SPIS TREŚCI

NUMERU 12(283)

W następnym numerze:

Trójkąty pitagorejskie o równych polach

Okładki i ilustracje wykonała
Anna Ludwicka

Wybór artykułów z *Delty* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem
http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący
Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Tomasz Hofmokl
Andrzej Hrynkiewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda
Feliks Przytycki
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nacz.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nacz.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Anna Wojtyra
Piotr Zalewski

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65.
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1998 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1998 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1998 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8^{00} – 14^{00}. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

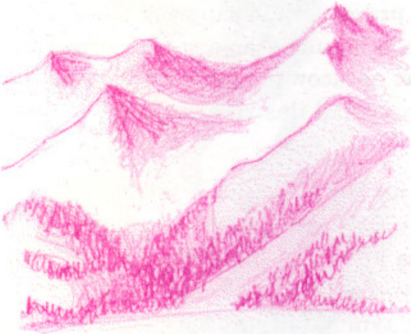
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.

Osiemdziesiąt lat temu zmarł Marian Smoluchowski mając zaledwie 45 lat



Władysław Natanson przemawiając na jego pogrzebie w imieniu Akademii Umiejętności powiedział:
„W pełni sił, w rozkwicie twórczości, odchodzi od nas jeden z najświetniejszych umysłów, którymi chlubiliśmy się w naszej Rzeczypospolitej Nauk. Marian Smoluchowski zapisał swe imię niezatartymi zgłoskami w dziejach poznania i pojmowania Natury. Zebrał bogaty plon odkryć, rzucił hojny siew myśli, których owoce przypadną pokoleniom następnym."

W wielu znaczących czasopismach naukowych ukazały się artykuły po śmierci Smoluchowskiego napisane przez wielkich fizyków.

Arnold Sommerfeld pisał: „Wyrwany został z pełni twórczej pracy. Nikt nie zastąpi jego subtelnego umysłu."
W entuzjastycznie napisanym artykule Hendrik A. Lorenz stwierdzał: „Podziwialiśmy w Smoluchowskim wznoszącą się gwiazdę, której wielkość wzrastała z każdym krokiem, z każdą pracą."
A Albert Einstein ubolewał, że „Zbyt wcześnie przeciął los jego natchnioną działalność jako badacza i nauczyciela" i dodawał „dzierżmy wysoko jego wzór i dzieło!"

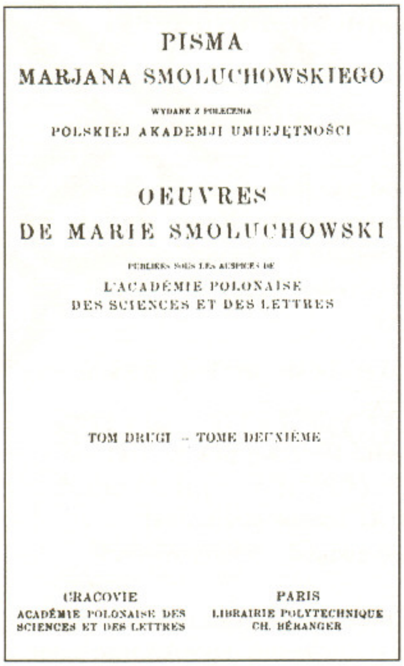
B.C.

Sprawa profesury w Wiedniu

Marian Smoluchowski, podobnie jak jego brat Tadeusz, uczęszczał do wiedeńskiego Theresianum, jednej z najświetniejszych ówcześnie szkół średnich Europy. Nauczyciel fizyki w tej szkole, Alojzy Hoefler, stwierdził, że miał dwóch znakomitych uczniów: najlepszym był Hasenoehrl, zaś najnajlepszym (niem. *allerbester*) Marian Smoluchowski. Obaj zostali profesorami fizyki. Najpierw Smoluchowski otrzymał nominację we Lwowie w 1900 roku. Mając 28 lat był wtedy najmłodszym profesorem w monarchii habsburskiej. Poźniej Hasenoehrl objął katedrę fizyki teoretycznej w Wiedniu. Po wybuchu wojny Hasenoehrl został powołany do wojska i zginął w 1915 roku na froncie włoskim. Uniwersytet Wiedeński wyłonił komisję do wyboru kandydata na opuszczoną katedrę. Komisja stwierdziła, że nie ma lepszego kandydata niż Marian Smoluchowski i zwróciła się do niego z pytaniem o zgodę. Smoluchowski zgodził się, ale wtedy zaczęły się „schody". Początkowo jednomyślna komisja rozpadła się na dwa obozy, niefizycy ze względów narodowościowych wycofali swoje poparcie dla naszego rodaka. W Wiedniu mówi się, że na listę kandydatów dopisano m.in. Einsteina, który wcale nie starał się o katedrę, byle tylko zepchnąć Smoluchowskiego z pierwszego miejsca. Spory trwały dość długo. W końcu większość Rady Wydziału wypowiedziała się przeciwko Smoluchowskiemu i jego kandydatura upadła. Ciekawostką może być fakt, że w tym czasie prorektor odradzającego się Uniwersytetu Warszawskiego, filozof Łukasiewicz, zwrócił się do Smoluchowskiego z propozycją przeniesienia do Warszawy i objęcia wykładów z fizyki. Uniwersytet Jagielloński, którego profesorem był Smoluchowski od 1913 roku, odpowiedział błyskawicznie wybierając go *extra turnum* na rektora w roku akademickim 1917–18. Smoluchowski, niestety, nie objął tej funkcji. Zmarł przygotowując wykład inauguracyjny „O jednolitości praw w przyrodzie".

Przypominając zaszczyty, jakich doznawał nasz rodak w czasie swojego krótkiego życia, warto także wspomnieć o doktoracie honorowym Uniwersytetu w Glasgow, który otrzymał Smoluchowski za sprawą Kelvina w 1901 roku. Miał wtedy 29 lat i było to przed jego pracami o ruchach Browna.

Bogdan CICHOCKI i Andrzej TRAUTMAN


PISMA
MARJANA SMOLUCHOWSKIEGO
WYDANE Z POLECENIA
POLSKIEJ AKADEMJI UMIEJĘTNOŚCI

OEUVRES
DE MARIE SMOLUCHOWSKI
PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DE
L'ACADÉMIE POLONAISE
DES SCIENCES ET DES LETTRES

TOM DRUGI — TOME DEUXIÈME

CRACOVIE
ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES ET DES LETTRES

PARIS
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE
CH. BÉRANGER

Siła argumentów

Prace Mariana Smoluchowskiego są wciąż cytowane i to bardzo często. Nie można tego powiedzieć o pracach wielu uczonych żyjących na przełomie XIX i XX wieku, nawet tych największych. Jedną z przyczyn jest zapewne fakt, że prace Smoluchowskiego są świetnie napisane, a argumentacja w nich użyta jest miejscami mistrzowska. Nie potrzeba czytać opracowań historyków nauki, wystarczy sięgnąć po oryginały. Przytoczymy przykład ilustrujący klasę Smoluchowskiego.

Może wydawać się dziwne, że tak długo fizycy nie mogli poradzić sobie z wyjaśnieniem przyczyn ruchów Browna, pomimo że stosunkowo wcześnie wysunięto hipotezę, iż ruchy te spowodowane są przez zderzenia atomów ośrodka z cząstką zawiesiny. Przyczyna tkwiła w „zdroworozsądkowym" mniemaniu, że im więcej elementów, większa populacja itp., tym układ jest bardziej jednorodny, tym trudniej zaobserwować odchylenia od wartości średnich. W przypadku ruchów Browna zostało to *explicite* sformułowane przez botanika Karla Naegeliego w 1879 roku. Korzystając z danych o rozmiarach atomów wyliczył on przeciętną prędkość, jaką może uzyskać ziarenko zawiesiny na skutek zderzenia z jedną molekułą cieczy. Wyszła mu bardzo mała liczba, rzędu jednej tysięcznej μm/s. Takiego efektu nie da się w żaden sposób zaobserwować pod mikroskopem. I jest to prawda. Ale Naegeli idzie dalej i stwierdza, że ziarenko bombardowane jest przez molekuły cieczy ze wszystkich stron z ogromną częstotliwością (średnio 10^{20} razy na sekundę). Jeżeli nawet zostało poruszone w jedną stronę, to natychmiast zostanie zatrzymane na skutek uderzenia z drugiej strony. Smoluchowski pierwszy zrozumiał niesłuszność tego typu rozumowania. Oto fragment z pracy z 1906 roku odnoszący się do argumentu Naegeliego.

Jest to taki sam błąd rozumowania, jak gdyby człowiek uprawiający hazardową grę (np. rzucanie kostki) sądził, że nigdy większej straty ani też większego zysku mieć nie będzie, niż wynosi stawka na jeden rzut. Wiemy dobrze, że szczęście i nieszczęście zwykle niezupełnie się równoważą; że im dłużej gra trwa, tym większa jest przeciętna suma albo wygrana, albo stracona. Pouczające jest obliczenie tego przykładu, w założeniu równego prawdopodobieństwa korzystnych i niekorzystnych rzutów. Rozważając wszystkie możliwe kombinacje, łatwo sprawdzić, że prawdopodobieństwo otrzymania m korzystnych, $n-m$ niekorzystnych, to znaczy otrzymania ostatecznej nadwyżki $(2m-n)$, wynosi:

$$\frac{n!}{2^n\, m!\,(n-m)!}\,.$$

Stąd znajdujemy wartość przeciętnego zboczenia w jedną lub drugą stronę:

$$\nu = 2\sum_{m=\frac{n}{2}}^{n} \frac{2m-n}{2^n}\binom{n}{m}\,,$$

jeżeli dla uproszczenia liczbę n przyjmiemy za parzystą. Wyrażenie to można przekształcić przez zastosowanie twierdzenia dwumianowego w formę dogodniejszą:

$$\nu = \frac{n}{2^n}\binom{n}{n/2}\,,$$

która dla dużych liczb n przechodzi w

$$\nu = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\,.$$

Smoluchowski wyciąga na podstawie tego wyniku wniosek, że dla ziarenka pozostanie zatem dodatni lub ujemny nadmiar blisko 10^{10} uderzeń na sekundę. Ziarenko jednak się poruszy!

B.C.

Pasjonującą historię zmagań z zagadką ruchów Browna można znaleźć w *Delcie* 4 i 5 z roku 1983.

Marian Smoluchowski (1872–1917)

Bronisław ŚREDNIAWA

„Jeżeli zgodnie z rozpowszechnioną opinią w wąskoograniczonej jednostronnej specjalizacji widzi się cechy współczesnych metod badania, to muszę się w ogóle uważać za fizyka dawnej szkoły, albowiem moim osobistym skłonnościom odpowiada właśnie na przemian praca w najrozmaitszych dziedzinach fizyki i to zarówno w oparciu o pojęcie granicy, różniczki i całki, jak też za pomocą tokarki i dmuchawki ...

Komu chodzi o masową produkcję rozpraw, ten istotnie uczyni najlepiej pielęgnując wąsko ograniczone pole specjalne możliwie dokładnie i wnikliwie. Mnie jednak bardziej zależy na tym, by nie stracić spojrzenia na całość i brać udział w postępie na całej linii".

