SPIS TREŚCI

NUMERU 11(282)

W następnym numerze:

Marian Smoluchowski

Okładki wykonali *Krzysztof Biesaga i Anna Ludwicka.* Ilustracje: *Krzysztof Biesaga.*

Wybór artykułów z *Delty* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący
Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Tomasz Hofmokl
Andrzej Hrynkiewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda
Feliks Przytycki
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nacz.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nacz.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Anna Wojtyra
Piotr Zalewski

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65.
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1998 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1998 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1998 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. $8^{00} - 14^{00}$. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.

Twierdzenie chińskie o resztach, czyli ciężarówką po lesie

Jarosław WRÓBLEWSKI

$A|B$ oznacza, że A dzieli B. W związku z tym napis $q_k|r - r_k$ należy czytać: „q_k jest dzielnikiem liczby $(r - r_k)$".

Twierdzenie chińskie o resztach mówi, że dla dowolnych liczb całkowitych $r_1, r_2, ..., r_n$ i naturalnych $q_1, q_2, ..., q_n$ (zero nie jest u nas liczbą naturalną) znajdzie się takie r, że $q_1|r - r_1$, $q_2|r - r_2, \ldots, q_n|r - r_n$, o ile dla dowolnych $1 \leq i < j \leq n$ zachodzi podzielność $NWD(q_i, q_j)|r_i - r_j$. Ostatni warunek jest spełniony na przykład wtedy, gdy liczby $q_1, q_2, \ldots, q_n$ są parami względnie pierwsze, gdyż wówczas $NWD(q_i, q_j) = 1$ dla $i \neq j$. Innymi słowy, możemy zawsze znaleźć liczbę r, która spełnia ustalone przez nas postulaty typu: „niech r dzieli się przez q_i z resztą r_i", jeśli tylko między tymi postulatami nie ma oczywistej sprzeczności. Nie sposób bowiem żądać, aby liczba dzieliła się przez 6 z resztą 2 i jednocześnie przez 10 z resztą 3, bo to oznaczałoby, że na pytanie, czy liczba ma być parzysta, odpowiadamy, że jesteśmy za, a nawet przeciw.

Z twierdzenia tego wynika na przykład, że nawet bardzo długą (byle wąską) ciężarówką można w wysokopiennym lesie zakręcić o 90° – cierpliwy Czytelnik zobaczy, dlaczego.

ZADANIE **1**: Dowieść, że dla dowolnych liczb naturalnych parami względnie pierwszych p, q, r równanie $x^p + y^q = z^r$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x, y, z.

Rozwiązanie:
Wyjdziemy od równości $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ i postaramy się dopasować ją do danego równania. W tym celu zażyczymy sobie, aby $p|n$, $q|n$, $r|n+1$. Ponieważ p, q, r są parami względnie pierwsze, znajdzie się takie n, które jednocześnie spełnia te trzy życzenia.
Wtedy $(2^{n/p})^p + (2^{n/q})^q = (2^{(n+1)/r})^r$ i wystarczy przyjąć $x = 2^{n/p}$, $y = 2^{n/q}$ i $z = 2^{(n+1)/r}$, gdzie wszystkie występujące wykładniki są całkowite.

ZADANIE **2**: Dowieść, że równanie

$$(1) \qquad x^{1994} + y^{1995} + z^{1996} = t^{1998}$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x, y, z, t.

Rozwiązanie:
Zadanie można byłoby rozwiązać podobnie jak poprzednie, ale przeszkadza nam fakt, że wykładniki nie są parami względnie pierwsze. Rozłożymy je więc na czynniki tak, aby zobaczyć wyraźnie wspólne dzielniki:

$$(1') \qquad x^{2\cdot 997} + y^{3\cdot 665} + z^{2\cdot 998} = t^{6\cdot 333}.$$

Każde rozwiązanie równania (1') będzie dawało nam rozwiązanie równania

$$(2) \qquad X^2 + Y^3 + Z^2 = T^6.$$

Wnikliwy Czytelnik zauważy, że znalezienie rozwiązania równania (2) stanowi największą trudność na drodze do rozwiązania równania (1).

Autor nie zna lepszej recepty na rozwiązanie równania (2) niż usiłowanie rozłożenia małych szóstych potęg na sumę dwóch kwadratów i sześcianu metodą prób i błędów. Szybko czeka nas miła niespodzianka, bo oto $1 + 27 + 36 = 64$, czyli $1^2 + 3^3 + 6^2 = 2^6$. Ostatnią równość pomnożymy przez $2^p \cdot 3^q$, gdzie p i q dobrane zostaną tak, aby otrzymać rozwiązanie równania (1). Otrzymujemy

$$2^p \cdot 3^q + 2^p \cdot 3^{q+3} + 2^{p+2} \cdot 3^{q+2} = 2^{p+6} \cdot 3^q.$$

Chcąc otrzymać rozwiązanie równania (1), zażyczymy sobie, aby $1994|p$, $1994|q$, $1995|p$, $1995|q+3$, $1996|p+2$, $1996|q+2$, $1998|p+6$ i $1998|q$.

Życzenia te nie są sprzeczne, gdy chodzi o reszty z dzielenia p i q przez 2 i 3, mogą być więc zrealizowane.

ZADANIE **3**: Dowieść, że istnieją takie ciągi (a_n) i (b_n) liczb naturalnych, że liczby $a_n + b_m$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, są parami względnie pierwsze.

Rozwiązanie:
Mamy wykazać, że można zbudować taką nieskończoną tabelę dodawania, aby występujące w niej sumy były parami względnie pierwsze. Wypełnienie tabeli 2×2 nie nastręcza trudności. Wystarczy przyjąć np. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_1 = 2$ i $b_2 = 10$. Pokażemy, że jeżeli dla pewnych $k \geq 2$, $l \geq 2$ udało nam się dobrać odpowiednie a_n i b_m ($n = 1, 2, 3, ..., k$ oraz $m = 1, 2, 3, ..., l$), czyli wypełnić tabelę dodawania $k \times l$ sumami względnie pierwszymi, to można dołączyć do niej $(k+1)$-szy wiersz (lub analogicznie $(l+1)$-szą kolumnę). Stosując niżej podaną procedurę można będzie wypełnić nieskończoną tabelę dodawania.

Niech więc $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ i $b_1, b_2, b_3, ..., b_l$ będą wybrane tak, aby liczby $a_n + b_m$, dla $1 \leq n \leq k$ i $1 \leq m \leq l$, były parami względnie pierwsze. Niech $p_1, p_2, p_3, ..., p_r$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi, które pojawiają się jako dzielniki pierwsze sum wpisanych w tabeli $k \times l$. Chcemy wybrać a_{k+1} tak, aby żadna z liczb $a_{k+1} + b_m$, dla $1 \leq m \leq l$, nie dzieliła się przez żadną z liczb $p_1, p_2, p_3, ..., p_r$. Zapewni to, że dopisane sumy będą względnie pierwsze z już wpisanymi.

Jak zapewnić, aby liczby $a_{k+1} + b_m$, dla $1 \leq m \leq l$, nie dzieliły się przez p_1? Otóż liczba p_1 jest dzielnikiem pierwszym pewnej sumy wpisanej w tabeli, ale tylko jednej. Skoro wypełnione są co najmniej dwa wiersze, to pewien wiersz (np. o numerze m_1) zawiera sumy niepodzielne przez p_1. Zażądamy, aby $p_1 | a_{k+1} - a_{m_1}$ i podobnie $p_i | a_{k+1} - a_{m_i}$ $(i = 2, 3, \ldots, r)$, gdzie p_i nie dzieli liczb $a_{m_i} + b_m$, dla $1 \leq m \leq l$.

Trzeba też zapewnić sobie, żeby liczby $a_{k+1} + b_m$, dla $1 \leq m \leq l$, były parami względnie pierwsze. Niech $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s$ będą wszystkimi dzielnikami pierwszymi liczb $b_{n_1} - b_{n_0}$, dla $1 \leq n_0 < n_1 \leq l$, które nie występują wśród liczb $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$. Zażądamy, aby $q_j | a_{k+1} - a_1$, dla $1 \leq j \leq s$. Wtedy żadna z sum w dopisanym wierszu nie będzie dzieliła się przez żadną z liczb $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s$, co zapewni, że sumy te będą parami względnie pierwsze.

ZADANIE **4**: Dowieść, że istnieje 1997 kolejnych liczb naturalnych, z których każda ma co najmniej 1997 dzielników pierwszych.

Rozwiązanie:
Niech n będzie najmniejszą z szukanych liczb. Chcąc zapewnić, by n miało dużo dzielników pierwszych, zażądamy, aby $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{1997} | n$, gdzie p_k jest k-tą liczbą pierwszą. Podobnie warunek $p_{1998} \cdot p_{1999} \cdot p_{2000} \cdot \ldots \cdot p_{3994} | n+1$ zapewnia, że $n+1$ ma co najmniej 1997 dzielników pierwszych i podobnie dla $k \leq 1996$ żądamy, aby $p_{1997k+1} \cdot p_{1997k+2} \cdot p_{1997k+3} \cdot \ldots \cdot p_{1997k+1997} | n+k$.

ZADANIE **5**: Dowieść, że istnieje 1997 kolejnych liczb naturalnych, z których każda dzieli się przez kwadrat liczby naturalnej.

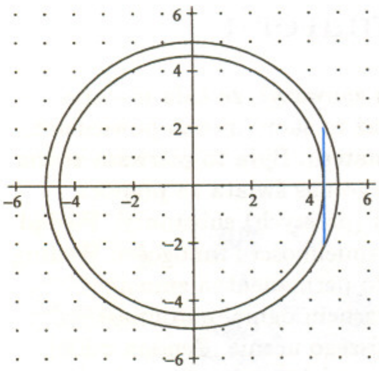
Rozwiązanie:
Rozumując jak w poprzednim zadaniu wystarczy zażądać, aby $4|n$, $9|n+1$, $25|n+2, \ldots, p_k^2|n+k-1, \ldots, p_{1997}^2|n+1996$.

ZADANIE **6**: Dowieść, że istnieje 1 000 001 kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Rozwiązanie:
Skorzystamy z charakteryzacji liczb będących sumami dwóch kwadratów. Otóż liczba naturalna jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych wtedy i tylko wtedy, gdy w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby pierwsze postaci $4k+3$ występują tylko w parzystych potęgach. Tak naprawdę wystarczy wiedzieć, że jeżeli $q = 4k+3$ jest liczbą pierwszą, to liczba podzielna przez q, ale niepodzielna przez q^2, nie jest sumą dwóch kwadratów. Niech $q_1 = 3$, $q_2 = 7$, $q_3 = 11$, $q_4 = 19, \ldots, q_{1\,000\,000} = 32\,445\,143$, $q_{1\,000\,001} = 32\,445\,191$ będą liczbami pierwszymi dającymi przy dzieleniu przez 4 resztę 3.
Zażądamy, aby

$$n + k - 1 \equiv q_k (\operatorname{mod} q_k^2),$$

dla $k = 1, 2, 3, \ldots, 1\,000\,001$. Spełnienie takiego układu kongruencji zapewnia, że liczby $n, n+1, n+2, ..., n+1\,000\,000$ nie są sumami dwóch kwadratów.



Rys. 1

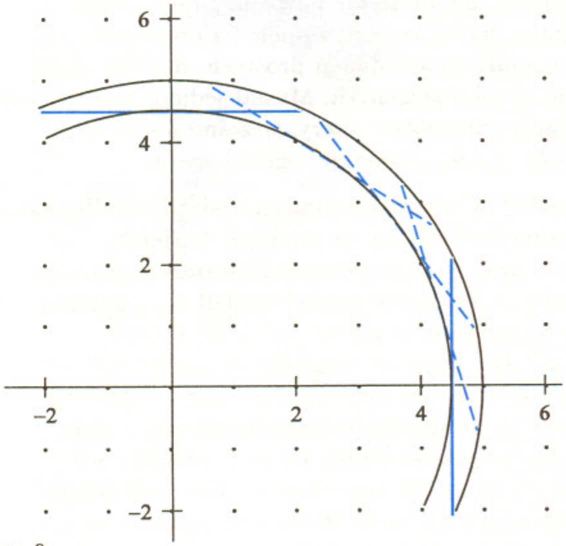
Następujące pytanie zostało postawione autorowi przez Jacka Świątkowskiego w czasie wieczornego spaceru po wsi Mysłów (woj. jeleniogórskie).

ZADANIE **7**: Na płaszczyźnie dany jest pionowy odcinek długości 1995 nie zawierający żadnych punktów kratowych (tj. punktów o obu współrzędnych całkowitych). Czy można tak poruszać tym odcinkiem, aby w żadnym momencie nie zawierał on punktów kratowych, a po zakończeniu ruchu był położony poziomo?

Rozwiązanie:
Skorzystamy z wyniku poprzedniego zadania. Niech n będzie takie, że liczby

$$n, \quad n+1, \quad n+2, \quad \ldots, \quad n+1\,000\,000$$

nie są sumami dwóch kwadratów. Rozważmy okręgi o środku w początku układu współrzędnych i o promieniach $r=\sqrt{n}$ i $R=\sqrt{n+1\,000\,000}$. Z własności liczby n wynika, że na żadnym z tych okręgów ani w pierścieniu między nimi nie ma punktów kratowych (na rys. 1 zaznaczono okręgi o promieniach $\sqrt{20}$ i $\sqrt{25}$ – na tych okręgach są, co prawda, punkty kratowe, ale między nimi nie ma). Z twierdzenia Pitagorasa łatwo wyliczamy, że między okręgami można umieścić odcinek długości $2\sqrt{R^2-r^2}=2000$ (na rys. 1 zaznaczono odcinek długości $4<2\sqrt{5}$).



Rys. 2

Obrót wokół początku układu współrzędnych jest żądanym ruchem. Po wykonaniu obrotu o 90° odcinek stanie się poziomy, a po drodze nie napotka punktów kratowych, gdyż ruch odbywa się w pierścieniowym obszarze, w którym takowych punktów nie ma (rys. 2).

ZADANIE **8**, dla Czytelników: Dowieść, że równanie $x^{2005}+y^{2006}+z^{2007}=t^{2010}$ ma rozwiązanie w liczbach naturalnych x, y, z, t.

