



Nazwa: *Bracia w Rozumie*  
 M. zam.: *Wszechświat*

## SPIS TREŚCI

NUMERU 1(284)

O trójkątach pitagorejskich o równych polach <i>Norbert Hungerbühler</i>	str. 1
Zadania	str. 3
Księżycy Hipokratesa <i>Witold Bednarek</i>	str. 4
Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str. 6
Aktualności (nie tylko) fizyczne	str. 7
Mała Delta	str. 8
Inne spojrzenie	str. 9
Poszukiwanie nowych układów planetarnych <i>Radomił Zajączkowski</i>	str.10
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Styczeń	str.16
Gammalimatias	str.17

### W następnym numerze:

O brzytwie Ockhama  
w astronomii

Okładkę i ilustracje wykonał  
*Krzysztof Biesaga*

Wybór artykułów z *Delta*  
ukazuje się w języku angielskim  
w sieci Internet pod adresem  
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:  
Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,  
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.  
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:  
Andrzej Białynicki-Birula  
Bogdan Cichocki  
– wiceprzewodniczący  
Krzysztof Ciesielski  
Jan A. Gaj  
Piotr Goldstein  
Tomasz Hofmokl  
Andrzej Hryniewicz  
Wiesław A. Kamiński  
Marta Kicińska-Habior  
Krzysztof Maślanka  
Andrzej Mąkowski  
Zdzisław Pogoda  
Feliks Przytycki  
Michał Różycki  
Konrad Rudnicki  
Zbigniew Semadeni  
Grzegorz SitarSKI  
Andrzej Woszczyk  
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
Wiktor Bartol  
Krzysztof Biesaga  
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.  
Krzyszyna Kordos – sekr. red.  
Marek Kordos – red. nac.  
Tomasz Kwast  
Anna Ludwicka  
Anna Rudnik  
Paweł Strzelecki  
Joanna Udalska  
Anna Wojtyra  
Piotr Zalewski  
Adres Redakcji:  
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa  
tel. 843-02-41(-2) wewn. 21  
PAWELST@MIMUW.EDU.PL  
Wydrukowano  
w Drukarni Naukowo-Technicznej  
w Warszawie, ul. Mińska 65.  
Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Żuga 12 (tel. 34-65-21)  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres  
prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena  
jednego numeru w 1998 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie  
okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)  
cena numeru w 1998 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą  
odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje  
dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1998 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe  
„Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa  
egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się  
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej.  
Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A.  
XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa,  
ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>.  
Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem  
zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,  
realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem  
otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.  
Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71  
wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także  
tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

Numer archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.  
Niestety, nie dysponujemy już numerami z lat 1974-1984.



# O trójkątach pitagorejskich o równych polach

Norbert HUNGERBÜHLER

## Wprowadzenie

Autor jest matematykiem z Eidgenosse Technische Hochschule w Zurychu. Zajmuje się głównie układami nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Niniejszy tekst to wersja jego artykułu [6], przygotowana na prośbę redakcji.

O trójkątach pitagorejskich pisaliśmy w *Delcie* 11/1997 – red.

W poprzednim, grudniowym numerze *Delt*y, w artykule Jacka Jakubowskiego i Rafała Sztencła *Rzuć monetą...*, niebawale złośliwy chochlik umieścił fałszywą nierówność  $e^x \leq 1 + x$ , wstawiając feralne  $(1 + x)$  między dwie strony prawdziwej nierówności  $e^x \leq e^{x^2} + x$ .

Zawstydzeni, serdecznie przepraszamy Autorów i Czytelników.

Redakcja

Poszukiwanie trójkątów prostokątnych o bokach długości całkowitej (tzw. trójkątów pitagorejskich) to bardzo dawny ślad ludzkiego zainteresowania matematyką. Już w starożytnym Babilonie i Egipcie znano wiele takich trójkątów.

Jak wiadomo, dla dowolnych niezerowych liczb całkowitych  $m \neq n$  i  $\lambda \neq 0$  liczby

$$(1) \quad a = 2\lambda mn, \quad b = \lambda(m^2 - n^2), \quad c = \lambda(m^2 + n^2)$$

są (z dokładnością do znaku, którym się przejmować nie będziemy) długościami boków trójkąta pitagorejskiego. Taki trójkąt nazwiemy pierwotnym, jeśli  $NWD(a, b, c) = 1$ . Jak łatwo sprawdzić, dla  $\lambda = 1$  oraz względnie pierwszych  $m, n$  różnej parzystości, otrzymujemy trójkąt pierwotny. Co więcej, wszystkie trójkąty pierwotne można otrzymać w ten sposób.

Trójkąty pitagorejskie i ich własności interesowały najróżniejszych autorów (zob. np. [1], [2], [8]). Był wśród nich Charles Lutwidge Dodgson, matematyk o dość szerokich zainteresowaniach, lepiej znany jako Lewis Carroll, autor *Przygód Alicji w krainie czarów* (1865). Na stronie 343 książki *Life and Letters of Lewis Carroll* [3] znaleźć można następujący zapis z jego dziennika:

19-ty grud. (niedz.) – Siedziałem nocą do 4-tej nad kuszącym problemem, nadesłanym z N. Jorku: „znaleźć trzy równe  $\Delta$ -ty prost. o wymiernych bokach”. Znalazłem dwa, o bokach 20, 21, 29 i 12, 35, 37; nie mogłem znaleźć trzech.

Carroll szukał więc trzech trójkątów pitagorejskich o równych polach. Mimo porażki postawił hipotezę, że takich trójek trójkątów pitagorejskich istnieje nieskończenie wiele. (Uwaga: dwie trójki uznajemy za identyczne, jeśli boki wszystkich trójkątów jednej z nich można uzyskać, mnożąc boki trójkątów drugiej trójki przez pewną liczbę wymierną). Spróbujmy pomóc pisarzowi w rozwiązaniu jego zadania.

## Trójki trójkątów pitagorejskich o równym polu

Zacznijmy od znalezienia w możliwie systematyczny sposób *dwóch* trójkątów pitagorejskich o równym polu. Weźmy trójkąty o bokach równych odpowiednio

$$\begin{aligned} a_1 &= 2mn_1, & b_1 &= m^2 - n_1^2, & c_1 &= m^2 + n_1^2; \\ a_2 &= 2mn_2, & b_2 &= m^2 - n_2^2, & c_2 &= m^2 + n_2^2. \end{aligned}$$

Dodatkowe życzenie, by oba trójkąty miały jednakowe pole  $P$ , prowadzi do równania

$$(2) \quad P = mn_1(m^2 - n_1^2) = mn_2(m^2 - n_2^2).$$

Dzieląc obie strony przez  $m$  i zbierając składniki zawierające  $m$  po lewej stronie, otrzymujemy

$$(3) \quad m^2(n_1 - n_2) = n_1^3 - n_2^3 = (n_1 - n_2)(n_1^2 + n_1n_2 + n_2^2).$$

Przy założeniu  $n_1 - n_2 \neq 0$  mamy więc

$$(4) \quad m^2 = n_1^2 + n_1n_2 + n_2^2.$$

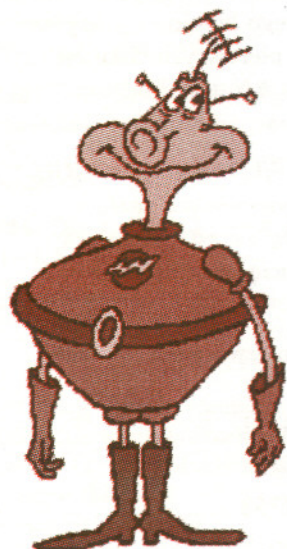
Rozwiązujemy (4) jako równanie kwadratowe z niewiadomą  $n_1$  i widzimy, że

$$(5) \quad n_1 = -\frac{1}{2}(n_2 - \sqrt{4m^2 - 3n_2^2}).$$

Skoro wynik jest liczbą całkowitą, wyróżnik musi być pełnym kwadratem, więc dla pewnego  $\alpha \in \mathbf{N}$  zachodzi równość

$$(6) \quad (2m)^2 - 3n_2^2 = \alpha^2.$$

Równanie diofantyczne (6) znane jest jako tzw. *równanie Pella*. Dobrze wiadomo



Nazwa: *Mamlak*  
M. zam.: *Ukl. 51 Peg*



Dla tych, którzy o równaniu Pella nie wiedzą i nie chcą wiedzieć wszystkiego, proponujemy drogę na skróty. Określimy dwa ciągi liczb naturalnych  $p_n$  i  $q_n$  wzorami rekurencyjnymi:  $p_0 = 2$ ,  $q_0 = 1$ ,

$$p_{n+1} = 7p_n + 12q_n,$$

$$q_{n+1} = 4p_n + 7q_n.$$

Łatwo wykazać przez indukcję, że dla każdego  $n$  liczba  $p_n$  jest parzysta, niepodzielna przez 3 i  $p_n^2 - 3q_n^2 = 1$ . Otrzymujemy więc nieskończoną serię rozwiązań  $(p_n/2, q_n)$  równania Pella (6) dla szczególnej wartości  $\alpha = 1$ .

Czytelnik zechce sprawdzić, że nieskończenie wiele trójek pierwotnych trójkątów pitagorejskich o równym polu można otrzymać, wykorzystując opisane wyżej ciągi  $p_n$  i  $q_n$  oraz wyznaczoną przez nie serię rozwiązań równania Pella.



Nazwa: *Grzdąciel*  
M. zam.: *Ukl.  $\mu$  And*

(zob. np. [7]), że ma ono nietrywialne rozwiązania (tzn.  $n_2 \notin \{0, \pm m\}$ ), gdy  $m$  jest liczbą pierwszą postaci  $m = 6N + 1$  (lub iloczynem takich liczb).

Każde rozwiązanie równania Pella (6) prowadzi do rozwiązania wyjściowego równania (2). Istotnie, z (6) wynika, że  $n_2$  i  $\alpha$  są tej samej parzystości, zatem z warunku (5)  $n_1$  jest liczbą całkowitą. Mamy też  $n_1 \neq n_2$  (w przeciwnym przypadku liczba  $m$  dzieliłaby się przez 3).

A teraz zdarza się cud. Choć zaczęliśmy od szukania *dwóch* trójkątów, w istocie znaleźliśmy *trzy*. Dlaczego? Otóż, równanie (2) oznacza, że  $n_1$  i  $n_2$  są różnymi pierwiastkami wielomianu trzeciego stopnia  $p(x) = x(x - m)(x + m) + \frac{P}{m}$ . Trzeci pierwiastek tego wielomianu spełnia, zgodnie z twierdzeniem Viète'a, warunek

$$(7) \quad n_1 + n_2 + n_3 = 0$$

(dla niewtajemniczonych: zapisujemy wielomian w postaci iloczynu czynników liniowych i sprawdzamy współczynnik przy  $x^2$ ). Podobnie,  $n_1 n_2 n_3 = -\frac{P}{m} \neq 0$ . Wynika stąd, że liczby całkowite  $n_1$ ,  $n_2$  i  $n_3$  są różne od  $\pm m$  (bowiem  $p(\pm m) \neq 0$ ) i w dodatku mają różne moduły. Zatem, trójkąty pitagorejskie  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) o bokach  $2mn_i$ ,  $m^2 - n_i^2$  oraz  $m^2 + n_i^2$  mają to samo pole  $P = -mn_1 n_2 n_3$ . Ich przeciwprostokątne  $c_i$  są różne, więc  $D_i$  nie są przystające.

Znaleziona trójka ma specjalną własność: z (7) wynika, że przynajmniej jedna z liczb  $n_i$  jest parzysta. Łatwo też zauważyć, że żadna z  $n_i$  nie jest wielokrotnością  $m$ . Gdy liczba  $m$  jest pierwsza, to przynajmniej jeden z trójkątów  $D_i$  jest trójkątem pierwotnym. Zatem trójka  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , jest wówczas pierwotna – w tym sensie, że nie ma liczby naturalnej, która dzieliłaby jednocześnie długości wszystkich 9 boków znalezionych trójkątów.