Marian Smoluchowski

W bieżącym roku mija 125. rocznica urodzin i 80. rocznica śmierci Mariana Smoluchowskiego [1].

Urodzony 28 maja 1872 r. w Vorderbrühl koło Wiednia, jako syn wyższego urzędnika kancelarii cesarskiej, Marian Smoluchowski studiował w latach 1890–1894 fizykę w Uniwersytecie Wiedeńskim, po czym w ciągu kilku lat zwiedził szereg najsłynniejszych ówczesnych ośrodków fizyki. Pracował w Paryżu pod kierunkiem Gabriela Lippmanna, w Glasgow pod kierunkiem Lorda Kelvina i w Berlinie u Emila Warburga. Pobyt u Warburga wywarł decydujący wpływ na przyszłą działalność naukową Smoluchowskiego, gdyż skierował jego uwagę na zagadnienia kinetycznej teorii materii.

Po habilitacji w 1898 r. w Wiedniu Smoluchowski objął w wieku 28 lat katedrę fizyki teoretycznej w Uniwersytecie Lwowskim (w 1899 r.). W rok później otrzymał nominację na profesora nadzwyczajnego, a w 1903 r. na profesora zwyczajnego. W 1913 r. przeniósł się ze Lwowa do Krakowa i objął katedrę fizyki doświadczalnej Uniwersytetu Jagiellońskiego. W 1917 r. został wybrany rektorem tegoż Uniwersytetu, lecz zanim zdołał objąć tę godność, zmarł 5 września tegoż roku w czasie epidemii dyzenterii.

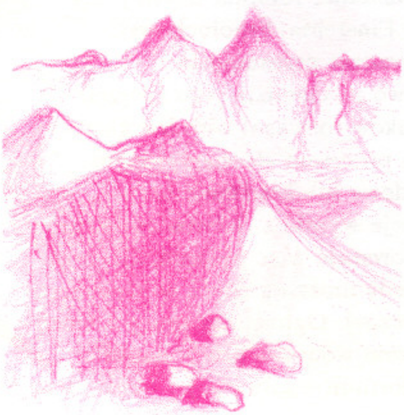
Działalność naukowa Smoluchowskiego obejmowała wiele dziedzin fizyki. Najważniejsze jego osiągnięcia dotyczyły kinetycznej teorii materii. Jego prace miały przełomowe znaczenie dla rozwoju teorii atomistycznej i przyczyniły się w istotny sposób do rozstrzygnięcia sporu między zwolennikami a przeciwnikami teorii atomistycznej na korzyść atomistów.

Rozwój termodynamiki i kinetycznej teorii materii w ostatnich dziesięcioleciach XIX wieku

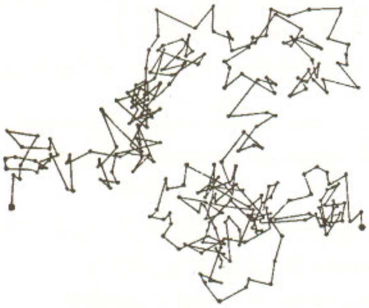
Zarówno termodynamika, jak i teoria kinetyczna materii były intensywnie rozwijane od początków XIX wieku. Szczególne sukcesy, jakie odnosiła termodynamika, doprowadziły pod koniec tego wieku do powstania, głównie w Niemczech, tak zwanej szkoły energetyków. Jej zwolennicy, wspierani przez kierunek filozoficzny, zwany empiriokrytycyzmem, uznający tylko fakty wynikające z doświadczeń i uważający hipotezy, wykraczające poza bezpośrednie wnioski z doświadczeń, za metafizykę, zaprzeczali istnieniu atomów. Szkole tej przewodzili Wilhelm Ostwald i Ernst Mach. Ostwald napisał nawet podręcznik chemii, w którym nie użył ani razu słowa „atom".

Równolegle z termodynamiką rozwijano w XIX wieku kinetyczną teorię materii i mechanikę statystyczną. Jeden z głównych wyników tej ostatniej polegał na zastąpieniu kategorycznych stwierdzeń drugiej zasady termodynamiki, tj. prawa wzrostu entropii, przez stwierdzenie, że zjawiska, w których entropia wzrasta, odbywają się z prawdopodobieństwem bardzo bliskim jedności. Nie potrafiono jednak do końca XIX wieku wskazać zjawisk, dla których stwierdzenia termodynamiki i mechaniki statystycznej różniłyby się, co pozwoliłoby uznać, która z obu teorii jest zgodna z doświadczeniem. Dlatego kinetyczna teoria materii stała się w tych latach bardzo niepopularna.

Ludwig Boltzmann, który wówczas przewodził atomistom, napisał w 1898 r. we wstępie do drugiego tomu swoich *Wykładów o teorii gazów* [2], że celem napisania *Wykładów* było ocalenie wyników kinetycznej teorii gazów, tak aby nie musiano na nowo odkrywać tego, co już zostało zrobione, gdy ta teoria odzyska uznanie.



Boltzmann nie dożył powrotu kinetycznej teorii materii do nauki. Ponowne jej wprowadzenie do fizyki i do chemii i wykazanie, że atomy istnieją, było dziełem wielu fizyków i chemików.



Ruchy Browna według obserwacji Perrina z 1908 r.

Najbardziej istotny udział mieli tu teoretycy: **Albert Einstein** i **Marian Smoluchowski** oraz eksperymentatorzy: **Richard Zsigmondy**, **Theodor Svedberg** i **Jean Perrin**. Zjawiska, pozwalające ustalić relacje między termodynamiką i teorią kinetyczną były już od dawna znane, lecz aby je prawidłowo objaśnić, potrzebny był geniusz Einsteina i Smoluchowskiego. Zjawiskami tymi były: ruchy Browna, opalescencja w stanie krytycznym i błękitny kolor nieba (później znaleziono ich więcej).

Ruchy Browna

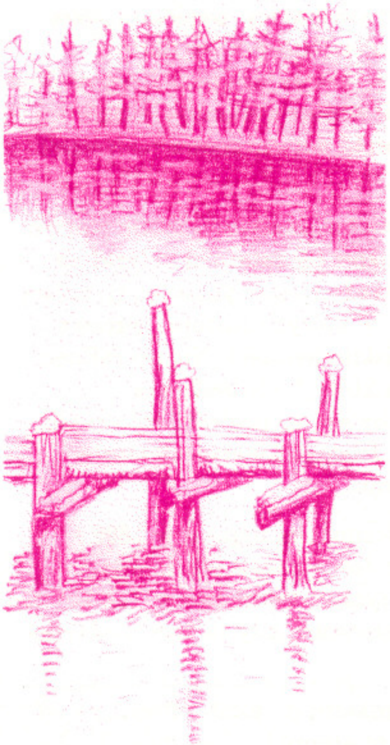
Ruchy Browna polegają na nieustannym i nieregularnym przemieszczaniu się małych makroskopowo cząstek zawiesiny, „ziarenek", w ośrodku ciekłym lub gazowym. Te odkryte w 1827 r. ruchy badano przez cały wiek XIX tylko jakościowo. Wysuwano rozmaite przypuszczenia odnośnie przyczyn ich powstawania. Najczęściej sądzono, że:

1) spowodowane były ruchami konwekcyjnymi w cieczy, wywołanymi przez nierównomierność temperatury,
2) przyczyną ich były siły elektryczne, działające między ziarenkami,
3) były wynikiem zderzeń ziarenek z nieregularnie poruszającymi się cząsteczkami ośrodka.

Pierwsze ilościowe doświadczenia nad ruchami Browna w pierwszych latach XX wieku wykonali: Felix Exner, Richard Zsigmondy i Theodor Svedberg. Wszyscy stwierdzili, że wykryte przez nich prawidłowości, rządzące ruchami Browna, były dla nich niezrozumiałe.

W latach 1905 i 1906 Einstein i Smoluchowski ogłosili niezależnie prace wyjaśniające w zupełności zjawisko ruchów Browna, opierając się na założeniu kinetycznej teorii materii, według której nieregularne ruchy ziarenek są spowodowane przez kolejne uderzenia cząsteczek ośrodka. Jako pierwsi zrozumieli, że obserwowane w doświadczeniach średnie przesunięcie ziarenka w sekundzie jest wielkością zupełnie inną, niż jego bardzo często zmieniająca się prawdziwa prędkość.

Praca Einsteina z 1905 r. nosiła tytuł *O ruchu cząstek zawiesiny, postulowanym przez molekularno-kinetyczną teorię ciepła* [6]. Einstein, stosując pojęcie ciśnienia osmotycznego i biorąc pod uwagę prawa mechaniki statystycznej obliczył średnie przesunięcie ziarenka w jednostce czasu. Lecz nie był pewny, jak to zaznaczył w swojej pracy, że badał rzeczywiście zjawisko ruchów Browna. Dopiero, gdy otrzymał dane doświadczalne, stwierdził w drugiej swojej pracy, ogłoszonej w 1906 r. pt. *Przyczynek do teorii ruchów Browna* [7], że jego teoria dotyczy właśnie tych ruchów.



Smoluchowski ogłosił pracę o ruchach Browna w 1906 r. Miała ona tytuł *Zarys teorii kinetycznej ruchów Browna i roztworów mętnych* [8]. Smoluchowski zajmował się zjawiskiem ruchów Browna od 1900 r. i pozostawał w kontakcie naukowym z Feliksem Exnerem. Wyników swoich badań nie ogłaszał, opublikował je dopiero po ukazaniu się pracy Einsteina. Metoda użyta przez Smoluchowskiego była całkiem inna niż metoda Einsteina. Smoluchowski świadomie rozpatrywał ruchy Browna. Średni kwadrat przesunięcia ziarenka w sekundzie obliczył badając szczegółowo mechanizm jego zderzeń z cząsteczkami ośrodka (dla uproszczenia rachunków rozważał ośrodek gazowy). Zdawał sobie sprawę z tego, że ruchy Browna są procesem stochastycznym (chociaż nie użył tego słowa), tak jak gry hazardowe lub błądzenie losowe. W omawianej pracy Smoluchowski porównał swoje wyniki z doświadczalnymi rezultatami Exnera i uzyskał dobrą zgodność. Powstaje więc pytanie, dlaczego nie opublikował swojej pracy wcześniej. Odpowiedź można znaleźć w atmosferze tamtych czasów, nieprzychylnej dla teorii kinetycznej. Ogłoszenie pracy z teorii kinetycznej było przeciwstawieniem się panującemu wówczas przekonaniu większości fizyków i dlatego Smoluchowski po sformułowaniu swojej teorii czekał na dalsze, bardziej wiarygodne wyniki doświadczalne.

„Wznieś się ponad te marności ludzkie i przypatrz się życiu ze stanowiska wiecznej Przyrody: Wszak my wszyscy idziemy tą drogą, którą szły biliony przed nami, a będą szły biliony po nas. Czy o chwilkę krócej, czy dłużej na tym przystanku zabawimy – cóż to znaczy!"