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

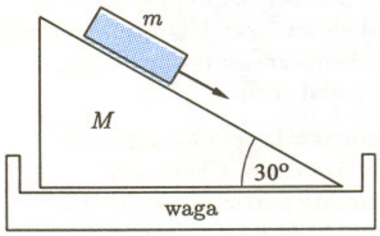
M 826. Figura przestrzenna K ma tę własność, że jej część wspólna z każdą płaszczyzną jest kołem otwartym (bez brzegu) albo zbiorem pustym. Udowodnić, iż K jest kulą otwartą albo zbiorem pustym.
Rozwiązanie na str. 17

M 827. Inwersja j względem sfery o środku O i promieniu r to takie przekształcenie przestrzeni bez punktu O w przestrzeń bez punktu O, że dla dowolnego punktu $X\in\mathbf{R}^3\setminus\{O\}$ zachodzi równość $OX\cdot OY=r^2$ i punkt $Y=j(X)$ leży na półprostej $OX^{\rightarrow}$. Udowodnić, że w tej inwersji obrazem sfery nie przechodzącej przez punkt O będzie sfera.
Rozwiązanie na str. 11

M 828. Udowodnić, że w tej inwersji obrazem okręgu nie przechodzącego przez punkt O (patrz zadanie **M 827**) będzie okrąg.
Rozwiązanie na str. 10

(Zadań **M 827** i **M 828** nauczył mnie pan Jerzy Bednarczuk.)

Redaguje Jarosław KULPA



F 463. Równia pochyła o kącie nachylenia $\alpha=30°$ i masie $M=2$ kg znajduje się na wadze. Na równi znajduje się ciało o masie $m=1$ kg, które ześlizguje się bez tarcia. Obliczyć, jakie będzie wskazanie wagi.
Rozwiązanie na str. 12

F 464. Powszechnie wiadomo, że dioda przewodzi w jedną stronę, a nie przewodzi w drugą. Jeżeli do diody w kierunku przewodzenia przyłożymy napięcie $U=0{,}2$ V, to będzie płynął przez nią prąd I. Oszacować, ile razy mniejszy prąd będzie płynął w kierunku zaporowym, gdy odwrócimy napięcie.
Rozwiązanie na str. 16

Sto lat wiary w elementarną strukturę materii

Piotr ZALEWSKI

Ponad dwa i pół tysiąca lat temu Tales z Miletu zauważył, że cała materia występuje w trzech stanach skupienia, a ponieważ to samo można powiedzieć o wodzie, uznał wodę za jedyny składnik całej materii. Była to pierwsza znana nam próba wyjaśnienia różnorodności otaczającego nas świata za pomocą odwołania się do struktury zbudowanej z prostej (prostych) substancji. Pogląd ten ewoluował, napotykając po drodze problem zmienności i mnogości. Według Heraklita z Efezu jedyne, czego doświadczamy, to permanentna zmienność świata, zbudowanego z obdarzonego wiecznym ruchem ognia, natomiast według eleatów, Parmenidesa i jego najwybitniejszego ucznia, Zenona z Elei, jakakolwiek zmienność jest niemożliwa. W piątym wieku p.n.e. Empedokles z Agrygentu pogodził pogląd eleatów: „nie może nic powstać z tego, czego nie ma, jest niemożliwe i niesłychane, by to, co jest, zginęło" z obserwowaną zmiennością rzeczy, odnosząc go jedynie do substancji prostych, dopuszczając natomiast istnienie i zmienność substancji złożonych. Musiał jednak zrezygnować z jednej pierwotnej materii uznając za pierwotne cztery, wcześniej oddzielnie pretendujące do tego miana żywioły: wodę, powietrze, ogień i ziemię.

Następny wiek przyniósł nowy pogląd na strukturę materii i odtąd współistnieją one ze zmiennym szczęściem i w zmiennej formie, aż po dzień dzisiejszy. Tak Empedokles, jak i jego poprzednicy oraz jemu współcześni uważali materię za ciągłą, a więc podzielną w nieskończoność. Nowy pogląd zrodził się z pytania, dlaczego w procesie permanentnych zmian materia nie ściera się na pył, z którego nic już nie może powstać? Jak wyjaśnić względną trwałość rzeczy? Rozwiązanie zaproponował Leucyp z Miletu, a rozwinął Demokryt z Abdery. Uznali oni, (a) że materia nie może być podzielna w nieskończoność, a więc muszą istnieć najmniejsze, niepodzielne już składniki, które w związku z tym nazwali „nie dzielącymi się", czyli atomami. W konsekwencji (b) musi istnieć pustka pomiędzy atomami umożliwiająca ich ruch. Wreszcie (c) atomy są niezniszczalne i (d) pozbawione struktury. Atomy różnią się tylko (e) wielkością i kształtem. Poglądy atomistyczne przejął i rozpropagował żyjący na przełomie III i II wieku p.n.e. Epikur z Samos tworząc mechanistyczny obraz świata pozbawiony ingerencji jakichkolwiek sił nadprzyrodzonych, natomiast o sześćdziesiąt lat starszy Arystoteles zdecydowanie się im sprzeciwiał, odrzucając – jak wszyscy poza atomistami – możliwość istnienia pustki jako pogląd wewnętrznie sprzeczny. Poglądy Arystotelesa, który do czterech żywiołów dodał niebiański eter, przejęła filozofia średniowieczna.

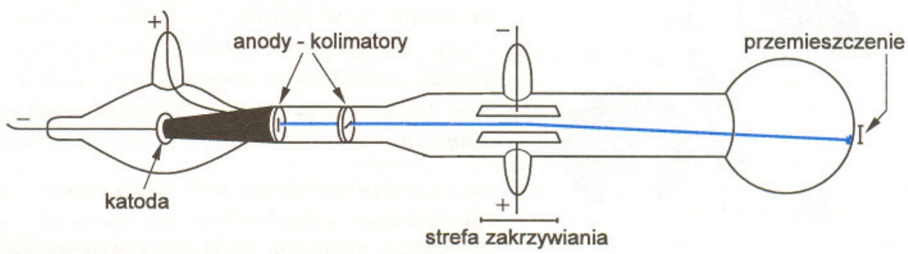
Większość informacji o atomistycznych poglądach starożytnych Greków pochodzi z odnalezionego w 1417 roku dzieła „De Rerum Natura" (O naturze wszechrzeczy) napisanego w I w. p.n.e. przez rzymskiego poetę Lukrecjusza. W połączeniu z epikurejskim światopoglądem deistycznym atomizm nie miał racji bytu w średniowiecznej Europie. Odżył w XVII wieku dzięki francuskiemu księdzu katolickiemu Pierre Gassendiemu, który sprzeciwiał się arystotelizmowi uznając istnienie atomów poruszających się w próżni. Pogląd ten pogodził ze średniowiecznym światopoglądem chrześcijańskim, uznając Boga za stwórcę atomów. W 1661 roku Robert Boyle (w trzy lata po opublikowaniu „Exercitationes Paradoxicae Adversus Aristoteles" Gassendiego) wydał słynne dzieło „The Sceptical Chymist", w którym odrzucił koncepcję czterech żywiołów na rzecz filozofii korpuskularnej. Unikał słowa atom jako zdecydowany przeciwnik epikureizmu. Wprowadził pierwiastki chemiczne w postaci „prima materia", niepodzielnych korpuskuł, którym Bóg nadał ruch.

Ugruntowanie się poglądu atomistycznego w chemii zawdzięczamy Johnowi Daltonowi, który publikując w 1809 roku „A New System of Chemistry" zapostulował istnienie podstawowych cząstek (ultimate particles), które *dla każdego jednorodnego ciała są doskonale identyczne co do wagi, kształtu itp.* Następnie przekonywał o *ważności i przewadze wyznaczenia względnych mas podstawowych cząstek, tak prostych, jak i złożonych ciał, liczby elementarnych cząstek składających się na cząstkę złożoną oraz liczby mniej złożonych cząstek*

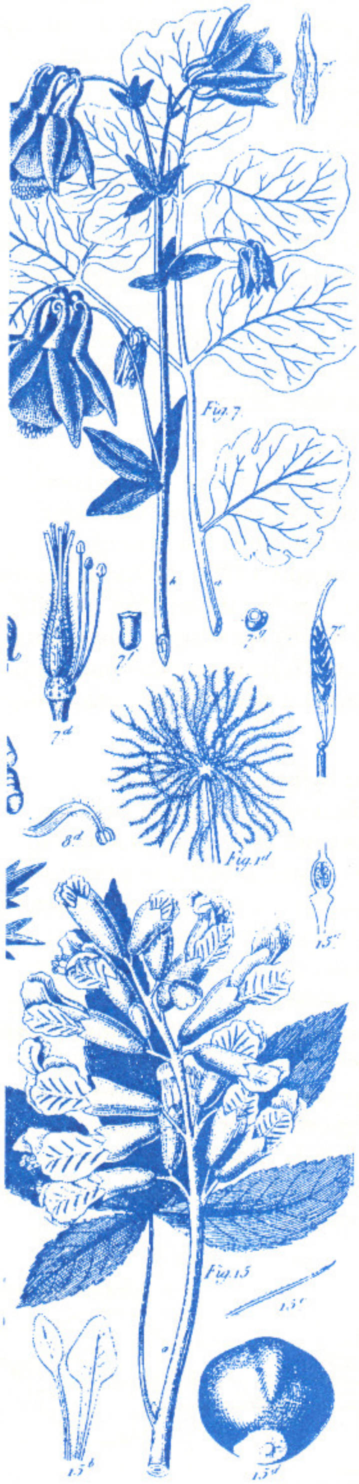
biorących udział w formowaniu się cząstek bardziej złożonych. Program ten udało mu się przeprowadzić w odniesieniu do dwudziestu znanych mu pierwiastków i szeregu substancji złożonych. Popełnił jednak sporo błędów, które poprawił dwa lata później Amadeo Avogadro, wykorzystując zaobserwowany przez Luisa J. Gay-Lussaca fakt łączenia się gazów w prostych stosunkach objętościowych. Avogadro zapostulował, że w tej samej objętości w tych samych warunkach znajduje się tyle samo cząsteczek (molekuł). W ten sposób wykazał, że atomy gazów nieszlachetnych w normalnych warunkach łączą się w pary i podał prawidłowe stosunki mas atomowych. Choć na dokładne wyznaczenie liczby Avogadro trzeba było poczekać sto lat, atomy na stałe zagościły w chemii. Ich liczba jednak niepokojąco rosła. Dodatkowo masy atomowe okazały się bliskie wielokrotności masy atomu wodoru, a własności chemiczne pierwiastków wydawały się periodycznie zależeć od tych mas. Informacje te udało się uporządkować Dmitrijowi Mendelejewowi w 1869 roku w postaci używanego do dziś układu okresowego pierwiastków. Mendelejew zostawił w swoim układzie kilka wolnych miejsc, które zgodnie z jego przewidywaniem zostały wypełnione przez nowo odkryte pierwiastki, jak german, gal czy skand. Było to wielkim sukcesem atomowej teorii pierwiastków chemicznych, ale nasuwało pytanie o przyczynę obserwowanej harmonii, poddając jednocześnie w wątpliwość brak struktury czy nominalną niepodzielność atomów.

Zostawmy jednak chemię i zajmijmy się fizyką. Okazuje się, że fizycy (podobnie zresztą jak większość chemików) nie wierzyli w realność atomów, traktując je jedynie jako wygodne narzędzie służące do ilościowego opisu reakcji chemicznych. Co prawda dzięki Davidowi Bernoulliemu (1700–1782), Jamesowi C. Maxwellowi (1831–1879), Johannesowi D. Van der Waalsowi (1837–1923) czy wreszcie Ludwigowi E. Boltzmannowi (1844–1906) rozwinięto kinetyczną teorię materii, lecz nie potrafiono wskazać dowodu fizycznego istnienia atomów. Odłóżmy jednak i ten wątek, gdyż będzie on tematem przewodnim następnego numeru *Delty*.

Fizycy XIX wieku bardziej niż strukturą materii byli zafascynowani elektrycznością i magnetyzmem. W 1855 roku Heinrich Geissler konstruuje pompę próżniową i za jej pomocą uzyskuje po raz pierwszy rurę próżniową. Zgodnie ze swymi zainteresowaniami fizycy rozpoczynają badania przepływu prądu przez rozrzedzone gazy. Obserwują tajemniczą poświatę pojawiającą się w rurze pod wpływem przyłożonego napięcia. Jej wygląd zmienia się w miarę zmniejszania ciśnienia gazu. Świetlista, liliowa linia najpierw upodabnia się do czegoś przypominającego dżdżownicę, której pierścienie stopniowo znikają począwszy od katody, aż wreszcie świecenie gazu zanika, ale prąd nadal płynie, a na końcu rury przeciwległym do katody pojawia się zielonkawa poświata. Wstawienie przeszkody wewnątrz tuby powoduje pojawienie się ostrego cienia w tej zielonkawej poświacie, co świadczy o występowaniu w tubie jakiegoś rodzaju promieniowania wydobywającego się z katody. Zjawisko to zostaje nazwane promieniowaniem katodowym. W 1858 roku Julius Plücker obserwuje zakrzywianie się tych promieni w polu magnetycznym.



Wynalazek wykorzystujący pompę Geisslera zostaje ulepszony około 1870 roku przez William Crookesa i przechodzi do historii fizyki jako rurka Crookesa. Przez 40 lat promienie katodowe pozostają ciekawostką i zagadką jednocześnie. Krystalizują się dwa poglądy co do ich natury. Fizycy angielscy uważają je za strumień materialnych cząstek obdarzonych ładunkiem elektrycznym, natomiast uczeni niemieccy uznają je za jakąś formę promieniowania lub falę w eterze.



Decydującym argumentem przeciwko hipotezie korpuskularnej wydaje się negatywny wynik podjętej przez Heinricha Hertza w 1892 roku próby odchylenia promieni katodowych polem elektrycznym. W roku 1895 Wilhelm Röntgen za pomocą promieni katodowych odkrywa przenikające materię promienie X. Kilka miesięcy później Henri Becquerel, poszukując natury promieniowania rentgenowskiego, odkrywa naturalną promieniotwórczość. Same promienie katodowe pozostają jednak tajemnicą.