Czy może się zdarzyć, że dla różnych  $m$  otrzymamy tę samą trójkę? Nie! By się o tym przekonać, zauważmy, że dokładnie jedna z liczb  $n_i$ , powiedzmy  $n_1$ , ma moduł większy od  $|m|$  (trzeba spojrzeć na wykres wielomianu  $p(x)$ ). Trójkąt  $D_1$  ma więc w naszej trójce przyprostokątną o największej długości  $z$ . Jeśli  $x$  i  $y$  są długościami przyprostokątnych  $D_1$ , to z definicji boków  $D_i$  mamy wtedy

$$\text{albo } m = \sqrt{\frac{z-x}{2}} \in \mathbf{N}, \quad \text{albo } m = \sqrt{\frac{z-y}{2}} \in \mathbf{N},$$

(tylko jeden z ułamków pod pierwiastkiem ma wartość naturalną). Zatem, trójka wyznacza liczbę  $m$ .

Dla każdej liczby pierwszej  $m = 6N + 1$  otrzymujemy trójkę pierwotną trójkątów pitagorejskich o równych polach. Ile jest takich  $m$ ? Przypomnijmy twierdzenie Dirichleta: każdy ciąg arytmetyczny, którego kolejne wyrazy są względnie pierwsze, zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych. Istnieje więc nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci  $m = 6N + 1$ . Podsumujmy dotychczasowe rozważania.

**Twierdzenie.** *Istnieje nieskończona rodzina trójek trójkątów pitagorejskich o równych polach. W szczególności, dla różnych liczb pierwszych postaci  $m = 6N + 1$  otrzymujemy różne trójki pierwotne trójkątów pitagorejskich o polu  $P = mnl(n + l)$ , gdzie  $n$  i  $l$  są naturalnymi rozwiązaniami równania  $m^2 = n^2 + nl + l^2$ .*

**Uwaga.** Opisana metoda nie daje wszystkich trójek pierwotnych. Wśród pominiętych trójek pierwotnych jest np. trójka

$$a_1 = 4080 \quad b_1 = 1001 \quad c_1 = 4201$$

$$a_2 = 1430 \quad b_2 = 2856 \quad c_2 = 3194$$

$$a_3 = 528 \quad b_3 = 7735 \quad c_3 = 7753$$

– dostaniemy ją, kładąc we wzorach (1)  $\lambda = 1$  oraz  $(m_1, n_1) = (51, 40)$ ,  $(m_2, n_2) = (55, 13)$ ,  $(m_3, n_3) = (88, 3)$ . Wspólne pole trójkątów to  $P = 2042040$ . Można udowodnić, że żadna trójka o mniejszym polu nie jest pominięta. Przykład został znaleziony przy użyciu programu *Mathematica*.



- [1] J. Collins, *The Gentleman's Math. Companion*, 2, No. 11 (1808), 123.
- [2] J. Cunliffe, *New Series of the Math. Repository* (ed. Th. Leybourn), 3, II (1814), 60.
- [3] C.S. Dodgson, *Life and Letters of Lewis Carroll*, New York Century, 1898.
- [4] P. Fermat, *Œuvres III*, 254–255; Fermat's Diophanti Alex. Arith., 1670, 220.
- [5] M. Hazewinkel, *Encyclopaedia of mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (etc.), 1987.
- [6] N. Hungerbühler, *Math. Mag.* 69/3, 182–184 (1996).
- [7] L. J. Mordell, *Diophantine equations*, Academic Press, London (etc.), 1970.
- [8] C. Tweedie, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 24 (1905–6), 7–19.

Carroll najwyraźniej nie wiedział o spostrzeżeniu Fermata poczynionym w [4]: jeśli  $z$  jest przeciwprostokątną, a  $b$  i  $d$  przyprostokątnymi trójkąta prostokątnego o bokach wymiernych, to można otrzymać nowy trójkąt prostokątny o wymiernych bokach i tym samym polu, kładąc

$$z' = \frac{z^4 + 4b^2d^2}{2z(b^2 - d^2)}, \quad b' = \frac{z^4 - 4b^2d^2}{2z(b^2 - d^2)}, \quad d' = \frac{4z^2bd}{2z(b^2 - d^2)}.$$

Iterując powyższy wzór  $n - 1$  razy, otrzymamy  $n$  trójkątów prostokątnych o równych polach i bokach długości wymiernej. Pomnożenie wszystkich boków przez odpowiednią liczbę całkowitą zmieni długości boków w liczby całkowite i, oczywiście, nie naruszy warunku równości pól. Nie mamy jednak pewności, czy niektóre z otrzymanych trójkątów nie będą przystające. Zakończmy więc niniejszy artykuł zadaniem dla Czytelników.

**Zadanie.** Udowodnić, że dla każdego  $n \in \mathbf{N}$  istnieje nieskończona rodzina (pierwotnych)  $n$ -tek trójkątów pitagorejskich o równych polach.

*Z angielskiego przełożył P.S.*



## Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

Rozważamy funkcje o wartościach rzeczywistych określone na zbiorze  $\{-1, 1\}^n$ , na który można patrzeć jako na zbiór wierzchołków  $n$ -wymiarowej kostki  $[-1, 1]^n$ . Dla każdego podzbioru  $A$  zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  funkcję  $w_A : \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbf{R}$  definiujemy wzorem  $w_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i \in A} x_i$ . Przyjmujemy, że  $w_\emptyset \equiv 1$ .

Funkcje  $w_A$  tworzą tzw. układ Walsha.

**M 832.** Udowodnić, że dla  $A, B \subset \{1, 2, \dots, n\}$  zachodzi tożsamość  $w_A \cdot w_B = w_{A \dot{\cup} B}$ , gdzie  $A \dot{\cup} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  oznacza różnicę symetryczną zbiorów  $A$  i  $B$ .

Rozwiązanie na str. 16

**M 833.** Udowodnić, że dla każdej funkcji  $f: \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbf{R}$  można dobrać takie liczby rzeczywiste  $a_A$ , że

$$f = \sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} a_A w_A.$$

Rozwiązanie na str. 15

**M 834.** Dla  $f: \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbf{R}$  zdefiniujemy funkcję  $Lf: \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbf{R}$  wzorem

$$Lf(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \left( f(-x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + f(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) \right)$$

(tzn. funkcję  $Lf$  otrzymujemy, uśredniając wartości  $f$  w sąsiednich wierzchołkach kostki). Udowodnić, że  $Lw_A = (1 - \frac{2}{n} \text{card } A) w_A$ , gdzie  $\text{card } A$  oznacza liczbę elementów zbioru  $A$ .

Rozwiązanie na str. 16

**Uwaga.** Powyższe wyniki można wykorzystać do wykazania ergodyczności symetrycznego błędzenia losowego po wierzchołkach  $n$ -wymiarowej kostki (do sąsiednich wierzchołków przechodzimy z prawdopodobieństwem  $1/n$ ).

Redaguje Jarosław KULPA

**F 467.** Od lat fizycy zastanawiają się, czy neutrino ma masę spoczynkową. Oszacować, jaką teoretycznie największą masę może mieć neutrino i wyrazić tę masę w elektronowoltach.

Przyjąć, że liczba neutrin we Wszechświecie jest porównywalna z liczbą fotonów promieniowania reliktowego mających widmo ciała doskonale czarnego o temperaturze  $T = 2,74$  K. Koncentracja fotonów wynosi  $n = a \left(\frac{kT}{hc}\right)^3$ , gdzie  $a = 60,4$  jest współczynnikiem liczbowym,  $k$  – stałą Boltzmanna, natomiast  $h$  – stałą Plancka. Przyjąć, że gęstość Wszechświata jest równa w przybliżeniu gęstości krytycznej  $\rho_{kr} = 5,5 \cdot 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , masa zaś obserwowalnej jasnej materii jest dziesięciokrotnie mniejsza.

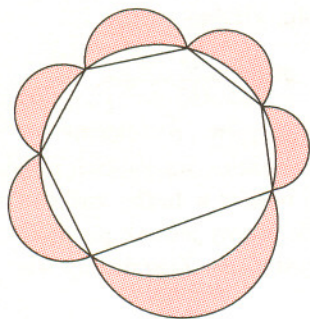
Rozwiązanie na str. 6

**F 468.** Kiedy w momencie gaszenia światła otwieramy oczy, widzimy przez chwilę proces stygnięcia włókna żarówki. Oszacować czas tego procesu, gdy temperatura włókna spada od  $T_1 = 2800$  K do  $T_2 = 1000$  K, tj. do granicy odbierania wrażeń wzrokowych. Dane dotyczące żarówki i włókna: moc żarówki  $P = 100$  W, promień przekroju włókna  $r = 1 \cdot 10^{-4}$  m, gęstość wolframu  $\rho = 19\,300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , masa molowa wolframu  $\mu = 184 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ , emisyjność wolframu w porównaniu z ciałem doskonale czarnym  $k = 40\%$ .

Prawo Stefana-Boltzmanna mówi, że moc promieniowania jednostkowej powierzchni ciała doskonale czarnego wynosi  $\sigma \cdot T^4$ , gdzie  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  jest stałą Stefana-Boltzmanna. Ciepło molowe ciał stałych w wysokich temperaturach wynosi  $C = 3 R$ , gdzie  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  jest stałą gazową.

Rozwiązanie na str. 6





Rys. 1

1. Niech  $W$  będzie wielokątem wpisanym w okrąg  $o(O, R)$ . *Księżycem Hipokratesa wielokąta  $W$*  nazwiemy każdą figurę ograniczoną łukiem okręgu  $o(O, R)$  i półokręgiem leżącym na zewnątrz wielokąta  $W$ , opartym na jednym z boków tego wielokąta (rys. 1).

**Uwaga.** W naszych rozważaniach założymy dodatkowo, że  $O \in W$ .

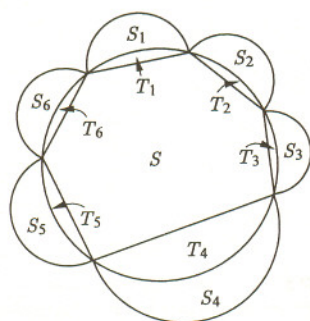
Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  oznaczają długości boków wielokąta  $W$  o polu  $S$ ;  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – pola księżyców Hipokratesa;  $T_1, T_2, \dots, T_n$  – pola odcinków koła  $k(O, R)$  wyznaczonych przez boki wielokąta  $W$  (rys. 2). Mamy wówczas

$$S_k + T_k = \frac{\pi}{2} \left(\frac{a_k}{2}\right)^2 \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n$$

oraz  $S + (T_1 + T_2 + \dots + T_n) = \pi R^2$ . Z tych równości wynika, że  $(S_1 + S_2 + \dots + S_n) - S = \frac{\pi}{8}(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 - 8R^2)$ . Wobec tego suma pól księżyców Hipokratesa wielokąta  $W$  jest równa jego polu wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1) \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 8R^2.$$

W tym artykule zajmiemy się poszukiwaniem wielokątów, których pole jest równe sumie pól ich księżyców.



Rys. 2

2. Hipokrates odkrył, że suma pól księżyców trójkąta prostokątnego jest równa jego polu (rys. 3). Istotnie, wobec twierdzenia Pitagorasa mamy

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 2a_3^2 = 8 \left(\frac{a_3}{2}\right)^2,$$

a  $R = a_3/2$  jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej  $a_3$ . (Zauważmy, że księżyc oparty na przeciwprostokątnej degeneruje się do łuku.)

Postawmy pytanie: czy istnieje trójkąt nieprostokątny, którego pole jest równe sumie pól jego księżyców?

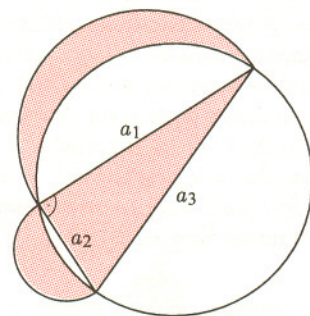
Założmy, że zachodzi warunek (1), tzn.  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 8R^2$ . Jak wiadomo,  $4R = a_1 a_2 a_3 / S$  oraz (wzór Herona)  $S = \sqrt{p(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3)}$ , gdzie  $p$  oznacza połowę obwodu trójkąta. Z tych trzech równości natychmiast wynika, że

$$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)p(p-a_1)(p-a_2)(p-a_3) = a_1^2 a_2^2 a_3^2.$$

Po przekształceniach otrzymujemy stąd

$$(a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)(a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) = 0.$$

Powyzsza równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy kwadrat długości pewnego boku trójkąta jest sumą kwadratów długości pozostałych boków. Oznacza to, że warunek (1) nie zachodzi dla żadnego trójkąta nieprostokątnego.