„Przyznaj, że w tych 7 latach napiliśmy się tyle prawdziwego szczęścia, ile bardzo rzadko jest komu przeznaczone, nawet w ciągu życia dłuższego!... Kto tego doznał, w ogóle nie może już być nieszczęśliwy, bo pamięć tego szczęścia starczy za pokarm dla duszy na najdłuższe życie."

Z listu do żony Zofii z d. Borowieckiej w czasie ciężkiej choroby w 1908 roku.

Różnice między wynikami rachunków Einsteina i Smoluchowskiego były nieistotne, spowodowane przez przybliżenia, zastosowane przez Smoluchowskiego.

Wśród prac doświadczalnych, wykonanych zaraz po roku 1906, decydujące znaczenie miały prace Perrina, ogłoszone w 1908 r. Jego starannie wykonane pomiary dały niewątpliwą zgodność z przewidywaniami teorii Einsteina i Smoluchowskiego. Zgodność ta potwierdziła ostatecznie kinetyczne wytłumaczenie ruchów Browna i zadecydowała o uznaniu w nauce realnego istnienia atomów.

Ostwald, główny przeciwnik teorii atomowej, uznał w 1908 r. realne istnienie atomów.

Opalescencja w stanie krytycznym i błękit nieba

We wczesnych stadiach rozwoju kinetycznej teorii gazów uważano gaz za zbiór cząsteczek, mających jednakowe bezwzględne prędkości. Przyjmując to założenie Clausius wyprowadził równania stanu gazów doskonałych. Później Maxwell rozpatrywał gaz jako zbiór cząsteczek mających różne prędkości. Jednak uważano jeszcze gaz za zbiór cząsteczek, w którym gęstość jest stała. W pracy *O nieregularnościach w rozkładzie cząsteczek gazu i ich wpływie na entropię i na równanie stanu* [9], ogłoszonej w 1904 r., Smoluchowski pierwszy zwrócił uwagę na to, że gęstość gazu lub cieczy nie jest stała w całym obszarze przezeń zajmowanym, lecz ulega fluktuacjom. Polegają one na tym, że liczba n cząsteczek gazu lub cieczy w małej objętości v w zbiorniku o objętości V zmienia się z biegiem czasu, wahając się dokoła średniej liczby ν cząsteczek w objętości v. Zgęszczeniem liczby cząsteczek w objętości v nazywamy wielkość

$$\delta = \frac{n-\nu}{\nu}\,.$$

We wspomnianej pracy Smoluchowski obliczył średnie zgęszczenie cząsteczek w gazie doskonałym i otrzymał wartość

$$\sqrt{\overline{\delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\,.$$

W następnej pracy o fluktuacjach pt. *Teoria kinetyczna opalescencji gazów w stanie krytycznym oraz innych zjawisk pokrewnych* [10] Smoluchowski obliczył w 1907 r. średnie zgęszczenie cząsteczek dla gazu van der Waalsa. Otrzymał przybliżoną wartość

$$\sqrt{\overline{\delta^2}} = \sqrt{-\frac{RT_0\varrho_0}{\nu}\left(\frac{1}{\overline{v}}\frac{\mathrm{d}\overline{v}}{\mathrm{d}p}\right)_T}\,,$$

gdzie T_0, ϱ_0, $\overline{v}$ oznaczają kolejno: temperaturę bezwzględną, średnią gęstość cząsteczek i objętość właściwą gazu.

Pochodna $(\mathrm{d}\overline{v}/\mathrm{d}p)_T$ przyjmuje szczególnie duże wartości w pobliżu punktu krytycznego (gdzie $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}\overline{v})_T = (\mathrm{d}^2p/\mathrm{d}\overline{v}^2)_T = 0$), zatem tam fluktuacje są bardzo duże.

Smoluchowski zwrócił uwagę na to, że fluktuacje powinny spowodować występowanie zjawisk charakterystycznych dla ośrodków mętnych, tj. zjawiska opalescencji oraz tzw. zjawiska Tyndalla, polegającego na rozpraszaniu promieniowania przechodzącego przez ośrodek mętny. W bliskości stanu krytycznego fluktuacje powodują powstanie opalescencji. Smoluchowski stwierdził też, że fluktuacje gęstości w powietrzu wywołują również lokalne zmiany współczynnika załamania i powodują przez to rozpraszanie światła w atmosferze. Ponieważ jest ono najsilniejsze dla fal krótkich, wynikiem przechodzenia światła dziennego przez atmosferę jest błękitny kolor nieba. Smoluchowski nie przeprowadził jednak obliczenia natężenia światła rozproszonego. Rachunki wykonał w 1910 r. Einstein w pracy pt. *Teoria opalescencji cieczy jednorodnych i mieszanin w pobliżu stanu krytycznego* [11] i otrzymał znany wzór Rayleigha.

Odwracalność i nieodwracalność

Zjawiska makroskopowe, podlegające prawom termodynamiki, są nieodwracalne, chociaż u ich podłoża tkwią odwracalne procesy molekularne, tego rodzaju jak zderzenia cząsteczek. Aby wyjaśnić, jak elementarne procesy odwracalne wywołują makroskopowe zjawiska nieodwracalne, Smoluchowski przeprowadził w latach 1910–1916 analizę doświadczeń Svedberga, polegających na kolejnych zliczeniach liczby ziarenek w ośrodku ciekłym w ograniczonym obszarze w polu widzenia ultramikroskopu, powtarzanych w jednakowych odstępach czasu. Analiza ta doprowadziła Smoluchowskiego do określenia „średniego czasu powrotu" [12]. Zdefiniujemy to pojęcie na przykładzie wspomnianych doświadczeń Svedberga. Dla określenia średniego czasu powrotu stanu, w którym w polu widzenia mikroskopu zaobserwowano n ziarenek, wyjdźmy od stanu, gdy zaobserwowaliśmy liczbę ziarenek różną od n. Załóżmy, że następnie obserwowaliśmy w równych odstępach czasu kolejno $k-1$ razy stany z liczbą ziarenek różną od n, natomiast k-ta obserwacja dała stan n ziarenek. Jeżeli wykonamy wiele serii takich obserwacji, kończących się na stanie n, to średni czas trwania takiej serii nazwiemy średnim czasem powrotu i oznaczymy przez θ_n. Z obliczeń Smoluchowskiego wynikło, że

$$\theta_n = \frac{\tau e^{\nu} n!}{\nu^n},$$

gdzie ν jest średnią liczbą ziarenek w polu widzenia ultramikroskopu, a τ odstępem czasu upływającego między dwiema kolejnymi obserwacjami.

Zależność średniego czasu powrotu od liczby cząsteczek, biorących udział w procesie, ilustruje dobitnie przykład, podany przez Smoluchowskiego [13, 4].

Przykład dotyczy średniego czasu powrotu obliczonego po przejściu granicznym $\tau \to 0$ z uwzględnieniem szybkości wymiany cząsteczek przez powierzchnię kulki (dzięki czemu θ nie dąży do zera wraz z τ).

Rozważmy małą objętość kulistą w powietrzu w warunkach normalnych. Okazuje się, że czas oczekiwania np. na pojawienie się fluktuacji stężenia tlenu na poziomie 1% zależy bardzo silnie od promienia r kuli, co widać z przytoczonej tabelki:

r [cm]	1	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
θ [sek]	$10^{10^{14}}$	10^{68}	10^{6}	1	10^{-11}

Dla większych kul, a więc dla większej liczby cząsteczek powietrza zjawisko jest praktycznie nieodwracalne, dla bardzo małych jest odwracalne.

Jako wniosek z rozważań tego rodzaju Smoluchowski wypowiedział kryterium odwracalności i nieodwracalności procesu: *Zjawisko objawia się jako nieodwracalne (odwracalne), gdy średni czas powrotu stanu początkowego jest długi (krótki) w porównaniu z czasem obserwacji.*

Uwagi końcowe

O ważności zagadnień badanych przez Smoluchowskiego i o ich roli w rozwoju nauki świadczy fakt, że trzech badaczy zajmujących się kinetyczną teorią materii, w tym dwóch współpracujących ze Smoluchowskim, zostało odznaczonych Nagrodą Nobla: Zsigmondy w 1925 r. i Svedberg w 1926 r. w dziedzinie chemii oraz Perrin w 1926 r. w dziedzinie fizyki.

Laureat Nagrody Nobla z 1983 r., Subrahmanyan Chandrasekhar wyraził opinię, że „...w serii prac, które Smoluchowski napisał w ciągu ostatnich pięciu lat życia, zostały położone podstawy nowoczesnej teorii procesów stochastycznych" [14].

Literatura

[1] A. Teske, *Marian Smoluchowski, życie i twórczość*, PWN, Warszawa 1955.

[2] *Oeuvres de Marie Smoluchowski*, red. W. Natanson, PAU, Kraków t. I 1924, t. II 1927, t. III 1928.

[3] *Wkład uczonych polskich do fizyki statystycznej i molekularnej*, red. T. Piech, Ossolineum, Wrocław 1962.

[4] S. Chandrasekhar, M. Kac, R. Smoluchowski, *Polish Men of Science*, red. R.S. Ingarden, PWN, Warszawa 1986.

[5] *Essays Devoted to Scientific and Didactic Work of Marian Smoluchowski*, red. B. Średniawa, Univ. Iag. Folia Physica, Fasc. **33** (1991).

[6] A. Einstein, *Ann. d. Phys*, **17**, 549 (1905).

[7] A. Einstein, *Ann. d. Phys*, **19**, 371 (1906).

[8] M. Smoluchowski, *Rozpr. Wydz. Mat. Przyr. AU*, seria A, 257 (1906).

[9] M. Smoluchowski, *Boltzmann Festschrift*, 626, Leipzig 1904.

[10] M. Smoluchowski, *Ann. d. Phys*, **25**. 205 (1907).

[11] A. Einstein, *Ann. d. Phys*, **33**. 1275 (1910).

[12] M. Smoluchowski, *Sitzber. der Akad. d. Wiss. in Wien, nat K1*, **123**, IIa 2381 (1914).

[13] M. Smoluchowski, *Phys. Zeitschr*, **17**, 557–571, 585–599 (1916).

[14] S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys*, **15**, 1 (1943).

Marian Smoluchowski – alpinista

Andrzej PALCZEWSKI

Zamiłowanie do gór i wycieczek górskich obudziło się w Marianie Smoluchowskim w bardzo młodym wieku za sprawą licznych wyjazdów wakacyjnych organizowanych przez jego rodziców. Już jako dziecko jeździł na wakacje w Alpy, gdzie w 1884 roku wszedł na liczący 2100 m szczyt Obir w Karyntii. W roku następnym przyjechał do Zakopanego i zwiedził Tatry (przeszedł m.in. przez Zawrat i Polski Grzebień). W roku 1886 był w Górach Izerskich, a potem znowu wrócił w Alpy.

