

SPIS TREŚCI NUMERU 9(280)

Funkcja zeta Riemanna, część I <i>Roman Dwilewicz i Jan Mináč</i>	str. 1
Ziemia jako prądnica <i>Stanisław Bednarek</i>	str. 4
Satelita meteorologiczny <i>Ryszard Balcer</i>	str. 5
Słowo Banacha	str. 8
Patrz w niebo	str. 9
Wrzesień	str. 9
Mała Delta	str.10
Zadania	str.11
Mosty z klocków <i>Piotr Rybka</i>	str.12
Początkowe cyfry symboli Newtona <i>Grzegorz Bartczak i Andrzej Nowicki</i>	str.14
Klub 44	str.16

W następnym numerze:

Nietypowe zastosowania

Okladkę i ilustracje wykonał
Krzysztof Biesaga.

Na okładce i ilustracjach
wykorzystano reprodukcje obrazów
i rysunku Pietera Bruegela.

Wybór artykułów z *Delta*
ukazuje się w języku angielskim
w sieci Internet pod adresem
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
– wiceprzewodniczący
Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Tomasz Hofmokl
Andrzej Hryniewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda
Feliks Przytycki
Michał Różyczka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nacj.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nacj.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Piotr Zalewski
Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65.
Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena
jednego numeru w 1997 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
cena numeru w 1997 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje
dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na IV kwartał 1997 r. wynosi 7 zł 50 gr.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe
„Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa
egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
- Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej.
Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A.
XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa,
ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem
zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
- Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem	
	za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.
- Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,
realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem
otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.
Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71
wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także
tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.

Funkcja zeta Riemanna, część I

Roman DWILEWICZ i Ján MINÁČ

Według opinii autorów niniejszego szkicu znakomitym (dla ambitnych) wprowadzeniem do tematu jest książka Titchmarsha [T].

Symbol ζ jest literą alfabetu greckiego; nazywa się ją *zeta*.

Elementarne dowody tego faktu można znaleźć w *Delcie* 11/1996, w artykule T. Krasieńskiego, oraz w tym numerze, w artykule P. Rybki o mostach z klocków i w zadaniach „z myślką” (str. 11).

1. „Dyskretne” i „ciągłe”. Niniejszy (dwuczęściowy) artykuł dotyczy funkcji zeta Riemanna i związanej z nią hipotezy Riemanna.

Literatura poświęcona funkcji zeta Riemanna jest olbrzymia: tysiące artykułów i dziesiątki monografii napisanych w ciągu przeszło dwustu lat!

Co najmniej od czasów wielkiego szwajcarskiego matematyka Leonharda Eulera (1707–1783) profesjonalnych matematyków i amatorów fascynował związek między pojęciami *ciągły* i *dyskretny*. Okazało się, że takie „dyskretne obiekty”, jak liczby naturalne czy liczby pierwsze, są związane z sumami nieskończonymi i całkami.

Funkcja zeta Riemanna $\zeta = \zeta(s)$ jest tego wyrazistym przykładem. Choć może mniej znana niż np. tradycyjne funkcje trygonometryczne lub wykładnicze, jest jedną z najważniejszych funkcji w całej matematyce i gra dużą rolę nie tylko w analizie zespolonej czy teorii liczb, ale również w geometrii algebraicznej czy topologii algebraicznej. Powiązana z nią Hipoteza Riemanna (piszemy o niej w drugiej części artykułu) jest chyba najślawniejszym otwartym problemem współczesnej matematyki. Niestety, w tym krótkim artykule z konieczności skoncentrujemy się tylko na niektórych własnościach funkcji ζ . Zainteresowanych Czytelników odsyłamy do cytowanych podstawowych monografii [E], [R], [T], oraz bardziej od strony historycznej – [W].

2. Co to jest funkcja zeta Riemanna? Na początek rozważmy bardzo naturalny szereg, mianowicie sumę odwrotności liczb naturalnych $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Jest to tzw. szereg harmoniczny i zapewne Czytelnik wie, że jest on rozbieżny.

