

SPIS TREŚCI NUMERU 10(281)

W numerze przedstawiamy
nieoczekiwane powiązania różnych
dyscyplin wiedzy;

ponadto

Zadania str.12

Patrz w niebo str.16

Październik str.16

Klub 44 str.17

W następnym numerze:

Dalekie cyfry π

Okladki wykonała
Anna Ludwicka

Wybór artykułów z *Delta*

ukazuje się w języku angielskim
w sieci Internet pod adresem

<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
– wiceprzewodniczący
Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Tomasz Hofmökł
Andrzej Hryniewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda
Feliks Przytycki
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Anna Wojtyra
Piotr Zalewski
Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65.
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
prenumeraty. Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące. Cena
jednego numeru w 1998 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres co najmniej trzech miesięcy)
cena numeru w 1998 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje
dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1998 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe
„RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa
egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej.
Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A.
XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa,
ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem
zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,
realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem
otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.
Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71
wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także
tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.

Kwestia użyteczności i stosowalności astronomii, fizyki czy matematyki to temat na długi i poważny artykuł z filozoficznymi podtekstami – samo stwierdzenie, że każda z tych dyscyplin ma różne zastosowania, jest bowiem tyle oczywiste, co banalne. Pytanie: *do czego to się przyda?* towarzyszy prawie wszystkim badaniom naukowym: i tym, które służą niemal wyłącznie zaspokojeniu ludzkiej ciekawości, i tym o bezpośrednich, praktycznych celach.

Obok zastosowań oczywistych i zamierzonych istnieją zastosowania niezamierzone, niespodziewane. Czasem rezultaty badań *przydają się* w niezaplanowany sposób,

czasem do samych badań *przydają się* nieoczekiwane, pochodzące spoza danej dziedziny, narzędzia.

Postanowiliśmy takie sytuacje objąć wspólnym mianem *nietypowych zastosowań*. Teksty w tym numerze to przykłady pochodzące, naszym zdaniem, z tego właśnie, dość pojemnego, worka. Chcieliśmy, by przygotowana przez nas panorama przypominała widok roztaczający się w pogodny październikowy poranek z beskidzkiego szczytu: całego świata wprawdzie nie widać, szczegóły są zamglone, lecz mimo to widok jest zaskakująco szeroki i różnorodny, a sine kreski na horyzoncie mogą stać się dla kogoś celem przyszłych wędrówek.

Redakcja

Komputery na DNA

L. Adleman był jednym z twórców metody szyfrowania określanej skrótem RSA; patrz *Delta* 3/1997.

Droga w grafie jest drogą Hamiltona, gdy przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz. Problem dróg Hamiltona polega na znalezieniu ogólnej efektywnej metody, pozwalającej stwierdzić istnienie takiej drogi w grafie spójnym.

Cząsteczkę kwasu dezoksyrybonukleinowego (DNA), polimer zbudowany z nukleotydów czterech rodzajów, można sobie wyobrazić jako skierowany łańcuch złożony z czterech liter: A (adenina), T (tymina), C (cytozyna) i G (guanina). Ludzka cząsteczka DNA składa się z $3 \cdot 10^9$ nukleotydów.

W ostatnich 20 latach bardzo rozwinęły się metody manipulacji łańcuchami DNA. Oddziałując enzymami, można je dziś rozcinać w wybranym miejscu, sklejać (pasującymi do siebie literami), rozmnażać i wybierać te, które zawierają określony ciąg nukleotydów itp. W 1994 roku metody te znalazły zaskakujące zastosowanie: Leonard Adleman z Uniwersytetu Południowej Kalifornii rozwiązał prosty przypadek starego problemu, znanego pod nazwą problemu dróg Hamiltona w grafie.

Adleman rozważał graf z 7 wierzchołkami i 14 krawędziami. Na początek stworzył siedem 20-literowych łańcuchów DNA reprezentujących wierzchołki. Do reprezentowania krawędzi wybrał także 20-literowe łańcuchy, skomponowane tak, że pierwszych 10 liter „krawędzi” to 10 ostatnich liter wierzchołka, z którego krawędź wychodzi, natomiast ostatnie 10 liter to 10 pierwszych liter wierzchołka końcowego dla danej krawędzi. Dzięki temu łańcuchy odpowiadające sąsiednim krawędziom mogły się łączyć, podobnie jak łańcuchy odpowiadające wierzchołkom mogły się łączyć z łańcuchami krawędzi powiązanych z tym wierzchołkiem – mniej więcej tak, jak pasujące do siebie klocki Lego. Stosując metody manipulacji cząsteczkami DNA, o których była mowa wyżej, Adleman wypreparował najpierw wszystkie drogi w grafie, następnie rozmnożył te, które zawierały wszystkie wierzchołki, aż wreszcie z tych ostatnich wybrał drogi zawierające każdy wierzchołek tylko jeden raz. Co prawda „obliczenia” trwały tydzień (tradycyjny komputer zrobiłby to w ułamku sekundy), ale okazało się, że komputer zbudowany z DNA jest możliwy. Otworzył się nowy kierunek intensywnych badań.

Pierwsze dane są przytłaczające. Ocenia się, że w cząsteczkach DNA można przechowywać dane z gęstością 1 bit/nm^3 , podczas gdy nasze komputery przechowują je z gęstością $1 \text{ bit}/10^{12} \text{ nm}^3$. Co więcej, komputery oparte na DNA mogą działać 1 200 000 razy szybciej niż obecne superkomputery, zużywając przy tym 10^{10} razy mniej energii!

Od pierwszego eksperymentu Adlemana technologia pracy z DNA rozwinęła się na tyle, że zamiast oceanów cząsteczek DNA wystarczą gramy, a zamiast ton kosztownych enzymów wystarczy stosować ich śladowe ilości.

Prace trwają. Jeśli nawet nie należy się spodziewać, że w tym wieku próbki pełne DNA zastąpią elektroniczne maszyny, to wyniki Adlemana i innych otwierają szeroko drzwi do świata komputerów na DNA przeznaczonych do określonych zadań wymagających ogromnej liczby równoległe prowadzonych obliczeń.

Francesc ROSSELLÓ

W 1822 roku Jean Baptiste Joseph Fourier w swojej *Analitycznej teorii ciepła* pisał, że choć równanie przewodnictwa cieplnego ma szczególnie prostą postać, to jednak ... *znane metody nie dostarczają żadnego ogólnego sposobu jego całkowania; nie możemy zatem wnioskować o wartości temperatury po upływie określonego czasu. Jednakże liczbową interpretacją jest niezbędna (...) – jak długo jej nie mamy, możemy mówić o niepełności i bezużyteczności rozwiązań.*

Najważniejszy zapewne w życiu Fouriera pomysł polegał na tym, by rozwiązania jednowymiarowego równania dyfuzji, opisującego np. rozchodzenie się ciepła w metalowym pręcie, szukać w postaci szeregu

$$a_0(t) + \sum_n (a_n(t) \cos nx + b_n(t) \sin nx).$$

Pomysł ten prowadzi do ogólnej metody całkowania równania dyfuzji, m.in. dzięki temu, że każda w miarę porządną funkcja okresowa (a co za tym idzie, każdy początkowy rozkład temperatury wzdłuż pręta) daje się przedstawić w postaci sumy odpowiedniego szeregu sinusów i cosinusów – takiego, jak wyżej, tylko o współczynnikach niezależnych od czasu t . Szeregi tej postaci nazywamy szeregami Fouriera; przydają się one nie tylko do rozwiązywania jednowymiarowego równania dyfuzji, ale także do bardzo wielu innych rzeczy.

W przestrzeni $L^2(-\pi, \pi)$ funkcji całkowalnych z kwadratem na odcinku $(-\pi, \pi)$ wyposażonej w iloczyn skalarny $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ funkcje

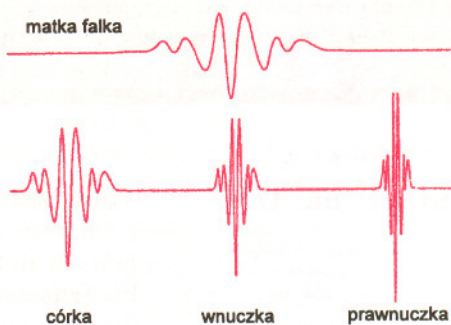
$\sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$) i $\cos nx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) stanowią bazę złożoną z wektorów parami prostopadłych, zupełnie tak, jak wektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.

Współczynniki szeregu Fouriera funkcji f można więc uważać za współrzędne wektora f w pewnej bazie. Znajduje się je tak, jak w geometrii euklidesowej – obliczając iloczyny skalarne f i wektorów bazy. To bardzo użyteczna analogia.

Niestety, lokalne własności funkcji przenoszą się na globalne własności jej szeregu Fouriera. Na przykład, nieciągłość funkcji powoduje, że jej szereg Fouriera musi zawierać nieskończenie wiele składników; wnioskowanie w drugą stronę jest na ogół zadaniem bardzo trudnym, a o dokładnym umiejscowieniu owej nieciągłości nie ma co marzyć. Dlatego, gdy kodujemy w postaci szeregu Fouriera zapis nagrania godzinnego koncertu, to zaburzenie nagrywania w ostatnich trzech minutach wpłynie na *cały* szereg Fouriera. Mówiąc inaczej, szereg Fouriera sygnału dźwiękowego zawiera wprawdzie pełną informację o częstotliwościach dźwięków składających się na ów sygnał, ale jest to informacja starannie ukrywająca zależność częstotliwości całego sygnału od czasu.

Swoistym panaceum pozwalającym nie tylko zakodować zawity sygnał w postaci sumy wielu

sygnałów prostszych, ale przy okazji odnaleźć ów utracony w przypadku szeregów Fouriera czas, są tak zwane falki (po angielsku *wavelets*). Funkcję ψ nazywa się falką (czasem matką-falką), jeśli uzyskane z niej przez skalowanie i przesunięcie funkcje $\psi(2^n x + k)$, gdzie n i k są całkowite, stanowią bazę przestrzeni L^2 . Jak udowodniła Ingrid Daubechies w 1987 roku, istnieją matki-falki znikające poza pewnym przedziałem domkniętym (patrz rysunek).



Uzyskane z nich córki, wnuczki, prawnuczki itd. mają wąziutkie nośniki i strome wykresy. Dzięki temu „falkowy” szereg funkcji nieporównanie lepiej od szeregu Fouriera odzwierciedla np. jej nieciągłość czy gwałtowną zmianę wartości na małym przedziale. Różne sygnały z pomocą falek można kodować, kompresować i czyścić z niepotrzebnych szumów dużo oszczędniej – wystarczy brać dużo mniej wyrazów odpowiedniego szeregu. W dodatku, gdy kodujemy np. zdjęcie, to matki-falki odpowiadają tylko za ogólny zarys widocznego obiektu, a wnuczki czy prawnuczki – za drobne detale. Jeśli nie interesują nas pojedyncze włosy sfotografowanej osoby, to wystarczy zapomnieć o falkach dalekich generacji. Większe charakterystyczne cechy obrazu nie ulegną przez to zniekształceniom. Za to w przypadku kodowania obrazu w postaci szeregu Fouriera podobny zabieg mógłby mieć zgubne konsekwencje.

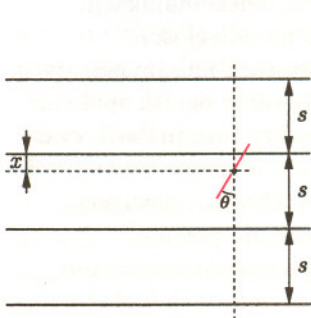
Dzięki tym zaletom falki mogą się pochwalić spektakularnymi zastosowaniami. Jest wśród nich m.in. stworzenie przez FBI wielkiej komputerowej bazy danych z odciskami palców (przedtem 200 milionów kompletów odcisków przechowywano w tej instytucji po prostu na kartonowych fiszkach) albo oczyszczenie z szumów starych, bezużytecznych wcześniej z punktu widzenia muzykologów, nagrań Brahmsa wykonującego własne utwory – dzięki falkom wiadomo przynajmniej, co grał artysta. Falki stosuje się też do wykrywania łodzi podwodnych wśród licznych szumów tła morskiego, do badania prądów oceanicznych i opisu wielkoskalowego rozkładu materii we Wszechświecie.

Długa lista zastosowań falek, wyrosłych spośród abstrakcji analizy funkcjonalnej, może być istotnym powodem rewizji poglądów dla osób sądzących, że rację bytu mają tylko badania naukowe o wyraźnym praktycznym celu.