Poważną działalność alpinistyczną podjął Marian Smoluchowski z chwilą rozpoczęcia studiów uniwersyteckich. Mając doskonałe przygotowanie ogólne wynikające z intensywnego uprawiania sportów (pływanie, jazda konna, jazda na rowerze), rozpoczął uprawianie wspinaczki skałkowej. Okolice Wiednia obfitują w liczne masywy skałek wapiennych stanowiących doskonały teren dla takich treningów. Bracia Tadeusz i Marian Smoluchowscy odwiedzali szczególnie często masywy Rax i Schneeberg obfitujące w drogi wspinaczkowe o urozmaiconym charakterze i rozległej skali trudności. Te treningowe wspinaczki skałkowe były przygotowaniem do poważniejszych wypraw alpejskich, które bracia Smoluchowscy odbyli jako członkowie Sekcji Akademickiej Towarzystwa Alpejskiego w Wiedniu (Akademischer Sektion Wien des Alpen-Vereines). Co prawda pierwszą poważną wyprawę alpejską odbył Marian Smoluchowski w 1889 roku w masyw Brenny w Alpach Południowo-Wschodnich (razem z bratem Tadeuszem i przewodnikiem M. Nicolussi), a rok później udał się na wyprawę w grupę Riesenferner w Alpach Wschodnich, jednak prawdziwy rozkwit działalności alpinistycznej przypada na lata 1891–94. Jest to okres bardzo burzliwego rozwoju działalności Sekcji Akademickiej Towarzystwa Alpejskiego w Wiedniu. Istotny wpływ na działalność tej młodzieży miał jeden z najwybitniejszych w tym czasie wspinaczy alpejskich Emil Zsigmondy. Głosił on, że prawo do podejmowania samodzielnych wypraw alpejskich mają tylko ludzie doskonale przygotowani pod względem fizycznym i posiadający niezbędne doświadczenie. Stanowisko to, zupełnie oczywiste z obecnego punktu widzenia, brzmiało rewolucyjnie w końcu XIX w., kiedy wyprawy alpejskie podejmowali nie odznaczający się nadmierną sprawnością przedstawiciele miejskiej inteligencji, a obowiązek pokonania technicznych trudności drogi i zapewnienia wyprawie bezpieczeństwa spadał na barki przewodników alpejskich.

Idee Zsigmondy'ego były bliskie braciom Smoluchowskim. Kiedy w 1891 roku rozpoczęli samodzielną działalność alpinistyczną, byli do niej znakomicie przygotowani fizycznie. Posiadali również spore doświadczenie zdobyte w czasie licznych wyjazdów w Alpy. W latach 1891–94 odbyli ogromną liczbę wypraw alpejskich, głównie w grupach Rieserferner i Ortler oraz w Dolomitach. Ten okres działalności to 24 nowe drogi wspinaczkowe, w tym 16 pierwszych wejść szczytowych. Do najwybitniejszych osiągnięć z tego okresu należą: zdobycie Sas del Lec (2959 m) w Dolomitach (1892 r.), Schluderzahn (3255 m) w grupie Ortleru (1892 r.), Zehner (2917 m) w grupie Sella (1894 r.). To ostatnie wejście, ze względu na trudności i długość drogi, ma swoje znaczące miejsce w oficjalnej historii alpinizmu. Do ważnych osiągnięć braci Smoluchowskich należało trawersowanie słynnego szczytu Cinque Torri (Fünffingerspitze) w Dolomitach w 1893 roku. Mimo że droga wejściowa i zejściowa odbywała się trasami pokonanymi wcześniej przez innych alpinistów, było to znaczące osiągnięcie, ponieważ szczyt jeszcze do niedawna zaliczany był do tzw. niemożliwych do zdobycia. Jego zdobycie w 1890 roku przez Austriaka H.R. Schmitta było wielkim wydarzeniem alpinistycznym, a trasa pierwszego wejścia, tzw. komin Schmitta, do dzisiaj należy do poważnych dróg alpejskich.

W 1894 roku Marian Smoluchowski udaje się w gronie towarzyszy do Szwajcarii w Alpy Walijskie i Berneńskie. Jak napisał we wspomnieniu o nim Walery

Widok górski w Szwajcarii – akwarela Smoluchowskiego (1909)

Muzyka, w odróżnieniu od poezji, była dla Smoluchowskiego sztuką *par excellence*. Zamiłowanie to wyniósł z domu rodzinnego, gdzie przywykł grywać na pianinie w gronie rodziny i przyjaciół. Szczególną estymą darzył utwory Wagnera i Brucknera.

Zachowały się akwarele i szkice Smoluchowskiego, o których jego syn Roman tak pisał w późniejszych latach: *W ich ocenie należy pamiętać, że są one robione lekko, odręcznie, jako interesujące zagadnienie, bez żadnych pretensji do sztuki malarskiej. Charakterystycznym jest silne realistyczne podejście i chęć uchwycenia nastroju chwili.*

Goetel *Gdy w Alpach Wschodnich cieszyły go głównie długie powietrzne wspinaczki, do Alp Zachodnich ciągnęły go wielkie wyprawy na zakute w pancerz lodów ich masywy.* W czasie tej jednej wyprawy zdobywa Smoluchowski wiele najsłynniejszych szczytów tego regionu: Matterhorn (4482 m), Zinalrothorn (4223 m), Dent Blanche (4364 m) i Monte Rosa (4638 m). Na tym kończy się okres zdobywczej działalności alpejskiej Mariana Smoluchowskiego. W roku 1895 uzyskuje stopień doktora na Uniwersytecie Wiedeńskim i wyjeżdża na dalsze studia do Paryża i Anglii. Wraca jeszcze w Alpy w latach następnych (1897 i 1898), są to jednak głównie wyjazdy rekreacyjne nie połączone z poważnymi wyprawami alpinistycznymi. Nie znaczy to oczywiście, że Marian Smoluchowski zrezygnował zupełnie z poważnych wyjść szczytowych. Kiedy w roku 1909 znalazł się w Alpach Berneńskich z bratem Tadeuszem oraz młodym taternikiem Zygmuntem Klemensiewiczem, zorganizował większą wędrówkę zdobywając Finsteraarhorn (4275 m), Jungfrau (4166 m), Lauterbrunner Breithorn (3779 m) i inne. Jest to już jednak ostatnia wyprawa alpejska wielkiego fizyka.

W roku 1899 rozpoczyna Marian Smoluchowski pracę na uniwersytecie we Lwowie. Zaangażowanie w pracę naukową oraz obowiązki administracyjne odsuwają go od uprawiania wspinaczek wysokogórskich. Okres lwowski wiąże się z jego zaangażowaniem w uprawianie narciarstwa wysokogórskiego. W artykule „Przez śnieżne wierchy Karpat" Zygmunt Klemensiewicz napisał *Pierwszymi narciarzami ... byli turyści górscy. Pierwszym takim turystą w naszym terenie był zapewne dr Tadeusz Smoluchowski, alpinista wychowany we Wiedniu, który w roku 1894 zamieszkał na Podkarpaciu, w Peczeniżynie, a potem w Wolance koło Borysławia.* Nic dziwnego, że w gronie zapalonych narciarzy znalazł się również mieszkający we Lwowie brat Tadeusza – Marian. Aktywność Mariana Smoluchowskiego jako narciarza wiąże się z powstaniem we Lwowie Karpackiego Towarzystwa Narciarzy. Rozpoczęła się ona od wejścia na Paraszkę w Beskidach Skolskich w 1906 r. Wśród licznych wypraw narciarskich Mariana Smoluchowskiego z lat 1906–12 znajduje się kilka pierwszych wejść zimowych, m.in. na Sewulę (w lutym 1909 r.), Farcaul i Michailecul w Karpatach Marmaroskich (w kwietniu 1911 r.), Piekun i Poleński.

W Karpackim Towarzystwie Narciarzy styka się Marian Smoluchowski z grupą młodych polskich taterników (Z. Klemensiewicz, R. Kordys, J. Maślanka) z Himalaja Club (ortografia zgodna z nazwą klubu). Te kontakty zachęcają Smoluchowskiego do ponownego przyjazdu w Tatry, które zwiedzał jako 13–letni chłopiec. Tak więc w latach 1910–16 Smoluchowski spędza w Tatrach wiele miesięcy latem i zimą. Sprzyja tym wyprawom objęcie w roku 1913 katedry na Uniwersytecie Jagiellońskim.

Działalność taternicka Mariana Smoluchowskiego jest dość rozległa, mimo że nie zawiera zbyt wielu pierwszych wejść. Kroniki notują jedynie wariant na północno-zachodniej grani Smoczego Szczytu pokonany w doborowym towarzystwie wybitnych taterników (J. Chmielowski, W. Kulczyński jun., M. Świerz, W. Zakrzewski, J. Żuławski) w 1911 r. oraz dwa warianty na zachodniej ścianie Małej Kończystej pokonane w roku 1914. O roli, jaką w środowisku taternickim odgrywał Marian Smoluchowski, bardziej niż lista jego pierwszych przejść świadczy fakt powierzenia mu w roku 1911 funkcji prezesa Sekcji Turystycznej Towarzystwa Tatrzańskiego (powstała w 1902 r. Sekcja była klubem zrzeszającym osoby uprawiające sportowo taternictwo). Świadczy o tym również admiracja, z jaką o Marianie Smoluchowskim, nazywając go *taternikiem nad taternikami*, wyrażał się Mieczysław Świerz, niewątpliwie najlepszy polski wspinacz pierwszej ćwierci XX w.

Patrząc z perspektywy lat na dokonania Mariana Smoluchowskiego jako wspinacza należy podkreślić jego znaczący udział w eksploracji Alp w latach 1891–94. Choć ze zdobytych szczytów i dokonanych pierwszych wejść tylko nieliczne weszły na trwałe do historii alpinizmu, to jednak stanowią one ważną część polskiego udziału w zdobywaniu Alp. Bracia Tadeusz i Marian Smoluchowscy mają wśród Polaków największą liczbę pierwszych wejść w Alpach. Należy także podkreślić, że Smoluchowscy uprawiali alpinizm

Most na Oporze w Karpatach Wschodnich – akwarela Smoluchowskiego (1906)

„Z tego co dały mi góry, trzy rzeczy uważam za najcenniejsze:
1. przyzwyczajenie do podejmowania trudnych zadań,
2. radość z przezwyciężania trudności,
3. zdolność do upiększenia codziennego życia przez najwznioślejszą poezję: poezję świata gór."

Marian Smoluchowski (6.11.1916)

M. Smoluchowski na górze Czarnohory.

sportowy, kiedy nikt w Polsce jeszcze o tym nie myślał. Niestety, oddalenie od ośrodków, gdzie w Polsce rozwijało się taternictwo, nie spowodowało przeniknięcia tych idei do krajowych wspinaczy. Kiedy Marian Smoluchowski ze swoim podejściem do wspinaczki wysokogórskiej pojawił się w Tatrach, podobnie do niego myślało już wielu taterników młodego pokolenia. Jednak ciągle mógł imponować znakomitą sprawnością fizyczną potrzebną przy uprawianiu trudnej wspinaczki. Jak wspominał Mieczysław Świerz: *Pamiętna była chwila, kiedy brać sekcyjna (Sekcji Turystycznej Towarzystwa Tatrzańskiego) gromadzko na werandzie Karpowicza (w Zakopanem) zebrana próbowała na listwie odrzwi podciągnąć się na jednej ręce. Próbujących było wielu, ale nikomu sztuka się nie udawała. Wówczas to siedzący dotąd w milczeniu i mało jeszcze znany profesor powstał i nie zważając na ironiczne podśmiechy młodych, lekko wydźwignął się trzy razy na ręku.* Taka sprawność jeszcze dziś budziłaby respekt młodych wspinaczy.