Czas chyba najwyższy przedstawić głównego bohatera tego opowiadania. Joseph John Thomson urodził się 18 grudnia 1856 roku w Cheetham, przedmieściu Manchesteru. W 1880 roku uzyskał stopień bakałarza w Trinity College w Cambridge zajmując drugą lokatę za Josephem Larmorem. W tym samym roku rozpoczął pracę w Cavendish Laboratory, gdzie już cztery lata później, po rezygnacji Johna W. Rayleigha, został profesorem w wieku zaledwie 28 lat. Thomson rozpoczął badania wyładowań w rozrzedzonych gazach. Problematyce tej pozostał wierny do końca aktywności naukowej. W 1897 roku, zbierając wyniki kilkunastu lat badań, udało mu się udowodnić, że promienie katodowe to strumień naładowanych cząstek i to cząstek wchodzących w skład każdej materii. Logiczny ciąg doświadczeń rozpoczyna się ulepszoną wersją eksperymentu Jean-Baptiste Perrina z 1895 roku, wykazującą niezbicie, że promienie katodowe niosą ujemny ładunek elektryczny, gdyż skierowanie ich polem magnetycznym do ekranowanego, metalowego cylindra powoduje jego naładowanie. Kluczowym testem było jednak zaobserwowanie odchylania promieni katodowych przez słabe pole elektryczne oraz pomiar stosunku ładunku do masy korpuskuł tworzących ich strumień. Thomson wykazał, że powodem negatywnego wyniku próby podjętej przez Hertza było niedostateczne rozrzedzenie gazu, wskutek czego następowało ekranowanie pola elektrycznego przez powstające w gazie jony. Mając do dyspozycji zarówno pole magnetyczne, jak i elektryczne Thomson przystąpił do pomiaru stosunku m/e. Pierwszym etapem było zmierzenie prędkości v przemieszczania się promieni katodowych. Naładowana cząstka poruszająca się w statycznym polu elektrycznym (magnetycznym, prostopadłym do wektora prędkości cząstki) doznaje działania siły eE (evB). W takim razie siły te mogą znosić się, o ile tylko użyje się odpowiednio skierowanych skrzyżowanych pól – elektrycznego i magnetycznego – o natężeniach związanych zależnością $v = E/B$. Znając prędkość łatwo można wyznaczyć stosunek m/e mierząc np. odchylenie h spowodowane przez jednorodne pole elektryczne o natężeniu E występujące na długości d. Ponieważ $h = \frac{eE}{m} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{d}{v}\right)^2$ (rzut ukośny), to $m/e = E/2h \cdot (d/v)^2$.

Prędkość v okazała się zależeć od stopnia rozrzedzenia gazu i od różnicy potencjałów między katodą a anodą. Zawsze jednak była rzędu prędkości światła, ale istotnie od niej mniejsza. Natomiast stosunek m/e nie wykazywał zależności ani od prędkości v, ani od stopnia rozrzedzenia gazu, ani od rodzaju gazu, ani od materiału katody. W dodatku stosunek ten okazał się prawie 2000 razy mniejszy niż analogiczny stosunek dla atomu wodoru (zmierzony dzięki prawom elektrolizy odkrytym w 1833 roku przez Michaela Faradaya). Przy założeniu, iż w obu przypadkach ładunek jest ten sam (co do wartości), oznacza to, że obserwujemy cząstki o niezwykle małej masie. Thomson przedstawił wyniki swoich doświadczeń na zebraniu Royal Institution w dniu 30 kwietnia 1897 roku, a w artykule opublikowanym kilka miesięcy później w *Philosophical Magazine*, **44**, 293 (1897) tak opisał wnioski płynące z przeprowadzonych badań:

Jeżeli w bardzo silnym polu elektrycznym w pobliżu katody molekuły gazu są zdysocjowane i rozdzielone, nie na zwykłe atomy chemiczne, ale na atomy pierwotne, które dla krótkości będziemy nazywać korpuskułami; i jeżeli te korpuskuły są elektrycznie naładowane i odrzucane od katody przez pole elektryczne, to powinny się one zachowywać dokładnie tak jak promienie katodowe.[...] w takim razie promienie katodowe są nowym stanem materii: stanem, w którym cała materia – to znaczy materia pochodząca z różnych źródeł jak wodór, tlen, itp. – jest jednego i tego samego rodzaju, będąc tą substancją, z której zbudowane są wszystkie pierwiastki chemiczne.

Odkryte przez Thomsona korpuskuły zostały niemal natychmiast nazwane elektronami. Termin ten wymyślił George J. Stoney na oznaczenie elementarnego ładunku, o istnieniu którego wydawały się świadczyć prawa elektrolizy. Za swoje odkrycie Thomson otrzymał w roku 1906 Nagrodę Nobla z fizyki. A co my z tego mamy? Chyba łatwiej wyliczyć, czego z tego nie mamy. Podam tylko jeden, ale za to najważniejszy, moim zdaniem, wątek (w wielkim skrócie). Pojęcie elektronu miało kapitalne znaczenie dla odkrycia mechaniki kwantowej, która „dojrzała" w 1927 roku – równo 30 lat po odkryciu elektronu. W tym właśnie roku Werner Heisenberg, twórca mechaniki macierzowej uwalniającej model atomu Bohra od pomieszania pojęć klasycznych i kwantowych, usiłując matematycznie opisać trajektorię elektronu w komorze Wilsona, odkrywa zasadę nieoznaczoności; odbywa się konferencja Solvaya w Brukseli, na której (w czasie posiłków) okazuje się, że mechanika macierzowa, równanie Schrödingera, rozkłady prawdopodobieństwa Borna oraz zasada nieoznaczoności splatają się w jedną spójną teorię; w końcu Clinton J. Davisson i Lester Germer w Stanach Zjednoczonych oraz George P. Thomson (syn J.J.) w Anglii wykazują doświadczalnie falową naturę elektronu, zgodnie z hipotezą de Broglie'a i właśnie ukonstytuowaną mechaniką kwantową. (W ten sposób Thomson ojciec wykazał, że istnieje cząstka elektron, a Thomson syn, że jest on również falą, ale zupełnie inną, niż to sobie pod koniec XIX wieku wyobrażano.) Odkrycia te były bardzo cenne. Nagrody Nobla otrzymali: w 1929 roku Louis-Victor P.R. de Broglie, w 1932 roku Werner Heisenberg, w 1933 roku Erwin Schrödinger, w 1937 roku Clinton J. Davisson i George P. Thomson, a w 1954 roku Max Born. Natomiast Niels H.D. Bohr w 1927 roku był już od pięciu lat noblistą. Warto dodać, że jego modelowi atomu wodoru, w którym elektronom wolno przebywać tylko na wyróżnionych orbitach, przyświecała nie tyle (udana) próba wyjaśnienia struktury widmowej promieniowania atomu wodoru, co atomistyczna troska o jego trwałość. Wyrosła z tego modelu mechanika kwantowa w elegancki sposób wyjaśnia nie tylko trwałość atomów, ale również własności chemiczne pierwiastków, wiązania chemiczne, strukturę i własności ciał stałych itp., itd. Dzięki niej 50 lat po odkryciu elektronu powstaje pierwsze złącze półprzewodnikowe, a następnie tranzystor.

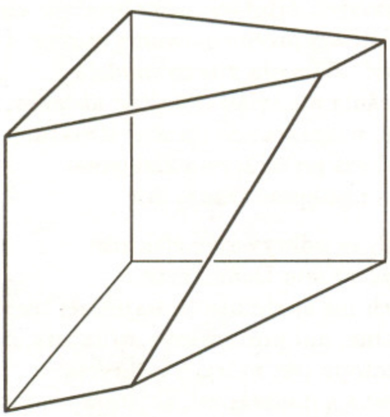
W wielu opracowaniach można znaleźć pogląd, że odkrywając elektron Thomson uniemożliwił odkrycie niepodzielnego atomu Demokryta. Rzeczywiście, atomy pierwiastków chemicznych nie spełniają co najmniej trzech starożytnych postulatów. Nie są ani niepodzielne, ani pozbawione struktury, ani niezniszczalne. Niektórzy, wskazując na izotopy (do których odkrycia J.J. Thomson również się przyczynił) argumentują dodatkowo, że atomy jednego pierwiastka nawet nie są identyczne. Pogląd ten jest w najlepszym razie niebezpiecznym skrótem myślowym, gdyż postulaty Demokryta świetnie spełniają właśnie elektrony (co zresztą było jasne dla samego odkrywcy, jak widać z przytoczonego fragmentu jego pracy). „Nadużycia" dopuścił się Dalton zbyt pochopnie nazywając podstawowe jednostki pierwiastków chemicznych atomami. Elektron jest obecnie „najstarszym" atomem Demokryta i nadal, po stu latach od odkrycia, pozostaje elementarny. Jak długo jeszcze? Chyba to nie jest dobre pytanie do jubilata.

Odkrycie pierwszego elementarnego składnika materii można uznać za początek fizyki cząstek elementarnych. Nazwa ta jednak pojawiła się ponad 50 lat później, kiedy zaczęto odkrywać cząstki, których nie można znaleźć ani w jądrze atomowym, ani w produktach jego rozpadu. Kryterium to spełnia odkryty w 1936 roku przez Paula Andersona mion, zachowujący się jak ciężki elektron, nie spełnia natomiast (również przez niego odkryty w 1932 roku) pozyton – pierwsza antycząstka (pasująca do tajemniczego drugiego rozwiązania równania Diraca dla elektronu), gdyż pozytony, choć znalezione zostały w promieniowaniu kosmicznym, są również produktem rozpadu jądrowego β^+, tak jak elektrony rozpadu β^-. Początkowo sądzono, że mion jest cząstką odpowiedzialną za wiązanie nukleonów w jądrze, zapostulowaną przez Yukawę w 1935 roku, gdyż miał odpowiednią masę. Od początku wydawał się jednak za słabo oddziaływać z materią jądrową, ale udowodniono to dopiero w 1947 roku. W tym samym roku znaleziono w promieniowaniu kosmicznym zarówno poszukiwany nośnik sił jądrowych nazywany obecnie mezonem π lub po prostu pionem, jak i zupełnie nowe cząstki nazwane później cząstkami dziwnymi. W ten sposób rozwiązał się worek z hadronami, a dziedzinę badającą jego zawartość zaczęto nazywać fizyką cząstek elementarnych. Hadrony, podobnie jak wcześniej atomy w chemii, zaczęły mnożyć się jak przysłowiowe króliki, co w końcu doprowadziło najpierw do hipotezy, a następnie odkrycia ich składników – kwarków. Tak więc nazwa „fizyka cząstek elementarnych" pojawiła się w wyniku odkrycia obiektów, które wcale elementarne nie są. Tak czy inaczej możemy uznać, że w tym roku mamy okrągłą rocznicę, jak nie 100, to 50 lat tej dziedziny fizyki.

Liczby i wielościany

Parę razy pisaliśmy w *Małej Delcie* o wielościanach, ale okazuje się, że prostych pytań na ich temat ciągle nie brakuje.

Pewna młoda dama dała mi do czytania tekst, w którym między innymi napisała: *Euler zauważył, że liczba ścian i wierzchołków nie wyznacza jednoznacznie wielościanu wypukłego. Postanowił więc dołączyć jeszcze trzecią liczbę – liczbę krawędzi.* Jest to, oczywiście, żart: liczba ścian S i liczba wierzchołków W wielościanu wypukłego wyznaczają jednoznacznie liczbę krawędzi K tego wielościanu; jest mianowicie $K = S + W - 2$.



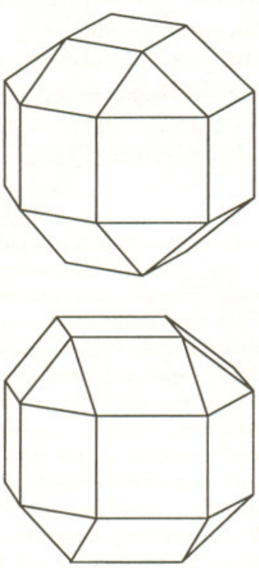
Rys. 1

Ale zatrzymajmy się na pierwszym zdaniu. Czy istotnie liczba ścian i liczba wierzchołków nie wyznaczają jednoznacznie wielościanu? Mamy tu dwa w jednym: pytanie *czy dla dowolnych $S > 3$ i $W > 3$ istnieje wielościan mający akurat taką liczbę ścian i taką liczbę wierzchołków* oraz pytanie *czy, jeśli S i W są, odpowiednio, liczbą ścian i wierzchołków jakiegoś wielościanu, to istnieje inny wielościan mający S ścian i W wierzchołków.*

Wypada doprecyzować słowo *inny*, bo, być może, od tego zależy odpowiedź. Będziemy więc tutaj uważać dwa wielościany za jednakowe, gdy różnić się będą jedynie długościami krawędzi i rozwartościami kątów. Tak więc bryła przedstawiona na rysunku 1 jest – w tym sensie – sześcianem.

Pierwsze z pytań pozostawimy tym razem do wyłącznej dyspozycji Czytelników (warto nadmienić, że niedawno w *Małej Delcie* znaleźć było można wskazanie wielościanu o danej z góry liczbie ścian, względnie wierzchołków). Tak więc będziemy tutaj rozważać jedynie pytanie, czy jeśli już wielościan istnieje, to nie ma innych o tej samej liczbie ścian i tej samej liczbie wierzchołków.

Zacznijmy od tego, że czasami rzeczywiście jest jedyność: dla $S = W = 4$ jedynym wielościanem jest czworościan. A czy np. dla $S = 6$ i $W = 8$ istnieją jakieś wielościany oprócz tego z rysunku 1?



Rys. 2

Nie rozstrzygając tej kwestii zauważmy, że istnieją dwa różne wielościany o tych samych S i W, co więcej, oba archimedesowe (tzn. mające jednakowe naroża i ściany foremne). Są to wielościany, w których w każdym wierzchołku zbiegają się trzy czworokąty i jeden trójkąt (można sobie wyobrażać kwadraty i trójkąt równoboczny) – łącznie czworokątów jest 18, a trójkątów 8. Dla obu mamy $S = 26$, $W = 24$. To sławny przykład, bo podany dopiero w latach pięćdziesiątych naszego stulecia (wykrył go J. Załgaler) – do tego czasu jakoś nikomu nie wpadł w oko. Różnicę między tymi wielościanami zechce Czytelnik odczytać z rysunku 2.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
INSTYTUT INFORMATYKI UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY INFORMATYCZNEJ

V OLIMPIADA INFORMATYCZNA

Podstawowym aktem prawnym dotyczącym Olimpiady jest Regulamin Olimpiady Informatycznej, którego pełny tekst znajduje się w kuratoriach oświaty oraz jest zamieszczony w książce „IV Olimpiada Informatyczna 1996/97". Poniższe zasady są uzupełnieniem tego regulaminu, zawierającym szczegółowe postanowienia Komitetu Głównego Olimpiady Informatycznej o jej organizacji w roku szkolnym 1997/98.