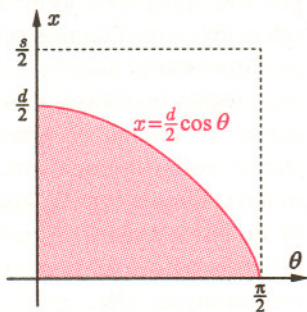
Igła Buffona

Rozważmy następujący problem: upuszczamy igłę o długości d na podłogę z jednakowych, równoległych ułożonych desek o szerokości $s > d$ (rys. 1). Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia Z polegającego na tym, że po upadku igła będzie przecinać jedną ze szpar w podłodze?

Z uwagi na symetrię problemu położenie igły można opisać dwiema liczbami: odległością x jej środka od najbliższej szczeliny oraz kątem θ między igłą a kierunkiem prostopadłym do wszystkich szczelin. Wszystkie położenia igły to prostokąt $\Omega = \{(\theta, x): 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \frac{s}{2}\}$, który będzie naszą przestrzenią zdarzeń elementarnych.



Rys. 1



Rys. 2

Prawdopodobieństwo (tzw. *geometryczne*) określimy wzorem $P(A) = |A|/|\Omega|$ (gdzie $|X|$ oznacza pole X).

Jak podejmować decyzje?

Wśród szczególnie ciekawych i istotnych problemów, których rozwiązania mają olbrzymie zastosowanie w wielu dziedzinach nauk i w praktyce, są tak zwane problemy decyzyjne. Można je krótko sformułować w sposób następujący: „Jaką podjąć decyzję na podstawie posiadanej wiedzy o danym zjawisku?”. Poczynając od zastosowań medycznych, zagadnienie takie można postawić jako np. stwierdzenie na podstawie wyników pomiarów EEG, czy dziecko ma szansę zachorowania lub czy jest chore na epilepsję. Innym przykładem jest kompleksowa analiza sytuacji rynku w celu przewidzenia zmian cen akcji danego waloru na giełdzie papierów wartościowych.

Stając przed problemami decyzyjnymi należy zdać sobie sprawę z możliwych trudności związanych ze znalezieniem właściwej odpowiedzi. Błądność podjętej decyzji kojarzy się głównie z brakiem reprezentatywności bądź niepełnością posiadanej wiedzy. W istocie, umiejętne wykorzystanie posiadanej wiedzy dla poprawnej klasyfikacji (podejmowania decyzji) jest zadaniem niezwykle złożonym.

Jednym z najczęstszych sposobów reprezentacji wiedzy jest traktowanie jej podmiotów jako obiektów opisanych przez pewne cechy. Najczęściej mamy

Definicja jest o tyle rozsądna, że nie wyróżnia żadnego z położenia igły.

Gdy igła dotyka do szczeliny w podłodze samiułtkim koniuszkiem, to wtedy mamy $\frac{x}{d/2} = \cos \theta$. Zatem, igła będzie przecinać jedną ze szpar podłogi wtedy i tylko wtedy, gdy $x < \frac{d}{2} \cos \theta$. Zdarzenie Z jest więc podzbiorem prostokąta Ω zawartym pod wykresem funkcji $x(\theta) = \frac{d}{2} \cos \theta$ (rys. 2). Wynika stąd, że

$$P(Z) = \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{d}{2} \cos \theta d\theta}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{s}{2}} = \frac{2d}{s\pi}.$$

Jeśli dodatkowo mamy $s = 2d$, to wtedy $P(Z) = 1/\pi$. Z prawa wielkich liczb wynika zatem, że jeśli rzucimy igłę dużo razy, to stosunek liczby n wszystkich rzutów do liczby k tych rzutów, w których igła przecięła jedną ze szczelin, będzie w przybliżeniu równy π .

Rzucanie igłą na podłogę (albo poliniowany arkusz papieru) można więc traktować jako sposób wyznaczania przybliżeń liczby π . Na ten niecodzienny pomysł wpadł w 1777 roku Georges Leclerc de Buffon, przyrodnik, filozof i hulaka, skądinąd znacznie bardziej znany jako autor, wspólnie z Daubentonem i Lacépède'em, 44-tomowej *Historii naturalnej*. Każdy z tych trzech panów ma dziś w Paryżu, w Dzielnicy Łacińskiej tuż obok Ogrodu Botanicznego, ulicę swego imienia.

P.S.

do czynienia z tablicami danych, gdzie wiersze reprezentują obiekty, kolumny zaś – wartości cech je opisujących. Problem decyzyjny jest wtedy określony przez wyodrębnienie jednej z cech (kolumn) jako decyzji. Wykrycie faktycznych zależności między warunkami (pozostałymi cechami) a decyzją na podstawie obserwacji znanych obiektów, a więc wiedzy szczątkowej, nie jest jednak łatwe, chociażby wobec braku wiedzy o wszystkich istotnych cechach. Dlatego, między innymi w celu poprawy efektywności procesu decyzyjnego, pełne zależności zastępowane są często zależnościami przybliżonymi. Innym problemem, pojawiającym się w szczególności dla wspomnianych na początku przykładów, jest zbyt duży rozmiar informacji w stosunku do dostępnej mocy obliczeniowej komputerów. W takich przypadkach niemożliwe jest zastosowanie dotychczas opracowanych metod wykrywania zależności. Rozwiązaniem może tu być rozbicie (dekompozycja) dużych tablic. Wnioskowanie o stanie globalnym na podstawie lokalnej analizy tak otrzymanych próbek wydaje się być związane ze zrozumieniem i przełożeniem na język komputerowy procesów myślowych samego człowieka.

Piotr SYNAK, Dominik ŚLĘZAK

Archetypem niespodziewanych korzyści płynących ze wspierania badań naukowych może być historia Johanna Friedricha Böttgera (1681–1719). Jak na alchemika przystało, był on do reszty pochłonięty poszukiwaniem sposobu przemiany mniej szlachetnych metali w złoto, czyli ówczesną awangardą badań podstawowych. Wysiłki te protektoratem swoim objął August II Mocny, król Polski i elektor Saksonii, gdzie rzecz cała miała miejsce. Nie trzeba chyba dodawać, że wdrożenie ewentualnych wyników było dla monarchy co najmniej równie istotne, jak one same. Te jednak nie nadchodziły. Jednakże, przy okazji wytwarzania potrzebnych do doświadczeń naczyń, dzięki dodaniu do glinku boraksu (uwodnionego czteroboranu sodowego $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot \text{H}_2\text{O}$), Böttgerowi udało się – jako pierwszemu w Europie – otrzymać białą porcelanę. Elektor Saksonii zasugerował wdrożenie wynalazku, podczas gdy alchemik chciał kontynuować poszukiwania kamienia filozoficznego. August przedstawił mu jednak propozycję nie do odrzucenia zapewniając pięcioletnie finansowanie w ramach programu ZOMZ*. W ten sposób, już rok później (1710) powstała działająca do dziś manufaktura w Miśni, produkująca słynną porcelanę saską, a idea przemiany mniej szlachetnej substancji w złoto doczekała się zaskakującej, ale za to skutecznej realizacji.

Od tamtych czasów w nauce zmieniło się bardzo wiele, ale czy powody jej finansowania również? Nadal można śmiało o potędze, a rozsądni dostrzegają zadziwiające bogactwo zastosowań. Wielkie programy badawcze są tego dobrym przykładem. O pokłosiu badań struktury materii pisaliśmy szeroko w specjalnym numerze *Delty* 6/1996 poświęconym czterdziestolecu CERN (Europejskiego Ośrodka Fizyki Cząstek Elementarnych). Głównymi beneficjentami, tak odkrywanych tajemnic natury, jak udoskonalonych i specjalnie tworzonych technologii, są medycyna, technika oraz różne dziedziny nauk przyrodniczych. Tu chciałbym opisać bliżej tylko jedno, moim zdaniem zaskakujące, zastosowanie, a mianowicie użycie aktywacji neutronowej do badania autentyczności lub historii arcydzieł malarstwa. Neutrony łatwo wnikają w materię, gdzie mogą być wychwytywane przez jądra atomowe, zmieniając je w jądra radioaktywne. W zależności od rodzaju jądra ulegającego przemianie powstają nuklidy charakteryzujące się różnymi czasami życia. Pomiar zmieniającej się w czasie radioaktywności badanego dzieła pozwala na otrzymanie mapy gęstości występowania szeregu pierwiastków wchodzących w skład farb użytych przez artystę, przy czym ujawnia się informacja również z głębszych warstw obrazu. Pozwala to na stwierdzenie, jakich barwników użyto w procesie

tworzenia, a tym samym odróżnienia kopii od oryginału lub stwierdzenie przemalowania dzieła. W ten właśnie sposób odkryto np., że znajdujący się w New York Metropolitan Museum obraz pt. „Święta Rozalia wstawia się za dotkniętymi zarazą mieszkańcami Palermo” Anton van Dyck (1599–1641) namalował na obróconym do góry nogami autoportrecie.

Innym wielkim programem badawczym wzbudzającym bardzo duże emocje jest eksploracja Kosmosu. Trudno negować korzyści płynące z wyniesienia na orbitę sztucznych satelitów Ziemi. Bez nich nie byłby przecież możliwy obecny rozwój telekomunikacji, telemedycyny (diagnozowania na odległość), monitorowania pogody na obszarach niezamieszkałych, szacowania urodzaju, przewidywania ognisk epidemii chorób roznoszonych przez insekty (np. malarii) oraz chorób roślin, poszukiwania złóż bogactw naturalnych, monitorowania łowisk, kontroli zbrojeń, nawigacji. W dodatku badaniami kosmicznymi powinni interesować się nie tylko zafascynowani nowinkami technicznymi. Okazuje się, że wyniki tych badań mogą przynieść ulgę ludziom starszym, dotkniętym chorobami swojego wieku. Astronaucci – młodzi, zdrowi ludzie – w stanie nieważkości doświadczają procesów przypominających starzenie się w przyspieszonym tempie. Dotyczy to np. demineralizacji kości przypominającej osteoporozę. Dotychczasowe badania tego typu zjawisk w stanie nieważkości rzucają zupełnie nowe światło na analogiczne procesy zachodzące na Ziemi. Techniki medyczne, opracowane w celu utrzymywania astronautów w dobrym zdrowiu, znajdują zastosowanie w rehabilitacji i geriatrici. Sporo utrwalonych poglądów fizjologicznych okazało się błędne. W szczególności rewizji została poddana ustalona przed pół wiekiem opinia dotycząca sposobu organizacji zmysłu równowagi. Odkryto nieznany wcześniej system regulacji ciśnienia krwi i innych płynów ustrojowych oraz stwierdzono, że w stanie nieważkości utrzymuje się różnica przepływu krwi poprzez górne i dolne płaty płuc w przeciwieństwie do stwierdzeń, jakie można znaleźć w podręcznikach. Wynika stąd, że wiele diagnostycznych i terapeutycznych zaleceń opiera się na poglądach nie odpowiadających rzeczywistości. Technologie kosmiczne znajdują również zastosowanie w pediatrii i to prenatalnej. Sondy używane do monitorowania fizjologii kosmonautów zostały zminiaturyzowane do tego stopnia, że mogą być używane do podpatrywania płodu, a w przyszłości opracowywane technologie pozwolą na diagnozowanie i leczenie niektórych schorzeń przed narodzeniem.

P.Z.

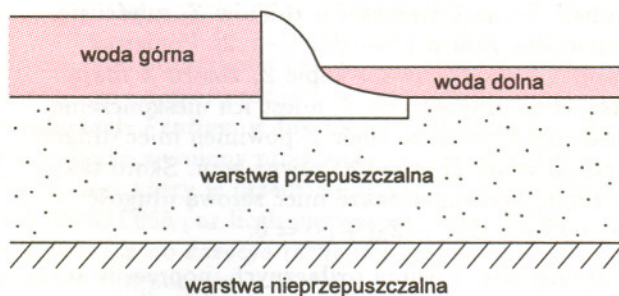
* zakaz opuszczania miejsca zakwaterowania

Badania na modelach analogowych

Niektórych zagadnień technicznych nie można rozwiązać czysto teoretycznie. Można natomiast uzyskać rozwiązania za pomocą modelowania fizycznego bądź analogowego. Modelowanie analogowe polega na tym, że jakieś zjawisko fizyczne bada się na modelu zupełnie od niego odmiennym. Przykładem tutaj są badania przepływu wód podziemnych w ośrodku gruntowym (filtracji), które przeprowadza się na modelach elektrycznych, np. na analizatorze pola AP-600. Wykorzystuje się bowiem fakt, że równania opisujące ruch potencjalny cieczy (a taki występuje w gruncie) i przepływu prądu elektrycznego w polu elektrycznym mają tę samą postać. Określone parametry hydrodynamiczne odpowiadają wielkościom elektrycznym, np. natężenie prądu elektrycznego odzwierciedla przepływ filtracyjny.