Hotel Orfila

W Paryżu na ulicy Assas w budynku z numerami 60–62 pod koniec XIX wieku znajdował się Hotel Orfila. Jeszcze do niedawna, tj. w roku 1995, znajdowały się nad wejściem do budynku dwie tablice o bardzo podobnej treści. Treść pierwszej:

„Ici habitait M. Smoluchowski 1895–1896"
(Tu mieszkał M. Smoluchowski 1895–1896).

Treść drugiej to identyczne stwierdzenie dotyczące Augusta Strindberga, tyle tylko, że z rokiem 1896. Tablica Smoluchowskiego pozostała. Tablicę Strindberga zamieniono na znacznie większą z obszernym fragmentem z jego książki „Inferno". *Nota bene* w ksiażce tej pojawia się niejaki Schmulachowsky. Musiał Smoluchowski być znaczącą postacią, skoro właściciele paryskiego hotelu upamiętnili jego pobyt.

B.C.

Zadania

Opracował *Paweł STRZELECKI*

M 829. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 4. Udowodnić, że w elipsę o półosiach różnej długości nie można wpisać n-kąta foremnego.
Rozwiązanie na str. 16

M 830. Znaleźć największą liczbę naturalną n, dla której $n^2 + 1997n$ jest kwadratem liczby naturalnej.
Rozwiązanie na str. 15

M 831. W dwa trójkąty, o bokach odpowiednio 17, 25, 26 i 17, 25, 28, wpisujemy koła. Które z wpisanych kół ma większy promień?
Rozwiązanie na str. 14

Zadanie **M 830** przygotował Łukasz Wiechecki.

Zadania *Mariana SMOLUCHOWSKIEGO* opracował *Piotr ZALEWSKI*

F 465. Wyprowadzić wzór na średnie odchylenie kwadratowe gęstości molekuł w gazie doskonałym $\sqrt{\overline{\delta^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\nu}}$ (oznaczenia jak na str. 5).
Rozwiązanie na str. 11

F 466. Przyjmując, że powietrze w warunkach normalnych jest gazem doskonałym i składa się z 78% azotu o cząsteczkowej masie molowej 28 g/mol, 21% tlenu (32 g/mol) i 1% argonu (40 g/mol), znaleźć prawdopodobieństwo fluktuacji gęstości tych gazów na poziomie większym niż 1% (dla objętości rozpatrywanych w przykładzie zilustrowanym tabelką na str. 6).
Rozwiązanie na str. 10

Nagroda Nobla

Biorąc pod uwagę naukowe osiągnięcia Mariana Smoluchowskiego jest rzeczą dziwną, iż jest tak mało znany w Polsce nawet wśród naukowców. Podstawową przyczyną wydaje się fakt, że Smoluchowski nie dostał Nagrody Nobla. Wiele wskazuje na to, że nie dostał, gdyż zmarł wcześnie, a nagrody tej nie przyznaje się pośmiertnie. W roku 1925 Nagrodę Nobla z chemii otrzymał za prace w dziedzinie koloidów Richard Zsigmondy, profesor uniwersytetu w Grazu. Jego prace miały charakter eksperymentalny i pozostawały w ścisłym związku z pracami teoretycznymi Smoluchowskiego. Przypuszczalnie właśnie wraz z Zsigmondym dostałby Marian Smoluchowski Nagrodę Nobla. Ale na tym nie koniec. W następnym roku, czyli 1926, aż dwie Nagrody Nobla były związane pośrednio z naszym wielkim rodakiem. Oto bowiem z fizyki nagrodę otrzymuje Francuz Jean Perrin za prace eksperymentalne nad ruchami Browna, potwierdzające słuszność molekularnej teorii Einsteina–Smoluchowskiego, z chemii zaś nagroda przypada Teodorowi Svedbergowi z Uppsali, którego prace eksperymentalne dotyczące zawiesin przeplatały się w czasie z odnoszącymi się do nich teoretycznymi rozważaniami Smoluchowskiego.

B.C.

Efekt św. Mateusza

W 1985 roku wydawnictwo Harper and Row wydało autobiografię Marka Kaca pod tytułem „Zagadki losu". Mark Kac, wybitny matematyk, wyemigrował w 1938 roku z Polski do Stanów Zjednoczonych. Był niezwykle barwną postacią, autorem i bohaterem niezliczonej liczby anegdot. Drugi rozdział swojej książki Kac poświęcił Uniwersytetowi we Lwowie. Według słów autora uniwersytet ten stał się w latach 1905–1913 za sprawą jednego człowieka, Mariana Smoluchowskiego, głównym centrum badań fizyki teoretycznej w Europie. W tym kontekście Mark Kac przedstawia krótką historię ruchów Browna i wspomina o dwóch fundamentalnych pracach, w których została rozwiązana zagadka tych tajemniczych ruchów.

Niedawno wydano tę książkę w języku polskim:
Mark Kac, „Zagadki losu",
Polska Fundacja Upowszechniania Nauki, Warszawa 1997,
tłumaczenie: Katarzyna i Henryk Lipszycowie.

Dalej pisze:
„Autorem jednej z tych historycznych prac jest Marian Smoluchowski. Drugą pracę, która ukazała się nieco wcześniej i prezentowała zupełnie inne ujęcie problemu, napisał Albert Einstein. Smoluchowski miał ogromnego pecha, że musiał dzielić swoje pierwsze wielkie odkrycie, jak również szereg innych odkryć – w tym wytłumaczenie błękitnej barwy nieba – z uczonym tej rangi co Einstein. Trudno chyba o bardziej jaskrawy przykład *efektu św. Mateusza*; ten nadzwyczaj trafny zwrot wymyślił Robert Merton na określenie aż nazbyt powszechnego zjawiska, gdy zasługa z tytułu odkrycia dokonanego wspólnie lub niezależnie przez dwóch odkrywców o nierównej sławie niezmiennie przypada temu sławniejszemu:

Robert Merton, „The Matthew Effect in Science", Science 159 (styczeń 1968 r.)

„Bo kto ma, temu będzie dodane, i nadmiar mieć będzie; kto zaś nie ma, temu zabiorą również to, co ma" (Ewangelia według św. Mateusza 13:12).

Za życia Smoluchowski nie cierpiał wskutek *efektu św. Mateusza.* Był powszechnie uznany za jednego z czołowych fizyków teoretyków swoich czasów i dostąpił wielu zaszczytów, na które w pełni zasłużył. Ale z upływem lat *efekt św. Mateusza* zebrał swoje żniwo. Niewielu dziś uzmysławia sobie, jak ważną rolę odegrał Marian Smoluchowski w powołaniu atomów do życia, a jeszcze mniej – że miało to miejsce we Lwowie".

B.C.

Rozwiązanie zadania F 466.
Korzystając z rozwiązania poprzedniego zadania oraz wiedząc, że dla $n \to \infty$ rozkład Poissona przechodzi na rozkład Gaussa (można to sprawdzić korzystając najpierw ze wzoru Stirlinga, a następnie z rozwinięcia logarytmu w szereg z dokładnością do dwóch wyrazów), mamy

$$P(n;\nu) \underset{n\to\infty}{\simeq} G(n;\nu,\sigma=\nu^{\frac{1}{2}}) \underset{n:=\delta}{=} G(\delta;0,\sigma=\nu^{-\frac{1}{2}}).$$

Ostatnia równość została uzyskana przez zamianę zmiennych. Szukane prawdopodobieństwo wynosi

$$\Pi(\delta,\nu) = 2\int_{-\infty}^{\delta/\sqrt{\nu}} G(x;0,1).$$

W naszym przypadku $\delta = 0{,}01$, pozostaje więc tylko obliczenie ν. W tym celu obliczamy liczbę molekuł gazu w najmniejszej z rozpatrywanych objętości

$$\nu_0 = \frac{\frac{4}{3}\pi 10^{-15}\ \mathrm{cm}^3 \cdot 6{,}02\cdot 10^{23}/\mathrm{mol}}{22{,}4\cdot 10^3\mathrm{cm}^3/\mathrm{mol}} \approx 9/8\cdot 10^5.$$

Pamiętając o przeliczeniu składu wagowego powietrza na skład objętościowy otrzymujemy następujące wartości prawdopodobieństw uszeregowane względem wartości

Ar,	$r = 100$ mm,	$\nu = 900$,	$\Pi = 0{,}76$
Ar,	$r = 250$ mm,	$\nu = 14$ k,	$\Pi = 0{,}24$
O_2,	$r = 100$ mm,	$\nu = 23$ k,	$\Pi = 0{,}13$
Ar,	$r = 300$ mm,	$\nu = 24$ k,	$\Pi = 0{,}12$
N_2,	$r = 100$ mm,	$\nu = 89$ k,	$\Pi = 3$ m
Ar,	$r = 500$ mm,	$\nu = 0{,}1$ M,	$\Pi = 800\,\mu$
O_2,	$r = 250$ mm,	$\nu = 0{,}4$ M,	$\Pi = 3$ n
O_2,	$r = 300$ mm,	$\nu = 0{,}6$ M,	$\Pi = 5$ f

. . . .

Kącik olimpijski (22)

Pierwiastki łańcuchowe

Niech $x > 1$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Rozważmy ciągi (a_n) i (b_n) określone rekurencyjnie wzorami

$$b_1 = x, \qquad a_n = [b_n^2 - b_n], \qquad b_{n+1} = b_n^2 - a_n \qquad \text{dla } n \in \mathbf{N}$$

(symbol $[l]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od l). Zauważmy najpierw, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są dodatnie. Istotnie, mamy

$$b_{n+1} = b_n^2 - a_n = b_n^2 - [b_n^2 - b_n] \geq b_n^2 - (b_n^2 - b_n) = b_n\,,$$

a stąd wynika, że $b_n \geq b_1 > 1$. Skoro tak, to mamy także $b_n^2 \geq b_n$, a więc a_n są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Rozważmy teraz ciąg (x_n) określony wzorem

$$x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}} \qquad \text{dla } n \in \mathbf{N}\,.$$

Dla n, k naturalnych, $1 \leq k \leq n$, oznaczmy $x_{k,n} = \sqrt{a_k + \sqrt{a_{k+1} + \cdots + \sqrt{a_n}}}$. Wykażemy, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$, przy ustalonym $n \in \mathbf{N}$, zachodzi równość

$$b_k - x_{k,n} = \frac{b_{n+1}}{\prod\limits_{i=k}^{n}(b_i + x_{i,n})}\,. \tag{1}$$

Dla $k = n$ istotnie tak jest, bowiem $b_n - \sqrt{a_n} = (b_n^2 - a_n)/(b_n + \sqrt{a_n})$ i $x_{n,n} = \sqrt{a_n}$, a zatem z definicji b_{n+1} mamy $b_n - x_{n,n} = b_{n+1}/(b_n + x_{n,n})$.