Rys. 3

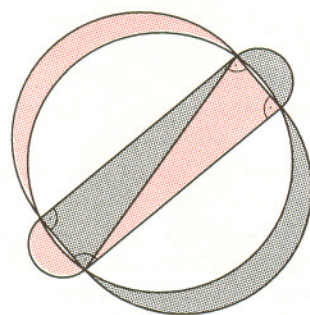
3. Poszukajmy teraz czworokątów spełniających warunek (1). Oczywiście, spełniają go czworokąty złożone z dwóch trójkątów prostokątnych wpisanych w okrąg – w szczególności prostokąty oraz deltoidy o kątach prostych między bokami różnej długości (rys. 4 i 5).

Rozważmy inny przypadek szczególny – trapez równoramienny. Przy oznaczeniach z rysunku 6 mamy

$$x^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = R^2, \quad y^2 + \left(\frac{a_2}{2}\right)^2 = R^2, \quad (x+y)^2 + \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 = a_3^2.$$

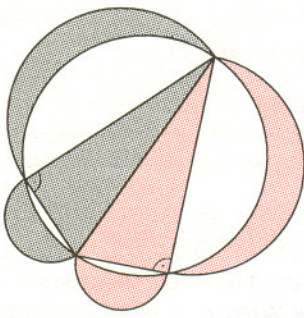
Po wyrugowaniu z tych równań  $x$  i  $y$  otrzymujemy

$$R^2 = \frac{a_3^2(a_3^2 + a_1 a_2)}{4a_3^2 - (a_1 - a_2)^2}.$$



Rys. 4





Rys. 5

Uwzględniając dodatkowo warunek (1) równości pól trapezu i jego księżyców, otrzymamy po przekształceniach

$$(a_1 - a_2)^2(2a_3^2 - (a_1^2 + a_2^2)) = 0.$$

Warunek ten jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 = a_2$  (trapez jest wówczas prostokątem) lub gdy  $a_3 = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}}$  (długość ramienia trapezu jest średnią kwadratową długości podstaw – ten warunek jest spełniony np. dla trapezu równoramiennego o bokach 7, 1, 5, 5).

4. Wiemy już, że pole trójkąta równobocznego nie jest równe, a pole kwadratu jest równe sumie pól odpowiednich księżyców Hipokratesa. Okazuje się, że nie istnieją inne wielokąty foremne, których pola byłyby równe sumie pól księżyców Hipokratesa. Oto dowód.

Długość boku  $n$ -kąta foremnego oznaczmy przez  $a$ . Zakładamy, że  $n > 4$ . Mamy (patrz rys. 7)  $a = 2R \sin \frac{\pi}{n}$ , a więc warunek (1) przybiera postać

$$8R^2 = n \cdot a^2 = 4nR^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}.$$

Stąd otrzymujemy  $\sin \pi/n = \sqrt{2/n}$ . Z drugiej strony, dla dodatnich  $\alpha$  zachodzi nierówność  $\sin \alpha < \alpha$ , a zatem byłoby  $\sin \pi/n = \sqrt{2/n} < \pi/n$ , co prowadzi do konkluzji  $n < \pi^2/2 < 5$ , sprzecznej z założeniem  $n > 4$ .

5. Na koniec udowodnimy, że dla każdego  $n > 4$  można w okrąg wpisać  $n$ -ką, którego pole jest równe sumie pól jego księżyców Hipokratesa. Rozważmy w tym celu okrąg o środku  $O$  i promieniu  $R$  oraz punkty  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tego okręgu, które wyznaczają kąty wpisane  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (patrz rys. 8). Korzystając z twierdzenia cosinusów dla trójkątów  $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_nOA_1$ , możemy warunek (1) przepisać w postaci

$$(2R^2 - 2R^2 \cos \alpha_1) + (2R^2 - 2R^2 \cos \alpha_2) + \dots + (2R^2 - 2R^2 \cos \alpha_n) = 8R^2$$

lub równoważnie

$$(2) \quad \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n = n - 4.$$

Aby rozwiązać nasz problem, należy podać liczby dodatnie  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , nie większe niż  $\pi$ , spełniające równość (2) oraz równość

$$(3) \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2\pi.$$

Przyjmijmy  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-3} = \alpha/(n-3)$ ,  $\alpha_{n-2} = \frac{5}{6}\pi - \alpha$ ,  $\alpha_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_n = \frac{2}{3}\pi$ . Równość (3) jest wówczas spełniona. Należy jeszcze wykazać, że istnieje liczba  $\alpha \in (0, \frac{5}{6}\pi)$ , dla której spełniona jest równość (2), czyli

$$(n-3) \cos \frac{\alpha}{n-3} + \cos \left( \frac{5}{6}\pi - \alpha \right) = n - 3\frac{1}{2}.$$

Rozważmy funkcję  $f(x)$  określoną wzorem

$$f(x) = (n-3) \cos \frac{x}{n-3} + \cos \left( \frac{5}{6}\pi - x \right).$$

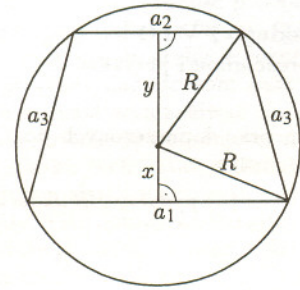
Obliczmy  $f(\frac{\pi}{6})$  i  $f(\frac{\pi}{3})$ . Mamy

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = (n-3) \cos \frac{\pi}{6(n-3)} + \cos \frac{2}{3}\pi < (n-3) + \cos \frac{2}{3}\pi = n - 3\frac{1}{2}.$$

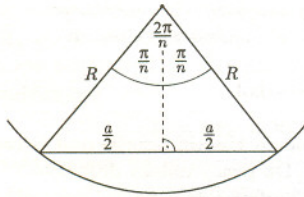
Z drugiej strony, z nierówności  $\cos \alpha > 1 - \alpha^2/2$ , dla  $\alpha > 0$ , wynika, że

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= (n-3) \cos \frac{\pi}{3(n-3)} > (n-3) \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{3(n-3)} \right)^2 \right) = \\ &= n - 3 - \frac{\pi^2}{18(n-3)}. \end{aligned}$$

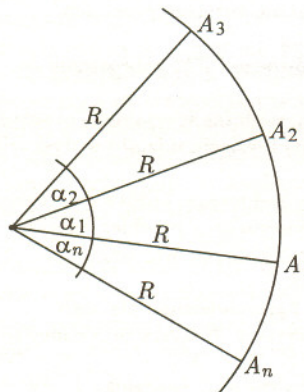
Ponieważ  $n \geq 5$ , więc prawa strona powyższej nierówności jest, jak łatwo sprawdzić, większa od  $n - 3\frac{1}{2}$ . Funkcja  $f$  jest ciągła, a więc ma własność Darboux: istnieje  $\alpha \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ , takie, że  $f(\alpha) = n - 3\frac{1}{2}$ . To spostrzeżenie kończy dowód.



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8





### Rozwiązanie zadania F 467.

Wypełniając 90% brakującej materii neutrinami otrzymujemy

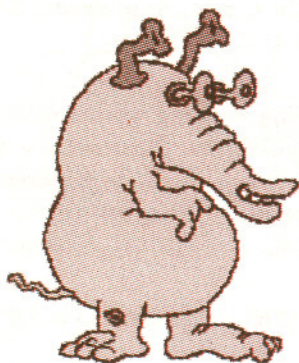
$$n \cdot m_\nu \leq 0,9\rho_{kr},$$

skąd

$$m_\nu \leq \frac{0,9\rho_{kr}}{a} \cdot \left(\frac{hc}{kT}\right)^3 = 1,2 \cdot 10^{-35} \text{ kg},$$

Przeliczając na elektronowolty otrzymujemy

$$m_\nu c^2 \leq 7 \text{ eV}.$$



Nazwa: **Plamciak**  
M. zam.: **Ukl. 55 Cnc**



### Rozwiązanie zadania F 468.

Na podstawie prawa Stefana-Boltzmanna moc promieniowania włókna żarówki o długości  $l$  wynosi

$$P = k\sigma T^4 \cdot 2\pi r \cdot l.$$

Po wyłączeniu żarówki moc ta równa jest ubytkowi energii wewnętrznej włókna w jednostce czasu

$$\frac{dQ}{dt} = -3R \frac{m}{\mu} \cdot \frac{dT}{dt},$$

gdzie  $m = \rho\pi r^2 \cdot l$  jest masą włókna. Porównując oba wyrażenia dostajemy proste równanie różniczkowe

$$T^4 = -A \frac{dT}{dt}, \quad \text{gdzie } A = \frac{3R\rho r}{2\mu k\sigma}.$$

Całkując otrzymujemy

$$t = -A \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T^4} = \frac{A}{3} \left( \frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3} \right)$$

i ostatecznie  $t = 1,5 \text{ s}$ .

## Protokół posiedzenia Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie:

Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Andrzej Mąkowski, Waldemar Pompe, Paweł Strzelecki, Mieczysław Trąd, Agnieszka Wojciechowska, Jarosław Wróblewski,

na posiedzeniu w dniu 12 września 1997 roku w Zielonej Górze, po zapoznaniu się z treścią prac i ich recenzji oraz wysłuchaniu wystąpień autorów postanowiło:

- 1) przyznać złoty medal i nagrodę w łącznej wysokości 600 złotych **Grzegorzowi Kapustce i Michałowi Kapustce** z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie za pracę *O pewnych własnościach parzystokątów wpisanych i opisanych na okręgach*,
- 2) nie przyznawać srebrnego medalu,
- 3) przyznać brązowy medal i nagrodę w wysokości 300 złotych **Maciejowi Mostowskiemu** z XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie za pracę *O wielomianach przyjmujących w liczbach całkowitych wartości będące kwadratami liczb całkowitych*,
- 4) wyróżnić pracę **Pawła Golonki i Piotra Nowakowskiego** z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, pod tytułem *Własności czworościanów* i przyznać jej autorom nagrodę w łącznej wysokości 300 złotych,
- 5) przyznać nagrody w wysokości 200 zł każda opiekunom prac dopuszczonych do finału, **Wojciechowi Boratyńskiemu i Tomaszowi Szembergowi**.

(-) podpisy członków Jury

Tradycyjnym zwyczajem redakcja *Delty* ogłasza Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zachęcamy uczniów zainteresowanych matematyką do opracowywania swoich matematycznych rozważań i nadsyłania rezultatów do redakcji *Delty*. Poniżej przypominamy szczegółowy regulamin konkursu.

### Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział każdy uczeń, który w terminie do 1 maja prześle pod adresem redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły; imię, nazwisko i adres opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Jury Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną zakwalifikowane przez Jury do finału. Finał odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac i ich opiekunom przed końcem roku szkolnego.
8. Finałiści i opiekunowie ich prac otrzymają od Zarządu Głównego PTM zaproszenia do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne ufundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Jury Konkursu jest powoływane przez Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.



## Aktualności (nie tylko) fizyczne

Jak co roku w grudniu wręczono Nagrody Nobla. Tym razem w dziedzinie fizyki nagrodzeni zostali **Steven Chu**, **Claude Cohen-Tannoudji** i **William D. Phillips** za rozwinięcie metod chłodzenia i więzienia atomów za pomocą światła laserowego.

Pomysł na pierwszy rzut oka wydaje się dziwny. Wydawałoby się, że światło znacznie lepiej nadaje się do ogrzewania niż chłodzenia. Dość łatwo jest znaleźć kota wygrzewającego się na słońcu, natomiast wyziębających się na słońcu kotów potoczny język nie przewiduje. Nasi świeżo „uziębieni” nobliści nie byli zresztą aż tak ambitni, żeby zamrażać od razu całego kota. Na zaproszenie do Sztokholmu wystarczyło kilka tysięcy atomów. Oziębienie wiąże się ze zmniejszeniem średniej energii molekuł. Fotony można wykorzystać do chłodzenia atomów, ponieważ niosą one nie tylko energię  $h\nu$ , ale również pęd  $h\nu/c$ . Cała trudność polega na tym, aby atomy absorbowały tylko te fotony, które by je spowalniały, a nie te, które mogłyby je rozpędzać. Wyobraźmy sobie, że potrafimy dać atomom siatki na fotony, przy czym atom zamiast wymachiwać siatką, będzie ją trzymał prosto w taki sposób, że automatycznie ustawi się ona otworem w kierunku ruchu atomu (tak jak to się dzieje z luźno trzymaną siatką na motyle, gdy biegamy z nią po łące). Wtedy tylko fotony nadlatujące naprzeciwko atomu będą wpadały do siatki, a więc tylko te, których zaabsorbowanie zmniejsza pęd atomu.