Analizator pola AP-600 stanowią trzy tzw. szafy: główna – oporowa wraz z układem sterującym, szafa warunków brzegowych oraz szafa Liebmann, wykorzystywana przy badaniu filtracji nieustalanej.

Rozpatrzmy zjawisko płaskiego przepływu filtracyjnego w gruncie pod budowlą piętrzącą (jazem). Przepływ wody w gruncie wywołany jest tu różnicą poziomów wody górnej i dolnej. W celu przeprowadzenia badań na modelu analogowym dokonuje się schematyzacji obszaru, przeprowadza stosowne obliczenia i „buduje” ten model. Po sprawdzeniu poprawności działania modelu przystępuje się do właściwych badań. Po wykonaniu doświadczeń wyniki badań (wielkości elektryczne) przelicza się na wartości hydrodynamiczne.

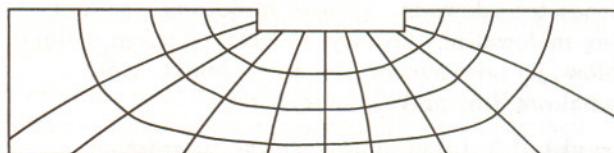


Przepływ przez jaz

Schematyzacja obszaru polega na określeniu obszaru (zasięgu) filtracji, ustaleniu współczynników filtracji poszczególnych warstw i ich miąższości oraz warunków brzegowych. Strop warstwy nieprzepuszczalnej jest ograniczeniem obszaru filtracji. Wydzielony obszar

dzieli się na elementy obliczeniowe, w środkach których zakłada się punkty węzłowe. Woda przepływając w gruncie z jednego punktu węzłowego do sąsiedniego natrafia na opór ośrodka. Ten opór modeluje się za pomocą opornika, którego wartość wylicza się stosując odpowiednią skalę analogii. Po obliczeniu wartości wszystkich oporników umieszcza się je na płycie szafy głównej analizatora. Następnie zadaje się warunki brzegowe. Do węzłów od strony wody górnej i wody dolnej, a więc w miejscach gdzie znamy wysokość energii potencjalnej, doprowadza się z szafy warunków brzegowych stosowną wartość potencjału (najczęściej 1 V i 0 V).

Wykonanie doświadczeń na modelu polega na mierzeniu (rejestracji) wartości napięć w poszczególnych węzłach dla danego wariantu badań. Pomiarów te wykonuje się z pomocą selektora, który przekazuje kolejno odczytywane wartości do woltomierza. Poszczególne wartości napięć przelicza się następnie poprzez odpowiednią skalę analogii na wartości hydrodynamiczne. Kolejnym krokiem jest wykreślenie linii stałych ciśnień, tj. linii ekwipotencjalnych, na zasadzie interpolowania pomiędzy poszczególnymi wartościami w węzłach. Linie prądu, a więc linie, po których poruszają się cząstki cieczy, rysuje się w taki sposób, aby były ortogonalne do linii ekwipotencjalnych. W ten sposób powstaje siatka filtracyjna.



Na podstawie siatki filtracyjnej oblicza się wielkość przepływu filtracyjnego. Jeżeli ten przepływ jest zbyt duży, należy wydłużyć drogę filtracji, co można osiągnąć stosując przesłonę filtracyjną o odpowiedniej długości. Siatka filtracyjna będzie miała wtedy inną postać.



Barbara JAWOROWSKA

Ciągłe wersje zasady szufladkowej Dirichleta

Zasada szufladkowa Dirichleta w najprostszej wersji głosi, że gdy w n szufladach jest przynajmniej $n + 1$ przedmiotów, to w pewnej szufladzie są co najmniej dwa przedmioty. Fakt jest oczywisty, a przy tym niezmiernie użyteczny – nie sposób zliczyć, ile razy wkraczający, niby *Deus ex machina*, w rozwiązania różnych problemów.

Zapewne wiele osób uważa zasadę szufladkową Dirichleta za narzędzie, którego zastosowania ograniczają się do matematyki dyskretnej czy wręcz tylko do rozwiązywania zadań olimpijskich układanych ku pogębieniu zarozumiałych geniuszy. Niemniej jednak w wielu rozumowaniach pojawiających się w bardzo różnych działach matematyki, w sytuacjach, gdzie na pierwszy rzut oka ani szuflad, ani przedmiotów nie widać, można się doszukać analogii z zasadą szufladkową Dirichleta. Trzeba tylko odpowiednio elastycznie myśleć o tym, co ma być przedmiotem, a co szufladą, i jak te obiekty liczyć lub raczej *mierzyć*. Oto trzy przykłady, wszystkie dobrze znane.

Przykład 1. Udowodnimy, że gdy pomaluje się ponad połowę powierzchni sfery, to będzie istniała taka średnica, która ma pomalowane oba końce. Gdyby tak nie było, to przy wykonywaniu symetrii środkowej względem środka sfery punkt pomalowany zawsze trafiałby na punkt nie pomalowany. Zatem, symetryczny obraz N zbioru P wszystkich pomalowanych punktów sfery składałby się wyłącznie z punktów nie pomalowanych. Zbiory P i N są więc rozłączne, mają równe pola, i mieszczą się razem na sferze. To jednak nie jest możliwe, gdy pole P przekracza połowę pola powierzchni sfery.

Można też udowodnić (proszę spróbować), że jeśli sferę malowaliśmy $2n$ razy, za każdym razem malując połowę jej powierzchni, to istnieje punkt, który pomalowaliśmy przynajmniej n razy.

Przykład 2. Udowodnimy sławne twierdzenie Poincarégo o powracaniu. Załóżmy, że D jest ograniczonym obszarem przestrzeni euklidesowej, a $T : D \rightarrow D$ odwzorowaniem ciągłym, wzajemnie jednoznaczny i zachowującym miarę Lebesgue'a (komu się słowa *miara Lebesgue'a* nie podobają, niech myśli o objętości w przestrzeni trójwymiarowej). Ostatni warunek oznacza, że dla dowolnego $P \subset D$ zbiory P i $T(P)$ mają równe miary. Twierdzenie o powracaniu orzeka, że w dowolnym zbiorze otwartym $U \subset D$ znajdzie się punkt x , który pod działaniem iteracji przekształcenia T powraca do U , to znaczy, dla pewnego n naturalnego mamy $T^n(x) \in U$. A oto dowód. Wszystkie zbiory

$$U, T(U), T(T(U)), \dots, T^n(U), \dots$$

są zawarte w D i mają tę samą (dodatnią) miarę. Zatem, nie mogą być parami rozłączne, bo w przeciwnym razie nie pomieściłyby się w ograniczonej szufladzie D . Dla pewnych $k > l$

przecięcie $T^k(U) \cap T^l(U)$ jest więc niepuste, czyli przecięcie $U \cap T^{k-l}(U)$ też jest niepuste. To zaś jest już tylko sformułowana teza twierdzenia o powracaniu.

Siła powyższego dowodu leży w jego ogólności. Korzysta się w nim jedynie z tego, że przekształcenie T zachowuje pewną miarę (np. objętość), oraz z faktu, że w szufladzie ograniczonej miary nie zmieści się nieskończenie wiele jednakowych przedmiotów o dodatniej mierze.

W mechanice teoretycznej wspomina się zazwyczaj o zaskakujących konsekwencjach twierdzenia Poincarégo. Na przykład, kostka rozpuszczonego w herbacie cukru powinna po pewnym czasie wrócić niemal do wyjściowego stanu.

Wyjaśnienie tego paradoksalnego stwierdzenia leży w tym, że – nawet przy założeniu, iż mechanika klasyczna dokładnie opisuje zachowanie wielkiej liczby cząstek wodnego roztworu sacharozy – wspomniany *powien czas* jest dłuższy od czasu istnienia Wszechświata. Z punktu widzenia zaś mechaniki statystycznej jest to jedynie wartość oczekiwana czasu, który powinien upłynąć, by przynajmniej raz zaszło znikomo prawdopodobne zdarzenie losowe polegające na zestaleniu się rozpuszczonej kostki cukru.

Przykład 3. Liczby z odcinka $[0, 1]$ wrzucamy do różnych szuflad w ten sposób, by do tej samej szuflady wpadały wszystkie pary liczb, których różnica jest liczbą wymierną (proszę się zastanowić, dlaczego to poprawny przepis). Następnie tworzymy zbiór Z , który zawiera dokładnie jedną liczbę z każdej szuflady.

Ustawmy teraz wszystkie liczby wymierne z przedziału $[-1, 1]$ w ciąg w_1, w_2, w_3, \dots . Obrazy Z_1, Z_2, Z_3, \dots zbioru Z w przesunięciach o wektory w_1, w_2, w_3, \dots są rozłączne – w przeciwnym przypadku znaleźlibyśmy dwa elementy Z o wymiernej różnicy, wbrew założeniu, że elementy zbioru Z pochodzą z różnych szuflad. Suma S wszystkich zbiorów Z_i mieści się, oczywiście, cała w przedziale $[-1, 2]$. Ponieważ wszystkie poprzesuwane kopie Z_i zbioru Z mają taką samą długość, jak Z , a jest ich nieskończenie wiele, oznacza to, że zbiór Z powinien mieć długość (ściślej, *miarę Lebesgue'a*) równą zeru. Skoro tak, to zbiór S powinien także mieć zerową długość: $|S| = |Z_1| + |Z_2| + |Z_3| + \dots = 0$.

Z drugiej strony, suma rozłącznych, poprzesuwanych kopii zbioru Z zawiera cały przedział $[0, 1]$ (bo każdą liczbę z tego przedziału wrzuciliśmy do którejś szuflady). Zatem długość zbioru S powinna być nie mniejsza od 1.

Skąd sprzeczność? Z prostego powodu: nie każdemu podzbiorkowi odcinka można w rozsądny sposób przypisać liczbę, która będzie jego długością (miarą Lebesgue'a). Mówiąc inaczej, nie każdy podzbiór odcinka $[0, 1]$ jest *mierzalny*.

P.S.

Skąd wiadomo, czy procesor jest dobry

W 1993 roku firma *Intel* wprowadziła do sprzedaży procesor *Pentium*. Dziś w takie właśnie procesory wyposażona jest większość sprzedawanych na całym świecie komputerów osobistych. W tym samym roku Thomas Nicely, profesor matematyki w prowincjonalnym Lynchburg College (Virginia, USA), postanowił poprawić dostępne numeryczne oszacowania wartości tzw. stałej Bruna B .

Aby powiedzieć, co to jest stała Bruna, trzeba najpierw przypomnieć jedną definicję. O dwóch liczbach pierwszych mówimy, że są bliźniacze, jeśli różnią się o 2 (jak np. 3 i 5, albo 17 i 19, albo $p_1 = 824\,633\,702\,441$ i $p_2 = 824\,633\,702\,443$). Do dziś nie wiadomo, czy takich par jest skończenie, czy też nieskończenie wiele. Największe, które obecnie znamy, to $697\,053\,813 \cdot 2^{16352} \pm 1$. Wkrótce po pierwszej wojnie światowej norweski matematyk, Viggo Brun, udowodnił jednak, że suma odwrotności wszystkich liczb pierwszych bliźniaczych

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13}\right) + \dots,$$

to liczba skończona. Dzięki obliczeniom różnych pasjonatów wiadomo dziś, że $B \approx 1,90216057778$ (i jest to wiedza całkowicie bezużyteczna).

Nie to jednak jest najciekawsze. Gdy w czerwcu 1994 roku Nicely analizował pierwsze wyniki swych obliczeń, stwierdził ze zdziwieniem, że uzyskane przezeń wartości $\pi(n)$ (liczby liczb pierwszych nie przekraczających n) są dla niektórych n inne od opublikowanych. Po licznych poszukiwaniach błędu w oprogramowaniu, znalezieniu usterki w kompilatorze języka C++ firmy Borland itd. okazało się w końcu, że przyczyna niezgodności jest prozaiczna: procesor *Pentium* nie potrafi po prostu dzielić, a dokładniej – wartości $1/p_1$ i $1/p_2$ dla podanych wyżej dwunastocyfrowych bliźniaczek p_1 i p_2 daje z dokładnością jedynie 9 miejsc po przecinku (zamiast obiecanych przez producenta 19).