Załóżmy prawdziwość równości (1) dla pewnego k. Dla $k-1$ mamy wówczas, na mocy założenia indukcyjnego,

$$b_{k-1} - x_{k-1,n} = \frac{b_{k-1}^2 - x_{k-1,n}^2}{b_{k-1} + x_{k-1,n}} = \frac{(b_k + a_{k-1}) - \left(a_{k-1} + \sqrt{a_k + \cdots + \sqrt{a_n}}\right)}{b_{k-1} + x_{k-1,n}} =$$

$$= \frac{b_k - x_{k,n}}{b_{k-1} + x_{k-1,n}} = \frac{b_{n+1}}{(b_{k-1} + x_{k-1,n})\prod\limits_{i=k}^{n}(b_i + x_{i,n})} = \frac{b_{n+1}}{\prod\limits_{i=k-1}^{n}(b_i + x_{i,n})}\,,$$

co kończy dowód indukcyjny (proszę zauważyć, że była to indukcja do tyłu). W szczególności, dla $k = 1$ równość (1) przyjmuje postać

$$x - x_n = \frac{b_{n+1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}(b_i + x_{i,n})}\,. \tag{2}$$

Ponieważ $b_i \geq b_1 = x$, a liczby $x_{i,n}$ są nieujemne, więc mianownik ułamka po prawej stronie można oszacować z dołu przez x^n. Z drugiej strony, $b_{n+1} = b_n^2 - [b_n^2 - b_n] < b_n^2 - (b_n^2 - b_n - 1) = b_n + 1$, a stąd przez indukcję dostajemy $b_{n+1} < b_1 + n = x + n$. Ostatecznie, z równości (2) otrzymujemy

$$|x - x_n| \leq \frac{x+n}{x^n}\,.$$

Wobec nierówności $x > 1$ mamy $\lim\limits_{n\to\infty} (x+n)/x^n = 0$. Zatem ciąg (x_n) jest zbieżny do x. Udowodniliśmy w ten sposób

Twierdzenie.
Dla każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ istnieje taki ciąg (a_n) liczb całkowitych nieujemnych, że ciąg $x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$ jest zbieżny do x.

Przykłady.
(a) Dla $x = 3$ mamy $b_1 = 3 = b_2 = b_3 = \ldots$ oraz $a_1 = [3^2 - 3] = 6 = a_2 = a_3 = \ldots$ Ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$, mamy

$$n = \sqrt{n^2 - n + \sqrt{n^2 - n + \sqrt{n^2 - n + \cdots}}}\,.$$

(b) Gdy $x = (1+\sqrt{5})/2$ jest współczynnikiem złotej proporcji, wszystkie wyrazy ciągu a_n są równe 1.

Witold BEDNAREK

Errata

Treść zadania **6.** z zawodów stopnia pierwszego XLIX Olimpiady Matematycznej sformułowano błędnie. Prawidłowe sformułowanie jest następujące:

6. W trójkącie ABC, w którym $AB > AC$, punkt D jest środkiem boku BC, punkt E leży na boku AC. Punkty P i Q są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów B i E na prostą AD. Udowodnić, że $BE = AE + AC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AD = PQ$.

Za utrudnienia związane z tym błędem serdecznie przepraszamy. Termin nadsyłania rozwiązań zadania **6.** przedłużamy do dnia
10 grudnia 1997 r.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

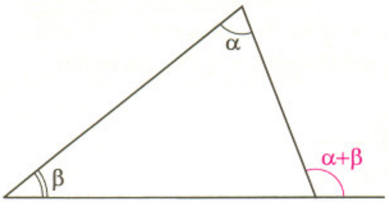
Rozwiązanie zadania F 465.
Przyjmując, że prawdopodobieństwo znalezienia dowolnej cząsteczki w objętości v, będącej częścią dużo większej objętości V, jest proporcjonalne do v, otrzymujemy, że liczba cząsteczek w objętości v podlega statystyce Poissona

$$P(n;\nu) = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!}\,,$$

gdzie ν jest średnią liczbą cząsteczek w objętości v. Wiedząc, że wariancja rozkładu Poissona $P(n;\nu)$ wynosi ν, dostajemy

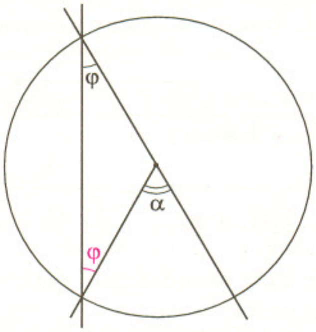
$$\overline{\delta^2} = \overline{\left(\frac{n-\nu}{\nu}\right)^2} = \frac{\overline{(n-\nu)^2}}{\nu^2} = \frac{1}{\nu}\,.$$

Kąty i okrąg

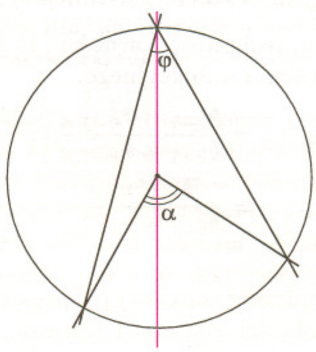


Rys. 1

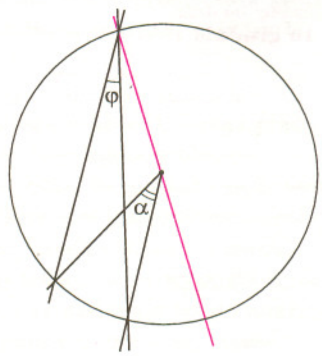
Każdy zna twierdzenie o kącie zewnętrznym trójkąta: jest on równy sumie kątów wewnętrznych do niego nie przyległych (rys. 1), co bierze się z faktu, że suma kątów przyległych jest równa sumie kątów trójkąta. Z twierdzenia tego wynika nietrudno twierdzenie o kącie wpisanym i środkowym:
kąt wpisany jest równy $\frac{1}{2}$ kąta środkowego opartego na tym samym łuku.
Wynika to z faktu, że w sytuacji z rysunku 2 mamy $2\varphi = \alpha$, każda zaś para kątów, o jakich mówi twierdzenie, daje się przedstawić jako suma (rys. 3) bądź jako różnica (rys. 4) sytuacji z rysunku 2.



Rys. 2

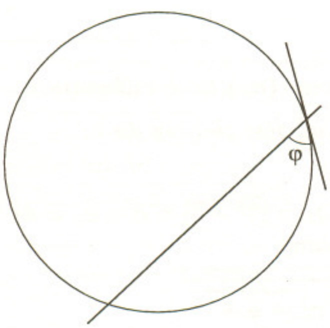


Rys. 3

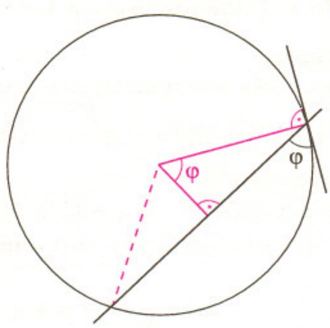


Rys. 4

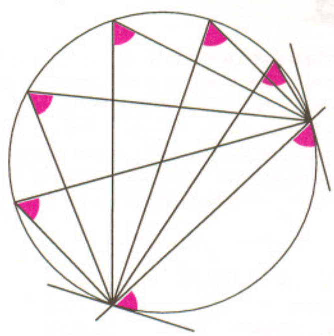
Mniej popularne jest pojęcie *kąta dopisanego,* czyli kąta między cięciwą okręgu i styczną do tego okręgu w jednym z końców tej cięciwy (rys. 5). Stwierdzamy bez trudu, że
kąt dopisany jest równy $\frac{1}{2}$ kąta środkowego opartego na tym samym łuku,
albowiem (rys. 6) wynika to z równości kątów o ramionach odpowiednio prostopadłych. Zatem
kąt wpisany oparty na danym łuku (jest ich wiele) *jest równy kątowi dopisanemu opartemu na tym samym łuku* (są takie dwa, rys. 7).



Rys. 5



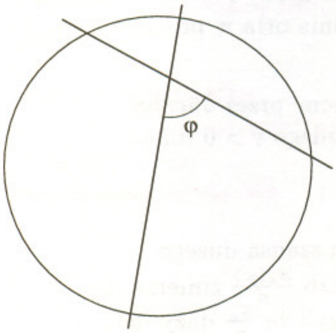
Rys. 6



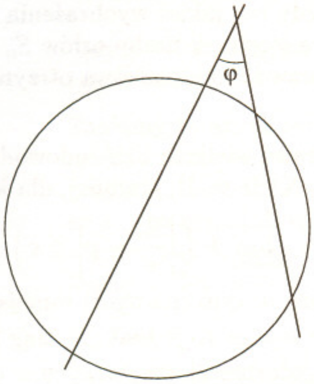
Rys. 7

A co się dzieje, gdy mamy do czynienia z okręgiem i kątem, który nie jest ani środkowy, ani wpisany, ani dopisany?

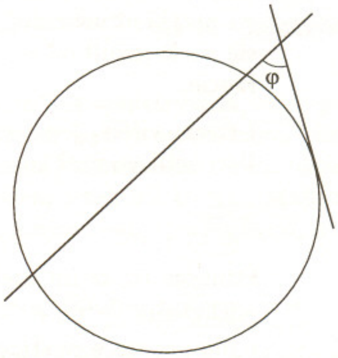
Oczywiście, interesować nas będą tylko sytuacje, gdy proste zawierające ramiona kąta będą siecznymi bądź stycznymi do okręgu. Sytuacje takie są cztery, co przedstawiają rysunki 8–11.



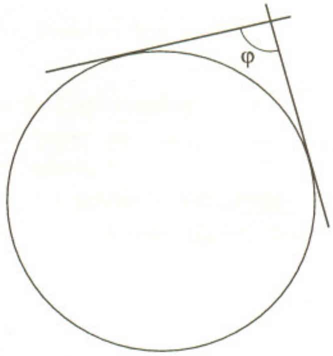
Rys. 8



Rys. 9

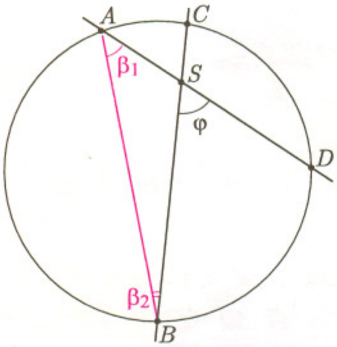


Rys. 10

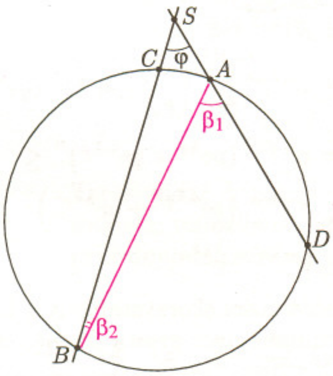


Rys. 11

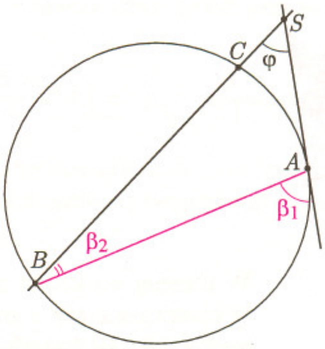
I niewiele trzeba do nich dorysować, by zauważyć, że w pierwszym przypadku rozpatrywany kąt φ (rys. 12) jest równy sumie kątów wpisanych β_1 i β_2 (jako kąt zewnętrzny trójkąta ABS), a więc równy połowie sumy kątów środkowych opartych odpowiednio na łukach BD i AC. W pozostałych trzech przypadkach za każdym razem otrzymujemy $\beta_1 = \varphi + \beta_2$ (znów jako kąt zewnętrzny trójkąta ABS, rys. 13–15), a więc rozpatrywany kąt φ jest równy różnicy kątów wpisanych, względnie dopisanych, β_1 i β_2, a tym samym równy połowie różnicy kątów środkowych opartych odpowiednio w drugim przypadku na łukach BD i AC, w trzecim na łukach AB i AC, w ostatnim wreszcie na obu łukach AB zawartych we wnętrzu rozpatrywanego kąta.