Dla atomu siatką na fotony są jego elektrony. Jeżeli energia fotonu odpowiada energii przejścia elektronu ze stanu podstawowego do stanu wzbudzonego, to taki foton zostanie pochłonięty. Natomiast źle dostrojonego fotonu atom nie potrafi złapać. Pomysł polega na tym, aby użyć fotonów o trochę za małej energii  $h\nu_-$ . Wtedy, żeby złapać foton, atom musi poruszać się w jego kierunku z taką prędkością  $v$ , aby w wyniku efektu Dopplera częstość fotonu  $\nu_v$  w układzie związanym z poruszającym się atomem odpowiadała energii  $E$  przejścia atomu do stanu wzbudzonego

$$E = h\nu_v = h\nu_-(1 + v/c).$$

Ograniczeniem na minimalną temperaturę (minimalną energię kinetyczną atomów), możliwą do uzyskania za pomocą opisanego wyżej „chłodzenia dopplerowskiego”, jest naturalna szerokość wykorzystywanej linii widmowej. Jeżeli przesunięcie dopplerowskie związane z ruchem atomów jest mniejsze od tej szerokości, to selektywne hamowanie przestaje działać.

Wnikliwe badania średniej prędkości atomów uwięzionych w tzw. optycznej melasie, utworzonej przez trzy prostopadle skierowane pary wzajemnie przeciwbieżnych wiązek laserowych (o parami przeciwnych skrętnościach), dały zaskakujący wynik. Eksperyment okazał się lepszy od przewidywań – uzyskano temperatury niższe o rząd wielkości od spodziewanych. Tak odkryto bardziej efektywny sposób chłodzenia. Można go przedstawić za pomocą następującej analogii. Wyobraźmy sobie niecierpliwego inwestora giełdowego zainteresowanego dwoma walorami  $Zeeman^{-1/2}$  i  $Zeeman^{+1/2}$ , których ceny podlegają sinusoidalnym wahaniom, przesuniętym w fazie o  $\pi/2$ . Nasz niecierpliwy inwestor, obserwując, jak wartość posiadanych przez niego akcji np.  $Zeeman^{-1/2}$  maleje, nie wytrzymuje i przerzuca się na rosnące akcje  $Zeeman^{+1/2}$  po to tylko, żeby zobaczyć, iż trend się odwrócił. Postanawia więc naprawić swój błąd – oczywiście znowu w najmniej odpowiednim momencie. Takie

postępowanie musi wcześniej czy później doprowadzić go do bankructwa.

W naszym przypadku giełdą jest optyczna melasa, a dokładniej periodyczna zmienność polaryzacji światła od lewo- do prawo-skrętnej (z okresem równym połowie długości fali świetlnej). Zmianie wartości akcji odpowiada zmiana energii potencjalnej związanej z (zależnym od skrętności światła) oddziaływaniem atomu z falą elektromagnetyczną, a nerwowym decyzjom inwestora – pompowanie optyczne z jednego zeemanowskiego podpoziomu stanu podstawowego do drugiego podpoziomu. Atom wspinając się na „wzgórze” energii potencjalnej traci swój pęd. Na szczycie ma największą szansę „przepompowania się” do stanu, dla którego w tym miejscu jest „dolina” potencjału, a wtedy musi rozpocząć wspinaczkę od początku. Nic dziwnego, że mechanizm ten nazwano „chłodzeniem syzyfowym”. W odróżnieniu jednak od niezmordowanego Syzyfa atom grzęźnie w końcu w jednej z dolin potencjału.

Atomy oddziałują z melasą poprzez ciągły proces absorbowania i reemitowania fotonów. Wydawałoby się więc, że energia odrzutu, związana z emisją pojedynczego fotonu, jest nieprzekraczalną granicą spowalniania atomów za pomocą światła laserowego. A jednak nie.

Proces pochłaniania-emisji fotonów w optycznej melasie można rozpatrywać jako błędnie przypadkowe w ograniczonej przestrzeni pędów. Schwytyany atom ma skończone prawdopodobieństwo znalezienia się dowolnie blisko punktu o zerowym pędzie (odpowiadającym zerowej temperaturze). Kolejna absorpcja fotonu wyrzuci go jednak z tego miejsca. Okazuje się, że (przy odpowiednim dobraniu parametrów wiązek laserowych) atom emitując foton może wpaść w stan będący superpozycją fal de Broglie’a (fal materii) propagujących się w przeciwnych kierunkach, dla których amplitudy prawdopodobieństwa absorpcji fotonów interferują destruktywnie. W takim „koherentnym ciemnym stanie” atomy mogą przebywać stosunkowo długo bez absorbowania fotonów. Ich temperatura może być dowolnie bliska zera bezwzględnego i zależy tylko od całkowitego czasu przebywania atomów w optycznej melasie. Im ten czas dłuższy, tym niższa końcowa temperatura.

Za cenę prawie całkowitego wyzbycia się energii atomy przestają „wiedzieć, co się z nimi dzieje”. Już tylko po chłodzeniu dopplerowskim długości fal materii są dla tych atomów porównywalne z długością fali świetlnej używanej do chłodzenia, czyli trzy rzędy wielkości większe niż rozmiary atomu w normalnych warunkach. Natomiast atomy w koherentnym trójwymiarowym ciemnym stanie Cohen-Tannoudji porównał do „sześciokrotnego kota Schrödingera” (a jednak kota!), gdyż stan taki jest superpozycją sześciu paczek falowych poruszających się każda w inną stronę („zwykły” kot Schrödingera jest tylko „podwójny”: jednocześnie żywy i martwy).

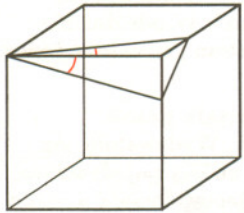
Rozwinięte metody chłodzenia i pułapkowania atomów mają cały wachlarz zastosowań. Od badania podstaw mechaniki kwantowej, przez studia własności atomów do budowy superprecyzyjnych zegarów atomowych, czy wreszcie produkcji nowej generacji układów scalonych. Udało się już uzyskać fontanny atomowe, atomowe zwierciadła, stojące fale materii i wiele innych przekraczających makroskopową wyobraźnię efektów. W najbliższych numerach wrócimy jeszcze do tego gorącego (brrrr!) tematu.

Piotr ZALEWSKI

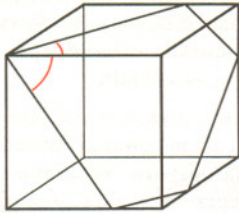
na podstawie *Physics Today*, *Physical Review Letters* i *La Recherche*



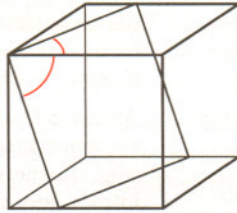
## Wirtualny czworościan



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Rozwiążmy zadanie:

Sześcian  $ABCD A' B' C' D'$  o krawędzi 1 jest przecięty taką płaszczyzną przechodzącą przez  $A$ , że jej przecięcia ze ścianami  $ABCD$  i  $ABB' A'$  tworzą z krawędzią  $AB$  taki sam kąt  $\alpha$ . Obliczyć objętość odciętej bryły.

Bryły, na które płaszczyzna rozcina sześcian, są dwie. Wystarczy jednak znać objętość jednej

z nich, by znać również objętość drugiej, gdyż ich suma jest równa 1. Będziemy tutaj poszukiwać objętości bryły zawierającej krawędź  $AB$ .

Dopóki kąt  $\alpha$  nie przekracza  $45^\circ$ , zadanie jest bardzo łatwe (rys. 1) – odcięta bryła to czworościan o trzech krawędziach wzajemnie prostopadłych, wychodzących z jednego wierzchołka. Objętość zatem to jedna szóstka ich iloczynu, czyli

$$\frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Sytuacja, jaka powstaje, gdy kąt ten przyjmuje większe wartości, staje się skomplikowana tylko do chwili, gdy nie wpadniemy na pomysł, by czworościan, którego objętość obliczyliśmy, narysować również w pozostałych przypadkach. Teraz wystaje on wyraźnie z sześcianu, ale okazuje się, że to nic nie szkodzi.

W przypadku, gdy kąt  $\alpha$  przyjmuje wartości większe od  $45^\circ$ , ale nie przekraczające  $\varphi_2$  (gdzie  $\varphi_2$  oznacza kąt ostry, którego tangens jest równy 2), z sześcianu wystają dwa rogi, z których każdy jest czworościanem podobnym do całego (a nawet jednokładnym). Z rysunku 4 widać, że stosunek podobieństwa to

$$s_1 = \frac{B'P}{BP} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha} = 1 - \operatorname{ctg} \alpha.$$

W przypadku, gdy  $\alpha$  przekracza  $\varphi_2$ , rogi są tak duże, że aż częściowo nakładają się. Szczęśliwie ich część wspólna jest też podobna (a nawet jednokładna) do całości. Tym razem stosunek podobieństwa (rys. 5) to

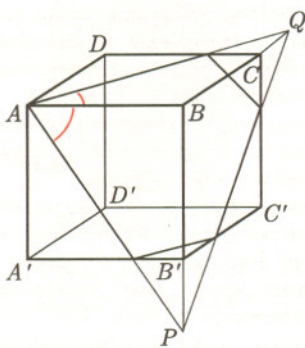
$$s_2 = \frac{C'R}{BQ} = \frac{C''P}{BP} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 2}{\operatorname{tg} \alpha} = 1 - 2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Tak więc posługując się czworościanem, który istnieje tylko w naszej wyobraźni, znajdujemy objętość realnej bryły:

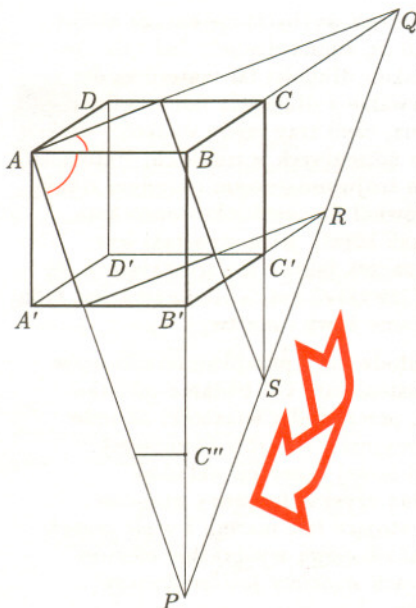
$$V = \frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 \alpha (1 - 2k^3 + l^3),$$

gdzie

$$k = \begin{cases} 0 & \text{gd } \alpha \leq 45^\circ \\ s_1 & \text{gd } \alpha > 45^\circ \end{cases}, \quad l = \begin{cases} 0 & \text{gd } \alpha \leq \varphi_2 \\ s_2 & \text{gd } \alpha > \varphi_2 \end{cases}.$$



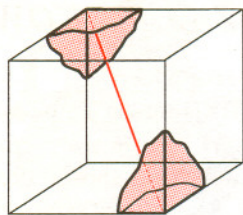
Rys. 4



Rys. 5

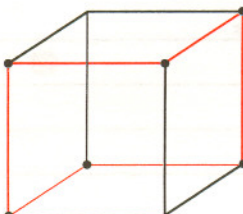


## Inne spojrzenie

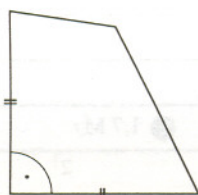


Rys. 1

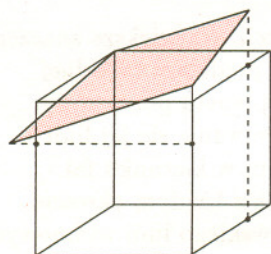
Oś obrotowa bryły to taka prosta, że bryła po obrocie wokół niej o pewien kąt (różny od  $0^\circ$ ,  $360^\circ$  itd.) nałoży się na siebie. W przypadku rozpatrywanych sześcianów kątem takim może być np.  $120^\circ$ .



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Chodzi mianowicie o inne spojrzenie na sześcian. Można go zobaczyć jako przecięcie dwóch naroży trójściennych, z których każde składa się z samych kątów prostych (rys. 1). Nie zawsze z przecięcia takich naroży powstaje sześcian – aby powstał, naroża powinny mieć wspólną oś obrotową, być ustawione wierzchołkami na zewnątrz i krawędzie każdego z tych naroży powinny trafiać w dwusieczne kątów płaskich drugiego.