Firma *Intel* początkowo nie zareagowała na wieści Nicely'ego i dopiero rozpropagowanie informacji o usterkach *Pentium* w Internecie zmusiło ją do rozpoczęcia wymiany procesorów na życzenie klientów. Nicely zaś, który w przedziale $[1, 10^{14}]$ znalazł w końcu 135 780 321 665 par liczb pierwszych bliźniaczych, używa teraz do każdego rachunku przynajmniej dwóch różnych komputerów.

Historia Nicely'ego to jedynie przypadek. Niemniej jednak programy do poszukiwania dużych liczb pierwszych (albo znajdowania dalekich cyfr rozwinięcia dziesiętnego π) są używane często przez samych producentów sprzętu do testowania własnych produktów. Np. gazetowa wiadomość z września 1996 roku o tym, że $2^{1\,257\,787} - 1$ jest największą (wówczas znaną) liczbą pierwszą, zawdzięczała swoje pochodzenie testom nowego CRAYa.

P.S.

Pogawędka o semantyce języków programowania

Skomplikowane konstrukcje języka programowania wysokiego poziomu są zwykle objaśniane przez odwoływanie się do pojęć translatora (programu tłumaczącego) danego języka. Na przykład łamigłówka

```
var a,b,c,:integer;
procedure p(var x1,x2,x3:integer;
  procedure f(par1:integer;var par2,par3:integer));
  var loc:integer;
  procedure q(y1:integer;var y2,y3:integer);
  begin
    y1:=y3;y3:=y2;y2:=loc;
    f(y2,y3,y1)
  end;
begin
  x1:=x1+1;loc:=x1;
  if x1<6 then p(x1,x2,x3,q) else f(x1,x2,x3);
end;
procedure r(z1:integer;var z2,z3:integer);
begin
end;
begin
a:=1;b:=2;c:=3;
p(a,b,c,r);
write(a,b,c);
end
```

jest często objaśniana w terminach stosu rekordów aktywacji, dowiązania statycznego, adresu kodu procedury itd. itp. Co bardziej dociekliwi mogą zatem zapytać: „Po co język wysokiego poziomu, skoro gdy chcemy go naprawdę zrozumieć, musimy i tak zejść na niższy poziom?”. Co więcej, szybko okazało się, że np. PASCAL w wersji jednego translatora nie musi być tym samym, co PASCAL w wersji innego. W końcu, jaki ten PASCAL jest naprawdę? Czy, na przykład, deklaracje zmiennych mają znaczenie tylko w kontekście następujących po nich instrukcji, czy też mają jakieś znaczenie niezależnie od kontekstu, jako rzeczy same w sobie?

Stworzenie niezależnych od komputera metod definiowania znaczenia poszczególnych konstrukcji języka programowania było traktowane na przełomie lat 60/70 jako poważne wyzwanie intelektualne. Pierwsze zadowalające rozwiązanie (tzw. semantyka denotacyjna) zostało zaproponowane w latach 70. przez informatyków i matematyków z Uniwersytetu w Oxfordzie.

Czy można udowodnić w jakimś sformalizowanym systemie wnioskowania – bez odwoływania się do pojęć translatora – że program powyżej wypisze to i to? Takie formalne systemy są. Wykazanie ich niesprzeczności jest bardzo trudne i prowadzi do bardzo subtelnych semantyk języków programowania, a także do zagadnień związanych z określaniem typu obiektów. Nawet mocno wyabstrahowane wersje pojawiających się tu problemów są na tyle trudne, że do ich badania używane są metody z teorii dziedzin, rachunku λ , logiki intuicjonistycznej, teorii kategorii, teorii gier, czy teorii złożoności obliczeń.

Michał GRABOWSKI

Wyznaczanie odległości Słońca w nocy



Rozwiązanie zadania F 461.

Zamieniając jednostki otrzymujemy $E = 4,86 \cdot 10^{17} \text{ J}$. Z zasady zachowania energii mamy $E = \eta \epsilon m c^2$, skąd

$$m = \frac{E}{\eta \epsilon c^2} = 24\,000 \text{ kg} = 24 \text{ tony}.$$

Dla porównania: w elektrowniach węglowych trzeba spalić 3 miliony razy więcej węgla dla uzyskania tej samej ilości energii.



Rozwiązanie zadania M 823.

Ustalmy w przestrzeni taki kartezjański układ współrzędnych, by wektor v_1 miał drugą i trzecią współrzędną równą zeru, a pierwszą dodatnią (jedną z osi układu ma ten sam zwrot i kierunek, co v_1). Łatwo zauważyć, że wówczas wektory v_2, v_3, \dots, v_n muszą mieć pierwszą współrzędną ujemną na mocy założeń zadania. Jeżeli usuniemy z każdego z nich pierwszą współrzędną tworząc w ten sposób $n - 1$ wektorów na płaszczyźnie, to iloczyny skalarne tych wektorów się zmniejszą, a więc powstałe wektory na płaszczyźnie będą nadal tworzyły kąty rozwarte. Zatem $n - 1 \leq 3$ (dlaczego?), więc $n \leq 4$, co było do udowodnienia.



Rozwiązanie zadania F 462.

Obliczając krytyczne B w temperaturze ciekłego helu otrzymujemy $B = 0,67 \text{ T}$.

Pole magnetyczne na powierzchni przewodnika $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ jest tym samym polem, które niszczy stan nadprzewodnictwa. Stąd

$$r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B} = 3 \text{ mm}.$$



Rozwiązanie zadania M 824.

Nie. Podobną własność ma ośmiościan foremny, czyli bryła wypukła o wierzchołkach w środkach ścian ustalonego sześcianu.

A może Czytelnicy znają inne przykłady?

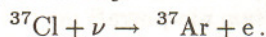
Znajomość odległości ciał niebieskich to jedno z najważniejszych zagadnień w astronomii. Już Kopernik znał dość dobrze stosunki rozmiarów orbit planet, ale długo jeszcze nie znane były ich absolutne rozmiary. Dla Układu Słonecznego wygodną jednostką odległości jest średnia odległość Ziemi od Słońca, zwana nawet po prostu jednostką astronomiczną. W ogóle rozmiary Układu Słonecznego w jednostkach astronomicznych znane są od dawna, ale ile metrów ma sama jednostka astronomiczna?

Zanim wynaleziono radar i lasery, jedyną możliwość mierzenia odległości w Układzie Słonecznym dawała metoda paralaksy geocentrycznej. Polega ona na tym, że obiekt obserwowany z dwóch miejsc na Ziemi (rozdzielonych możliwie dużą odległością) jest widoczny w nieco różnych miejscach na tle nieba. Pomiar tego pozornego przesunięcia (paralaksy) i znajomość rozmiarów Ziemi pozwala określić odległość obiektu już w metrach – na takiej zasadzie działa też klasyczny dalmierz. Niestety, nie dawało się to zastosować do Słońca chociażby dlatego, że Słońca nie widać na żadnym tle – w dzień przecież nie widać gwiazd. Szczęśliwie okazało się, że istnieją planetoidy zbliżające się do Ziemi bardziej niż jakakolwiek z planet. Np. Eros zbliża się niekiedy na 0,12 jednostki. Jego paralaksa jest wtedy łatwa do zmierzenia, bo jest on obiektem praktycznie punktowym i jego położenie na tle gwiazd (a więc w nocy) można określić bardzo dokładnie. Tak właśnie wyznaczono odległość Erosa w 1901 i 1931 r. – w metrach! No, a odległość Słońca? Z tym już żaden problem. Jak wspomnieliśmy, mechanika nieba podaje precyzyjnie stosunki wszelkich odległości w Układzie Słonecznym, więc wyznaczenie absolutnej odległości Erosa jest właściwie równoważne wyznaczeniu odległości Słońca.

T.K.

Astronomia pod ziemią

Obserwacje astronomiczne prowadzone pod ziemią – brzmi to jak kiepski żart. A jednak jest nośnik informacji o Wszechświecie, który najkorzystniej jest rejestrować właśnie tam – są to mianowicie neutrino. Cząstki te, produkowane w ogromnych ilościach we wnętrzach gwiazd, są niezwykle przenikliwe. Wydostają się niemal swobodnie z wnętrza każdej gwiazdy (a najbliższą jest Słońce), przenikają swobodnie przez całą Ziemię i jedynie dzięki swojej liczbie mogą zostać zaobserwowane. Fizycy bowiem stwierdzili, że stosunkowo wysokie jest prawdopodobieństwo zajścia reakcji



Pierwsze eksperymenty wykorzystujące tę reakcję wykonał Raymond Davis w 1968 r. Głęboko w kopalni (by odizolować urządzenie od zakłócającego wpływu cząstek promieniowania kosmicznego) zainstalował cysternę z czterochlorkiem węgla, która przez kilka tygodni poddana była w ten sposób działaniu jedynie neutrin słonecznych. Powstający w tej reakcji argon jest nietrwały, więc po dłuższym czasie w cysternie ustala się stan równowagi: tyle samo w jednostce czasu atomów argonu powstaje co rozpada się. Na podstawie liczby atomów nietrwałego argonu, zawartych w cysternie, można ocenić strumień neutrin. O subtelności tego eksperymentu świadczy fakt, że w cysternie znajduje się naraz nie więcej niż 100 (słownie: sto!) atomów argonu i że są sposoby ich policzenia.

Później podobne obserwacje przeprowadzono z użyciem galu, który w wyniku reakcji z neutrinami (o innej energii) przechodzi w german. Obecnie astronomię uprawia się też pod wodą. Detektorem neutrin jest basen o ścianach gęsto wyłożonych fotopowielaczami zdolnymi rejestrować każdy błysk w wodzie. Neutrino o dostatecznie wysokiej energii może pewnemu elektronowi, obecnemu w wodzie, przekazać taką energię, że określona przez nią prędkość elektronu będzie większa od prędkości światła w wodzie. Elektron emituje wtedy tzw. promieniowanie Czerenkowa i te właśnie błyski rejestrują otaczające basen fotopowielacze. Takimi detektorami stwierdzono np. w 1987 r. przybycie neutrin wyemitowanych przez supernową w Wielkim Obłoku Magellana.

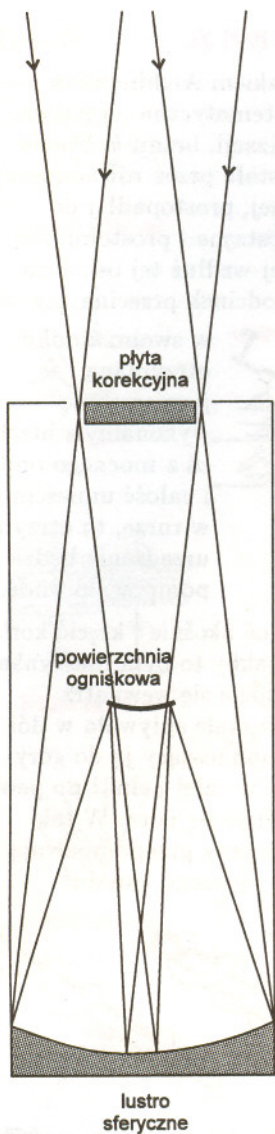
T.K.

Kamera Schmidta

Optyka geometryczna dowodzi, że każdy, najbardziej nawet precyzyjny, układ optyczny tworzy obraz przedmiotu o jakości spadającej w miarę wzrostu odległości od osi optycznej układu. Np. lustro paraboloidalne, stanowiące obiektyw większości teleskopów, skupia w punkcie jedynie wiązkę światła równoległą do jego osi. Z zastosowaniem dodatkowych korektorów można uzyskać użyteczne pole widzenia teleskopu rzędu kilkudziesięciu minut (rzadko więcej niż stopień). Ale naprawdę duże pole widzenia ma teleskop pozbawiony osi optycznej.

Takim genialnym wynalazkiem jest teleskop o specjalnym przeznaczeniu zwany kamerą Schmidta (1930). Obiektywem kamery jest lustro sferyczne, a więc nie mające osi optycznej! Wiązka światła (wpadająca przez otwór mniejszy od lustra – rysunek) została skupiona na powierzchni ogniskowej bez względu na kierunek, z jakiego przychodzi (w granicach określonych, oczywiście, przez rozmiary teleskopu), ale jednakowo źle wskutek aberracji sferycznej lustra. Można jednak temu zaradzić umieszczając w środku krzywizny lustra szklaną płytę o tak dobranym kształcie, by równoległa wiązka światła stała się lekko rozbieżna. Promienie odleglejsze od osi wiązki skupiają się wtedy nieco dalej od lustra, niż gdyby płyty nie było. W ten sposób płyta korekcyjna kompensuje aberrację sferyczną lustra, a dzięki umieszczeniu w jego środku krzywizny służy jednakowo wszystkim wiązkom światła wpadającym do teleskopu (fakt, że padają one na płytę pod nieco różnymi kątami, jest nieistotny). W rezultacie kamera Schmidta tworzy dobry obraz obszaru nieba o rozmiarach kilku stopni, mając zarazem dużą światłość. Dzięki temu kamera Schmidta stała się idealnym przyrządem do wykonywania przeglądów nieba czy masowego fotografowania obiektów o niskiej jasności powierzchniowej, tj. mgławic i galaktyk. Jak widać ze schematu kamery, jej powierzchnia ogniskowa jest też sferyczna. Klisza musi więc być wygięta, co zapewnia kasetka o stosownie wyprofilowanym dnie. Wygięcie to jest jednak tak niewielkie, że – jak dowodzi praktyka – klisze nigdy nie pękają.