Przypatrzmy się więc innym, podobnym szeregom postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, czy bardziej ogólnie, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą. Okazuje się, że ten ostatni szereg jest zbieżny dla $x > 1$ i rozbieżny dla $x \leq 1$.

Czytelnik, który zna liczby zespolone, może zauważyć, że w powyższym szeregu można wziąć zamiast rzeczywistych x argumenty zespolone s . Pomijając na razie pytanie, dla jakich s szereg jest zbieżny, zdefiniujemy

$$(1) \quad \zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}.$$

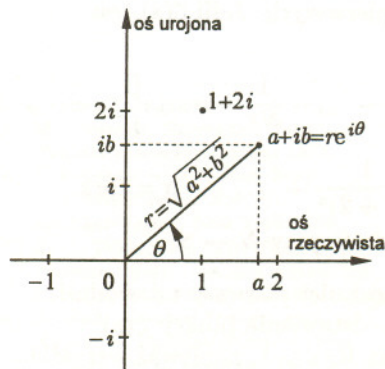
Funkcja ta nazywa się *funkcją zeta Riemanna*. Pierwszym autorem istotnych rezultatów o funkcji ζ (szczególnie dla argumentów rzeczywistych) był Euler, który żył około stu lat przed Riemannem (niemiecki matematyk Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866). Jednak to właśnie Riemann wskazał na znaczenie tej funkcji jako funkcji zmiennej zespolonej oraz udowodnił jej podstawowe własności. Dlatego funkcja ζ nazwana została jego imieniem.

Poniżej podajemy krótkie wprowadzenie do liczb zespolonych, w szczególności tłumaczymy, jak należy rozumieć potęgę zespoloną liczby naturalnej, co będzie nam potrzebne do zrozumienia szeregu w (1).

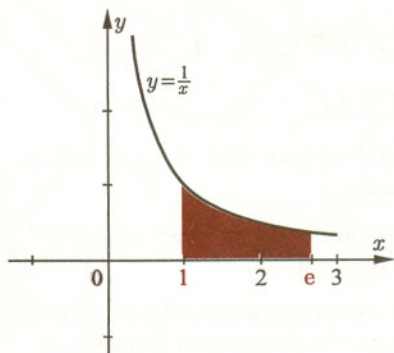
Liczbę zespoloną s można utożsamiać z parą liczb rzeczywistych (a, b) . Dodajemy takie pary „po współrzędnych”. Wprowadzając tzw. jednostkę urojoną i , o własności $i^2 = -1$, możemy zapisać $s = a + ib$. Liczbę a nazywamy częścią rzeczywistą s i zapisujemy $a = \operatorname{Re} s$ (od łac. *Realis*), liczbę b zaś – częścią urojoną, $b = \operatorname{Im} s$ (skrót od łac. *Imaginaris*). Zapis $s = a + ib$ ma również tę zaletę, że możemy mnożyć dwie liczby zespolone tak jak wielomiany zmiennej i , pamiętając tylko, że $i^2 = -1$:

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc).$$

Liczbę zespoloną s możemy też przedstawić we współrzędnych biegunowych, pisząc $s = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Cosinus i sinus są tutaj te same, co w szkole, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, a θ jest kątem skierowanym, mierzonym w radianach, między osią rzeczywistą a promieniem łączącym punkt 0 z punktem (a, b) (patrz rys. 1). Liczbę r nazywa się *wartością bezwzględną* (modułem) s i oznacza się $|s|$.