Taka mnogość warunków od razu sugeruje pytania, co by było, gdyby któryś z nich zastąpić innym. Można np. zadać pytanie, co za bryłę otrzymamy z przecięcia naroży, gdy obrócimy jedno z nich wokół osi obrotowej o jakiś kąt, i jaką ta bryła będzie miała objętość.

Zadanie jest dość trudne. Nie rozwiążemy go tutaj do końca, a tylko rozdlubiemy ten problem.

Uwaga pierwsza. Nie warto interesować się wszystkimi kątami – zauważmy, że sytuacja powtarza się co  $120^\circ$ , a nawet i w przedziale kątów  $(0, 120^\circ)$  sytuacja lustrzanie powtarza się dla kątów  $\alpha$  i  $120^\circ - \alpha$  (dlaczego?).

Uwaga druga. Z każdą krawędzią dzieje się podczas takiego przecinania to samo, podobnie z każdą ścianą każdego naroża – dlaczego?

Uwaga trzecia. Bryła otrzymana z przecięcia naroży powstaje tak: każdą krawędź jednego naroża przecinamy z jakąś ścianą drugiego naroża otrzymując w ogólności 6 punktów. Punkty te łączymy łamaną, na ogół nie płaską (rysunek 2 pokazuje to w przypadku sześcianu).

Uwaga czwarta. Odcinki krawędzi w przypadku sześcianu (czyli  $0^\circ$ ) są najkrótsze. Bierze się to stąd, że wtedy łączą one wierzchołek naroża z jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę ścian naroża, a to – jak wiadomo – jest najkrótszy odcinek łączący punkt z płaszczyzną.

Uwaga piąta. Każda ze ścian otrzymanej bryły jest (gdy pominiemy obrót o kąt  $60^\circ$ ) czworokątem mającym jeden kąt prosty, boki z niego wychodzące równe i przeciwległy kąt rozwarty (jak na rysunku 3) – dlaczego? Pewną wskazówką może być rysunek 4, gdzie zasugerowana jest konstrukcja jednej takiej ściany.

Pozostawiamy dokończenie rozwiązywania problemu Czytelnikom obiecując za ciekawe rozwiązania  **nagrody książkowe i publikację**. Sami zaś rozwiążemy zadanie w pominiętym przypadku  $60^\circ$  zakładając, iż długość krawędzi sześcianu jest 1.

Zauważmy, że przy obrocie jednego naroża o kąt  $60^\circ$  krawędzie obu naroży spotkają się. Zamiast sześciocinkowej łamanej będzie trójcinkowa, czyli trójkąt, a ten zawsze jest płaski.

Otrzymana bryła będzie więc sumą dwóch czworościanów o trzech krawędziach wychodzących z jednego wierzchołka, równych i prostopadłych (rys. 5). Objętość bryły będzie zatem równa jednej trzeciej sześcianu długości tej krawędzi – prawda? Pozostaje więc obliczenie tej długości.

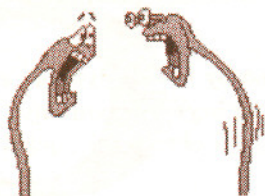
Kolejne spostrzeżenie jest takie: płaszczyzna trójkąta, który powstał z sześciocinkowej łamanej, to płaszczyzna  $p$  – symetralna odcinka łączącego wierzchołki naroży, dane zadania są bowiem wobec niej (z dokładnością do obrotu) symetryczne.

Skoro tak, to narysujmy przekrój zarówno wyjściowego sześcianu, jak i otrzymanej bryły płaszczyzną zawierającą oś obrotową naroży i prostopadłą do płaszczyzny  $p$  (rys. 6). Mamy (z podobieństwa  $\triangle AA'C'$  i  $\triangle AOP$ )

$$\frac{AC'}{AA'} = \frac{AP}{AO}, \quad \text{czyli} \quad AP = \frac{AC' \cdot AO}{AA'}, \quad \text{czyli} \quad AP = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{3}{2}.$$

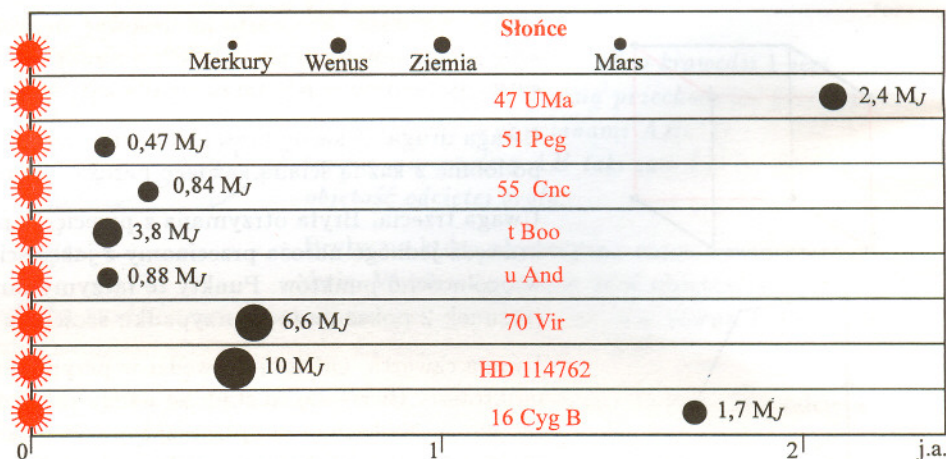
Objętość bryły jest zatem równa  $\frac{9}{8}$ .





Nazwa: Kwirciel (para)  
M. zam.: Ukl. 47 UMa

Niezwykle interesujące pytanie o możliwość istnienia pozasłonecznych formacji planetarnych wreszcie doczekało się odpowiedzi. Długoletnie badania prowadzone w tym kierunku przyniosły w ostatnich latach sukces – stwierdzono istnienie planet wokół kilku gwiazd! Jak do tego doszło? W jaki sposób dostrzec planetę krążącą w niewielkiej odległości wokół gwiazdy, która jest tysiące razy jaśniejsza od niej? Zważywszy, że najbliższa Słońcu gwiazda oddalona jest o 4,26 lat świetlnych, stanowi to niezwykle twardy orzech do zgryzienia. Nawet Kosmiczny Teleskop Hubble'a, dostarczający najwyższej jakości obrazów, nie jest w stanie bezpośrednio wykryć obecność tego rodzaju obiektu.



Rys. 1. Masy i odległości orbitalne odkrytych planet ( $M_J$  – masa Jowisza)

Obecnie możliwość taką dają pośrednie techniki detekcji. Największe znaczenie ma spektroskopia wykorzystywana do pomiaru zmian prędkości radialnej gwiazd, wokół których krążą planety. Bowiem wraz z planetą porusza się też gwiazda, co spostrzegamy jako naprzemienne przesuwanie się jej linii widmowych; raz w kierunku fal krótszych, innym razem w kierunku fal dłuższych. Ów dopplerowski „taniec linii” powtarza się z każdym okresem orbitalnym. Dokładne ustalenie przesunięcia dopplerowskiego linii widmowych, a stąd zmian prędkości radialnej gwiazdy, pozwala wyznaczyć elementy orbity obiegającej ją planety. Niestety, nie wiemy, pod jakim kątem „oglądamy” orbitę gwiazdy, dlatego możemy określić tylko dolną granicę masy planety, co stanowi istotną wadę tej metody. Stosując obliczenia statystyczne możemy dodatkowo stwierdzić, jakie jest prawdopodobieństwo, że planeta będzie miała założoną masę. Oddziaływanie Jowisza na ruch Słońca objawia się w postaci takich okresowych zmian o amplitudzie 13 m/s. Wynika stąd, że poszukiwanie planet o masie Jowisza wymaga instrumentów o czułości rzędu pojedynczych m/s, co jeszcze kilka lat temu było nieosiągalne. Decydujące znaczenie mają tu parametry spektrografu stosowanego do otrzymywania widma gwiazdy, ponieważ to jego jakość, w większym nawet stopniu niż rozmiary teleskopu, wpłynąć może na końcową precyzję i błędy pomiaru.

Znaczny wzrost precyzji przyniosło równoczesne otrzymywanie widma gwiazdowego i widma porównania, którego źródło stanowiła absorpcyjna komórka molekularnego jodu umieszczona przed szczeliną spektrografu. Światło gwiazd po przejściu przez nią kierowane było do szczeliny. W ten sposób komórka działała jak filtr dający mnóstwo nadwyzczaj ostrych linii na tle widma gwiazdy.

Pierwszą pozasłoneczną planetę wokół gwiazdy 51 Pegasi odkryli Michel Mayor i Didier Queloz, wywodzący się z Obserwatorium Genewskiego. Od kwietnia



Nazwa: Kwirciel (okres godowy)  
M. zam.: Ukl. 47 UMa





Nazwa: Pruchwiel (samica)  
M. zam.: Ukl.  $\tau$  Boo

1994 roku monitorowali oni radialną prędkość 142 karłów typu widmowego G i K z precyzją 13 m/s. Zostały one wybrane z większej próbki badanej w niższej precyzji w ciągu 15 lat. W październiku 1995 r. donieśli o odkryciu planetarnego towarzysza wokół oddalonej o 13,7 pc, podobnej do Słońca gwiazdy 51 Peg. Dużym zaskoczeniem była wynosząca zaledwie 0,05 j.a. pół orbita ciała o minimalnej masie 0,47  $M_J$  (masy Jowisza). W Układzie Słonecznym nie ma tego rodzaju obiektów i teoretyczne modele sugerowały również ich brak w innych układach planetarnych. Równolegle R. Paul Butler i Geoffrey W. Marcy zastosowali w Obserwatorium Licka własną technikę pomiaru prędkości radialnej gwiazd z błędami na poziomie 3 m/s. Po zbadaniu 120 karłów typów widmowych F,G,K,M wykryli planety wokół 6 gwiazd.

Jeszcze przed wykryciem jakiegokolwiek planety zastanawiano się, jakie czynniki decydować mogą o rozmiarach orbit planet olbrzymów. Spodziewano się, że planety olbrzymy powinny tworzyć się tam, gdzie temperatura jest niższa od punktu kondensacji wody, co wynikało z przyjętego scenariusza formowania się takich obiektów. Wówczas to jasność gwiazdy określałaby rozmiar orbit planet olbrzymów. W takim przypadku typowe okresy orbitalne mogły okazać się znacznie krótsze, niż się powszechnie uważało, gdyż przeciętna gwiazda jest chłodniejsza i ma mniejszą jasność niż Słońce. Rzeczywistość okazała się jeszcze bardziej zaskakująca.

Elementy orbitalne odkrytych planet znacząco różnią się od elementów planet Układu Słonecznego. Ich wartości zawierają się w bardzo szerokim zakresie. Cztery z nich zamieszczone w tabeli 1 wykazują podobieństwo, tworząc grupę obiektów typu 51 Peg. Okrążają one swoje rodzime gwiazdy około 100 razy bliżej niż Jowisz Słońce. Chociaż teoretycznie planety tego typu nie były przewidywane, to stosunkowo łatwo dają się wykrywać. Duża masa na małej orbicie sprawia, że oddziaływanie grawitacyjne na gwiazdę jest znaczące. Ponadto krótki okres obiegu pozwala wielokrotnie poddać orbitę obserwacjom w krótkim przedziale czasu.

Tabela 1

Param.	$P$ [dni]	$e$	$\Delta v$ [m/s]	$a$ [j.a.]	$M_{sini}$ [ $M_J$ ]
51 Peg	4,23	0,015	57	0,05	0,47
$\nu$ And	4,61	0,15	74	0,057	0,68
$\tau$ Boo	3,31	0,015	469	0,046	3,8
55 Cnc	14,64	0,050	77	0,11	0,84

Tabela 2

Param.	$P$ [dni]	$e$	$\Delta v$ [m/s]	$a$ [j.a.]	$M_{sini}$ [ $M_J$ ]
47 UMa	1107,6	0,01	48	2,1	2,4
70 Vir	116,7	0,404	315	0,43	6,6
16 Cyg B	819,4	0,57	44	1,6	1,7

Oznaczenia:  $P$  – okres orbitalny,  $e$  – mimośród orbity,  $\Delta v$  – amplituda zmian prędkości radialnej,  $a$  – pół wielka orbity,  $M_{sini}$  – dolna granica masy.