Zasady organizacji zawodów w roku szkolnym 1997/98

§ 1. Wstęp

Olimpiada Informatyczna jest olimpiadą przedmiotową powołaną przez Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego, który jest organizatorem Olimpiady zgodnie z zarządzeniem nr 28 Ministra Edukacji Narodowej z dnia 14 września 1992 roku.

§ 2. Organizacja Olimpiady

1. Olimpiadę przeprowadza Komitet Główny Olimpiady Informatycznej.
2. Olimpiada Informatyczna jest trójstopniowa.
3. Olimpiada Informatyczna jest przeznaczona dla uczniów wszystkich typów szkół średnich dla młodzieży (z wyjątkiem szkół policealnych). W Olimpiadzie mogą również uczestniczyć – za zgodą Komitetu Głównego – uczniowie szkół podstawowych.
4. Integralną częścią rozwiązania każdego z zadań zawodów I, II i III stopnia jest program napisany na komputerze zgodnym ze standardem IBM PC, w jednym z następujących języków programowania: Pascal, C, lub C++.
5. Zawody I stopnia mają charakter otwarty i polegają na samodzielnym i indywidualnym rozwiązywaniu zadań i nadesłaniu rozwiązań w podanym terminie.
6. Zawody II i III stopnia polegają na indywidualnym rozwiązywaniu zadań w ciągu dwóch sesji przeprowadzanych w różnych dniach w warunkach kontrolowanej samodzielności.
7. Do zawodów II stopnia zostanie zakwalifikowanych 120 uczestników, których rozwiązania zadań I stopnia zostaną ocenione najwyżej; do zawodów III stopnia – 40 uczestników, których rozwiązania zadań II stopnia zostaną ocenione najwyżej. Komitet Główny może zmienić podane liczby zakwalifikowanych uczestników co najwyżej o 15%.
8. Podjęte przez Komitet Główny decyzje o zakwalifikowaniu uczestników do zawodów kolejnego stopnia, przyznanych miejscach i nagrodach oraz składzie polskiej reprezentacji na Międzynarodową Olimpiadę Informatyczną są ostateczne.
9. Terminarz zawodów:
   zawody I stopnia – 20 X 97r - 17 XI 97r.
   - ogłoszenie wyników 19 XII 97r.
   zawody II stopnia – 12-14 II 98r.
   - ogłoszenie wyników 2 III 98r.
   zawody III stopnia – 6-9 IV 98r.

§ 3. Wymagania dotyczące rozwiązań zadań zawodów I stopnia

1. Zawody I stopnia polegają na samodzielnym i indywidualnym rozwiązywaniu zadań eliminacyjnych (niekoniecznie wszystkich) i nadesłaniu rozwiązań pocztą, **przesyłką poleconą**, pod adresem:

Olimpiada Informatyczna
Ośrodek Edukacji Informatycznej i Zastosowań Komputerów
ul. Raszyńska 8/10
02-026 Warszawa
tel. (0-22) 822 40 19, 668 55 33

w nieprzekraczalnym terminie nadania do 17 listopada 1997 r. (decyduje data stempla pocztowego). Prosimy o zachowanie dowodu nadania przesyłki. Rozwiązania dostarczane w inny sposób nie będą przyjmowane.
2. Prace niesamodzielne lub zbiorowe nie będą brane pod uwagę.
3. Rozwiązanie każdego zadania składa się z:
   a) programu (tylko jednego) na dyskietce w postaci źródłowej i skompilowanej,
   b) opisu algorytmu rozwiązania zadania z uzasadnieniem jego poprawności.
4. Uczestnik przysyła jedną dyskietkę, oznaczoną jego imieniem i nazwiskiem, nadającą się do odczytania na komputerze IBM PC i zawierającą:
   – spis zawartości dyskietki w pliku nazwanym SPIS.TRC,
   – wszystkie programy w postaci źródłowej i skompilowanej.
   Imię i nazwisko uczestnika powinno być podane w komentarzu na początku każdego programu.
5. Wszystkie nadsyłane teksty powinny być drukowane lub czytelnie pisane na kartkach formatu A4. Każda kartka powinna mieć kolejny numer i być opatrzona pełnym imieniem i nazwiskiem autora. Na pierwszej stronie nadsyłanej pracy każdy uczestnik Olimpiady podaje następujące dane:
   – imię i nazwisko,
   – datę i miejsce urodzenia,
   – dokładny adres zamieszkania i ewentualnie numer telefonu,
   – nazwę, adres, województwo i numer telefonu szkoły oraz klasę, do której uczęszcza,
   – nazwę i numer wersji użytego języka programowania,
   – opis konfiguracji komputera, na którym rozwiązał zadania.
6. Nazwy plików z programami w postaci źródłowej powinny mieć jako rozszerzenie co najwyżej trzyliterowy skrót nazwy użytego języka programowania, to jest:

Pascal	PAS
C	C
C++	CPP

7. Opcje kompilatora powinny być częścią tekstu programu. Zaleca się stosowanie opcji standardowych.

§ 4. Uprawnienia i nagrody

1. Uczestnicy zawodów II stopnia, których wyniki zostały uznane przez Komitet Główny Olimpiady za wyróżniające, otrzymują najwyższą ocenę z informatyki na zakończenie nauki w klasie, do której uczęszczają.
2. Uczestnicy Olimpiady, którzy zostali zakwalifikowani do zawodów III stopnia, są zwolnieni z egzaminu dojrzałości (zgodnie z zarządzeniem nr 29 Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 listopada 1991 r.) lub z egzaminu z przygotowania zawodowego z przedmiotu informatyka. Zwolnienie jest równoznaczne z wystawieniem oceny najwyższej.
3. Laureaci i finaliści Olimpiady są zwolnieni w części lub w całości z egzaminów wstępnych do szkół wyższych na mocy uchwał senatów poszczególnych uczelni, podjętych zgodnie z przepisami ustawy z dnia 12 września 1990 roku o szkolnictwie wyższym (Dz.U. nr 65, poz. 385), o ile te uchwały nie stanowią inaczej.
4. Zaświadczenia o uzyskanych uprawnieniach wydaje uczestnikom Komitet Główny.
5. Komitet Główny ustala skład reprezentacji Polski na X Międzynarodową Olimpiadę Informatyczną w 1998 roku na podstawie wyników zawodów III stopnia i regulaminu tej Olimpiady. Szczegółowe zasady zostaną podane po otrzymaniu formalnego zaproszenia na X Międzynarodową Olimpiadę Informatyczną.
6. Nauczyciel (opiekun naukowy), który przygotował laureata Olimpiady Informatycznej, otrzymuje nagrodę przyznawaną przez Komitet Główny Olimpiady.
7. Uczestnicy zawodów II i III stopnia otrzymują nagrody rzeczowe.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
INSTYTUT INFORMATYKI UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY INFORMATYCZNEJ

V OLIMPIADA INFORMATYCZNA

§ 5. Przepisy końcowe

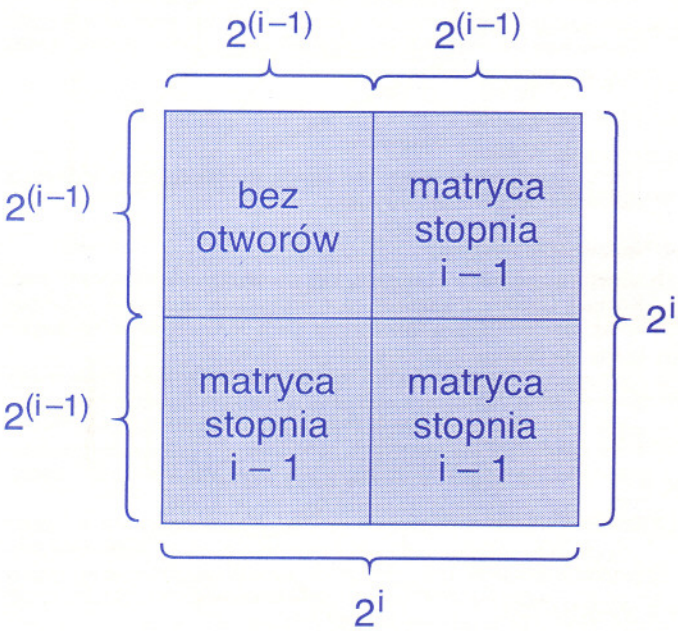
1. Koordynatorzy edukacji informatycznej i dyrektorzy szkół mają obowiązek dopilnowania, aby wszystkie informacje dotyczące Olimpiady zostały podane do wiadomości uczniów.
2. Komitet Główny Olimpiady Informatycznej zawiadamia wszystkich uczestników zawodów I i II stopnia o ich wynikach. Każdy uczestnik, który przeszedł do zawodów wyższego stopnia oraz dyrektor szkoły otrzymują informację o miejscu i terminie następnych zawodów.
3. Uczniowie zakwalifikowani do udziału w zawodach II i III stopnia są zwolnieni z zajęć szkolnych na czas niezbędny do udziału w zawodach, a także otrzymują bezpłatne zakwaterowanie i wyżywienie oraz zwrot kosztów przejazdu.

ZADANIA

PRACOWNIA MALARSKA

Pracownia malarska przygotowuje seryjną produkcję obrazów. Obrazy będą wykonywane za pomocą kwadratowych matryc o różnych stopniach. Matryca stopnia i składa się z 2^i wierszy i 2^i kolumn. Na przecięciu pewnych wierszy i kolumn znajdują się otwory. Matryca stopnia 0 ma jeden otwór.

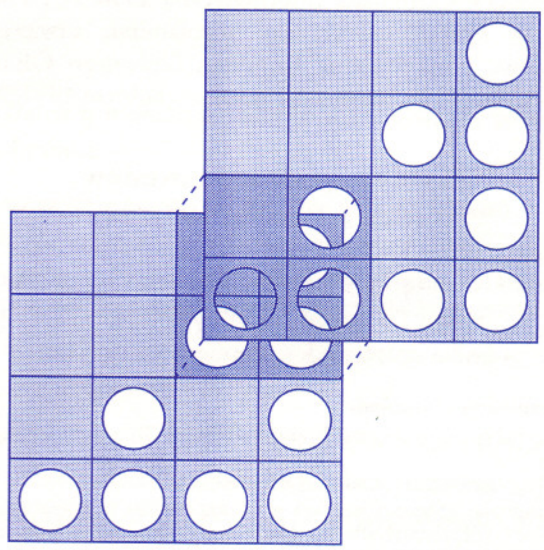
Dla $i > 0$, matryca stopnia i składa się z czterech kwadratów o rozmiarach $2^{(i-1)} \times 2^{(i-1)}$.



Oba prawe kwadraty oraz dolny lewy kwadrat są matrycami stopnia $i-1$. W górnym lewym kwadracie nie ma żadnych otworów. Obraz otrzymuje się w następujący sposób. Najpierw ustala się trzy nieujemne liczby całkowite n, x, y. Następnie umieszcza się dwie matryce stopnia n jedna na drugiej i górną matrycę przesuwa się o x kolumn w prawo i o y wierszy w górę. Tak otrzymany wzorzec zostaje umieszczony na białym płótnie i na wspólną część obu matryc nanosi się żółtą farbę. W efekcie na płótnie pojawią się żółte plamy tylko w tych miejscach, w których otwory w obu matrycach pokrywają się.

Przykład

Przyjrzyj się dwóm matrycom stopnia 2 przedstawionym na rysunku.



Górna matryca została przesunięta o 2 kolumny w prawo i o 2 wiersze w górę. W trzech miejscach otwory z obu matryc pokrywają się.

Zadanie

Napisz program, który:
- wczytuje z pliku tekstowego MAL.IN stopień obu matryc oraz współrzędne przesunięcia górnej matrycy;
- oblicza liczbę żółtych plam na płótnie;
- zapisuje wynik w pliku tekstowym MAL.OUT.

Wejście

Pierwszy wiersz pliku tekstowego MAL.IN zawiera liczbę całkowitą n, $0 \leq n \leq 100$. Jest to stopień matryc używanych w produkcji obrazów.

W drugim wierszu zapisana jest liczba całkowita x, zaś w trzecim wierszu liczba całkowita y, $0 \leq x, y < 2^n$. Liczba x jest liczbą kolumn, a y jest liczbą wierszy, o które należy przesunąć górną matrycę.

Wyjście

W pierwszym wierszu pliku wyjściowego MAL.OUT należy zapisać liczbę plam na płótnie.

Przykład

Dla pliku wejściowego MAL.IN:
2
2
2
poprawnym rozwiązaniem jest plik wyjściowy MAL.OUT:
3

Twój program powinien szukać pliku MAL.IN w katalogu bieżącym i tworzyć plik MAL.OUT również w bieżącym katalogu. Plik zawierający napisany przez Ciebie program w postaci źródłowej powinien mieć nazwę MAL.???, gdzie zamiast ??? należy wpisać co najwyżej trzyliterowy skrót nazwy użytego języka programowania. Ten sam program w postaci wykonalnej powinien być zapisany w pliku MAL.EXE.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
INSTYTUT INFORMATYKI UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY INFORMATYCZNEJ

V OLIMPIADA INFORMATYCZNA

WIELOKĄT

Powiemy, że dwa trójkąty **przecinają się**, jeśli ich wnętrza mają co najmniej jeden punkt wspólny. Wielokąt jest **wypukły**, jeśli każdy odcinek łączący dowolne dwa punkty tego wielokąta jest w nim zawarty.

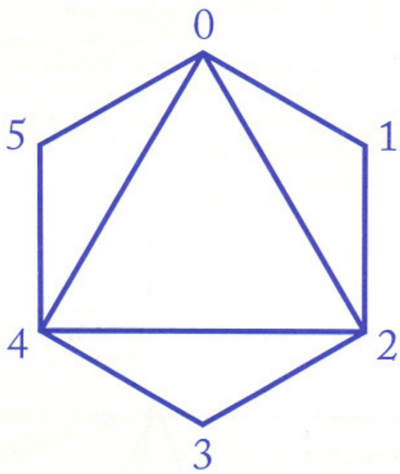
Trójkątem elementarnym w wielokącie wypukłym nazywamy każdy trójkąt, którego wierzchołkami są wierzchołki tego wielokąta.

Triangulacją wielokąta wypukłego nazywamy każdy zbiór elementarnych trójkątów w tym wielokącie, w którym żadne dwa trójkąty nie przecinają się, a wszystkie razem pokrywają cały wielokąt.

