim punkcie X , że albo trójka (O_A, O_B, X) jest zorientowana dodatnio i $\angle O_A X O_B = \gamma$, albo trójka (O_A, O_B, X) jest zorientowana ujemnie i $\angle O_A X O_B = \pi - \gamma$ (rys. 3). W obu przypadkach punkt X leży na okręgu opisanym na trójkącie $O_A O_B O_C$.

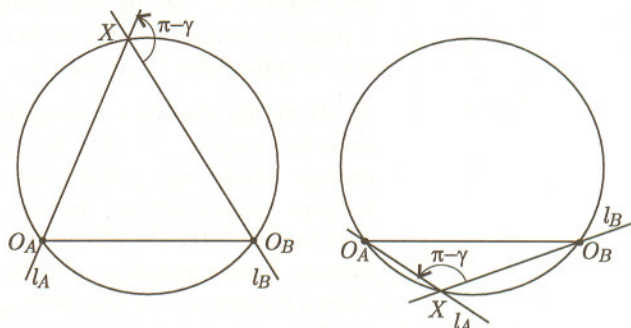
Analogicznie wykazujemy, że także proste ℓ_A i ℓ_C przecinają się w punkcie leżącym na tym samym okręgu. Jest to więc punkt wspólny wszystkich trzech prostych ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C .



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Patrz w niebo



Krzywą rotacji galaktyki $v(r)$ nazywa się zależność prędkości gwiazd względem centrum galaktyki od odległości od niego. Zależność ta jest źródłem bardzo ważnych informacji o galaktyce, w pierwszym rzędzie o rozkładzie w niej masy. Dwie szczególne krzywe rotacji jest łatwo zinterpretować. Liniowy wzrost prędkości gwiazd ze wzrostem r dowodzi, że galaktyka – przynajmniej w części – obraca się jak ciało sztywne, a to z kolei oznacza, że jest równomiernie wypełniona gwiazdami. Tak w przybliżeniu obracają się galaktyki eliptyczne i centralne zgęszczenia galaktyk spiralnych. Drugi szczególny przypadek realizują planety obiegające gwiazdę centralną. Ich ruch podlega, jak wiadomo, prawom Keplera, a z trzeciego prawa wynika, że średnia prędkość $v \sim r^{-1/2}$. Tak też poruszałyby się gwiazdy w dysku galaktyki, której większość masy skupiona byłaby w zgęszczeniu centralnym. Takich galaktyk jest jednak niezbyt wiele, a rzeczywiste krzywe rotacji w obszarze dysku przebiegają zazwyczaj w przybliżeniu „poziomo”, tzn. v nie zależy od r . Dowodzi to, że masa w takiej galaktyce ani nie jest skupiona w centrum, ani nie jest rozłożona równomiernie – zachodzą różne przypadki pośrednie, gdzie o kształcie krzywych rotacji decyduje zapewne rozkład niewidocznej materii zawartej w galaktykach.

Krzywe rotacji dość łatwo i pewnie wyznacza się na podstawie dopplerowskich przesunięć linii widmowych gwiazd tworzących galaktykę, jeżeli tylko widać ją w przybliżeniu (ale nie dokładnie) z krawędzi. Taka korzystna sytuacja zachodzi dla dość bliskiej (odległość 6,5 Mpc) galaktyki M 106 (= NGC 4258) w Psach Gończych. Kilka lat temu przeprowadzono precyzyjne pomiary położenia (z dokładnością do 0,2 milisekundy kątowej, czemu odpowiada w galaktyce 0,07 pc) i prędkości (z dokładnością nie gorszą niż 1 km/s) maserowych źródeł promieniowania radiowego krążących blisko centrum tej galaktyki. Przebieg krzywej rotacji okazał się jak w podręczniku: ruch maserowych radioźródeł jest z wysoką dokładnością keplerowski. Interpretacja krzywej rotacji dowodzi, że w centralnym obszarze M 106 o średnicy nie przekraczającej jednego roku świetlnego skupiona jest masa 36 mln mas Słońca. Gdyby taki obszar wypełniały gwiazdy, to obiekt ten byłby dynamicznie niestabilny i w ciągu najwyżej 100 mln lat musiałby się zapaść do stanu czarnej dziury wyrzuciwszy ewentualnie na zewnątrz niewielką część gwiazd. 100 mln lat to mały ułamek wieku galaktyki, zatem czarna dziura musi już tam być, a M 106 jest – wśród pobliskich galaktyk – najpoważniejszym kandydatem na posiadacza masywnej czarnej dziury.