T.K.



Prażona klisza

Technika fotograficzna, choć tak dobrze opanowana i powszechnie stosowana, jest do dziś nieco tajemnicza. Procesy fizykochemiczne, które są odpowiedzialne za powstanie obrazu, nie są do końca poznane. Wiadomo, że pod wpływem światła cząsteczki bromku srebra stają się w pewnym stopniu mniej trwałe (tworząc tzw. obraz utajony), tak że wywoływacz powoduje wytrącenie się srebra (a więc zaczernienie) w tych miejscach emulsji, na które padło światło, a utrwalacz wypłukuje z emulsji nie naświetlony bromek srebra. Na tym poziomie wtajemniczenia w sztukę fotografii nie ma problemów. Co więcej, znamy wiele „kuchennych” przepisów na otrzymywanie doskonałych zdjęć, ale z ich uzasadnieniem nawet specjalista miałby kłopoty.

Zimno wszystko konserwuje, dlatego zrozumiałe jest, że klisze fotograficzne należy również przechowywać w lodówce. Niska temperatura zapewnia spowolnienie wszelkich procesów chemicznych, a więc też samorzutnego rozpadania się cząsteczek bromku srebra. Okazało się jednak, że wygrzewanie klisz prowadzi do wyraźnego zwiększenia ich czułości. Jest to proces dość kłopotliwy. Mianowicie przeznaczoną do uczulenia kliszę utrzymuje się w temperaturze 50 – 70°C przez jeden do trzech dni w komorze próżniowej lub wypełnionej obojętnym gazem (i, oczywiście, światłoszczelnej). Czułość kliszy wzrasta – jak się wydaje – dzięki temu, że prażenie usuwa z jej emulsji resztki wody i tlenu. Klisza powinna być użyta jak najszybciej po takim przygotowaniu, gdyż jej uczulona emulsja będzie natychmiast chłonąć tlen i wilgoć z atmosfery. Praktyka pokazuje, że nie każdy typ kliszy reaguje na taki zabieg wzrostem czułości, każdy natomiast reaguje spadkiem trwałości, dlatego klisze uczulone nie nadają się do dalszego długotrwałego przechowywania. Tak czy inaczej, z racji coraz powszechniejszego zastosowania półprzewodnikowych urządzeń elektronicznych, prażenie klisz jest chyba techniką wymierającą.

T.K.



Rozwiązanie zadania M 825.

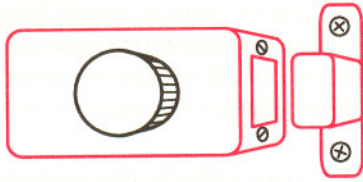
Dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ mamy $x_i < x_1 + x_2 + \dots + x_n$, a ponieważ $p - 1 > 0$, więc

$$x_i^{p-1} < (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{p-1}.$$

Mnożąc tę nierówność stronami przez x_i i sumując względem $i = 1, 2, \dots, n$, a następnie wyłączając przed nawias wspólny czynnik $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{p-1}$, dostaniemy też zadania.

Zamek w drzwiach

Zapewne wielu Czytelników *Delty* ma przy drzwiach zamek typu podobnego do przedstawionego na rysunku.



Zamek ten demonstruje zastosowania mechaniczne wszystkich możliwych krzywych, które ślizgają się po sobie. Są to: **prosta, okrąg i linia śrubowa**. Prosta reprezentuje rygiel wsuwający i wysuwający się z zamka. Okrąg to obracanie się zarówno klucza, jak i gałki pozwalającej od wewnątrz zamknąć drzwi. Linia śrubowa to śruby mocujące obudowę zamka i ich nakrętki (wkręty do drewna już nie – one specjalnie mają się zaprzeć w drewnie). Każdy z nas zna wszystkie te trzy sytuacje. Ale nie każdy wie, że **innych krzywych ślizgających się po sobie nie ma**. Jest to konsekwencja bardzo ważnego rezultatu geometrii różniczkowej – twierdzenia Freneta–Serreta. Dlatego użycie w urządzeniach mechanicznych jakiegokolwiek innej kształtki wymaga zastosowania sprężyn lub tp. ściskających przesuujące się po sobie części.

Twierdzenie Freneta–Serreta mówi o krzywiznie i skręceniu krzywej. Ujmując rzecz jakościowo: krzywizna mierzy, jak bardzo krzywa w otoczeniu danego punktu nie jest prosta, skręcenie zaś – jak bardzo nie jest płaska. Okazuje się, że *krzywizna i skręcenie wyznaczają krzywą z dokładnością do przemieszczenia*.

To znaczy, że jeśli wiemy, jak zmieniają się krzywizna i skręcenie wzdłuż krzywej, to wiemy też, jak ta krzywa wygląda z dokładnością do izometrii nie zmieniającej orientacji.

Z twierdzenia tego rzeczywiście bez trudu można uzyskać istnienie jedynie trzech rodzajów krzywych ślizgających się po sobie. Do tego bowiem, aby się mogły ślizgać, muszą być w każdym swoim punkcie tak samo wykrzywione, a więc tak samo niepłaskie i tak samo nieproste.

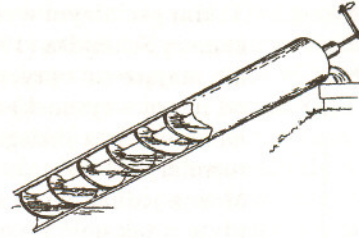
Gdy krzywizna jest stale zero, to krzywa jest prostą (to wynika już nawet z naszej jakościowej definicji) – jest ona wtedy także płaska. Gdy jest płaska (skręcenie jest stale zero) i ma stałą krzywiznę, to musi być okręgiem, ponieważ okrąg spełnia te warunki, a w myśl twierdzenia Freneta–Serreta rozwiązanie jest tylko jedno, więc innych niż okręgi rozwiązań w tym przypadku nie ma. Podobnie stała i niezerowa krzywizna i skręcenie to własność linii śrubowej, a istnienie innych wykluczone jest przez twierdzenie.

Tak więc innych rozwiązań z użyciem ślizgających się po sobie krzywych w mechanice nie ma i nie będzie.

M.K.

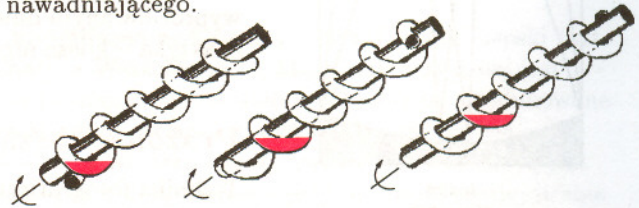
Woda płynąca do góry

Ponoć rzeczywiście wynalazkiem Archimedesusa jest śruba jego imienia. Matematyczna jej nazwa, a właściwie nazwa jej idealizacji, brzmi *helikoida* – jest to powierzchnia powstała przez równomierny obrót prostej wokół ustalonej, prostopadłej do niej osi i równoczesne jednostajne i prostoliniowe przesuwanie się tejże prostej wzdłuż tej osi. Jeśli zamiast prostej weźmiemy odcinek przecinający oś



Tak to mniej więcej wygląda.

Należy mianowicie ustawić oś ukośnie i kręcić korba przymocowaną do osi tak, jakby to była maszyna do mięsa. Woda, która znajdzie się wewnątrz urządzenia, będzie po blasze stale spływała w dół próbując zrekompensować podnoszący ją do góry obrót. Ale uda się jej to nie w całej pełni i po pewnej (jakiej?) liczbie obrotów wyleje się górą. W taki sposób ubodzy wieśniacy egipscy przepompowują do dziś wodę z niższego do wyższego kanału nawadniającego.



Jeśli ktoś nie wierzy, że to działa, może przekona go modyfikacja – spiralna rurka owinięta wokół osi urządzenia.

M.K.

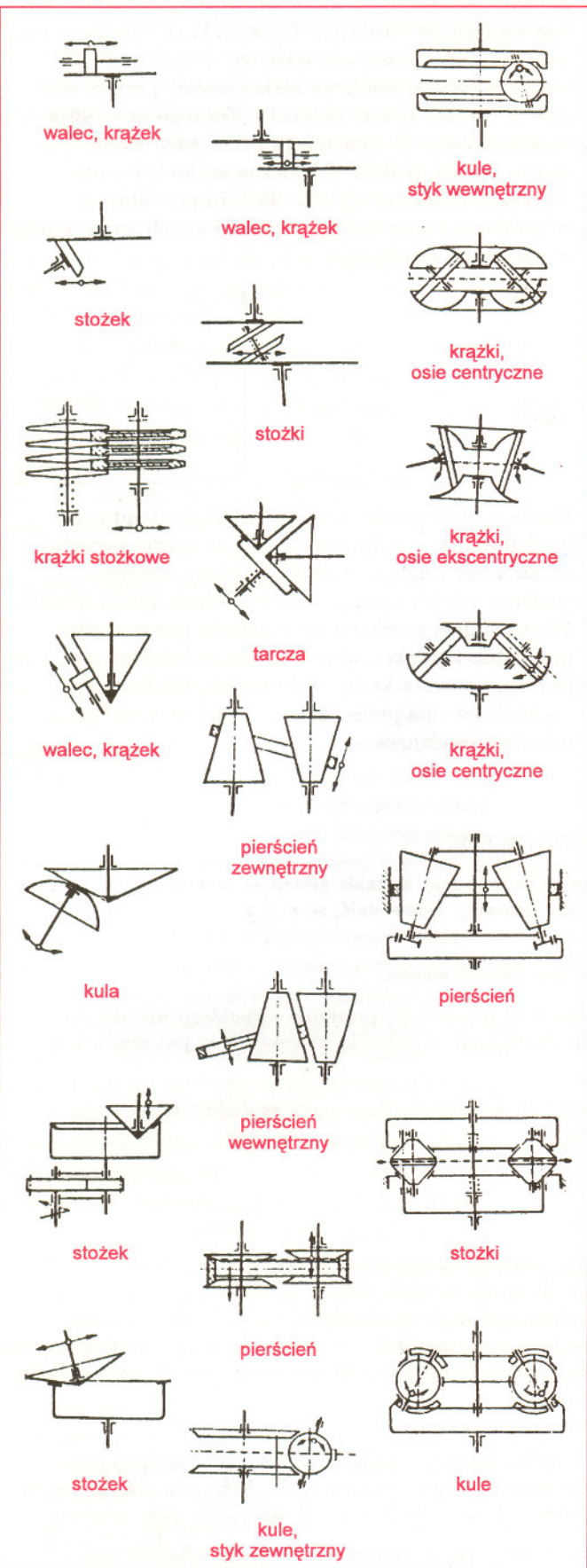
Dlaczego rura jest sztywna?

Jeśli powierzchnię w pewnym jej punkcie przetniemy wszystkimi płaszczyznami zawierającymi prostą prostopadłą do powierzchni w tym punkcie, to wśród otrzymanych krzywych będzie taka, która ma krzywiznę największą i taka, która ma najmniejszą. Co więcej, gdy krzywizny otrzymanych krzywych są różne, to krzywe mające ekstremalne krzywizny są prostopadłe. Gauss dowiódł (nazywa się to *theorema egregium*, czyli twierdzenie wspaniałe), że *przy zginaniu powierzchni bez zmiany długości żadnej krzywej na niej iloczyn ekstremalnych krzywizn również nie ulega zmianie*.

Jeśli więc jakaś powierzchnia (np. rura) powstaje z płaskiego materiału, to zawsze w każdym punkcie jedna z jej ekstremalnych krzywizn musi być zero, by iloczyn był taki sam jak na płaszczyźnie (gdzie rozważane krzywizny są równe zero). Zatem do zgięcia rury (wygięcia tworzącej walca) potrzebne jest rozciągnięcie materiału, z którego jest ona wykonana.

M.K.