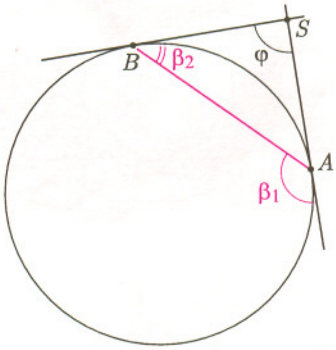
Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15

Możemy teraz uwolnić się od oznaczeń i sformułować ogólne twierdzenie dotyczące kątów i okręgu.

Twierdzenie

Kąt, którego ramiona zawarte są w siecznych lub stycznych do okręgu, jest – w przypadku, gdy wierzchołek kąta leży wewnątrz tego okręgu (lub na nim) – równy połowie sumy kątów środkowych opartych na łukach, które wycinają z tego okręgu proste zawierające ramiona kąta, lub – w przypadku, gdy wierzchołek kąta leży na zewnątrz tego okręgu – połowie ich różnicy.

Twierdzenie to zawiera jako szczególne przypadki zarówno „szkolne" twierdzenie o kącie wpisanym, jak i mniej znane twierdzenie o kącie dopisanym. A dowód ma – jak było widać – łatwy. Nic więc nie tłumaczy jego nieobecności w szkole (chyba że nie znają go piszący podręczniki, ale to przecież tak mało prawdopodobne).

Małą Deltę opracował Marek KORDOS

Rzuć monetą...

Jacek JAKUBOWSKI, Rafał SZTENCEL

Doświadczenie, polegające na wielokrotnym rzucaniu monetą (symetryczną lub nie) ma tę zaletę, że każdy ma jakieś wyobrażenia dotyczące wyników. Nietrudno na przykład uwierzyć, że stosunek liczby orłów S_n do liczby rzutów n nie będzie się wiele różnił od p – prawdopodobieństwa otrzymania orła w pojedynczym rzucie.

I rzeczywiście, jest to prawo wielkich liczb udowodnione przez Jacoba Bernoulliego pod koniec XVII w. Dokładniej, dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1\,.$$

Oznacza to, że im większe n, tym (na ogół) mniejsza szansa dużego odchylenia $\frac{S_n}{n}$ od p. Nie znaczy to jednak, że ciąg liczb $\frac{S_n(\omega)}{n}$ zmierza do p dla prawie wszystkich zdarzeń elementarnych ω (czyli że $\frac{S_n}{n}$ dąży do p z prawdopodobieństwem 1). Gwarantuje to dopiero poniższe – mocniejsze – twierdzenie: dla każdego $\varepsilon > 0$ mamy

$$\lim_{m\to\infty} P\left(p-\varepsilon \le \frac{S_n}{n} \le p+\varepsilon \quad \text{dla wszystkich } n \ge m\right) = 1\,.$$

Dla dowodu oszacujemy prawdopodobieństwo zdarzenia $A_n = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\}$. Niech $q = 1-p$. Zdarzenie A_n przedstawimy w postaci sumy zdarzeń $\{S_n = k\}$ dla odpowiednio dobranych k. Pamiętając, że $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, otrzymamy wtedy

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{S_n}{n} \ge p+\varepsilon\right) &\le \sum_{k \ge n(p+\varepsilon)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \le \\
&\le \sum_{k \ge n(p+\varepsilon)} \mathrm{e}^{-\lambda((p+\varepsilon)n-k)} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \le \\
&\le \mathrm{e}^{-\lambda n\varepsilon} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(p\mathrm{e}^{\lambda q}\right)^k \left(q\mathrm{e}^{-\lambda p}\right)^{n-k} = \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda n\varepsilon} \left(p\mathrm{e}^{\lambda q} + q\mathrm{e}^{-\lambda p}\right)^n \le \\
&\le \mathrm{e}^{-\lambda n\varepsilon} \left(p\mathrm{e}^{\lambda^2 q^2} + q\mathrm{e}^{\lambda^2 p^2}\right)^n \le \mathrm{e}^{-\lambda n\varepsilon} \left(p\mathrm{e}^{\lambda^2} + q\mathrm{e}^{\lambda^2}\right)^n \le \\
&\le \mathrm{e}^{-\lambda n\varepsilon} \cdot \mathrm{e}^{\lambda^2 n}.
\end{aligned}$$

W trzeciej od końca nierówności skorzystaliśmy z faktu, że $\mathrm{e}^x \le 1 + x \le \mathrm{e}^{x^2} + x$. Wybieramy teraz λ minimalizujące prawą stronę, czyli $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}$ i otrzymujemy nierówność Bernsteina:

$$P\left(\frac{S_n}{n} \ge p+\varepsilon\right) \le \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}} \quad \text{dla } \varepsilon > 0\,.$$

Analogicznie $P\left(\frac{S_n}{n} \le p-\varepsilon\right) \le \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}}$.

Ponieważ dopełnienie iloczynu zbiorów jest sumą dopełnień (wzory de Morgana), więc

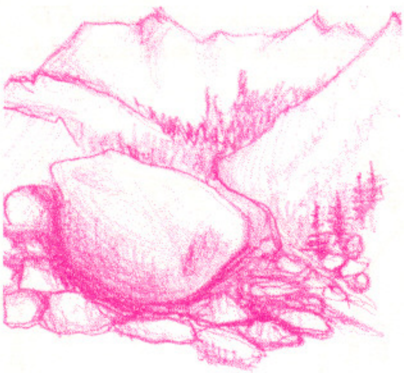
$$P\left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^c\right)$$

(A^c oznacza tu zdarzenie przeciwne do A). Ponadto,

$$P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^c\right) \le \sum_{n=m}^{\infty} P\left(A_n^c\right) \le 2\sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{4}} \to 0, \text{ gdy } m \to \infty\,.$$

Stąd otrzymujemy żądany wynik.

Z powyższych rozważań wynika, że zmienna losowa $\frac{S_n - np}{n}$ jest dla dużych n silnie skupiona wokół zera. A jeśli będziemy rozpatrywać $\frac{S_n - np}{\sqrt{n}}$? O zachowaniu się tego wyrażenia mówi twierdzenie de Moivre'a–Laplace'a (de Moivre, 1733;



Rozwiązanie zadania M 831.
Jeśli S oznacza pole trójkąta, $2p$ – jego obwód, r – promień okręgu wpisanego, zaś a, b i c – długości boków, to wówczas

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(wzór Herona), a ponadto $S = rp$. Z tych wzorów wynika, że

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\,.$$

Podstawiając wartości podane w treści zadania przekonujemy się łatwo, że dla każdego z trójkątów promień koła wpisanego jest równy 6.

Rozwiązanie zadania M 830.
Skoro $n^2 + 1997n = (n+k)^2$ dla pewnego naturalnego k, to $1997n = 2nk + k^2$. Stąd $k \le 998$, a wtedy
$$1997n \le 2 \cdot 998n + 998^2,$$
czyli $n \le 998^2$.
Z drugiej strony
$$(998^2)^2 + 1997 \cdot (998^2) = $$
$$= (998^2)^2 + 2 \cdot 998 \cdot (998^2) + 998^2 =$$
$$= (998^2 + 998)^2.$$
Szukaną liczbą jest więc 998.

Laplace udowodnił to twierdzenie później, nie powołując się na poprzednika):
$$P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < b\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,,$$
gdy $n \to \infty$. Innymi słowy, $\frac{S_n - np}{\sqrt{n}}$ ma asymptotycznie rozkład normalny (gaussowski).

Załóżmy teraz, że moneta jest symetryczna, czyli $p = \frac{1}{2}$. Czy różnica między liczbą orłów i reszek będzie ograniczona? Posługując się, na przykład, twierdzeniem de Moivre'a–Laplace'a można udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 tak nie będzie. Mało tego, wartość bezwzględna różnicy jest w pewnym sensie rzędu $\sqrt{n \log\log n}$, a dokładniej, jeśli R_n oznacza liczbę reszek, to
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - R_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1$$
z prawdopodobieństwem 1. Oczywiście ze względu na symetrię
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - R_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = -1\,.$$
Jest to tzw. prawo iterowanego logarytmu (Chinczyn, 1924).

Wobec tego $S_n - R_n$ będzie powracać do zera nieskończenie wiele razy z prawdopodobieństwem 1. Jednak średni czas oczekiwania na powrót do zera jest nieskończony.

I na zakończenie dość paradoksalny wynik: jeśli rzucamy symetryczną monetą n razy i zapisujemy kolejne wartości $S_k - R_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, czyli przewagę orłów nad reszkami, to okazuje się, że jest mała szansa na to, by dodatnie i ujemne różnice pojawiły się z grubsza tyle samo razy. Przeciwnie, typowy wynik to taki, że orły (lub reszki) prowadzą przez większość czasu. Można wyliczyć asymptotyczny rozkład dla czasu prowadzenia (prawo arcusa sinusa, P. Lévy, 1939): niech T_n oznacza czas, przez jaki prowadzi orzeł w serii n rzutów. Wtedy
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{T_n}{n} < t\right) = \int_0^t \frac{1}{\pi\sqrt{t(1-t)}}\mathrm{d}t = \frac{2\arcsin\sqrt{t}}{\pi}\,.$$
Teraz widać drugą niewątpliwą zaletę doświadczenia polegającego na rzutach monetą: umożliwia ono dokonanie przeglądu podstawowych twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa.

Grudzień

Przez cały grudzień zbliżamy się jeszcze do Słońca, co nie przeszkadza, że robi się coraz zimniej. Bowiem o warunkach klimatycznych decyduje nie odległość Ziemi od Słońca, zmniejszająca się zresztą w bardzo małych granicach, lecz nasłonecznienie, a to określone jest przez porę roku, czyli położenie Słońca na ekliptyce (por. *Patrz w niebo,* str. 17). Na południowej półkuli Ziemi jest „odwrotnie", tzn. kończy się wiosna i zbliża się lato. Święta Bożego Narodzenia są jednak na całym świecie jednocześnie, dlatego np. Australijczycy będą – jak zwykle – chodzić z małymi choinkami na plażę. I tylko Święty Mikołaj będzie miał kłopoty z podróżowaniem na saniach.