Dane są wielokąt wypukły i jego triangulacja. Jaka jest największa liczba trójkątów w tej triangulacji, które może przeciąć jeden elementarny trójkąt w tym wielokącie?

Przykład

Rozważmy następującą triangulację:



Trójkąt elementarny (1,3,5) przecina wszystkie trójkąty w tej triangulacji.

Zadanie

Napisz program, który:
- wczytuje z pliku tekstowego WIE.IN liczbę wierzchołków wielokąta i jego triangulację;
- oblicza największą liczbę trójkątów tej triangulacji, które przecina pojedynczy, elementarny trójkąt w danym wielokącie;
- zapisuje wynik w pliku tekstowym WIE.OUT .

Wejście

Pierwszy wiersz pliku WIE.IN zawiera liczbę n, $3 \leq n \leq 1000$. Jest to liczba wierzchołków wielokąta.

Wierzchołki wielokąta są ponumerowane kolejno 0, 1, ..., n-1, zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Kolejne n-2 wiersze zawierają opisy trójkątów w triangulacji. W wierszu i+1, $1 \leq i \leq n$-2, zapisane są trzy liczby całkowite a, b, c oddzielone pojedynczymi odstępami. Są to numery wierzchołków i-tego trójkąta w triangulacji.

Wyjście

W pierwszym i jedynym wierszu pliku WIE.OUT należy zapisać jedną liczbę całkowitą – największą liczbę trójkątów w triangulacji, które przecina jeden elementarny trójkąt w wielokącie wejściowym.

Przykład

Dla pliku wejściowego WIE.IN:

```
6
0 1 2
2 4 3
4 2 0
0 5 4
```

poprawnym rozwiązaniem jest plik tekstowy WIE.OUT:

```
4
```

Twój program powinien szukać pliku WIE.IN w katalogu bieżącym i tworzyć plik WIE.OUT również w bieżącym katalogu. Plik zawierający napisany przez Ciebie program w postaci źródłowej powinien mieć nazwę WIE.???, gdzie zamiast ??? należy wpisać co najwyżej trzyliterowy skrót nazwy użytego języka programowania. Ten sam program w postaci wykonalnej powinien być zapisany w pliku WIE.EXE.

SUMA CIĄGU JEDYNKOWEGO

Ciąg liczbowy o wartościach będących liczbami całkowitymi nazywamy **jedynkowym**, jeżeli dowolne jego sąsiednie wyrazy różnią się od siebie dokładnie o jeden oraz jego pierwszy wyraz jest równy 0. Bardziej precyzyjnie: niech $[a_1, a_2, ..., a_n]$ będzie ciągiem o wartościach całkowitych; powiemy, że ten ciąg jest **jedynkowy**, jeżeli
- dla dowolnej liczby całkowitej k spełniającej nierówność $1 \leq k < n$ zachodzi warunek $|a_k - a_{k+1}| = 1$ oraz
- a_1=0.

Zadanie

Napisz program, który:
- wczyta z pliku tekstowego SUM.IN dwie liczby całkowite: długość ciągu i sumę elementów ciągu;
- wyznaczy ciąg jedynkowy o zadanej długości i sumie elementów lub stwierdzi, że taki ciąg nie istnieje;
- zapisze rezultat w pliku tekstowym SUM.OUT.

Wejście

W pliku tekstowym SUM.IN są zapisane:
- w pierwszym wierszu – liczba n elementów ciągu, spełniająca nierówność $1 \leq n \leq 10\,000$;
- w drugim wierszu – liczba S będąca żądaną sumą elementów ciągu, spełniająca nierówność $|S| \leq 50\,000\,000$.

Wyjście

W pierwszych n wierszach pliku tekstowego SUM.OUT należy zapisać n liczb całkowitych (po jednej w wierszu) będących kolejnymi wyrazami ciągu jedynkowego (k-ty wyraz w k-tym wierszu) o zadanej sumie S lub słowo NIE, jeżeli taki ciąg nie istnieje.

Przykład

Dla pliku wejściowego SUM.IN o zawartości:

```
8
4
```

poprawnym rozwiązaniem jest plik wyjściowy SUM.OUT o zawartości:

```
0
1
2
1
0
-1
0
1
```

Twój program powinien szukać pliku SUM.IN w katalogu bieżącym i tworzyć plik SUM.OUT również w bieżącym katalogu. Plik zawierający napisany przez Ciebie program w postaci źródłowej powinien mieć nazwę SUM.???, gdzie zamiast ??? należy wpisać co najwyżej trzyliterowy skrót nazwy użytego języka programowania. Ten sam program w postaci wykonalnej powinien być zapisany w pliku SUM.EXE.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
INSTYTUT INFORMATYKI UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY INFORMATYCZNEJ

V OLIMPIADA INFORMATYCZNA

AB-SŁOWA

Każdy niepusty ciąg, którego elementami są małe litery a i b, a także ciąg pusty nazywamy **ab-słowem**. Jeżeli $X = [x_1, ..., x_n]$ jest ab-słowem, a i, j takimi dowolnymi liczbami całkowitymi, że $1 \leq i \leq j \leq n$, to przez $X[i..j]$ będziemy oznaczali podsłowo X składające się z kolejnych liter $x_i, ..., x_j$. Powiemy, że ab-słowo $X = [x_1, ..., x_n]$ jest **ładnie zbudowane**, jeżeli zawiera tyle samo liter a co b i dla każdego i=1,...n podsłowo $X[1..i]$ zawiera co najmniej tyle samo liter a co liter b.

Podamy teraz indukcyjną definicję **podobieństwa** ładnie zbudowanych ab-słów:

- każde dwa puste ab-słowa (tzn. nie zawierające żadnych liter) są podobne,
- dwa niepuste, ładnie zbudowane ab-słowa $X = [x_1, ..., x_n]$ i $Y = [y_1, ..., y_m]$ są podobne, jeżeli są tej samej długości (n=m) i jest spełniony jeden z następujących warunków:
  1. x_1=y_1, x_n=y_n oraz $X[2..n-1]$ i $Y[2..n-1]$ są ładnie zbudowanymi, podobnymi ab-słowami,
  2. istnieje i, $1 \leq i < n$, takie, że słowa $X[1..i]$, $X[i+1..n]$ są ładnie zbudowanymi ab-słowami i
     a) $Y[1..i]$, $Y[i+1..n]$ są ładnie zbudowanymi ab-słowami i $X[1..i]$ jest podobne do $Y[1..i]$ oraz $X[i+1..n]$ jest podobne do $Y[i+1..n]$, lub
     b) $Y[1..n-i]$, $Y[n-i+1..n]$ są ładnie zbudowanymi ab-słowami i $X[1..i]$ jest podobne do $Y[n-i+1..n]$ oraz $X[i+1..n]$ jest podobne do $Y[1..n-i]$.

Stopniem zróżnicowania niepustego zbioru S ładnie zbudowanych ab-słów nazywamy największą liczbę ab-słów, które można wybrać z S tak, żeby żadne dwa wybrane słowa nie były do siebie podobne.

Zadanie

Napisz program który:
- wczyta z pliku tekstowego ABS.IN elementy zbioru S;
- policzy stopień zróżnicowania S;
- zapisze wynik w pliku tekstowym ABS.OUT.

Wejście

W pliku tekstowym ABS.IN są zapisane :
- w pierwszym wierszu liczba n elementów zbioru S, $1 \leq n \leq 1000$;
- w kolejnych n wierszach elementy zbioru S tj. ładnie zbudowane ab-słowa, po jednym w każdym wierszu; pierwsza litera każdego ab-słowa jest pierwszym symbolem w wierszu i między kolejnymi literami w słowie nie ma żadnych innych znaków; każde ab-słowo ma długość co najmniej 1, a co najwyżej 200.

Wyjście

W pierwszym i jedynym wierszu pliku tekstowego ABS.OUT należy zapisać jedną liczbę całkowitą – stopień zróżnicowania S.

Przykład

Dla pliku wejściowego ABS.IN o zawartości:

```
3
aabaabbbab
abababaabb
abaaabbabb
```

poprawnym rozwiązaniem jest plik ABS.OUT o zawartości:

```
2
```

Twój program powinien szukać pliku ABS.IN w katalogu bieżącym i tworzyć plik ABS.OUT również w bieżącym katalogu. Plik zawierający napisany przez Ciebie program w postaci źródłowej powinien mieć nazwę ABS.???, gdzie zamiast ??? należy wpisać co najwyżej trzyliterowy skrót nazwy użytego języka programowania. Ten sam program w postaci wykonalnej powinien być zapisany w pliku ABS.EXE.

Wskazówki dla uczestników:
1. Przeczytaj uważnie nie tylko tekst zadań, ale i treść „Zasad organizacji zawodów".
2. Przestrzegaj dokładnie warunków określonych w tekście zadania, w szczególności wszystkich reguł dotyczących nazw plików.
3. Twój program powinien czytać dane z pliku i zapisywać wyniki do pliku. Nazwy tych plików powinny być takie jak podano w treści zadania.
4. Dane testowe są zawsze zapisywane bezbłędnie, zgodnie z warunkami zadania i podaną specyfikacją wejścia. Twój program nie musi tego sprawdzać. Nie przyjmuj żadnych założeń, które nie wynikają z treści zadania.
5. Staraj się dobrać taką metodę rozwiązania zadania, która jest nie tylko poprawna, ale daje wyniki w jak najkrótszym czasie.
6. Ocena za rozwiązanie zadania jest określona na podstawie wyników testowania programu i uwzględnia poprawność oraz efektywność metody rozwiązania użytej w programie.

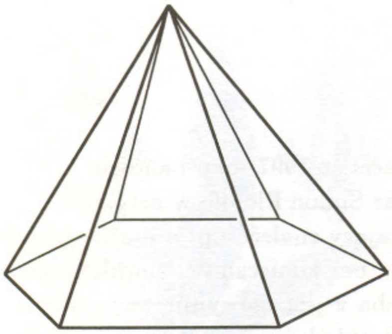
Przewodniczący Komitetu Głównego
Olimpiady Informatycznej

prof. dr hab. inż. Stanisław Waligórski

Olimpiada Informatyczna mogła dotąd działać dzięki wsparciu wielu osób, instytucji i firm. W przeprowadzeniu i uświetnieniu IV Olimpiady szczególnie pomogły:

Polsko-Japońska Wyższa Szkoła Technik Komputerowych w Warszawie	udostępnienie budynku i świetnie wyposażonych pracowni komputerowych na zawody II i III stopnia oraz stworzenie bardzo dobrych warunków pracy w czasie zawodów
Ogólnopolska Fundacja Edukacji Komputerowej	ufundowanie cennych nagród dla laureatów i stałe wspieranie finansowe Olimpiady
Uniwersytet im. Mikołaja Kopernika w Toruniu	udostępnienie budynku i bardzo dobrze wyposażonej pracowni komputerowej na zawody II stopnia
Optimus SA	ufundowanie nagród dla najlepszych zawodników
Wydawnictwo Naukowe PWN	stałe obdarowywanie zawodników cennymi, wspierającymi ich rozwój książkami
Ośrodek Edukacji Informatycznej i Zastosowań Komputerów w Warszawie	wspieranie organizacyjne Olimpiady

i wielu pracowników i studentów Instytutów Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego i Uniwersytetu Wrocławskiego

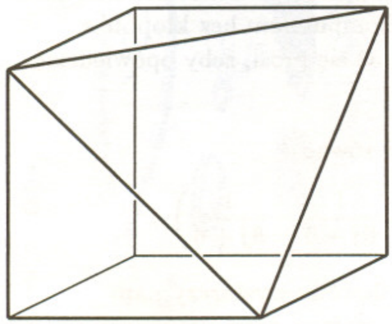


Rys. 3. $(W,\ K,\ S) = (7,\ 12,\ 7)$, w układzie $((1 \times 6,\ 6 \times 3),\ 12,\ (1 \times 6,\ 6 \times 3))$.

Polega ona na tym, że fragment tego wielościanu został obrócony względem pozostałej części o kąt $45°$. Ale tego przykładu akurat Euler raczej nie znał. Formalnie więc odpowiedź jest **tak**, ale jej styl może się nie podobać.

A czy są bardziej różniące się wielościany o tych samych S i W? Jak ich szukać? Metoda, którą proponuję, jest następująca. Podzielmy ściany według liczby boków. Pomnóżmy liczbę ścian danego rodzaju przez liczbę boków tej ściany i dodajmy wszystkie w ten sposób otrzymane iloczyny dla danego wielościanu. Otrzymana liczba to $2K$ i nietrudno się domyślić dlaczego. Można więc tę liczbę $2K$ rozkładać na takie iloczyny. Dla tych, którzy bardziej lubią wierzchołki od ścian, jest analogiczna propozycja – tym razem wierzchołki dzielimy według liczby wychodzących z nich krawędzi. Na rysunku 3 przedstawiony jest ostrosłup sześciokątny, odpowiadająca mu trójka $(W,\ K,\ S)$ i rozkład $2K$ na sumę iloczynów: jest jeden sześciokąt i 6 trójkątów $(1 \times 6 + 6 \times 3 = 24)$ – ciekawe, że jest to również rozkład na sumę iloczynów według wierzchołków (jest jeden sześcioramienny i 6 trójramiennych). Ale można rachować i tak: $24 = 3 \times 4 + 4 \times 3$ (ścian jest, tak jak poprzednio, 7) – temu rozkładowi odpowiada też wielościan o tych samych, co ostrosłup, wartościach S i W (rys. 4). A więc rzeczywiście odpowiedź na rozważane pytanie jest pozytywna: *istnieją zupełnie różne wielościany mające tę samą liczbę ścian, tę samą liczbę wierzchołków i tę samą liczbę krawędzi*

(niematematyczne słowo *zupełnie* napisałem ze względu na przykład Załgalera).

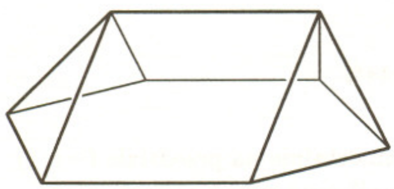


Rys. 4. $(W,\ K,\ S) = (7,\ 12,\ 7)$, w układzie $((3 \times 4,\ 4 \times 3),\ 12,\ (3 \times 4,\ 4 \times 3))$.