Tomasz KWAST

Marzec

W marcowe wieczory widzimy wysoko na niebie dwie najjaśniejsze gwiazdy Bliźniąt – Kastora i Polluksa. Stanowią one rzadki przypadek, gdy najjaśniejszą gwiazdą gwiazdozbioru nie jest alfa. Tu alfą jest Kastor, ale najjaśniejszą jest beta – Polluks. Za to Kastor jest gwiazdą aż poszóstą, a dokładniej składa się z trzech par spektroskopowo podwójnych. Już w niewielkiej lunecie widać, że Kastor składa się z przynajmniej dwóch gwiazd, ale potężniejszych przyrządów trzeba, by stwierdzić, że jest tam jeszcze jedna słaba gwiazda, a ponadto wszystkie trzy są bardzo ciasnymi układami podwójnymi. Cały układ leży w odległości 14 pc od nas.

20 III mamy równonoc wiosenną, a więc dni będą już dłuższe od nocy, co z nie całkiem jasnych powodów wszystkich cieszy. Pełnia Księżyca wypada 13 III; nastąpi wtedy jego półcieniowe zaćmienie, a więc praktycznie niedostrzegalne. Księżyc silnie zbliży się do Saturna 1 III (ale będzie to zbyt blisko Słońca), do Aldebarana 5 III, do Wenus 24 III i zakryje Jowisza 26 III – ale podczas dnia. Zresztą Jowisz znajdujący się w Wodniku jest obecnie niewidoczny, tak samo Mars i Saturn w Rybach. Jedynie Wenus widać doskonale nad ranem w Strzelcu, 27 III osiągnie ona największą kątową odległość od Słońca.

T.K.

CYFROMANIA (3)

Jako pretekst do dalszych rozważań weźmy następujące

Zadanie: Czy potęga trójki może mieć końcówkę 1998-cyfrową złożoną z jednakowych cyfr? A z 999 jednakowych grup dwucyfrowych?

Aby odpowiedzieć na powyższe pytania, musimy najpierw zrozumieć, jakie grupy cyfr mogą być końcówkami potęg trójki.

Reszty z dzielenia potęg trójki przez 5^k zachowują się tak, jak reszty z dzielenia potęg dwójki – tworzą ciąg okresowy o okresie $4 \cdot 5^{k-1}$ i wyczerpują wszystkie reszty niepodzielne przez 5. Dochodzi jednak do głosu kwestia reszt z dzielenia przez 2^k , którą teraz się zajmujemy.

Niech $a > 1$ będzie liczbą nieparzystą. Reszty z dzielenia a^n przez 2^1 są równe 1, tworzą więc ciąg okresowy o okresie $O_1 = 1$. Ponieważ $a^2 - 1$ dzieli się przez 2^3 , więc ciąg reszt z dzielenia a^n przez 2^3 ma okres 2. Najmniejszy okres O_3 może być równy 1 lub 2.

Jeśli $O_3 = 1$, to także $O_2 = 1$, jeśli natomiast $O_3 = 2$, to O_2 może być równe 1 lub 2.

Jaki jest najmniejszy okres O_k ciągu reszt z dzielenia a^n przez 2^k ?

Dla nieparzystych $b > 1$ i $k \geq 2$ zachodzi implikacja $2^k \parallel b - 1 \Rightarrow 2^{k+1} \parallel b^2 - 1$. Istotnie, skoro $2^k \parallel b - 1$, to $2 \parallel b + 1$ i $2^{k+1} \parallel (b - 1)(b + 1)$.