Tabela 2 przedstawia elementy orbit pozostałych planet leżących dalej od swoich gwiazd. Tylko 47 UMa ma jednocześnie kołową orbitę i odległość orbitalną podobną do planet olbrzymów w naszym układzie. Pozostałe dwa ciała mają bardzo dużą ekscentryczność, co nie jest bez znaczenia. Przeciwnie, kształt orbity najmasywniejszych planet w układzie jest bardzo istotny również dla pozostałych ciał układu planetarnego. Gdyby np. Jowisz poruszał się po



Nazwa: Pruchwiel (samiec)  
M. zam.: Ukl.  $\tau$  Boo





Nazwa: *Siurmciaak (osobnik dojrzały)*  
M. zam.: Ukl. 70 Vir

ekscentrycznej orbicie, Ziemia i Mars pod wpływem jego oddziaływania mogłyby zostać wyrzucone poza granice układu.

Szczególnie interesującym przypadkiem jest planeta wokół 16 Cyg B odkryta niezależnie przez Williama D. Cohrana i Artie P. Hatzesa w Obserwatorium Mc Donalda, oraz w trakcie badań planetarnych w Obserwatorium Licka. Jest to układ potrójny złożony z pary karłów typu G, tworzących układ wizualnie podwójny, i odległego karła typu M. Obydwa karły typu G są bardzo podobne do Słońca. Bardzo dużą ekscentryczność orbity próbuje się wyjaśnić na wiele sposobów. Jedna z teorii mówi, że jest ona związana z formowaniem się planety w układzie dynamicznie niestabilnej konfiguracji kilku gwiazd. Oddziaływanie grawitacyjne trzech ciał może wyrzucić jedno z nich z układu, a pozostałe dwa zbliżyć. Tak aktualnie wygląda układ 16 Cyg. Zjawisko to mogło zaburzyć orbitę planety wokół 16 Cyg B do obserwowanej obecnie postaci.

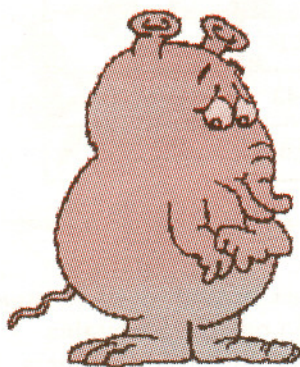
Inny scenariusz przewiduje, że jeśli kilka jowiszowych obiektów uformuje się w jakimś masywnym dysku, wówczas możliwa jest ewolucja układu do postaci, w której istnieć mogą obiekty w rodzaju planety 16 Cyg B. Numeryczne obliczenia pokazują, że układ jest stabilny do chwili dyssypacji dysku, później wzajemne oddziaływanie planet sprawia, że staje się on chaotyczny. Orbity zaczynają krzyżować się, co w krótkim czasie prowadzi do zderzenia się planet. W efekcie pojawia się masywna planeta na ciasnej, ekscentrycznej orbicie, czasami w towarzystwie innych planet na dużo szerszych orbitach.

Poszukiwania układów planetarnych nie doprowadziły do wykrycia brązowych karłów wokół badanych gwiazd. Ponieważ znamy tylko dolne granice mas planet, trwają spekulacje na temat klasyfikacji tych obiektów. Przykładem niech będzie podgwiazdowy towarzysz HD114762 odkryty w 1989 roku przez Davida Lathmana i jego współpracowników. Obiekt ma dolną granicę masy  $10 M_J$  i krąży w odległości okołosłonecznej orbity Merkurego. Zrozumiałe jest, że wobec braku takich ciał w Układzie Słonecznym zaraz po odkryciu wielu badaczy wątpiło, że jest on planetą. Częściej utożsamiano go z krańcowo małym masywnym przedstawicielem obiektów gwiazdopodobnych – brązowym karłem. Jednakże w obliczu odkrycia niewiele mniej masywnego ciała wokół 70 Vir, towarzyszący HD114762 obiekt awansował w poczet nowo odkrytych planet (co nadal nie przesądza o tym, że jest faktycznie planetą). Obiekty powyżej  $10$  czy  $20 M_J$  skłonni jesteśmy uznawać raczej za brązowe karły niż planety. Różnica jest zasadnicza. Planety, jak sądzimy, formują się w dysku materii wokół gwiazdy. Brązowe karły powstają w taki sam sposób jak gwiazdy, kondensując się bezpośrednio z obłoku gazowego. Skupiają jednak za mało materii, by zainicjować wewnętrzne reakcje termojądrowe, będące podstawowym źródłem energii gwiazd na ciągu głównym wykresu H-R.

Oprócz spektroskopii pośrednią metodą wykrywania planet wokół gwiazd jest także astrometria. Podejście to opiera się na skrupulatnych pomiarach pozycji gwiazdy. Orbitalny ruch wokół barycentrum powoduje periodyczne zmiany pozycji gwiazdy w płaszczyźnie nieba. Nakładają się one na średni ruch gwiazdy względem Układu Słonecznego ze składową, która odzwierciedla roczny i dzienny ruch obserwatora. Astrometria i spektroskopia stanowią wzajemnie uzupełniające się podejścia. Dzieje się tak dlatego, że astrometria maksimum czułości ma dla planet na odleglejszych orbitach. Spektroskopia z kolei najlepiej spisuje się w stosunku do masywnych planet na ciasnych orbitach. Astrometria jest najbardziej czuła dla bliskich systemów planetarnych, co wynika z tego, że widome rozmiary kątowe orbit maleją ze wzrostem odległości gwiazd od Słońca.

Dotychczas prezentowana czułość instrumentów nie przyniosła przekonujących dowodów na obecność pozasłonecznych planet, choć od lat pojawiają się takie sygnały. Ostatni z nich zakomunikował George D. Gatewood analizując 50-letnią serię zdjęć Lalande 21185 oraz dokonując własnych pomiarów w ciągu 8 lat. Doszedł do wniosku, że gwiazda ma dwóch jowiszowych towarzyszy. Badania

Diagram H-R (Hertzsprunga-Russella) przedstawia zależność jasności absolutnych gwiazd od ich typu widmowego. Gwiazdy „spalające” wodór układają się na diagramie wzdłuż tzw. ciągu głównego.



Nazwa: *Siurmciaak (młody)*  
M. zam.: Ukl. 70 Vir





Nazwa: *Żaba*  
M. zam.: **Ukł. Słoneczny**

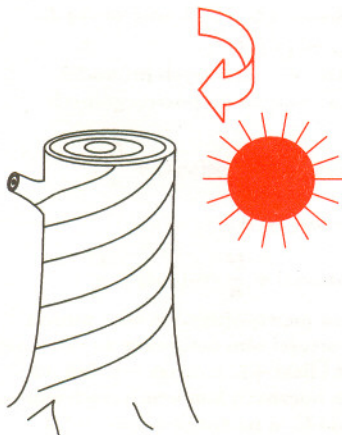
przeprowadzone w Obserwatorium Licka nie wykryły takich sygnałów. Na potwierdzenie wyników trzeba więc będzie jeszcze poczekać.

Kolejnym możliwym do wykorzystania sposobem wykrywania planet są systematyczne obserwacje fotometryczne gwiazd i rejestracja ich częściowych zaćmień przez planety. Jednakże ze względu na rzadkość i krótki czas trwania takich zaćmień efektywność tej metody jest problematyczna.

Innym zjawiskiem, którego obserwacje umożliwia fotometria, jest mikrosoczewkowanie grawitacyjne. Zachodzi ono wtedy, gdy światło odległej gwiazdy w drodze do obserwatora przechodzi w pobliżu innej masy punktowej, aby ulec grawitacyjnemu ogniskowaniu. Obserwuje się wówczas pojaśnienie soczewkowanej gwiazdy, którego skala czasowa zależy od masy obiektu soczewkującego. Obecność planet wokół soczewkującej gwiazdy objawia się w postaci deformacji krzywej blasku gwiazdy soczewkowanej lub jako dodatkowe krótkotrwałe maksima. Metoda pozwala tylko na jednorazową detekcję, co jest jej wadą. Można ją jednak wykorzystać do statystycznej oceny częstości występowania układów planetarnych.

Niewątpliwie bezpośrednie metody wykrywania planet są jeszcze atrakcyjniejsze niż opisane dotąd metody pośrednie. W niedalekiej przyszłości zostaną z pewnością zastosowane do wykrywania promieniowania planet. Jedną z najbardziej obiecujących to obserwacje w podczerwieni za pomocą interferometrów, gdyż w zakresie podczerwonym skupia się największa część promieniowania planety. Istotną przeszkodą jest ciepło emitowane przez Ziemię oraz cząstki pyłu międzyplanetarnego (światło zodiakalne). Problem rozwiązać można przez umieszczenie całej aparatury na okołosłonecznej orbicie w odległości orbity Jowisza. Interferometr wykorzystywałby fakt, że gdyby odbierał światło gwiazdy akurat w fazach przeciwnych, to światło planety położonej nieco „obok” odbierane byłoby w fazach zgodnych. Światło gwiazdy byłoby więc wygaszone, a planety nie, i można by je zarejestrować. Gdyby taki interferometr umieścić na orbicie pobliskiej gwiazdy i skierować na nasz Układ Słoneczny, odnalazłby Wenus, Ziemię, Marsa, Jowisza i Saturna. Zastosowanie instrumentów o coraz lepszych parametrach powinno niebawem poprawić czułość opisanych technik oraz otworzyć możliwość odkrywania planet rozmiarów Ziemi. Rozwój technologii spowoduje zapewne możliwość wykorzystania technik nie będących dotychczas w użyciu lub nie przynoszących dotąd spodziewanych rezultatów. Worek z planetami, który rozwiązał Aleksander Wolszczan znajdując trzy takie obiekty wokół pulsara PSRB1257+12, a po nim Michel Mayor i Didier Queloz odkrywając towarzysza normalnej gwiazdy, może niebawem okazać się niezwykle zasobny.

## Drzewa w śrubkę

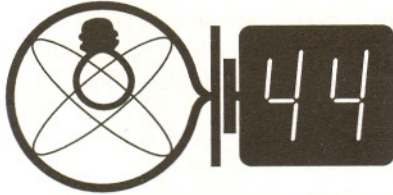


W Laponii, na północ od Kręgu Polarnego, prawie wszystkie drzewa są poskręcane. Jest to szczególnie widoczne, gdy drzewa są martwe, odarte z kory. Wówczas wyraźnie widać ich włókna. Nie są one pionowe, lecz układają się w linię śrubową. Co więcej, wszystkie drzewa są skrócone w tę samą stronę. Oznacza to, że rosnąc ulegały skręceniu – po prostu powoli obracały się tak, że w ciągu swojego życia wykonały kilka do kilkunastu obrotów. Dlaczego?

Wyjaśnienie wydaje się proste. Latem Słońce w Laponii cały czas znajduje się powyżej linii horyzontu. Ponieważ jednak igły i liście drzew obracają się w stronę Słońca, więc powoduje to powstanie siły skręcającej drzewo w jedną stronę (zgodną z ruchem Słońca) i w efekcie drzewo ulega skręceniu. Istotną rolę odgrywa tu fakt, że Słońce nie zachodzi. W Polsce podobnego zjawiska nie obserwuje się – na naszej bowiem szerokości geograficznej w nocy gałęzie drzewa odkręcają się, by ponownie, o wschodzie Słońca, zwrócić się na wschód.

Wyjaśnienie byłoby przekonujące, gdyby nie jeden mały szkopał. W Laponii wszystkie drzewa są skrócone w kierunku przeciwnym do ruchu Słońca. Czy ktoś z Was, Drodzy Czytelnicy, zna rozwiązanie tej zagadki?





Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 III 1998

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadania 241 ( $WT=2,20$ )  
z numeru 6/1997

Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	39,32
Jarosław Łazuka	– Warszawa	21,27
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	17,37
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	17,05

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

## Zadania z fizyki nr 250, 251

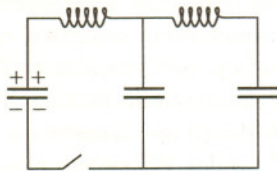
Redaguje Jerzy B. BROJAN

**250.** Długopis pozostawia ślad na podłożu wtedy, gdy kąt jego odchylenia od prostopadłej do podłoża nie przekracza wartości  $\alpha$ . Jeśli początkowo kierunek długopisu jest zmienną przypadkową, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wirujący długopis spadając na stół pozostawi na nim ślad? Uwzględniamy tylko pierwsze uderzenie o stół. Środek masy długopisu leży w połowie jego długości i porusza się pionowo z prędkością  $v_1$  (przyspieszenie grawitacyjne należy pominąć), a prędkość obiegowa końca długopisu wokół środka jest równa  $v_2$ , przy czym płaszczyzna tego ruchu jest pionowa. Liczbową wartość prawdopodobieństwa podać dla  $v_1 = 2$  m/s,  $v_2 = 3$  m/s i trzech wartości  $\alpha$ :  $40^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $85^\circ$ .