Tarcie – przyczyna ruchu



Przekładnie cierne o zmiennym przełożeniu (podana jest nazwa elementów przestawianych, strzałkami jest oznaczony ich ruch).

Rozpowszechniony pogląd, że siła tarcia przeciwstawia się ruchowi jest nieprecyzyjny i bez uzupełnienia go, np. przez dodanie ... względem siebie stykających się powierzchni, może prowadzić do nadinterpretacyjnych nieporozumień.

Oto przykłady sytuacji, gdzie siła tarcia jest tym czynnikiem, który umożliwia wystąpienie ruchu.

I. Chodzenie – siła tarcia powoduje, że noga, na której stoimy, nie przesuwa się względem podłoża do tyłu, ale to my przesuujemy się do przodu. Fatalne efekty braku lub zmniejszenia tarcia obserwujemy np. podczas gołoledzi.

II. Ruch pojazdów kołowych z własnym napędem (np. samochód) – siła tarcia pomiędzy kołami a podłożem powoduje, że koła tocząc się po podłożu napędzają pojazd, a nie tylko obracają się wokół własnej osi. Zmniejszenie tarcia (np. błoto, piasek) powoduje tzw. buksowanie – koła się kręcą, a pojazd stoi (to samo można zaobserwować, gdy jesienią tramwaj jedzie po mokrym i pokrytym liśćmi torowisku).

Coś na ten temat można znaleźć w *Delcie 1* z 1995 roku.

III. Mechanika techniczna

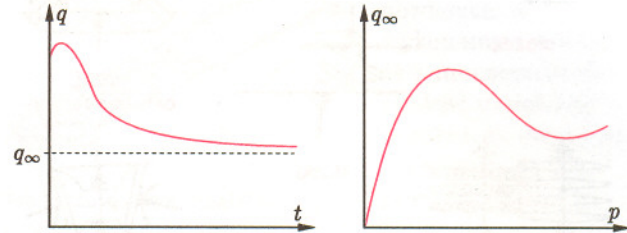
- a. Przekazywanie napędu za pomocą przekładni pasowej:
 - pasy płaskie, powszechnie stosowane w XIX wieku (np. *Ziemia obiecana*), ale używane do dziś;
 - pasy okrągłe (np. w „nożnej” maszynie do szycia), siła tarcia jest zwiększana przez klinowanie się pasa w trapezowym rowku;
 - pasy klinowe (samochody, pralki itp.), tym różniące się od poprzednich, że mają, zgodnie z nazwą, przekrój trójkątny lub trapezowy.
- b. Przenośniki taśmowe (Turoszów, Bełchatów itd.); tarcie taśmy o bęben napędza taśmę, tarcie transportowanych elementów o taśmę jest przyczyną ich ruchu.
- c. Sprzęgła cierne (np. samochodowe, ale także sprzęgła elektromagnetyczne w obrabiarkach, automatyce itd.).
- d. Sprzęgła jednokierunkowe, tzw. wolne koło (np. w rowerze); tarcie przenosi napęd tylko w jedną stronę dzięki ciernemu klinowaniu się elementów pośrednich (rolki lub kulki) pomiędzy powierzchniami sprzęgła.
- e. Przekładnie cierne rozmaitych typów o przełożeniu stałym i zmiennym (tzw. wariatory, umożliwiające regulowanie przełożenia w bardzo szerokim zakresie, łącznie ze zmianą kierunku obrotu wałka przy nie zmieniającym się napędzie). Znaleźć je można w niesłychanie wielu miejscach, choć przeważnie takich, do których tzw. zwykły człowiek nie zagląda; bardziej znana może być oparta na wariatorze jedna z konstrukcji automatycznej skrzyni biegów.

O parzeniu kawy

Parzenie kawy jest czynnością pozornie prostą. Jednak, podobnie jak współlistnieją obok siebie herbaty popularne z torebek i szlachetne, wyrafinowane napary herbat z Chin, Indii czy Japonii, tak istnieją metody nadawania filiżance kawy aromatu satysfakcjonującego najbardziej nawet wyrafinowane podniebienie. Najczęściej używa się w tym celu ciśnieniowego ekspresu. Ponieważ poszukiwania metody otrzymywania najpełniejszego aromatu bynajmniej nie ustały, a badania eksperymentalne w tej dziedzinie wyczerpały już swój potencjał, pojawił się pomysł opracowania modeli matematycznych procesów zachodzących podczas parzenia kawy. Modele takie dałyby możliwość poszukiwania optymalnych parametrów parzenia za pomocą przeprowadzanych na ich podstawie komputerowych symulacji, a więc bez tak dużych nakładów, jak rzeczywiste eksperymenty.

Tu znowu okazuje się, że sprawa nie jest całkiem prosta. O jakości decyduje proporcja ilości płynu do zawartych w nim substancji aromatycznych. Ta z kolei zależy od szybkości przepływu, określanej przez ciśnienie p i przepuszczalność warstwy kawy. O ile jednak ciśnienie w ekspresie jest stałe, przepuszczalność szybko maleje, powodując ustabilizowanie się przepływu q na (niższym od początkowego) poziomie q_∞ . Co ciekawe, nie jest to

jedynie skutek kompresji pod wpływem ciśnienia, lecz głównie osadzania się na filtrze drobnych cząsteczek oderwanych od struktury. Cząsteczki te tworzą cienką, nader ciasno upakowaną warstwę. Z tego powodu użycie wyższego ciśnienia niekoniecznie przyspiesza proces filtracji (patrz rysunek). Do tego interesującego zjawiska dochodzi penetracja przez wrzątek suchego jeszcze miazgi, reakcje chemiczne zachodzące pod wpływem temperatury (ok. 95°C) i powodujące wyzwalanie się substancji aromatycznych, oraz dyfuzja w porowatej strukturze.



Każde z tych zjawisk samo w sobie jest trudne do modelowania, a połączone razem stanowią poważne (w zasadzie ciągle otwarte) wyzwanie, zarówno w sferze doboru opisujących je równań, jak i obliczeń. Warto dodać, że równanie ośrodków porowatych, przydatne z punktu widzenia Włochów do opisu procesu parzenia kawy, Holendrom przydaje się do modelowania przesiąkania wody przez wały przeciwpowodziowe.

Tytus D. SUSKI



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 823. W przestrzeni trójwymiarowej dane są takie niezerowe wektory v_1, v_2, \dots, v_n , że każde dwa z nich tworzą kąt rozwarty. Udowodnić, że $n \leq 4$.

Rozwiązanie na str. 8

Zadanie zaproponował p. Michał Wojciechowski.

M 824. Czy z faktu, że pewne trzy prostopadłe przekroje wypukłego wielościanu mającego środek symetrii są kwadratami, wynika, że wielościan ten jest sześcianem?

Rozwiązanie na str. 8

M 825. Udowodnić, że jeśli $p > 1$, a liczby x_1, x_2, \dots, x_n są dodatnie, to

$$x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^p.$$

Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Jarosław KULPA

F 461. W Polsce roczne zużycie energii elektrycznej wynosi $E = 135$ TWh (terawatogodzin). Oszacować, ile uranu potrzeba byłoby do wyprodukowania takiej ilości energii, gdyby elektrownie węglowe zastąpić całkowicie elektrowniami atomowymi. Wiadomo, że podczas rozszczepienia $\epsilon = 0,089\%$ masy spoczynkowej uranu zostaje zamienione na energię cieplną. Sprawność elektrowni atomowych wynosi około $\eta = 25\%$

Rozwiązanie na str. 8

F 462. Przewód wykonano z niobu, który jest nadprzewodnikiem w temperaturze poniżej $T_k = 9,25$ K. Obliczyć minimalny promień przewodu, którym można przesłać prąd $I = 10^4$ A w temperaturze ciekłego helu $T = 4,2$ K. Krytyczne pole magnetyczne, które niszczy stan nadprzewodnictwa, zależy od temperatury: $B = B_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_k} \right)^2 \right]$.

Dla niobu $B_0 = 0,85$ T.

Rozwiązanie na str. 8

Problem odtwarzania *kształtu z zacielenia* lub też problem *SFS*, od angielskiego *shape from shading*, można sformułować jako pytanie: Jak odtworzyć kształt gładkiej powierzchni na podstawie biało-czarnego zdjęcia tej powierzchni? Zmieniająca się od punktu do punktu intensywność obrazu na zdjęciu nosi miano *zacielenia*. Problem SFS pojawił się w latach pięćdziesiątych bieżącego stulecia w fotoklinometrii jako zagadnienie wyznaczania ze zdjęć topografii Księżyca. W połowie lat siedemdziesiątych problem SFS znalazł się w centrum zainteresowania specjalistów od wizji komputerowej próbujących wyposażyć roboty w zdolność odtwarzania trójwymiarowej sceny zdarzeń z dwuwymiarowych zdjęć na potrzeby swobodnego poruszania się po scenie, jak technicznie określa się obserwowaną część przestrzeni. W połowie lat osiemdziesiątych wariant problemu SFS pojawił się w radaroklinometrii jako zagadnienie interpretacji obrazów uzyskanych za pomocą radarów.

Podstawą do rozważania problemu SFS jest określenie związku między kształtem powierzchni i zacieleniem. Związek ten określa *równanie irradiancji obrazu*. Irradiancja obrazu jest technicznym określeniem intensywności obrazu. Terminem pokrewnym jest radiancja sceny, czyli intensywność wypromieniowywania przez scenę światła. Irradiancja obrazu jest proporcjonalna do radiancji sceny, ze współczynnikiem proporcjonalności nie przekraczającym 1.

Aby problem SFS był efektywnie rozwiązalny, trzeba – jak się okazuje – przyjąć pewne założenia upraszczające. Fundamentalne założenie głosi, że obserwowana powierzchnia jest gładka. Ponadto przyjmuje się, że powierzchnia nie zasłania sama siebie, a także, iż światło wielokrotnie odbite od powierzchni wnosi pomijalny wkład w obraz. Na ogół zakłada się też, że źródło światła i urządzenie, w którym powstaje obraz, znajdują się w dużej odległości od obserwowanej powierzchni. Przy tym ostatnim założeniu można uważać, że obraz powierzchni jest efektem padania równoległej wiązki promieni, z których każdy jest prostopadły do płaszczyzny obrazu. Co więcej, zacielenie pochodzące od małego płata powierzchni zależy wówczas wyłącznie od orientacji tego płata w przestrzeni, a nie od bezwzględnej pozycji powierzchni w przestrzeni. Powyższe założenie jest w praktyce spełnione, o ile – przykładowo – źródłem światła jest Słońce, urządzeniem, w którym powstaje obraz, jest aparat fotograficzny zainstalowany na pokładzie lecącego wysoko nad Ziemią samolotu, a obserwowaną powierzchnią jest fragment powierzchni Ziemi.

Ustalmy w przestrzeni kartezjański układ współrzędnych tak, aby osie x i y znajdowały się w płaszczyźnie obrazu. Oznaczmy przez $u(x, y)$ wysokość powierzchni nad płaszczyzną obrazu w punkcie (x, y) . Każdy punkt powierzchni ma zatem postać $(x, y, u(x, y))$, a obrazem punktu $(x, y, u(x, y))$ jest punkt (x, y) . Przy przedstawionych powyżej założeniach upraszczających równanie irradiancji obrazu przyjmuje postać

$$E(x, y) = R \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \mathbf{l}, \rho(x, y) \right),$$

gdzie $E(x, y)$ jest irradiancją obrazu w punkcie (x, y) , R jest tak zwaną *funkcją refleksyjności*, \mathbf{l} jest wektorem jednostkowym określającym kierunek źródła światła, a $\rho(x, y)$ jest wewnętrzną refleksyjnością powierzchni, czyli *albedo* w punkcie $(x, y, u(x, y))$. Pochodne cząstkowe $(\partial u / \partial x)(x, y)$ i $(\partial u / \partial y)(x, y)$ jednoznacznie wyznaczają wektor normalny do powierzchni w punkcie $(x, y, u(x, y))$ dany wzorem

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \text{ gdzie } \mathbf{v} = \left(-\frac{\partial u}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y), 1 \right).$$

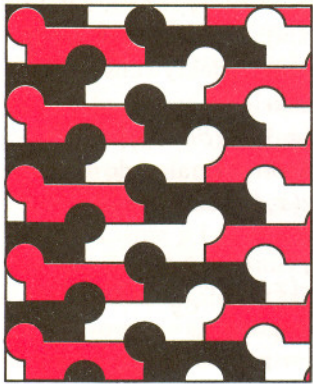
Wektor ten określa orientację w przestrzeni płaszczyzny stycznej do powierzchni w punkcie $(x, y, u(x, y))$. Płaszczyzna ta ograniczona do małego otoczenia punktu $(x, y, u(x, y))$ w dobrym przybliżeniu pokrywa się z płatem powierzchni zawartym w tym otoczeniu. W efekcie można przyjąć, że pochodne $(\partial u / \partial x)(x, y)$ i $(\partial u / \partial y)(x, y)$ wyznaczają orientację małego płata powierzchni wokół $(x, y, u(x, y))$. Przy z góry zadanych R , \mathbf{l} i $\rho(x, y)$, równanie irradiancji obrazu wyznacza wszelkie dopuszczalne orientacje płata prowadzące do obrazu o jasności $E(x, y)$ w punkcie (x, y) .