Zima zaczyna się (u nas) 21 XII o godz. 21:07, Słońce wstępuje wtedy w znak Koziorożca. Dni będą się już wydłużać, ale mrozy zapewne jeszcze przed nami, gdyż Słońce musi wznieść się zdecydowanie wyżej, by móc ogrzać wyziębiony grunt. W Koziorożcu lub w jego pobliżu znajdują się w grudniu trzy planety: Wenus, Mars i Jowisz, dość wcześnie więc zachodzą po zachodzie Słońca, przy czym Wenus w połowie miesiąca osiąga maksimum jasności. Saturn w Rybach widoczny jest w pierwszej połowie nocy. Pełnia Księżyca wypada 14 XII. Księżyc bardzo zbliży się do Saturna 9 XII i do Aldebarana 13 XII, ale oba te zbliżenia dla nas wypadają w ciągu dnia.

T.K.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1998

Zadania z matematyki nr 351, 352

Redaguje Marcin E. KUCZMA

351. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n, dla której istnieją czteroelementowe zbiory $A_1, \ldots, A_n$ o następującej własności: każdy zbiór A_i ma z każdym innym zbiorem A_j dokładnie jeden element wspólny, ale nie istnieje wspólny element wszystkich zbiorów A_i.

352. Funkcja różniczkowalna $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełnia wraz z pewną funkcją $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ równanie $f(x) = g(f'(x))$ dla $x \in \mathbf{R}$. Dowieść, że funkcja f jest wypukła lub wklęsła.

Zadanie **352** (nawiązujące do zadania **308** z numeru 10/1995) zaproponował pan Andrzej Daniluk z Krakowa.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 339 (WT=1,53) i 340 (WT=2,29) z numeru 4/1997

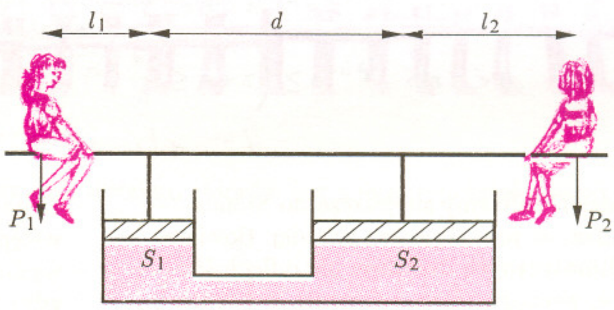
Marcin Kasperski	– Warszawa	45,13
Witold Bednorz	– Tychy	38,45
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	38,33
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	36,81
Maciej Mostowski	– Warszawa	36,72
Konrad Patkowski	– Gdańsk	36,27

Pan Kasperski po raz drugi przekracza próg czterdziestu czterech punktów.

Zadania z fizyki nr 248, 249

Redaguje Jerzy B. BROJAN

248. Kasia i Basia siedzą na huśtawce opartej na dwóch podpórkach odległych o d i połączonych z tłokami o powierzchniach S_1 i S_2 wywierającymi parcie na ciecz (rys.); odległości dziewczynek od punktów podparcia wynoszą odpowiednio l_1 i l_2. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry oraz ciężary dziewczynek P_1 i P_2, aby huśtawka pozostawała w równowadze? Ciężar huśtawki i tłoków pominąć.



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 239 (WT=3,52) i 240 (WT=1,60) z numeru 5/1997

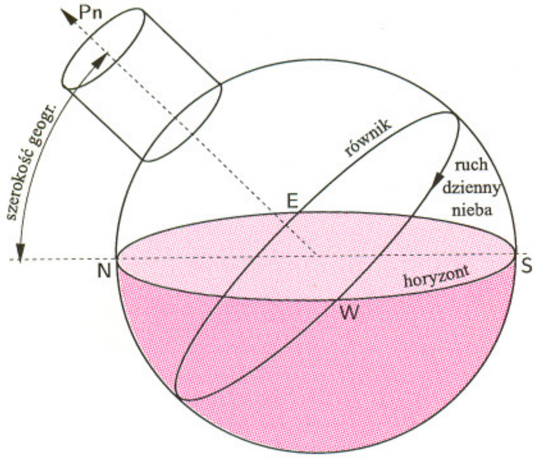
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	37,56
Jarosław Łazuka	– Warszawa	21,27
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	16,27
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	14,85

249. „Czarna skrzynka” zawiera układ oporników i cztery wyprowadzenia, przy czym do dwóch spośród nich przykładamy ustalone napięcie U ze źródła zasilania, a do pozostałych dwóch dołączamy woltomierz o bardzo wielkim oporze własnym i mierzymy napięcie U'. Istnieje sześć możliwych sposobów przyłączenia zasilania i woltomierza do „czarnej skrzynki”, a zatem sześć możliwych wartości U'. Zaprojektować taki możliwie najprostszy schemat „czarnej skrzynki”, aby wśród nich znalazły się $U' = 0{,}75U$, $U' = 0{,}5U$ i $U' = 0{,}25U$.

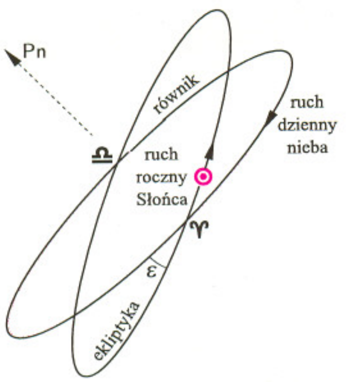
Pytanie poza konkursem: czy ktoś z Czytelników zaprojektuje taki „uniwersalny dzielnik napięcia”, że otrzymuje się $U' = (n/7)U$, $\quad n = 1, 2, \ldots, 6$?

Rozwiązanie zadania M 829.
Gdyby teza zadania była falszywa, to okrąg opisany na n-kącie foremnym przecinałby elipsę przynajmniej w pięciu punktach, a to nie jest możliwe.

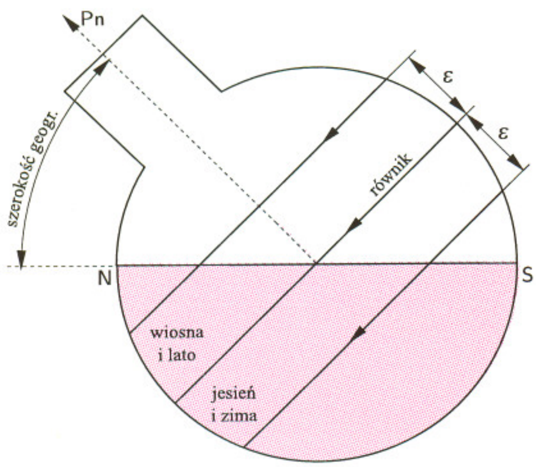
Patrz w niebo



Rys. 1. Kolba z wodą jako model sfery niebieskiej. W każdej, różnej od 90°, szerokości geograficznej zawsze połowa równika jest nad i połowa pod horyzontem.



Rys. 2. Równik niebieski i ekliptyka są „sztywno” związane i tworzą zawsze kąt ε.



Rys. 3. Tory dzienne Słońca w różnych porach roku – kolbę widzimy tu dokładnie z boku od strony zachodniej. Równik jest dziennym torem Słońca około 21 III i 21 IX, czyli w równonocach. Wiosną i latem Słońce opisuje dłuższy łuk nad horyzontem (w dzień), krótszy pod horyzontem (nocą), jesienią i zimą odwrotnie.

Zbliża się najkrótszy dzień roku, trochę więc dydaktyki z tej okazji. Każdy chyba słyszał głupi dowcip, że dni w zimie są krótkie, bo przecież wszystko z zimna się kurczy. A tak poważniej, to zapewne każdy też zauważył, że w zimie Słońce widać niżej niż latem. Widocznie wysokość Słońca (powiedzmy: maksymalna w ciągu dnia) i długość dnia są jakoś powiązane.

Łatwo zrobić model do demonstracji tego zjawiska. Jest nim kulista kolba do połowy wypełniona wodą. Zaznaczmy na niej czarnym pisakiem „równik”, czyli poziom wody, gdy kolba normalnie pionowo stoi na stole. Jeśli teraz pochylimy ją tak, by jej szyjka tworzyła z płaszczyzną stołu kąt 52°, to dostaniemy model nieba widzianego np. z Warszawy. Szyjka kolby to oś świata, wokół której niebo się obraca, czarny „równik” to równik niebieski, a poziom wody to płaszczyzna horyzontu. Postawiwszy gdziekolwiek na kolbie kropkę, tzn. gwiazdę, można – obracając kolbę wokół jej osi – śledzić, gdzie gwiazda wschodzi, czy w ogóle wschodzi, przez jaką część doby ją widać nad horyzontem, a przez jaką nie widać itd.

A gdzie tu może być Słońce? Czy w dowolnym miejscu? Otóż nie. Ziemia obiega Słońce – lub pozornie Słońce Ziemię – w ustalonej płaszczyźnie, która przecina sferę niebieską wzdłuż koła zwanego ekliptyką. Płaszczyzna ekliptyki tworzy z płaszczyzną równika określony przez przyrodę kąt $\varepsilon = 23°27'$. Jest to ten sam kąt, o jaki oś ziemska jest odchylona od kierunku prostopadłego do płaszczyzny ekliptyki, o czym przypominają nam pochylone osie globusów. Odchyliwszy więc szyjkę kolby o ε od pionu zaznaczamy na kolbie poziom wody (np. na czerwono) i tak dostajemy ekliptykę, czyli roczny tor Słońca na naszym sztucznym niebie.

Jeden obrót kolby wokół jej osi to jedna doba. W ciągu doby Słońce przesuwa się po ekliptyce o około 1° w kierunku przeciwnym niż ruch dzienny nieba. Z dnia na dzień zmienia się więc odległość Słońca od równika i wypadkowy ruch Słońca wygląda jak nitka, tak opasująca kolbę w jej strefie równikowej, by na rok przypadało 365 zwojów. To „uzwojenie” zawiera się między równoleżnikami odległymi od równika w obie strony o ε. Teraz w grudniu Słońce zbliża się do punktu ekliptyki najbardziej na południe oddalonego od równika, czyli na modelu krąży po zwojach nitki najbliższych dna kolby. Ten punkt to tzw. punkt przesilenia zimowego lub punkt Koziorożca. Od 21 XII Słońce zacznie znowu powoli zmierzać ku równikowi, przetnie go w punkcie Barana (wtedy zacznie się wiosna, a dzień i noc około 21 III będą trwać w przybliżeniu tyle samo), potem przesunie się ku punktowi Raka, tzn. przesilenia letniego itd., jak to się dzieje od kilku miliardów lat.

A jak przebiegają dni i noce w różnych porach roku na innych planetach? Zmazujemy z kolby czerwoną ekliptykę i rysujemy ją np. dla $\varepsilon = 0$; odpowiada to w przybliżeniu sytuacji na Jowiszu. Pór roku tam nie ma i stale jest równonoc. A gdy narysujemy ją przechodzącą przez szyjkę i dno kolby, czyli dla $\varepsilon = 90°$, będzie to odpowiadać sytuacji na Uranie. Tam Słońce od czasu do czasu oświetla prostopadle nawet bieguny. Oczywiście, tempo przesuwania się Słońca po innych „ekliptykach” jest inne, ale jakościowo wszystko dzieje się tak samo.

Tomasz KWAST