**251.** W miejscowości  $A$  występuje w danej chwili całkowite zaćmienie Słońca, miejscowość  $B$  leży na granicy obszaru zaćmienia częściowego, a miejscowość  $C$  leży w połowie odległości między  $A$  i  $B$ . Ile wynosi w przybliżeniu stosunek natężeń oświetlenia powierzchni Ziemi  $I_C/I_B$ ?

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1997

Przypominamy treść zadań:



Rys. 1

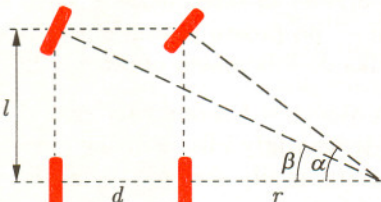
**242.** Prawidłowa regulacja układu kierowniczego w samochodzie wymaga, aby kąt skręcenia przednich kół był niejednakowy. Wyjaśnić przyczynę tej różnicy. Jeśli w dobrze wyregulowanym samochodzie przy skręceniu prawego przedniego koła w prawo o  $20^\circ$  lewe przednie koło skręca w prawo o  $18^\circ$ , to o jaki kąt skręca lewe koło przy skręceniu prawego w prawo o  $40^\circ$ ?

**243.** Trzy jednakowe kondensatory i dwie jednakowe cewki połączone w obwód przedstawiony na rysunku 1. Początkowo lewy kondensator był naładowany do napięcia  $U$ , pozostałe dwa były nienaładowane, a prąd w żadnej części obwodu nie płynął. W jakich granicach będzie się zmieniać napięcie na każdym z kondensatorów po zamknięciu klucza? Opór obwodu pominąć.

**242.** Oznaczmy odległość przedniej osi od tylnej przez  $l$ , rozstaw kół przez  $d$ , kąt skręcenia wewnętrznego przedniego koła przez  $\alpha$ , a zewnętrznego przez  $\beta$  (rys. 2). Z równań

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{r}{l}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{r+d}{l}$$

wynika tożsamość  $\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha = d/l = \operatorname{const}$ , czyli  $\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \alpha_1 = \operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \alpha_2$ . Podstawiając  $\alpha_1 = 20^\circ$ ,  $\beta_1 = 18^\circ$ ,  $\alpha_2 = 40^\circ$  obliczamy  $\beta_2 \approx 33^\circ$ .



Rys. 2

**243.** Drgania elektromagnetyczne w obwodzie są złożeniem poniższych dwóch drgań prostych (harmonicznym):  
1. Prąd płynie przez cewki i boczne kondensatory, omijając środkowy kondensator. Ponieważ dwie cewki połączone szeregowo mają indukcyjność zastępczą  $2L$ , a dwa kondensatory – pojemność zastępczą  $C/2$ , więc częstość tych drgań jest równa  $\omega_1 = 1/\sqrt{LC}$ .

2. Przez boczne kondensatory płynie jednakowy prąd (w danej chwili np. ze zwrotem w górę), a przez środkowy – o dwukrotnie większej wartości i przeciwnym zwrocie (np. w dół). Aby znaleźć częstość tych drgań, można zastąpić środkowy kondensator dwoma o pojemności po  $C/2$  połączonymi równolegle – wtedy obwód rozpadł się na dwa „oczka”, z których każde zawiera szeregowo połączone kondensatory  $C$  i  $C/2$  oraz cewkę  $L$ . Obliczamy  $\omega_2 = 1/\sqrt{LC_{\text{zast}}} = \sqrt{3/LC}$ .  
Szczegółowa analiza warunków początkowych prowadzi do następujących wzorów na napięcia na poszczególnych kondensatorach:

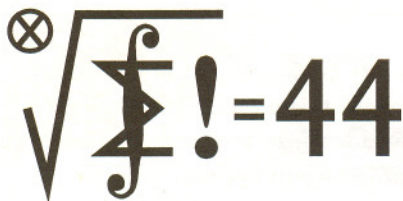
$$U_{\text{lewy}} = \frac{U}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{U}{6} \cos(\omega_2 t) + \frac{U}{3},$$

$$U_{\text{śr}} = \frac{U}{3} (1 - \cos(\omega_2 t)),$$

$$U_{\text{prawy}} = -\frac{U}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{U}{6} \cos(\omega_2 t) + \frac{U}{3}.$$

Ponieważ częstości  $\omega_1$  i  $\omega_2$  są niewspółmierne, więc można wybrać chwilę  $t$ , w której wartości obu cosinusów są dowolnie bliskie  $-1$  lub pierwszy jest bliski  $+1$ , a drugi  $-1$ , lub na odwrót. Dlatego napięcia na bocznych kondensatorach zmieniają się w zakresie od  $(-1/3)U$  do  $U$ , a na środkowym – od  $0$  do  $(2/3)U$ . Dodatni zwrot napięć przyjęliśmy jako zgodny z napięciem początkowym (plus na górze).





Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 341 (WT=1,63) i 342 (WT=2,94)  
z numeru 5/1997

Witold Bednorz	- Tychy	42,85
Tomasz Rawlik	- Braunschweig	42,27
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	41,38
Maciej Mostowski	- Warszawa	37,53
Konrad Patkowski	- Gdańsk	36,27

**353.** Dowieść, że każdą liczbę całkowitą dodatnią da się przedstawić w postaci sumy pewnej liczby składników całkowitych dodatnich nie mających dzielników pierwszych różnych od 2 i 3, przy czym żaden z tych składników nie dzieli się przez żaden inny składnik.

**354.** Udowodnić nierówność

$$\operatorname{tg}(\sin \theta) < \frac{2 \sin \theta}{1 + \cos^2 \theta} \quad \text{dla } \theta \in (0, \pi).$$

Zadanie 354 zaproponował pan Józef Banaś z Rzeszowa.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1997**

Przypominamy treść zadań:

**345.** Liczby rzeczywiste  $a, b, c$  spełniają równanie  $\frac{1}{bc-a^2} + \frac{1}{ca-b^2} + \frac{1}{ab-c^2} = 0$ .

Dowieść, że  $\frac{a}{(bc-a^2)^2} + \frac{b}{(ca-b^2)^2} + \frac{c}{(ab-c^2)^2} = 0$ .

**346.** Rozważamy zdanie:

(\*) Każdy wielościan wypukły, który nie zawiera żadnego czworościanu o objętości 1, jest zawarty w pewnym czworościanie o objętości mniejszej niż  $V$ .

(a) Dowieść, że dla  $V = 27$  zdanie (\*) jest prawdziwe.

(b) Czy zdanie (\*) jest prawdziwe dla jakiegokolwiek liczby  $V$  mniejszej od 27?

**345.** Przyjmijmy oznaczenie:

$$P_{jk}(a, b, c) = \frac{a^j}{(bc-a^2)^k} + \frac{b^j}{(ca-b^2)^k} + \frac{c^j}{(ab-c^2)^k}$$

dla  $j, k \in \{0, 1, 2\}$  oraz dla dowolnej trójki liczb  $a, b, c$ , dla której mianowniki są różne od zera. Należy wykazać, że jeżeli  $P_{01}(a, b, c) = 0$ , to  $P_{12}(a, b, c) = 0$ . To zaś wynika z nietrudnej do sprawdzenia tożsamości  $P_{01} \cdot P_{11} = P_{12}$ .

**346.** (a) Niech  $W$  będzie wielościanem spełniającym przesłankę zdania (\*) dla  $V = 27$  i niech  $A, B, C, D$  będą czterema jego wierzchołkami wyznaczającymi czworościan  $ABCD$  o maksymalnej objętości. Oznaczmy przez  $A', B', C', D'$  obrazy punktów  $A, B, C, D$  w jednokładności  $j$  o skali  $-3$  względem środka ciężkości czworościanu  $ABCD$ . Każdy wierzchołek tego czworościanu jest obrazem środka ciężkości przeciwległej ściany.

Objętość czworościanu  $ABCD$  jest mniejsza niż 1, więc objętość czworościanu  $A'B'C'D'$  jest mniejsza niż 27. Wykażemy, że czworościan  $A'B'C'D'$  zawiera wszystkie wierzchołki wielościanu  $W$  – i w konsekwencji zawiera cały ten wielościan, a więc spełniona jest konkluzja zdania (\*).

Przypuśćmy, że pewien wierzchołek  $P$  leży poza czworościanem  $A'B'C'D'$  – leży więc po zewnętrznej stronie płaszczyzny którejś z jego ścian – na przykład  $A'B'C'$ . Ale płaszczyzna  $A'B'C'$ , będąca obrazem płaszczyzny  $ABC$  w jednokładności  $j$ ,

przechodzi przez punkt  $D$ . Zatem odległość punktu  $P$  od płaszczyzny  $ABC$  jest większa niż odległość punktu  $D$  od tej płaszczyzny, i wobec tego objętość czworościanu  $ABCP$  jest większa od objętości czworościanu  $ABCD$ , wbrew jego wyborowi. Sprzeczność kończy dowód.

(b) Przypuśćmy, że zdanie (\*) jest prawdziwe dla pewnej liczby dodatniej  $V$ . Niech  $R$  będzie promieniem kuli  $K_R$  opisanej na czworościanie foremnym  $T_R$  o objętości 1. Weźmy kulę  $K_r$  o dowolnym promieniu  $r < R$ , współśrodkową z  $K_R$ . Istnieje wielościan wypukły  $W$  zawarty we wnętrzu kuli  $K_R$  i zawierający kulę  $K_r$ . Każdy czworościan zawarty w wielościanie  $W$  ma objętość mniejszą niż czworościan  $T_R$  (największy czworościan wpisany w kulę  $K_R$ ), czyli mniejszą niż 1. To znaczy, że dla wielościanu  $W$  spełniona jest przesłanka zdania (\*). Wielościan  $W$  jest wobec tego zawarty w pewnym czworościanie  $T$  o objętości mniejszej niż  $V$ .

Najmniejszym czworościanem zawierającym kulę  $K_r$  jest opisany na niej czworościan foremny  $\tilde{T}_r$ ; jego objętość jest 27 razy większa od objętości czworościanu foremnego  $T_r$  wpisanego w kulę  $K_r$ , równej  $(r/R)^3$ . Tak więc

$$V > \operatorname{vol}(T) \geq \operatorname{vol}(\tilde{T}_r) = 27 \operatorname{vol}(T_r) = 27(r/R)^3.$$

Ponieważ liczba  $r$  mogła być dowolnie bliska  $R$ , wynika stąd, że  $V \geq 27$ . Zatem odpowiedź na pytanie (b) brzmi: *nie*.



**Rozwiązanie zadania M 833.**

Tezy dowodzimy przez indukcję (przypadek  $n = 1$  Czytelnik rozpatrzy samodzielnie). Oto krok indukcyjny: Niech  $f: \{-1, 1\}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ ; funkcje  $g, h: \{-1, 1\}^n \rightarrow \mathbf{R}$  zdefiniujemy wzorami

$$g(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, -1), \quad h(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, 1).$$

Na mocy założenia indukcyjnego istnieją liczby rzeczywiste  $(a'_A)_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}}$  i  $(a''_A)_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}}$ , takie, że

$$g = \sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} a'_A w_A, \quad h = \sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} a''_A w_A.$$

Ponieważ dla  $A \subset \{1, 2, \dots, n\}$  oraz liczb  $x_i = \pm 1$  mamy

$$w_{A \cup \{n+1\}}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \begin{cases} w_A(x_1, \dots, x_n) & \text{dla } x_{n+1} = 1, \\ -w_A(x_1, \dots, x_n) & \text{dla } x_{n+1} = -1, \end{cases}$$

więc żądanym przedstawieniem jest

$$f = \sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} \frac{a'_A + a''_A}{2} w_A + \sum_{A \subset \{1, 2, \dots, n\}} \frac{a''_A - a'_A}{2} w_{A \cup \{n+1\}}.$$



## Patrz w niebo

Galaktyka jest niewątpliwie obiektem bardzo skomplikowanym, zarówno nasza, jak i inne. Składa się z gwiazd o bardzo różnym wieku, rozmieszczonych według różnych – choć dość ściśle określonych – reguł i także według różnych reguł poruszających się. Zbiór gwiazd Galaktyki mających określony skład chemiczny, wiek, rozmieszczenie i ruch to tzw. podsystem lub populacja. Ściślej mówiąc, o przynależności do populacji decydują cechy fizyczne gwiazdy, a o przynależności do podsystemu jej położenie i ruch, ale okazało się, że między tymi cechami zachodzi silna korelacja. Stare gwiazdy o niskiej zawartości ciężkich pierwiastków (populacja II) rozmieszczone są w Galaktyce w przybliżeniu sferycznie symetrycznie i tworzą układy o takiej też symetrii (centralne zgęszczenie, gromady kuliste), stanowią więc podsystem sferyczny. Na drugim końcu skali są młode gwiazdy o zwiększonej zawartości tzw. żargonowo „metali” (populacja I), rozmieszczone w dysku Galaktyki i poruszające się w jej płaszczyźnie (gwiazdy tworzące ramiona spiralne, asocjacje, gromady otwarte), stanowią więc podsystem płaski.