Jako warunek na $u(x, y)$, równanie irradiancji obrazu jest równaniem różniczkowym cząstkowym pierwszego rzędu o dwóch zmiennych niezależnych. Jak się okazuje, przy ustalonych R , \mathbf{l} i ρ , równanie takie ma na ogół – dla dowolnej (nieujemnej) irradiancji E – nieskończenie wiele rozwiązań *lokalnych* określonych we fragmencie dziedziny obrazu. Może też istnieć wiele rozwiązań *globalnych*, określonych na całej dziedzinie obrazu, a może też i nie być żadnego rozwiązania globalnego. Dla jednoznaczności określenia rozwiązanie globalne musi spełniać dodatkowe *warunki brzegowe*. Wyznaczanie rozwiązań globalnych, spełniających rozmaite warunki brzegowe, okazuje się być problemem ciekawym matematycznie, który w przeciągu ostatnich kilkunastu lat był i nadal jest przedmiotem intensywnych badań.

Kryształy i arabeski



Ten rytm jest w krytalografii nazywany **p1**,



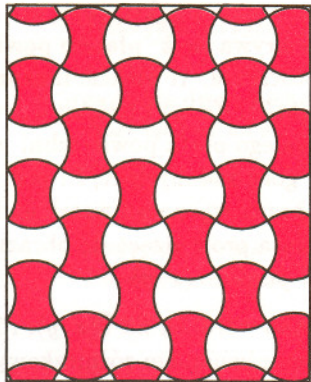
ten **pg**,



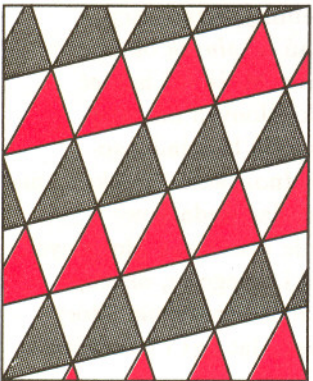
a tu wcale nie ma rytmu,



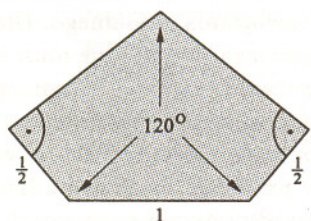
ten nazywa się **p2**,



a ten **p4**.



Na którym z rysunków wystąpił już ten rytm?



Jak ułożyć rytmiczną posadzkę z takich kafelków?

Z niewiadomych powodów fizycy zawsze zakładali, że kryształ, czyli forma, w jakiej istnieją ciała stałe, ma bardzo regularne własności geometryczne: kryształy danej substancji mogą w sposób rytmiczny wypełnić przestrzeń bez żadnych luk. Występujące w tym określeniu nietypowe słowo *rytmicznie* należało rozumieć w ten sposób, że istnieje grupa przekształceń o tej własności, iż obrazy pojedynczego kryształka we wszystkich przekształceniach grupy wypełniają przestrzeń, natomiast obrazy w dwóch różnych przekształceniach mogą mieć wspólny co najwyżej brzeg.

Grupa przekształceń to taki ich niepusty zbiór, w którym wraz z każdymi dwoma przekształceniami jest ich złożenie i przekształcenia do nich odwrotne.

Takie postawienie sprawy pozwoliło na badanie również kryształów, których nie ma: jedno- czy dwuwymiarowych. Podstawowym pytaniem było: *ile jest różnych rodzajów kryształów?* Wobec tego trzeba było odpowiedzieć na pytanie, kiedy dwa kryształy są tego samego rodzaju. Uznano, że wtedy, gdy reprezentują ten sam rytm, czyli odpowiada im ta sama grupa.

XIX-wieczni badacze prędko odkryli, że istnieje coś realnego, odpowiadającego dwuwymiarowym kryształom – mianowicie arabeski, czyli sposób zdobienia pałaców i świątyń przez ortodoksyjnych muzułmanów, którym religia zakazywała czynić obrazy żywych stworzeń. W najwspanialszym z pałaców muzułmańskich zachowanych w Hiszpanii znaleziono arabeski reprezentujące aż 16 rodzajów. Było to tak dużo, że wielu myślało, iż to już wszystkie dwuwymiarowe kryształy. Okazało się jednak, że nie. W 1890 roku Fiodorow (geolog) w czasopiśmie geologicznym opublikował dowód, że dwuwymiarowych kryształów jest dokładnie 17 rodzajów. I wtedy już poszło szybko również z najbardziej interesującymi, trójwymiarowymi kryształami. Okazało się, że jest ich 230 rodzajów.

Uporawszy się z matematyczną stroną zagadnienia powrócono do jej fizycznych źródeł. I wtedy stwierdzono, że rzeczywistych kryształów jest znacznie mniej – zaledwie 32 rodzaje. Czyli przyroda nie realizuje wszystkich teoretycznych możliwości. Nie koniec na tym – przyroda realizuje (choć trzeba przyznać, że wyjątkowo niechętnie, czyli rzadko) również takie kryształy, które z matematycznego punktu widzenia kryształami nie są. Pierwszy taki kryształ odkrył w 1982 roku Daniel Shechtman (Haifa, Izrael) pracujący gościnnie w National Bureau of Standards w Maryland (USA). Kryształ taki zdarza się w stopie glinu z manganem Al_6Mn . Tego rodzaju kryształy mogą również wypełniać przestrzeń, ale nie rytmicznie. Fizycy (np. Linus Pauling) długo nie mogli pogodzić się z taką rozbieżnością między fizyką a matematyką, ale fakty okazały się nieubłagane. Na pociechę można sobie powiedzieć, że takie nibykryształy są małe ($2 \mu m$) i nietrwale (wystarczy podgrzać je do $400^\circ C$, aby stały się zwykłymi, przyzwoitymi kryształami).

M.K.



o czego służy logarytm?

- No jak to do czego!?! Do rozwiązywania równań logarytmicznych.
- A te równania to po co?
- No jak to po co!?! Żeby zastosować logarytm.

Powyższy sąd uzyskałby bezwzględną większość głosów w dowolnym parlamencie (oprócz tych, w których nikt w ogóle nie wiedziałby, o co chodzi). Może tylko jakiś inżynier spośród seniorów zgłosiłby poprawkę o odwołanie się do suwaka logarytmicznego w preambule do Ustawy o Logarytmie. Inicjatywa oparcia się na tym najbardziej humanitarnym przyrządzie do liczenia (który – w odróżnieniu od kalkulatorów – uzmysławia np. dlaczego statek przepływający 279 mil w ciągu doby porusza się z prędkością 12 węzłów, a nie 11,625 węzła) miałyby może jakieś szanse. Niestety, poprawki matematyczno-fizycznej mniejszości, zmierzające do uznania publicznej użyteczności logarytmu wyrażającej się możliwością sprowadzania mnożenia do dodawania, dzielenia do odejmowania, potęgowania do mnożenia, a więc w szczególności zamiany postępu geometrycznego na arytmetyczny, zostałyby odrzucone (nikt nie chciałby wziąć odpowiedzialności za zmniejszanie tempa postępu).

Nie wszystko jednak byłoby stracone. Niespodziewanie bowiem logarytm (oprócz niewygodnej mantysy) ma cenną cechę. Mianowicie – uwaga – logarytm jest e-k-o-l-o-g-i-c-z-n-y!

Panie Marszałku, Wysoka Izbo! Po pierwsze: wobec tożsamości $\log_a x = \log_e x / \log_e a$ dowolny logarytm jest kombinacją logarytmów naturalnych. Ale to dopiero początek. Najważniejsze jest to, że logarytm walczy z hałasem, a pozwalając widzieć w ciemnościach oszczędza energię, czym przyczynia się do ochrony środowiska naturalnego człowieka.

Walka z hałasem odbywa się przy pomocy, przepraszam za wyrażenie, imbecyli, tzn. chciałem powiedzieć: decybeli, na mocy prawa (Webera–Fechnera). Głosi ono, że przyrost wrażenia jest proporcjonalny do logarytmu stosunku energii bodźców.

Tylko dzięki temu jeszcze nie całkiem ogłuchliśmy w naszym hałaśliwym świecie.

Przejdźmy teraz do widzenia w ciemnościach. W pogodną bezksiężycową noc nawet nieuzbrojonym okiem widzimy tysiące gwiazd. Już w starożytności starano się uporządkować je według malejącej jasności. Powstała sześciostopniowa skala obejmująca wszystkie widoczne na niebie gwiazdy, od najjaśniejszych, którym przypisano pierwszą wielkość gwiazdową, do ledwie widocznych – szóstej wielkości. Kiedy w XIX wieku podjęto trud ilościowego ujęcia tej wcześniej jedynie jakościowej skali, okazało się, że z bardzo dobrym przybliżeniem jest ona logarymiczna.

Okazuje się, że dzięki logarytmowaniu sygnału optycznego przez nasz zmysł wzroku potrafimy obserwować obiekty o intensywności różniącej się około bilion razy.

Panie Marszałku, Wysoka Izbo! W ostatnich słowach mojej wypowiedzi pragnę zaapelować o rozwagę. Jeżeli nie chcemy być głusi i ślepi, to szanujmy logarytm naturalny. Postuluję objęcie go ochroną gatunkową, szczególnie w okresie rozmnażania. Dziękuję za uwagę.

P.Z.

Skala decybelowa – logarytmiczna skala stosunku dwóch wartości energii lub mocy (także wyrażanej za pomocą ciśnienia akustycznego lub np. prądu czy napięcia w elektrotechnice). Jedną wartość wyrażanej wielkości uznaje się za wartość odniesienia, zwaną wartością progową.

Bel, B – pozaukładowa bezwymiarowa jednostka logarytmiczna np. poziomu ciśnienia akustycznego; 1 B odpowiada ciśnieniu p spełniającemu warunek $2 \log p/p_0 = 1$, gdzie $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$ jest progiem słyszalności odpowiadającym natężeniu dźwięku 10^{-16} W/cm^2 przy częstotliwości 1 kHz. W praktyce używa się jednostki dziesięć razy mniejszej – decybel 1 dB = 0,1 B. Nazwę przyjęto dla upamiętnienia Alexandra Grahama Bella (1847–1922), amerykańskiego fizyka i fizjologa, wynalazcy telefonu.

Związek między wielkościami gwiazdowymi M (tzw. magnitudo) a jasnościami I dwóch gwiazd wyraża się wzorem $M_1 - M_2 = -2,5 \log I_1/I_2$, czyli różnica pięciu wielkości gwiazdowych odpowiada stukrotnemu stosunkowi jasności.

Patrz w niebo

Średnia gęstość Ziemi wynosi $5,5 \text{ g/cm}^3$, a gęstość centralna (tj. w środku) 18 w tych samych jednostkach. U planet typu Ziemi jest dość podobnie, planety olbrzymie zaś wykazują większy kontrast gęstości – średnia gęstość jest wyraźnie mniejsza, a centralna niewiele się różni od ziemskiej. Słońce, przeciętna gwiazda ciągu głównego, jest obiektem jeszcze bardziej niejednorodnym: gęstość średnia wynosi 1,4, a centralna 158.

Z biegiem czasu gwiazdy ciągu głównego zużywają wodór, najintensywniej w centrum, gdzie gęstość i temperatura są najwyższe. Powstaje tam helowe jądro, które – jeśli masa gwiazdy jest dostatecznie duża – może zostać tak ściśnięte, że hel „zapali się” i zaczną powstawać następne cięższe pierwiastki. Sama gwiazda przy tym puchnie stając się czerwonym olbrzymem. Ewolucja prowadzi więc do powstania obiektu jeszcze bardziej niejednorodnego: średnia gęstość spada, a centralna rośnie. W centrum czerwonego olbrzyma tworzy się biały karzeł o gęstości 10^5 – 10^7 , który zostaje odsłonięty, gdy rozdęta otoczka gwiazdy zostanie odrzucona np. jako mgławica planetarna.