Można by uważać, że to jest koniec problemu. Ale dla usposobienia matematycznego będzie to właśnie początek. Rozważmy pytanie, czy każdemu rozkładowi odpowiada jakiś wielościan. Dla samodzielnej pracy Czytelnika proponuję rozważenie bardzo podobnego przykładu – ostrosłupa ośmiokątnego. Dla niego mamy

$1 \times 8 + 8 \times 3 = 32 = 5 \times 4 + 4 \times 3;$

czy istnieje drugi z tych wielościanów?

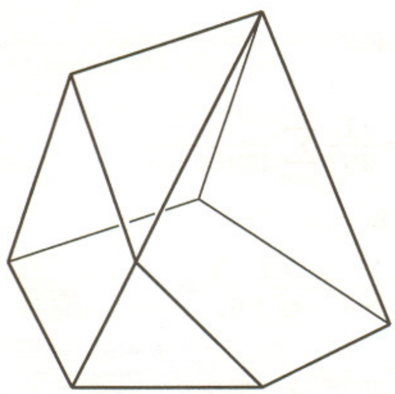


Rys. 5. $(W,\ K,\ S) = (8,\ 13,\ 7)$, w układzie $((2 \times 4,\ 6 \times 3),\ 13,\ (1 \times 6,\ 2 \times 4,\ 4 \times 3))$.

Polecam też rozwiązany przeze mnie przykład namiotu o siedmiu ścianach z rysunku 5. Mamy:

$$26 = 1 \times 6 + 2 \times 4 + 4 \times 3 = 1 \times 5 + 3 \times 4 + 3 \times 3 = 2 \times 5 + 1 \times 4 + 4 \times 3 =$$
$$= 1 \times 7 + 1 \times 4 + 5 \times 3 = 1 \times 8 + 6 \times 3.$$

Tutaj wielościany odpowiadające rozkładom podanym w pierwszym wierszu istnieją (rys. 5–7), a odpowiadające rozkładom w drugim wierszu – nie. Nie jest tym razem trudno uzasadnić, dlaczego ostatnie dwa rozkłady są złe (np. w ostatnim do ośmiokąta możemy przyczepić jedynie sześć innych ścian, co wielościanu nie utworzy).

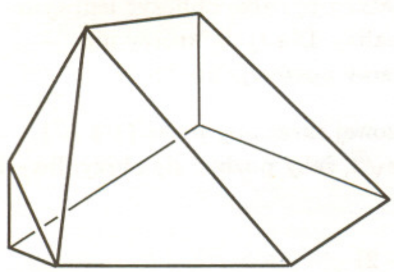


Rys. 6. $(W,\ K,\ S) = (8,\ 13,\ 7)$, w układzie $((2 \times 4,\ 6 \times 3),\ 13,\ (1 \times 5,\ 3 \times 4,\ 3 \times 3))$.

I znów powstają pytania:

- jak poznać, którym rozkładom odpowiadają wielościany, a którym nie?
- ilu maksymalnie rozkładom danego S odpowiadają wielościany (widać, że mogą być trzy, ale może ta liczba rośnie wraz z S) ?
- które z wielościanów mają swoich załgalerowskich krewnych, czyli wielościany inaczej złożone z tych samych ścian?

No i, oczywiście, wiele innych pytań.



Rys. 7. $(W,\ K,\ S) = (8,\ 13,\ 7)$, w układzie $((2 \times 4,\ 6 \times 3),\ 13,\ (2 \times 5,\ 1 \times 4,\ 4 \times 3))$.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

Dalekie cyfry π

Paweł STRZELECKI

W pierwszym numerze *Mathematical Intelligencer* z 1997 roku panowie David Bailey, Jonatan i Peter Borweinowie oraz Simon Plouffe w artykule *Poszukiwanie* π opisują m.in. algorytm pozwalający znaleźć np. miliardową cyfrę rozwinięcia liczby π w układzie szesnastkowym, bez konieczności znajdowania poprzednich cyfr. Jest to o tyle ciekawe, że liczba π jest niewymierna, a więc cyfry jej rozwinięcia (przy dowolnej podstawie) układają się w sposób nieokresowy, chaotyczny. Algorytm jest zadziwiająco prosty, matematykę stojącą u jego podstaw zna student pierwszego roku (albo nawet maturzysta z ambicjami), a Czytelnicy lubiący obcować z komputerem bez kłopotów napiszą odpowiedni program. Jednym słowem, aż się prosi, żeby opowiedzieć o wszystkim na naszych łamach.

Punktem wyjścia do konstrukcji algorytmu jest równość

$$\pi = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{16^j}\left(\frac{4}{8j+1} - \frac{2}{8j+4} - \frac{1}{8j+5} - \frac{1}{8j+6}\right). \tag{1}$$

Do zrozumienia kolejnych kroków nietrudnego dowodu wystarczy nam (w zasadzie...) umiejętność znajdowania sumy szeregu geometrycznego i całkowania funkcji wymiernych. Oto szczegóły.

Dla $k \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ oraz $x \in (-1, 1)$ mamy

$$\frac{x^{k-1}}{1-x^8} = \sum_{j=0}^{\infty} x^{k-1+8j}.$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny niemal jednostajnie na przedziale $(-1, 1)$, a to znaczy, że można go, bez obaw o wynik, scałkować wyraz po wyrazie na dowolnym przedziale domkniętym zawartym w $(-1, 1)$. Zatem,

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{k-1+8j}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{k+8j}}{k+8j}\bigg|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{16^j(8j+k)}.$$

Korzystając z tej równości łatwo sprawdzamy, że

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{16^j}\left(\frac{4}{8j+1} - \frac{2}{8j+4} - \frac{1}{8j+5} - \frac{1}{8j+6}\right) =$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x \overset{\text{ozn.}}{\equiv} I.$$

Osoby starsze o nastawieniu sadystycznym kazałyby tę całkę obliczyć leniwym studentom walczącym o zaliczenie ćwiczeń z analizy. Dla tych, którzy nie dysponują królikami doświadczalnymi, wskazujemy poszczególne kroki.

Po pierwsze, licznik i mianownik fukcji podcałkowej skracamy przez $(1 + x^2)$, a następnie wprowadzamy nową zmienną $y = x\sqrt{2}$, żeby pozbyć się obrzydliwych pierwiastków i otrzymać równość

$$I = \int_0^1 \frac{16(y^3 + y^2 - 2)}{(y^2 - 2)(y^4 + 4)}\mathrm{d}x.$$

Rozwiązanie zadania M 828.
Przekształcany okrąg jest częścią wspólną pewnych dwóch sfer nie przechodzących przez punkt O, wobec czego jego obraz w inwersji j jest, na mocy poprzedniego zadania, częścią wspólną dwóch sfer. Jest to więc zbiór pusty, punkt, okrąg albo sfera. Czytelnik zechce samodzielnie wykluczyć przypadki przeczące tezie zadania.
A jaki jest obraz w inwersji j okręgu przechodzącego przez punkt O?

Ponieważ

$$y^3 + y^2 - 2 = (y^2 + 2y + 2)(y - 1)\,,$$
$$y^4 + 4 = (y^2 + 2y + 2)(y^2 - 2y + 2)\,,$$

więc ostatecznie mamy

$$I = \int\limits_0^1 \frac{4y}{y^2 - 2}\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{4y - 8}{y^2 - 2y + 2}\mathrm{d}x =$$
$$= \left(2\ln\frac{2 - y^2}{y^2 - 2y + 2} + 4\,\mathrm{arctg}(y - 1)\right)\Bigg|_0^1 = \pi\,,$$

co kończy dowód wzoru (1) – nieuczciwy o tyle, że wzór najpierw odgadnięto na podstawie wielu eksperymentów numerycznych, a dopiero potem udowodniono.

Rozważmy teraz jedną z czterech sum po prawej stronie wzoru (1), np.

$$S_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{16^j(8j + 1)}\,.$$

Cyfrę, która stoi na $(n + 1)$-szym miejscu rozwinięcia szesnastkowego liczby S_1, zobaczymy także na samym początku rozwinięcia (szesnastkowego) części ułamkowej liczby $16^n \cdot S_1$. (Kto nie czuje się przekonany, niech sprawdzi najpierw, że cyfra setnych liczby x to $[10(10x - [10x])]$.) By wykorzystać tę prostą obserwację, zapiszmy równości

Uwaga:

$x \bmod 1 := x - [x]$

$$16^n S_1 - [16^n S_1] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{16^n}{16^j(8j + 1)} \bmod 1 =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{16^{n-j} \bmod (8j + 1)}{8j + 1} \bmod 1 + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{16^{n-j}}{8j + 1} \bmod 1\,.$$

Licznik każdego składnika pierwszej (skończonej!) sumy można łatwo obliczyć, wykorzystując szybki algorytm znajdowania potęg liczby naturalnej opisany przez W. Guzickiego w *Delcie* 3/1997. Dzielenie i dodawanie modulo 1 z rozsądną dokładnością to też operacje nieskomplikowane. Jeśli zaś chodzi o drugą sumę, to wystarczy z niej wziąć kilka początkowych wyrazów – cały nieskończony ogon nie ma bowiem wpływu na pierwszych kilku cyfr rozwinięcia szesnastkowego liczby $16^n S_1 - [16^n S_1]$ (można się o tym przekonać stosując kryterium porównawcze i wzór na sumę szeregu geometrycznego).

Kolejne cyfry układu szesnastkowego to: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F.

Z pozostałymi sumami występującymi po prawej stronie (1) należy postąpić podobnie. Dopracowanie szczegółów technicznych, oszacowanie złożoności obliczeniowej i napisanie odpowiedniego programu nie powinno sprawić Zainteresowanym Czytelnikom zbyt wielu trudności. Niejaki Fabrice Bellard twierdzi podobno, że w rozwinięciu szesnastkowym π na miejscu o numerze 10^{11} zaczyna się ciąg cyfr 9C381... Chętnie napiszemy o tym, że nasi Czytelnicy są lepsi.

Zabawa w znajdowanie dalekich cyfr rozwinięć π ma, wbrew pozorom, także pewien sens praktyczny. Dzięki próbom przyspieszania takich obliczeń stworzono m.in. nowe algorytmy szybkiego mnożenia macierzy, szeroko stosowane w różnych dziedzinach. Ponadto, programy obliczające π wykorzystuje się do testowania poprawności działania sprzętu komputerowego i systemów operacyjnych. W styczniu 1986 wykryto np. w ten sposób błąd w działaniu jednego z komputerów Cray 2 w ośrodku obliczeniowym NASA.

Rozwiązanie zadania M 827.
Niech p będzie prostą przechodzącą przez punkt O i środek przekształcanej sfery, P zaś niech będzie dowolną płaszczyzną zawierającą prostą p. Jak łatwo zauważyć, inwersja j będzie przekształcać punkty z płaszczyzny P na punkty z płaszczyzny P, a jeśli rozważać tylko jej obcięcie do płaszczyzny P, to stanie się zwykłą płaską inwersją względem okręgu o środku O i promieniu r. Z własności płaskiej inwersji wnosimy, że przekrój obrazu przekształcanej sfery płaszczyzną P będzie pewnym okręgiem na płaszczyźnie P, o środku leżącym na prostej p. Ponieważ płaszczyznę P możemy wybierać dowolnie, z symetrii obrotowej względem prostej p wynika teza zadania.

Z przykrością informujemy natomiast, że dla cyfr rozwinięcia *dziesiętnego* liczby π podobny algorytm nie jest znany – aby dowiedzieć się, jaka jest n-ta cyfra dziesiętna π, trzeba najpierw poznać wszystkie poprzednie.

Trójki pitagorejskie

Trójka pitagorejska to trójka (a, b, c) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają warunek

$$(1) \qquad a^2 + b^2 = c^2\,,$$

np. $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, albo $(201, 20\,200, 20\,201)$. Jeśli długości boków trójkąta prostokątnego tworzą trójkę pitagorejską, to ów trójkąt nazywamy *trójkątem pitagorejskim*. By dowiedzieć się, jak generuje się trójki pitagorejskie, wystarczy zaopatrzyć w dowód wszystkie podane niżej ponumerowane twierdzenia. Potrzebna jest w tym celu solidna znajomość matematyki w zakresie szkoły podstawowej.

1. Wśród wszystkich trójkątów pitagorejskich podobnych do ustalonego trójkąta istnieje trójkąt najmniejszy. Długości jego przyprostokątnych a i b są liczbami względnie pierwszymi.

Trójkę pitagorejską (a, b, c), w której a i b są względnie pierwsze, nazwiemy *trójką pierwotną*.

2. Trzy liczby naturalne tworzące trójkę pierwotną są parami względnie pierwsze.

Wskazówka: kwadrat dowolnej liczby naturalnej daje z dzielenia przez cztery resztę 0 lub 1.

3. W każdej trójce pierwotnej jedna z liczb a, b jest parzysta, a druga – nie.

W każdym z punktów 4–7 poniżej zakładamy, że trójka liczb naturalnych (a, b, c) jest trójką pierwotną, w której $b = 2k$ jest liczbą parzystą.

4. Dla pewnych liczb naturalnych x, y mamy

$$(2) \qquad c - a = 2x, \qquad c + a = 2y\,.$$

5. Liczby naturalne x, y, określone równaniami (2), są względnie pierwsze.

Z powyższego faktu i z jednoznaczności rozkładu liczby $b^2 = (c - a)(c + a)$ na czynniki pierwsze płynie następujący wniosek.

6. Liczby x i y określone równaniami (2) są pełnymi kwadratami: dla pewnych m, n naturalnych mamy

$$(3) \qquad x = n^2, \qquad y = m^2\,.$$

Ponadto, łatwo sprawdzić, że

7. Dokładnie jedna z pary liczb m, n jest parzysta, a liczba b dzieli się przez 4.

Podsumowując uzyskane do tej pory informacje możemy bez kłopotu podać sposób generowania wszystkich trójek pierwotnych.

8. Jeśli (a, b, c) jest trójką pierwotną, to

$$(4) \qquad a = m^2 - n^2, \qquad b = 2mn, \qquad c = m^2 + n^2$$

dla pewnych liczb naturalnych m i n $(m > n)$ jednoznacznie wyznaczonych przez c i a. Liczby m i n są względnie pierwsze; dokładnie jedna z nich jest parzysta.

9. Na odwrót, jeśli liczby naturalne $m > n$ są względnie pierwsze i dokładnie jedna z nich jest parzysta, to liczby a, b i c, określone wzorami (4), tworzą trójkę pierwotną.

Morał z tego wszystkiego płynie następujący.