Podział na populacje czy podsystemy nie jest zresztą ostry, ale to już szczegóły techniczne. Tak czy inaczej niezwykle może się wydawać, że te składowe Galaktyki do dziś żyją jakby każda swoim życiem, choć się przecież przenikają.

No dobrze! Galaktyka jest obiektem skomplikowanym, ale jej składowe już takie być nie powinny. Tymczasem dzięki Kosmicznemu Teleskopowi Hubble'a stwierdzono, że gromada NGC 1850 w Wielkim Obłoku Magellana zawiera obie populacje gwiazd. Coś takiego nie ma prawa istnieć! Wyjaśnienie nasuwa się właściwie jedyne: naprawdę widzimy w tym kierunku dwie gromady, starszą na tle młodszej. Sytuacja odwrotna jest mało prawdopodobna, gdyż pył zawarty w młodej gromadzie musiałby tę drugą znacząco przesłonić. Co więcej, gromady te są zapewne powiązane genetycznie. Mianowicie: wybuchy supernowych w gromadzie starszej mogły rozepchnąć bąbel materii międzygwiazdowej, który natrafiwszy na wielki obłok gazowo-pyłowy zainicjował powstanie w nim gromady młodych gwiazd.

Tomasz KWAST



Nazwa: Człowiek  
M. zam.: Ukł. Słoneczny



Rozwiązanie zadania M 832.

Dla  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n$  mamy

$$\begin{aligned}(w_A \cdot w_B)(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \prod_{i \in A} x_i \cdot \prod_{i \in B} x_i = \prod_{i \in A+B} x_i \cdot \left( \prod_{i \in A \cap B} x_i \right)^2 \\ &= w_{A+B}(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (\pm 1)^2,\end{aligned}$$

czego należało dowieść.



Rozwiązanie zadania M 834.

Funkcja  $w_A$  przyjmuje w wierzchołkach kostki wartości  $\pm 1$ . Jeśli zmienimy znak jednej współrzędnej wierzchołka, to wartość  $w_A$  zmieni znak wtedy i tylko wtedy, gdy numer tej współrzędnej należy do zbioru  $A$ . Zatem w  $(n - \text{card } A)$  sąsiednich wierzchołkach wartość funkcji  $w_A$  jest ta sama, co w wyjściowym wierzchołku, a w  $\text{card } A$  – przeciwna. Stąd

$$L w_A = \frac{1}{n} \left( (n - \text{card } A) w_A + \text{card } A \cdot (-w_A) \right) = \left( 1 - \frac{2}{n} \text{card } A \right) w_A.$$

## Styczeń

I znów mamy Nowy Rok. Od 4 I Ziemia oddala się od Słońca, a mimo to idzie ku wiosnie, gdyż coraz bardziej zwiększa się nasłonecznienie. Wpływ zmian odległości Ziemi od Słońca na klimat nietrudno ocenić. Orbita Ziemi jest elipsą o mimośrodku  $e = 0,016$ . Odległość perihelium Ziemi wynosi  $a(1 - e)$ , aphelium  $a(1 + e)$ , gdzie  $a$  oznacza wielką półoś orbity, czyli jednostkę astronomiczną. Stosunek średnich oświetleń Ziemi w tych dwóch położeniach jest kwadratem (odwrotnego) stosunku odległości, czyli  $\left( \frac{1+e}{1-e} \right)^2$ . Wreszcie stosunek temperatur (gdyby temperatura była zależna tylko od tego średniego oświetlenia Ziemi) musi być pierwiastkiem czwartego stopnia z ostatniego

wyrażenia, czyli  $\sqrt[4]{\frac{1+e}{1-e}} \cong 1 + e$ . Jeśli uznać, że na Ziemi mamy średnio 300 K, to zmianom odległości od Słońca powinny towarzyszyć zmiany temperatury o  $300 e = 4$  K. Sezonowe zmiany temperatury są większe, muszą więc mieć inną przyczynę.

Marsa i Jowisza przestaliśmy widzieć, zachodzą niemal jednocześnie ze Słońcem. Wenus zdążyła tak się przesunąć, że gdyby obiegała Słońce w płaszczyźnie orbity Ziemi, to 16 I można by ją widzieć na tle tarczy Słońca. Saturna nadal widać w pierwszej połowie nocy w Rybach. Pełnia Księżyca wypada 12 I. Księżyc zakryje Saturna 5 I i Aldebarana 9 I, ale z Polski zobaczymy tylko jego zbliżenia do tych ciał.

T.K.



Jeśli przy tym  $5^l \parallel a^{O_1} - 1$ , to  $O_1 = O_2 = \dots = O_l$  oraz  $O_{k+1} = 5O_k$  dla  $k \geq l$ . Na pewno  $O_k$  jest dzielnikiem liczby  $4 \cdot 5^{k-1}$ .

W przypadku  $a = 2$  mamy  $O_1 = 4$ . Przy tym  $5 \parallel 2^4 - 1$ . Zatem  $O_k = 4 \cdot 5^{k-1}$ . Ciąg reszt  $r_n = r_{1998, n}$  z dzielenia  $2^n$  przez  $5^{1998}$  ma okres długości  $4 \cdot 5^{1997}$  i okres ten składa się z reszt parami różnych i niepodzielnych przez 5. Ponieważ reszt z dzielenia przez  $5^{1998}$ , które są względnie pierwsze z  $5^{1998}$ , jest właśnie  $4 \cdot 5^{1997}$ , każda z tych reszt występuje w ciągu  $r_n$ .

Potęga dwójki o dużym wykładniku musi dzielić się przez  $2^{1998}$ , ale przy dzieleniu przez  $5^{1998}$  może dawać dowolną resztę niepodzielną przez 5. Stąd otrzymujemy następującą charakteryzację:

**WNIOSEK:** Liczba  $0 < r < 10^{1998}$  może być 1998-cyfrową końcówką potęgi dwójki o wykładniku nie mniejszym niż 1998 wtedy i tylko wtedy, gdy  $r$  nie dzieli się przez 5 oraz  $2^{1998} \mid r$ . Jeśli przy tym  $w$  jest najmniejszym wykładnikiem, dla którego  $2^w$  ma końcówkę  $r$ , to pozostałe wykładniki o tej własności są postaci

$$w + 4 \cdot 5^{1997} \cdot s, \quad \text{gdzie } s = 1, 2, 3, 4, \dots$$

**Uwaga:** Liczbę  $r$  uważamy za 1998-cyfrową uzupełniając ją w razie potrzeby zerami początkowymi.

W następnym numerze Γ-limatiasu użyjemy powyższej charakteryzacji do rozwiązania podanego na początku zadania.

JWR

## MIĘDZY NAMI OSZUSTAMI (1)

**ZADANIE:** Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi nierówność

$$(*) \quad 30n < 2^n + 110.$$

**Rozwiązanie:** Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

1° Dla  $n = 1$  sprawdzamy bezpośrednio  
 $30 < 2 + 110 = 112$ .

2° Załóżmy, że  $30n < 2^n + 110$ . Udowodnimy nierówność  $30(n+1) < 2^{n+1} + 110$ .

Stosując założenie indukcyjne otrzymujemy ciąg nierówności:

$$\begin{aligned} 30(n+1) &= 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = \\ &= 2^{n+1} + 110 + 30 - 2^n < 2^{n+1} + 110, \end{aligned}$$

przy czym ostatnia nierówność zachodzi dla  $n \geq 5$ .

Zatem nierówność (\*) została udowodniona dla  $n \geq 5$ .

Pozostaje sprawdzić, że

$$\text{dla } n = 2 \text{ mamy } 60 < 4 + 110 = 114,$$

$$\text{dla } n = 3 \text{ mamy } 90 < 8 + 110 = 118,$$

$$\text{dla } n = 4 \text{ mamy } 120 < 16 + 110 = 126.$$

Tym samym nierówność (\*) jest udowodniona dla wszystkich liczb naturalnych  $n$ .

W szczególności wykazaliśmy, że dla  $n = 6$  zachodzi nierówność  $180 < 174$ .

Dla tych, którzy czują się oszukani – wyjaśnienie za miesiąc.

JWR

## CYFROMANIA (1)

Jako punkt wyjścia naszych rozważań weźmiemy następujące

**ZADANIE:** Czy istnieje potęga dwójki, której 1998-cyfrowa końcówka składa się tylko z jedynek i dwójek?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, trzeba zrozumieć, jakie reszty z dzielenia przez  $10^{1998} = 2^{1998} \cdot 5^{1998}$  dają potęgę dwójki. Reszty z dzielenia potęg dwójki przez  $2^{1998}$  znamy dość dobrze – są one równe zeru, jeśli tylko wykładnik jest nie mniejszy niż 1998.

Cała zabawa polega na zrozumieniu ciągu  $r_n$  reszt z dzielenia  $2^n$  przez  $5^{1998}$ , lub ogólniej, ciągu  $r_{k,n}$  reszt z dzielenia  $a^n$  przez  $5^k$ , przy ustalonym  $k$  i przy  $a > 1$  niepodzielnym przez 5.

Zacznijmy od  $k = 1$ . Ponieważ  $a^4$  dzieli się przez 5 z resztą 1, ciąg  $r_{1,n}$  reszt z dzielenia  $a^n$  przez 5 jest okresowy z okresem 4, jednak nie musi to być okres najmniejszy. Wtedy reszty  $r_{1,n}$  powtarzają się co czwarta, ale może co druga, a może są wszystkie równe. W zależności od reszty z dzielenia  $a$  przez 5 możliwe są następujące ciągi reszt  $r_{1,n}$ :

$$1, \dots$$

$$2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, \dots$$

$$3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, \dots$$

$$4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, 4, 1, \dots$$

Najmniejszy okres ciągu reszt oznaczmy przez  $O_1$ . Oznacza to, że liczby  $r_{1,1}, r_{1,2}, \dots, r_{1,O_1} = 1$  są parami różne.

Dla  $k = 2$  ciąg reszt  $r_{2,n}$  z dzielenia  $a^n$  przez  $5^2$  ma okres  $5 \cdot O_1$ , gdyż z  $a^{O_1} \equiv 1 \pmod{5}$  wynika  $a^{5O_1} \equiv 1 \pmod{5^2}$ . Najmniejszy okres  $O_2$  może być równy  $5O_1$ , ale może też być równy  $O_1$ , jeśli  $a^{O_1} \equiv 1 \pmod{5^2}$ .

Dla większych  $k$  jest podobnie. Trzeba uwzględnić fakt, że jeżeli dla pewnego  $k \geq 1$  zachodzi  $5^k \parallel b - 1$  (tzn.  $b - 1$  dzieli się przez  $5^k$ , ale przez  $5^{k+1}$  już nie), to  $5^{k+1} \parallel b^5 - 1$ . Istotnie, z podzielności  $5^k \parallel b - 1$  wynika, że  $b$  jest postaci  $5^k c + 1$ , gdzie  $c$  nie dzieli się przez 5. Wtedy

$$\begin{aligned} b^5 - 1 &= (5^k c + 1)^5 - 1 = \\ &= 5^{k+1} c + 2 \cdot 5^{2k+1} c^2 + 2 \cdot 5^{3k+1} c^3 + 5^{4k+1} c^4 + 5^{5k} c^5. \end{aligned}$$

Wszystkie składniki tej sumy dzielą się przez  $5^{k+1}$ , natomiast przez  $5^{k+2}$  dzielą się ostatnie cztery, a pierwszy nie.

Jeśli przez  $O_k$  oznaczmy najmniejszy okres ciągu reszt  $r_{k,n}$  z dzielenia  $a^n$  przez  $5^k$ , to  $O_1$  jest jedną z liczb 1, 2, 4.