Wykorzystując tę zależność otrzymujemy: $O_1 = 1$, O_2 jest równe 1 lub 2. Przy tym niech $2^l \parallel a^{O_2} - 1$, gdzie $l \geq 2$. Wtedy $O_2 = O_3 = \dots = O_l$ oraz $O_{k+1} = 2O_k$ dla $k \geq l$. W przypadku $a = 3$ mamy $O_1 = 1$, $O_2 = O_3 = 2$ oraz $O_k = 2^{k-2}$ dla $k \geq 4$.

Reszty z dzielenia potęg trójki przez 2^{1998} mogą więc przyjmować 2^{1996} wartości – nietrudno zobaczyć, że są to liczby podzielne przez 8 z resztą 1 lub 3.

Przejdźmy teraz do przeanalizowania, jakie końcówki mogą mieć potęgi trójki.

$k = 1$. Potęgi trójki przy dzieleniu przez 5^1 dają ciąg reszt o okresie 4, a przy dzieleniu przez 2^1 – ciąg o okresie 1. Okres ciągu reszt z dzielenia przez 10^1 (czyli końcówek 1-cyfrowych) jest najmniejszą wspólną wielokrotnością tych okresów i wynosi 4. Są więc 4 możliwe końcówki 1-cyfrowe: 1, 3, 7 i 9.

$k = 2$. Okres ciągu końcówek dwucyfrowych wynosi $NWW(20, 2) = 20$ i tyle jest możliwych końcówek, jakie mogą mieć potęgi trójki. Jest ich 5 razy więcej niż końcówek 1-cyfrowych. Każda końcówka 1-cyfrowa może

być rozszerzona do końcówki 2-cyfrowej na 5 sposobów przez dodanie na początku jednej z pięciu cyfr parzystych lub jednej z pięciu cyfr nieparzystych – wynika to z rozważenia ciągu reszt z dzielenia przez 20, który ma okres 4.

Bezpośrednie obliczenia pokazują, że przedostatnia cyfra musi być we wszystkich 4 przypadkach parzysta.

Odpowiedź na pierwsze pytanie postawione w zadaniu jest więc negatywna: ostatnie 2 cyfry potęgi trójki są zawsze różne, bo są różnej parzystości. Na drugie pytanie odpowiemy w następnym numerze Γ-limatiasu. JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (2)

Zadanie: Dowieść, że liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie: Liczba $-\sqrt{2}$ jest niewymierna. Także liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$ jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat $3 - \sqrt{8}$ też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$ jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych. JWR

MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (3)

Zadanie: Obliczyć całkę $\int_{-1}^1 f(x) dx$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Bez trudu można sprawdzić, że f jest ciągła w zerze (zob. wykres), a zatem obliczenie całki

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \text{ nie powinno nastręczać trudności. Ponieważ}$$

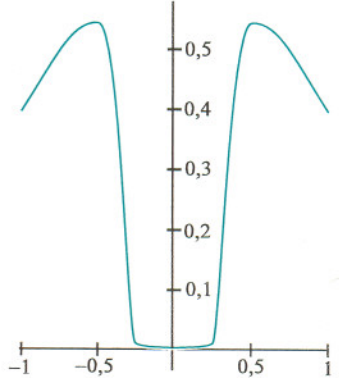
$$f(x) = \frac{1}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} \text{ poza pojedynczym punktem } x = 0,$$

po wykonaniu podstawienia $t = e^{1/x}$ otrzymujemy

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2(e^{1/x} + e^{-1/x})} = - \int_{1/e}^e \frac{dt}{t^2 + 1} =$$

$$= -\arctg t \Big|_{1/e}^e = -\arctg e + \arctg \frac{1}{e} = \frac{\pi}{2} - 2 \arctg e < 0.$$

Jak to możliwe, że całka z funkcji nieujemnej jest mniejsza od 0?



JWR