10. Jeśli r, m i n są dowolnymi liczbami naturalnymi i $m > n$, to liczby

$$(5) \qquad a = r(m^2 - n^2), \qquad b = 2rmn, \qquad c = r(m^2 + n^2)$$

tworzą trójkę pitagorejską; w dodatku, w ten sposób można uzyskać wszystkie, nie tylko pierwotne, trójki pitagorejskie (a, b, c).

A na deser proponujemy jeszcze dwa eleganckie twierdzenia.

11. Promień koła wpisanego w trójkąt pitagorejski jest liczbą naturalną.

12. Iloczyn liczb (a, b, c) tworzących trójkę pitagorejską dzieli się przez $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

P.S.

Rozwiązanie zadania F 463.
Siła nacisku ciała m na równię wynosi $N = mg\cos\alpha$. Składowa pionowa tej siły $N\cos\alpha = mg\cos^2\alpha$ ciśnie na wagę. Zatem wskazanie wagi podczas ruchu ciała wyniesie

$$w = M + m\cos^2\alpha = 2{,}75 \text{ kg}\,.$$

Funkcja zeta Riemanna, część II – hipoteza Riemanna

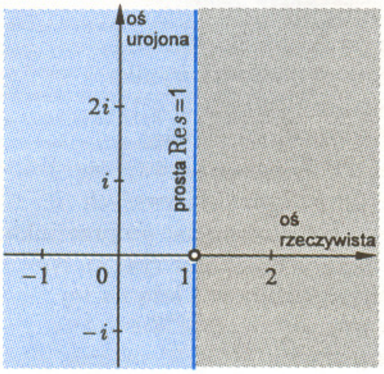
Roman DWILEWICZ i Ján MINÁČ

1. Przypomnienie

Dla przypomnienia, w pierwszej części tego artykułu zdefiniowaliśmy funkcję zeta Riemanna $\zeta = \zeta(s)$ następującymi wzorami:

$$
\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{lub równoważnie}\\
(1)\qquad &= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1}\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1} \cdot \ldots = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},
\end{aligned}
$$

gdzie iloczyn nieskończony jest po wszystkich liczbach pierwszych. Choć powyższe wzory mają sens tylko dla $s = a + ib$ z półpłaszczyzny $a = \operatorname{Re} s > 1$, to jednak funkcja zeta może być analitycznie przedłużona na całą płaszczyznę zespoloną $\mathbf{C}$ z wyjątkiem 1 (patrz rys. 1). Wiemy też, że funkcja analityczna zespolona f lokalnie w otoczeniu punktu z_0 może być przedstawiona jako suma szeregu potęgowego $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, gdzie $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$. Jej przedłużenie analityczne definiowaliśmy używając takich przedstawień.



Rys. 1

2. Dziwne wzory na sumy szeregów rozbieżnych

Fakt, że funkcja $\zeta(s)$ jest dobrze zdefiniowana na $\mathbf{C}$ oprócz 1, może być wykorzystany do nadania „sensu” pewnym szeregom rozbieżnym i podania wartości ich „sum”. Na przykład formalnie w (1) możemy wstawić $s = 0$, $s = -1$ lub $s = -2$. Oczywiście, patrząc bezpośrednio na szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} n$ lub $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ nie możemy powiedzieć, że ich sumy są skończone, bo każdy widzi, że są nieskończone.

Natomiast gdy spojrzymy na sumy powyższych szeregów jako na wartości $\zeta(0) = -1/2$, $\zeta(-1) = -1/12$ czy $\zeta(-2) = 0$, możemy „powiedzieć”, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \zeta(0) = -\frac{1}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 = \zeta(-2) = 0,$$

co jest nieco zaskakujące. W ten sposób patrzył na niektóre szeregi rozbieżne już Euler. Prawie dwieście lat później odkrył to na nowo matematyk hinduski Ramanujan (1887–1920), czym poruszył wielu mu współczesnych.

3. Niektóre fascynujące wartości funkcji zeta

Jak widać, problem wartości funkcji zeta jest dość ważny. Niestety, dla niewielu argumentów s znane są wzory na $\zeta(s)$. Najbardziej znane są wartości, które podał już Euler:

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(4) = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\zeta(6) = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{945}, \qquad \zeta(8) = \frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \ldots = \frac{\pi^8}{9450},$$

lub ogólniej $\zeta(2k) = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k} \frac{B_{2k}}{(2k)!}$, dla $k = 1, 2, \ldots$, gdzie B_j są tzw. liczbami Bernoulliego (zob. margines). Ponadto mamy

$$\zeta(-2k) = 0, \quad \zeta(1 - 2k) = \frac{(-1)^k B_{2k}}{2k}, \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots$$

Okazuje się, że wartości funkcji zeta w punktach $0, -1, -2, \ldots$ mogą być otrzymane w inny ciekawy sposób (patrz [M]). Mianowicie, żeby otrzymać np. $\zeta(0)$, bierzemy sumę pierwszych $x - 1$ składników w (1) dla $s = 0$, czyli $1 + 1 + \ldots + 1$ wzięte $x - 1$ razy, co daje właśnie $x - 1$, traktujemy tę sumę jako funkcję zmiennej rzeczywistej x i całkujemy od 0 do 1, dostając $\int_0^1 (x - 1)\,\mathrm{d}x = -1/2$. Podobnie dla $\zeta(-1)$, bierzemy sumę pierwszych $x - 1$

Dobrze znane są wzory na sumę kolejnych liczb naturalnych czy sumę ich kwadratów:

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Szwajcarski matematyk Jacob Bernoulli (1654–1705) postawił sobie za cel znalezienie ogólnego wzoru na sumę k-tych potęg kolejnych liczb naturalnych dla $k = 0, 1, 2, \ldots$ Doprowadziło go to w naturalny sposób do pewnego ciągu liczb wymiernych B_k, nazwanych później jego imieniem. Okazuje się, że

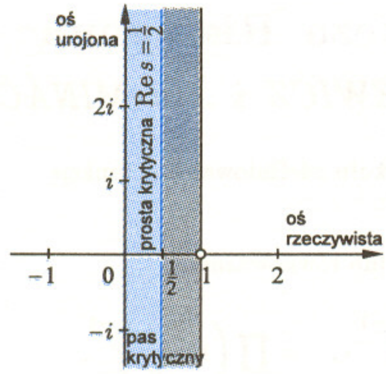
$$1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j},$$

gdzie liczby B_j definiuje się rekurencyjnie:

$$B_0 = 1, \; B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} B_j.$$

Np. $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$. Liczby Bernoulliego mają daleko głębsze zastosowanie niż tylko we wzorze na powyższą sumę. W świetle tego, co powiedzieliśmy w §2, nie jest zaskakujące, że niektóre wartości funkcji zeta wyrażają się (między innymi) za pomocą liczb Bernoulliego.

Niemiecki matematyk E. Kummer w 1847 r. udowodnił Wielkie Twierdzenie Fermata dla tzw. regularnych liczb pierwszych i podał ładne kryterium na regularność liczby pierwszej za pomocą liczb Bernoulliego.



Rys. 2. Jeśli Czytelnik udowodni, że funkcja ζ nie zeruje się wewnątrz szaro-kolorowego pasa, to będzie bardzo sławnym matematykiem.

składników w (1) dla $s = -1$, czyli $1 + 2 + \ldots + (x-1)$, co da $x(x-1)/2$, traktujemy to jako funkcję zmiennej rzeczywistej x i całkujemy od 0 do 1, otrzymując $\int_0^1 x(x-1)/2\, dx = -1/12$.

Natomiast wzory na $\zeta(2k+1)$, dla $k = 1, 2, \ldots$, nie tylko nie są znane, ale nie wiadomo nawet, czy liczby $\zeta(2k+1)$ są wymierne, czy nie (oprócz $\zeta(3)$, której niewymierność udowodnił francuski matematyk R. Apéry w 1978 roku, [A], [P]).

4. Co to jest hipoteza Riemanna?

Jak już wcześniej zauważyliśmy, funkcja $\zeta(s)$ nie zeruje się dla $\mathrm{Re}\, s > 1$. Ze wzoru na przedłużenie (którego tu nie będziemy przytaczać) wynika, że jedynymi zerami w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}\, s < 0$ są $s = -2k$, dla $k = 1, 2, \ldots$ Są to tak zwane zera trywialne. Pozostałe zera funkcji zeta leżą więc w tzw. pasie krytycznym $0 \le \mathrm{Re}\, s \le 1$ (patrz rys. 2). Te zera nazywają się zerami nietrywialnymi. W obecnej erze komputerów policzono pierwszych półtora miliarda zer nietrywialnych z dokładnością do kilku miejsc po przecinku. Wszystkie leżą na prostej $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$, tzw. prostej krytycznej (patrz rys. 2). Nie pozwala to, oczywiście, twierdzić, że wszystkie nietrywialne zera leżą na tej prostej. Przypuszczenie, że tak w istocie jest, nazywa się *hipotezą Riemanna* (dalej w skrócie HR) i było sformułowane po raz pierwszy przez Riemanna w jego słynnej pracy z 1859 roku. Po udowodnieniu Wielkiego Twierdzenia Fermata przez Andrew Wilesa w 1995 roku można chyba powiedzieć, że hipoteza Riemanna jest najważniejszą hipotezą we współczesnej matematyce. Przez prawie półtora wieku najwybitniejsi matematycy próbują ją udowodnić lub obalić, niestety, bez większych sukcesów.

Nawet słabsze wersje hipotezy Riemanna nie są udowodnione. Np. nie wiadomo, czy istnieje taka liczba $1/2 < a_0 < 1$, że $\zeta(s) \neq 0$ dla $a_0 < \mathrm{Re}\, s < 1$. Nie wiadomo też, czy wszystkie nietrywialne zera funkcji zeta są proste czy wielokrotne, tzn. czy pochodna funkcji zeta w punktach zerowych jest różna czy równa zeru.

Natomiast jest wiele częściowych wyników idących w kierunku HR. Angielski matematyk G.H. Hardy udowodnił w 1914 roku, że na prostej $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$ jest nieskończenie wiele zer. Dwaj matematycy francuscy, J. Hadamard i Ch.J. de la Vallée Poussin, udowodnili niezależnie w 1896 roku, że $\zeta(s)$ nie zeruje się na prostej $\mathrm{Re}\, s = 1$, co razem ze wzorem na przedłużenie daje, że funkcja nie zeruje się też na prostej $\mathrm{Re}\, s = 0$.

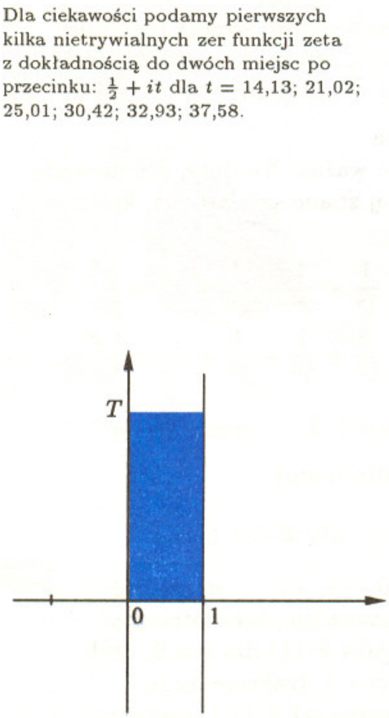
Dla ciekawości podamy pierwszych kilka nietrywialnych zer funkcji zeta z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku: $\frac{1}{2} + it$ dla $t =$ 14,13; 21,02; 25,01; 30,42; 32,93; 37,58.

Można też „oszacować” liczbę zer funkcji zeta. Mianowicie, jeśli oznaczymy przez $N(T)$ liczbę zer funkcji zeta w prostokącie $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$, $0 < \mathrm{Im}\, s \le T$ (patrz rys. 3), to ma miejsce następująca własność:

$$N(T) \approx \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi},$$

tzn. $N(T)$ zachowuje się „prawie” jak prawa strona dla dużych T. Oszacowanie to przewidział Riemann w 1859 r., ale dowód znalazł dopiero H. von Mangoldt przeszło 30 lat poźniej.

Jeśli HR okazałaby się prawdziwa, wyjaśniłoby to wiele problemów współczesnej matematyki. Wiele twierdzeń ma obecnie postać: *Jeśli HR jest prawdziwa, to…* – strach więc pomyśleć, co by było, gdyby udało się HR obalić.



Rys. 3. W kolorowym prostokącie jest około $\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$ zer funkcji ζ.

5. Parę konsekwencji hipotezy Riemanna

Jednym z głównych powodów badania funkcji zeta było zainteresowanie rozkładem liczb pierwszych. Mianowicie, dla naturalnych x zdefiniujmy funkcję $\pi(x)$ jako *ilość liczb pierwszych mniejszych bądź równych* x. Istnieje konkretna zależność między tą funkcją a funkcją zeta Riemanna. Nie będziemy wdawać się w szczegóły, bo wychodzi to już poza ramy tego artykułu; powiemy jedynie, że wspomniani już Hadamard i de la Vallée Poussin używając właśnie funkcji zeta Riemanna udowodnili, że

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x}, \qquad (2)$$

tzn. $\pi(x)$ dla dużych x zachowuje się podobnie jak iloraz po prawej stronie. Jest to najprostsza wersja tzw. Twierdzenia o Liczbach Pierwszych. To, jak dobrze możemy oszacować błąd przybliżenia (2), zależy od rozkładu zer funkcji zeta Riemanna. Najlepsze oszacowanie błędu otrzymalibyśmy, gdyby HR była prawdziwa.

Inną ciekawą konsekwencją HR jest implikowane przez nią oszacowanie różnicy kolejnych liczb pierwszych. Jeśli przez p_n oznaczymy n–tą liczbę pierwszą, to z HR wynika, że istnieje taka stała C (niezależna od n), że

$$(3) \qquad p_{n+1} - p_n \leq C\sqrt{p_n}\,\log p_n\,.$$

Oszacowania w rodzaju (3) wykorzystuje się m.in. do numerycznego wyznaczania *stałej Bruna*, czyli sumy odwrotności liczb pierwszych bliźniaczych (jest to liczba skończona). Przy takiej właśnie okazji (przypadkiem) wykryto w 1994 roku błąd w konstrukcji procesora *Pentium* – pisaliśmy o tym w *Delcie* 10/1997. *Red.*

Bez założenia HR powyższego oszacowania nie udało się otrzymać. Problem oszacowania różnicy kolejnych liczb pierwszych ma długą historię. Udaje się otrzymać oszacowania typu

$$p_{n+1} - p_n \leq C\,p_n^{a+\varepsilon}$$

dla różnych a oraz $\varepsilon > 0$ dowolnie małego. Oczywiście główną rolę po prawej stronie gra czynnik p_n^a. Tutaj zaczynano od $a = 1 - \frac{1}{33\,000}$ (G. Hoheisel, 1930), poprzez $a = 1 - \frac{1}{250}$, 5/8, 3/5, 7/12, 13/23, 11/20, 17/31, 23/42, aż do $a = 0{,}535$. Ostatni wynik otrzymali R.C. Baker i G. Harman w 1996 r.