Czy są do pomysłenia obiekty jeszcze bardziej niejednorodne, a konkretnie: czy w centrum normalnej skądinąd gwiazdy może pojawić się gwiazda neutronowa (gęstość rzędu 10^{15})? Chyba tak, tylko że takie supergęste jądro nie powstanie tam drogą stopniowej ewolucji, lecz musiałoby się zjawić tam

z zewnątrz. Możliwości takie zaproponowali już dość dawno Kip Thorne i Anna Żytkow z California Institute of Technology (A.Ż. obecnie w Cambridge UK) oraz ostatnio Peter Leonard z Los Alamos National Laboratory. Nawiasem mówiąc, Anna Żytkow to absolwentka astronomii UW, a rozważane przez nich wszystkich obiekty znane są pod kryptonimem TZO, tj. Thorne–Żytkow Objects. Tak więc zaproponowano trzy mechanizmy powstania TZO. Po pierwsze, w gęstej gromadzie gwiazdowej samotna gwiazda neutronowa może zwyczajnie zderzyć się z czerwonym olbrzymem i ugrzęznąć w nim. Po drugie, jeżeli gwiazda neutronowa i zwyczajna tworzą ciasny układ podwójny, to zwyczajna ewoluując do stadium czerwonego olbrzyma może swoją towarzyszkę ogarnąć. Wreszcie, jeżeli układ podwójny tworzą dwie normalne gwiazdy i jedna z nich wybuchła jako supernowa, to utworzona w wybuchu gwiazda neutronowa może – wskutek asymetrii eksplozji – zostać „wstrzelona” do towarzyszkii. W każdej sytuacji pojawienie się gorącego „ciała obcego” w centrum czerwonego olbrzyma musi zakłócić jego normalne życie – przede wszystkim wzrosnie jego centralna temperatura, nasili się produkcja ciężkich pierwiastków, co powinno przejawiać się w widmie gwiazdy. Jednak obiekt taki długo żyć nie powinien, gdyż albo wskutek nadmiaru mocy jądra jego warstwy zewnętrzne zostaną rozdmuchane, albo wskutek zwiększonej grawitacji jądra zapadną się. Znalezienie gwiazdy na etapie TZO może więc być nietatwe, a dopóki do tego nie dojdzie, obiekty TZO pozostaną w sferze hipotez.

Tomasz KWAST

Październik

Gdy na godzinę lub dwie przed północą zwrócić się w kierunku południa, to na wysokości 38° (w każdym razie dla Warszawy, a w ogólności na wysokości 90° minus szerokość geograficzna) będzie się miało punkt równonocy wiosennej, czyli punkt Barana. Niestety, w pobliżu tego bardzo ważnego punktu nieba nie leży żadna jasna gwiazda (jak Gwiazda Polarna w pobliżu bieguna). Jest jeszcze gorzej, mianowicie jeżeli ktoś nawet zlokalizuje na niebie bardzo niepozorny gwiazdozbiór Barana, to się oszuka, bo punkt Barana leży teraz w gwiazdozbiórze Ryb (też zresztą mało wybitnym). Przyczyną tego bałaganu jest precesja, zjawisko polegające na zataczaniu się osi ziemskiej wokół osi ekliptyki, tak jak os bąka zatacza się wokół kierunku pionowego. Kiedy w Starożytności wprowadzono pojęcie punktów równonocy, to ten wiosenny rzeczywiście leżał w gwiazdozbiórze Barana. Precesja jest zjawiskiem mało rzucającym się w oczy, punkt Barana wędruje po ekliptyce w tempie niecałej minuty łuku na rok, ale to wystarczyło, by w ciągu 2000 lat przesunął się o cały gwiazdozbiór. A nazwa pozostała.

W październiku opozycję ma Saturn (10 X), tzn. znajduje się po przeciwnej stronie nieba niż Słońce i widać go przez całą noc. Jowisz jest w Koziorożcu i widać go w pierwszej połowie nocy. Wenus i Marsa (w Wężowniku) nie widać.

Księżyc zakryje 15 X Saturna, a 19 X Aldebarana, ale w Polsce w obu przypadkach będzie wtedy dzień. Pełnia Księżyca wypada 16 X. Z meteorów można próbować obserwować Giacobinidy (to od nazwiska odkrywcy komety) 9 X, Orionidy 15–26 X a pod koniec miesiąca zaczną się Tauridy.

T. K.

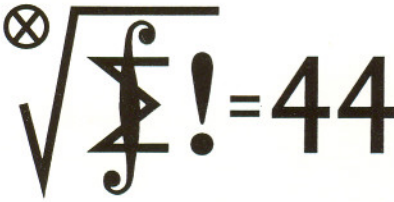
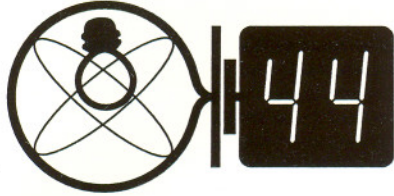
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen
rozwiązań zadań
335 (WT=1,27) i 336 (WT=1,74)
z numeru 2/1997

Tomasz Wietecha	– Tarnów	44,82
Jerzy Witkowski	– Radlin	42,15
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	41,22
Jarosław Łazuka	– Warszawa	40,79
Marcin Kasperski	– Warszawa	39,78

Pan Wietecha pokonał był czterdziestoczworopunktowy limit już dwukrotnie; w trzeciej zaś rundzie zebrał 42,33 p. i z takim stanem przed przeszło dwu laty rozstał się z ligą. Cieszymy się, że nie na stałe – bo oto przysłane po tej przerwie kolejne rozwiązania dały trzecią „gwiazdkę” i awans do grona Weteranów Klubu 44 M.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen
rozwiązań zadań
235 (WT=1,15) i 236 (WT=3,18)
z numeru 3/1997

Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	36,12
Jarosław Łazuka	– Warszawa	15,28
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	14,25



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 1997

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Zadania z matematyki nr 347, 348

Redaguje Marcin E. KUCZMA

347. Funkcje f i g (o wartościach rzeczywistych) są ciągłe w przedziale $(0; 1)$ i różniczkowalne w punktach wewnętrznych tego przedziału. Dowieść, że dla pewnej pary liczb $x, y \in (0; 1)$ jest spełniona nierówność $(f(x) + g(y) + 4xy)^2 \geq 1$.

348. Niech n będzie liczbą naturalną. Obliczyć, ile jest liczb $(6n)$ -cyfrowych podzielnych przez 7, o wszystkich cyfrach nieparzystych (zapis dziesiętny).

Zadanie 348 zaproponował pan Waldemar Pompe z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/1997

Przypominamy treść zadań:

343. Niech $(g(n))$: $n = 1, 2, 3, \dots$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które nie są kwadratami liczb całkowitych. Dla liczby rzeczywistej x oznaczmy przez $r(x)$ jedyną liczbę całkowitą leżącą w przedziale $(x - \frac{1}{2}; x + \frac{1}{2})$. Dowieść, że $g(n) = n + r(\sqrt{n})$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

343. Ustalmy $n \geq 1$ i przyjmijmy: $m = g(n)$, $k = m - n$. W zbiorze $\{1, 2, \dots, m\}$ jest n liczb nie będących kwadratami; jest więc k liczb będących kwadratami, a największą z nich jest k^2 . Liczba m nie jest kwadratem, i wobec tego $k^2 < m < (k + 1)^2$, czyli $k^2 + 1 \leq m \leq k^2 + 2k$. Zatem liczba $n = m - k$ spełnia dwustronne oszacowanie

$$(k - \frac{1}{2})^2 < k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k < (k + \frac{1}{2})^2.$$

To znaczy, że $k = r(\sqrt{n})$, i na mocy określenia liczb m, k mamy tezę zadania.

344. Dla ciągu $a_n = 2^{-n}$ rozważana suma ma wartość 4. Zatem kres dolny zbioru wartości badanych sum jest liczbą $\alpha \leq 4$. Początkowy wyraz każdego z rozważanych szeregów jest liczbą ≥ 1 . Zatem $\alpha \geq 1$.

Weźmy dowolną liczbę $\beta > \alpha$. Istnieje dla niej ciąg liczb dodatnich $1 = a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ wyznaczający szereg

344. Obliczyć kres dolny zbioru liczb będących sumami szeregów postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_{n+1}}, \text{ gdzie } a_0 = 1, a_{n-1} \geq a_n > 0 \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_{n+1}} \text{ o sumie } s < \beta. \text{ Przyjmijmy } b_n = \frac{a_{n+1}}{a_1} \text{ dla}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ tak więc $1 = b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots$, i wobec tego

$$\alpha \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^2}{b_{n+1}} = \frac{1}{a_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}^2}{a_{n+2}} = \frac{1}{a_1} \left(s - \frac{1}{a_1} \right) < \frac{1}{a_1} \left(\beta - \frac{1}{a_1} \right).$$

Otrzymana nierówność, przepisana w równoważnej formie

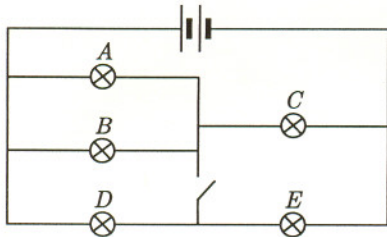
$$\left(\frac{1}{a_1} - \frac{\beta}{2} \right)^2 + \alpha - \frac{\beta^2}{4} < 0,$$

pokazuje, że $4\alpha < \beta^2$. Skoro β jest dowolnie wybraną liczbą większą od α , możemy przejść do granicy ($\beta \rightarrow \alpha +$), otrzymując: $4\alpha \leq \alpha^2$. A ponieważ $\alpha > 0$, zatem $\alpha \geq 4$.

Na początku stwierdziliśmy, że $\alpha \leq 4$. Wniosek: kres dolny, o który chodzi w zadaniu, jest równy 4.

Zadania z fizyki nr 244, 245

Redaguje Jerzy B. BROJAN



244. Źródło dźwięku harmonicznego o stałej częstotliwości f_0 spada pionowo z przyspieszeniem $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ i w chwili t_0 mija z prędkością v_0 nieruchomy mikrofon, który o $t = 5 \text{ s}$ wcześniej odebrał dźwięk o częstotliwości $f_1 = 1200 \text{ Hz}$, a o t później (w chwili „symetrycznej” względem t_0) odebrał dźwięk o częstotliwości $f_2 = 800 \text{ Hz}$. Obliczyć f_0 i v_0 . Prędkość dźwięku w powietrzu jest równa $c = 340 \text{ m/s}$.

245. W przedstawionym obwodzie żarówki są jednakowe. Jak zareagują (i czy zareagują) na zamknięcie klucza?

Rozwiązanie zadania z fizyki z numeru 6/1997

Przypominamy treść zadania:

241. Sześć jednakowych prętów połączono przegubowo tworząc szkielet czworościanu, który postawiono na gładkiej poziomej płycie. O ile przesunie się górny wierzchołek czworościanu pod wpływem siły F skierowanej w dół, jeśli stała sprężystości (stosunek siły do wydłużenia lub skrócenia) jest dla każdego z prętów równa k ? Pominąć siłę ciężkości i założyć, że deformacja czworościanu jest niewielka.

241. Wprowadźmy kąt α między wysokością czworościanu a jego krawędzią boczną; zatem $\cos \alpha = \sqrt{2/3}$, $\sin \alpha = \sqrt{1/3}$. Wyznaczamy siłę F_1 ściskającą każdy z trzech górnych prętów:

$$F_1 = \frac{F}{3 \cos \alpha} = \frac{F}{\sqrt{6}}.$$

Pozioma składowa tej siły jest równa $F_1 \sin \alpha$, a stąd siła rozciągająca każdy z trzech dolnych prętów wynosi

$$F_2 = \frac{F_1 \sin \alpha}{\sqrt{3}} = \frac{F}{3\sqrt{6}}.$$

W wyniku działania siły F_1 każdy z górnych prętów ulega skróceniu o $\Delta l_1 = F_1/k$, a w następstwie tego górny wierzchołek czworościanu przesuwa się w dół o $\Delta y_1 = \Delta l_1 / \cos \alpha$. Wynikiem działania siły F_2 jest wydłużenie każdego z dolnych prętów o $\Delta l_2 = F_2/k$, czyli każdy z wierzchołków podstawy oddali się od środka o $\Delta s = \Delta l_2 / \sqrt{3}$; z kolei pociągnie to za sobą obniżenie górnego wierzchołka o $\Delta y_2 = \Delta s \tan \alpha$. Szukane przesunięcie górnego wierzchołka Δy jest sumą Δy_1 i Δy_2 , a po podstawieniach otrzymujemy

$$\Delta y = \frac{5F}{9k}.$$