Oczywiście, jest wiele innych konsekwencji HR, które dotyczą liczb pierwszych. Czytelnik może znaleźć je w cytowanych monografiach. Są również konsekwencje nie związane bezpośrednio z liczbami pierwszymi. Dla przykładu wspomnimy tu o dwóch. Ján Moser (słowacki matematyk) w serii prac w latach 80. bieżącego stulecia wskazał na zastosowanie funkcji zeta w kosmologii. Mianowicie, zakładając, że HR jest prawdziwa, skonstruował on rozwiązania równań Einsteina–Friedmana, dotyczące sferycznych modeli Wszechświata. W innych pracach użyto uniwersalnego charakteru funkcji zeta (związane to jest z rozkładem wartości funkcji zeta) do wyliczenia tzw. całek Feynmana po trajektoriach, które mają duże znaczenie w mechanice kwantowej.

6. „Inne" hipotezy Riemanna

Analizując przez przeszło dwieście lat funkcję zeta, matematycy próbują różnych metod: np. uogólniania funkcji zeta czy definiowania funkcji zeta–podobnych. Pozwala to lepiej zrozumieć oryginalną funkcję zeta Riemanna. Oczywiście, naturalne jest pytanie o prawdziwość odpowiednika HR dla tych mutantów.

Wprowadzono np. analogi funkcji zeta, które są związane z pewnymi typami krzywych algebraicznych. Jak udowodnił w 1942 r. jeden z najwybitniejszych współcześnie żyjących matematyków, André Weil, odpowiednik hipotezy Riemanna jest prawdziwy dla niektórych z tych nowych funkcji. 31 lat później belgijski matematyk, Pierre Deligne, udowodnił prawdziwość pewnej nieco ogólniejszej hipotezy Weila i otrzymał za to w 1978 r. w Helsinkach Medal Fieldsa (wśród matematyków uznawany za odpowiednik Nagrody Nobla w ich dziedzinie).

Ostatnio ukazała się bardzo ciekawa praca [C] innego francuskiego matematyka, Alaina Connesa (laureata Medalu Fieldsa wręczonego w 1983 r. w Warszawie), w której proponuje on inne podejście do hipotezy Riemanna. Może jest to pierwszy krok do jej udowodnienia...

Z drugiej strony, dla wielu innych funkcji zeta–podobnych odpowiednik hipotezy Riemanna nie jest prawdziwy. Ten, kto udowodni oryginalną hipotezę Riemanna (przed czterdziestką – jest to jeden z warunków otrzymania medalu!), jest niemal stuprocentowym kandydatem do Medalu Fieldsa.

7. Zakończenie

Nawet z tak krótkiego i przeglądowego artykułu widać, że problematyka związana ze zdefiniowaną tak naturalnie funkcją zeta Riemanna jest trudna i głęboka; widać też, jak dużo (a z drugiej strony, jak mało) o tej funkcji wiadomo. Do badania tak prosto określonej funkcji używa się skomplikowanego aparatu z różnych dziedzin matematyki: analizy zespolonej, teorii liczb, geometrii algebraicznej, analizy harmonicznej i wielu innych. Być może któryś z Czytelników, zafascynowany pięknem funkcji ζ, przyczyni się do odkrycia jej tajemnic.

Literatura

[A] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$.* Astérisque 61, 11–13, 1979.

[C] A. Connes, *Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann.* C.R. Acad. Sci. Paris 323, 1231–1236, 1996.

[M] J. Mináč, *A remark on the values of the Riemann zeta function.* Expo. Math. 12, 459–462, 1994.

[P] A.J. van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of $\zeta(3)$.* An informal report. The Mathematical Intelligencer 1, 195–203, 1979.

Patrz w niebo

Zastosowanie chemii w astronomii ograniczone jest z natury rzeczy do miejsc, gdzie związki chemiczne w ogóle mogą istnieć. Nie ma mowy o związkach chemicznych we wnętrzach gwiazd, ale już na powierzchni gwiazd typu G o temperaturze rzędu 6000 K, a więc np. Słońca, jest dostatecznie chłodno, by istniały tam proste rodniki CH i CN. Istnieje tu też trochę osobliwy ujemny jon wodorowy, tzn. atom wodoru z dodatkowym elektronem. Ten bardzo nietrwały jon gra dużą rolę w tworzeniu linii widmowych, ponieważ, łatwo tracąc elektron, przyczynia się do niszczenia fotonów odpowiadających liniom widmowym. W gwiazdach chłodniejszych typu K o temperaturze 4000 K obecny jest „prawdziwy" związek chemiczny, mianowicie tlenek tytanu TiO, który najsilniejsze linie daje w gwiazdach najchłodniejszych, tzn. typu M o temperaturze 3000 K. W widmach niektórych z nich, oprócz związków już wymienionych, obserwuje się też linie C_2 oraz tlenków cyrkonu, itru i lantanu.

Ale naprawdę ciekawie jest dopiero w ośrodku międzygwiazdowym, no i na planetach. Do czego może chemia doprowadzić na planetach, widzimy sami rozejrzawszy się dookoła – nie jest to jednak przedmiotem badań astronomii. W ośrodku międzygwiazdowym jest najzimniej i choć trudno tu o większe ilości „surowców" z powodu silnego rozrzedzenia materii, wykryto w nim dziesiątki związków, w tym organiczne, łącznie z aminokwasami oraz – gazety codzienne bardzo lubią takie informacje – z alkoholem etylowym.

W zasadzie więc nie powinno być rewelacją, że niedawno do listy związków znalezionych w Kosmosie dołączył – proszę się nie śmiać! – podtlenek azotu N_2O, czyli po prostu gaz rozweselający. Grupa amerykańskich radioastronomów wykryła promieniowanie charakterystyczne dla N_2O pochodzące z wielkiego obłoku molekularnego Sagittarius B2, leżącego w odległości około 8 kpc od nas, a więc dość blisko centrum Galaktyki. Dotychczas jedynymi znanymi w materii międzygwiazdowej związkami azotu były: tlenek azotu NO oraz rodnik HNO. Odkrycie gazu rozweselającego potwierdziło wcześniejsze przypuszczenia chemików, że skoro obserwuje się te dwa pozostałe związki, to i podtlenek azotu też powinien tam występować. Względne zawartości tych związków zależą oczywiście od warunków panujących w obłokach materii rozproszonej, ale powinny też zależeć od czasu. Według obecnej wiedzy obłok Sagittarius B2 jest obłokiem na tyle młodym, że zawartość związków azotu jeszcze się w nim nie ustabilizowała, a jeżeli nowe obserwacje potwierdzą przypuszczenia chemików, to zawartość gazu rozweselającego może okazać się wskaźnikiem wieku obłoków.

Tomasz KWAST

Listopad

Późnym wieczorem w przybliżeniu w kierunku południowym około 30° nad horyzontem widać gwiazdozbiór Wieloryba (Cetus). Choć jest rozległy, trudno go wyraźnie zobaczyć, tworzą go bowiem niezbyt jasne gwiazdy. Za to leży w nim pierwsza znana w historii gwiazda zmienna (jeśli nie liczyć kilku supernowych widywanych sporadycznie od najdawniejszych czasów). Odkrył ją David Fabricius, holenderski astronom i teolog, w 1596 roku. Do tego czasu niebo oficjalnie uznawane było za coś solidnego i niezmiennego, a o wadze odkrycia zmienności blasku gwiazdy świadczy fakt, że nazwano ją Mira, czyli Cudowna. Dziś wiemy, że gwiazda ta jest zmienną pulsującą, czerwonym olbrzymem około 400 razy większym od Słońca. Jej jasność w okresie 332 dni zmienia się od około 2 mag do 10 mag, ponieważ jednak zmiany te nie są dokładnie powtarzalne, jasność Miry na ogół zawiera się w nieco węższych granicach. Mira ma towarzysza będącego również gwiazdą zmienną, a cały układ leży w odległości 40 pc od nas.

Wenus, Mars i Jowisz znajdują się w Koziorożcu i planety te doskonale widać wieczorem w zachodniej stronie nieba. Saturn jest w Rybach i widać go przez całą noc. Księżyc, którego pełnia wypada 14 XI, mocno zbliży się do Saturna 12 XI i zakryje Aldebarana 15 XI około godz. 21.

T. K.

Rozwiązanie zadania F 464.
Charakterystyka prądowo–napięciowa diody dana jest równaniem

$$I = I_0\left(\exp\left(\frac{eU}{kT}\right) - 1\right),$$

gdzie T jest temperaturą pokojową, $T \approx 293$ K, a k jest stałą Boltzmanna. Prąd w kierunku zaporowym ma postać

$$I_z = I_0\left(\exp\left(-\frac{eU}{kT}\right) - 1\right).$$

Porównując prądy otrzymujemy

$$\left|\frac{I}{I_z}\right| \approx \exp\left(\frac{eU}{kT}\right) \approx 2700.$$

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1998

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 337 (WT=1,53) i 338 (WT=1,97) z numeru 3/1997

Jerzy Witkowski	– Radlin	45,50
Jarosław Łazuka	– Warszawa	44,09
Marcin Kasperski	– Warszawa	41,31
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	36,81
Tomasz Rawlik	– Braunschweig	36,80

Pan Witkowski po raz drugi, a pan Łazuka po raz pierwszy przekracza próg czterdziestu czterech punktów.

Zadania z matematyki nr 349, 350

Redaguje Marcin E. KUCZMA

349. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n, dla której istnieje ciąg liczb naturalnych $x_0, x_1, \ldots, x_n$ o własnościach:

$$x_i > 2 \quad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad x_n = 2;$$

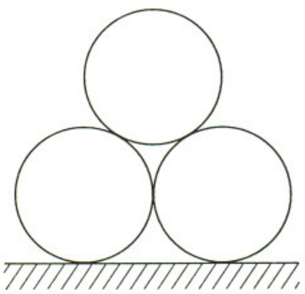
x_{i+1} jest najmniejszą liczbą naturalną nie będącą dzielnikiem liczby x_i.

350. W trójkącie ostrokątnym ABC, który nie jest równoboczny, poprowadzono wysokości AD, BE, CF. Punkty G_A, G_B, G_C są (odpowiednio) środkami ciężkości trójkątów EAF, FBD, DCE, a punkty O_A, O_B, O_C są środkami okręgów opisanych na tych trójkątach. Udowodnić, że proste O_AG_A, O_BG_B, O_CG_C (czyli *proste Eulera* tych trzech trójkątów) przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 350 zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

Zadania z fizyki nr 246, 247

Redaguje Jerzy B. BROJAN

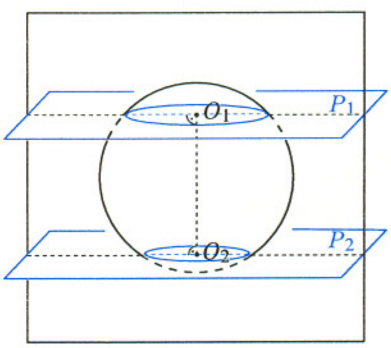


246. Trzy jednakowe jednorodne walce ułożono równolegle w „piramidę" na poziomym stole tak, że ich środki utworzyły trójkąt równoboczny. Jakie warunki muszą spełniać: współczynnik tarcia μ_1 górnego walca o dolne oraz współczynnik tarcia μ_2 między walcami a stołem, aby takie ustawienie było możliwe? Dla uproszczenia pominąć wzajemne oddziaływanie między dolnymi walcami.

247. Transformator składa się z trzech uzwojeń osadzonych na wspólnym rdzeniu (zamiast – jak zwykle – dwóch). Do pierwszego uzwojenia o n_1 zwojach przyłożono napięcie przemienne o amplitudzie U_1 i częstości ω, do drugiego uzwojenia o n_2 zwojach przyłączono cewkę o indukcyjności L, a do trzeciego uzwojenia o n_3 zwojach – kondensator o pojemności C. Wyznaczyć amplitudę natężenia prądu płynącego przez pierwsze uzwojenie. Przy jakich wartościach parametrów obserwujemy rezonans? Obowiązują standardowe założenia charakteryzujące transformator doskonały – pomijamy straty energii, zakładamy, że przez każdy zwój przechodzi jednakowy strumień pola oraz przyjmujemy, że impedancja uzwojeń jest znacznie większa od impedancji kondensatora i przyłączonej cewki.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 237 (WT=2,20) i 238 (WT=1,50) z numeru 4/1997

Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	36,12
Jarosław Łazuka	– Warszawa	18,61
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	15,15
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	11,49



Rozwiązanie zadania M 826.

Załóżmy, że K nie jest zbiorem pustym. Wówczas przekroje zbioru K pewnymi dwiema różnymi równoległymi płaszczyznami P_1 i P_2 będą kołami otwartymi o środkach O_1 i O_2, odpowiednio. Rozważając przekrój płaszczyzną przechodzącą przez punkty O_1 i O_2, a zarazem prostopadłą do P_1 zauważamy, że odcinek $\overline{O_1O_2}$ jest prostopadły do płaszczyzny P_1 (rysunek), bo prosta łącząca środki dwóch równoległych cięciw koła musi być do nich prostopadła. Podobnie, rozważając jako P_2 wszystkie płaszczyzny równoległe do P_1 i mające punkty wspólne z figurą K, stwierdzamy, że prosta przechodząca przez O_1 i prostopadła do P_1 jest osią symetrii obrotowej figury K. Rozważenie przekroju dowolną płaszczyzną zawierającą tę oś kończy dowód. Następujące pytanie Rafała Latały nadaje się, być może, na temat pracy na Konkurs *Delty*: jeśli każdy przekrój płaski figury K jest pusty lub jest sumą skończonej liczby kół otwartych, to czy wynika stąd, że K jest zbiorem pustym lub sumą skończonej liczby kul otwartych?