Rys. 1



Rys. 2. Liczba e jest taka, że pole kolorowego obszaru jest równe 1. Inne definicje liczby e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Zbiór liczb zespolonych można więc utożsamiać z płaszczyzną \mathbb{R}^2 . Ponieważ możemy również mnożyć punkty tej specjalnej płaszczyzny, więc zbiór liczb zespolonych możemy traktować jako ciało; tradycyjnie oznacza się go literą \mathbb{C} (od „complex” po angielsku czy „complexe” po francusku). Dla wyjaśnienia, co to jest zespolona potęga liczby naturalnej (tylko ten przypadek będzie nam potrzebny), podamy wzór, który też pochodzi od Eulera:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Dla celów tego artykułu przyjmijmy ów wzór za definicję wyrażenia $e^{i\theta}$. Z definicji wartości bezwzględnej otrzymamy $|e^{i\theta}| = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Teraz jest już jeden krok do zrozumienia n^s , gdzie $n = 1, 2, \dots$, a s jest liczbą zespoloną. Na przykład, co to jest 2^i ? Ponieważ dla $a > 0$ mamy $a = e^{\ln a}$, więc

$$2^i = (e^{\ln 2})^i = e^{i \ln 2} = \cos(\ln 2) + i \sin(\ln 2).$$

Ogólniej,

$$n^s = n^{a+ib} = n^a n^{ib} = n^a (e^{\ln n})^{ib} = n^a e^{ib \ln n} = n^a [\cos(b \ln n) + i \sin(b \ln n)],$$

a wartość bezwzględna tego wyrażenia to liczba

$$|n^s| = n^a \sqrt{\cos^2(b \ln n) + \sin^2(b \ln n)} = n^a, \quad \text{gdzie } a = \operatorname{Re} s.$$

Wróćmy do funkcji ζ . Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^a$ jest zbieżny dla

$a = \operatorname{Re} s > 1$, co pociąga za sobą zbieżność szeregu w (1). Okazuje się, że szereg (1) jest zbieżny tylko dla takich s ; nie znaczy to jednak, że funkcja ζ może być zdefiniowana tylko w półpłaszczyźnie $\operatorname{Re} s > 1$.

3. Liczby pierwsze i funkcja zeta. Inna równoważna definicja funkcji $\zeta(s)$ jest następująca:

$$(2) \quad \zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1} \dots,$$

gdzie iloczyn jest po wszystkich liczbach pierwszych. Można udowodnić, że iloczyn ten też jest zbieżny dla $\operatorname{Re} s > 1$.

Żeby sprawdzić równoważność definicji (1) i (2), zauważmy, że każdy czynnik w iloczynie jest sumą szeregu geometrycznego,

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots$$

Biorąc ich iloczyn po liczbach pierwszych nie przekraczających N , tzn. gdy $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots, P \leq N$, otrzymamy

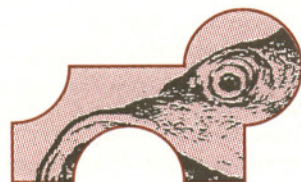
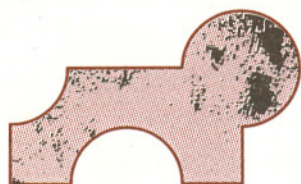
$$\begin{aligned} \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} &= \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{P^s} + \frac{1}{P^{2s}} + \dots\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{2^{2s}} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{2^s 3^s} + \dots = \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{N^s} + \text{reszta}, \end{aligned}$$

gdzie „reszta” jest sumą nieskończoną zawierającą s -te potęgi tylko niektórych liczb naturalnych większych od N . Tutaj wykorzystujemy fakt, że każda liczba naturalna $n > 1$ może być zapisana w sposób jednoznaczny (z dokładnością do porządku mnożenia) jako iloczyn potęg liczb pierwszych. Jeśli $\zeta(s)$ jest zdefiniowana wzorem (1), otrzymamy

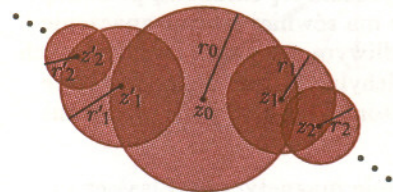
$$\begin{aligned} \left| \zeta(s) - \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right| &= \left| \zeta(s) - \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} - \dots - \frac{1}{N^s} - \text{reszta} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(N+1)^a} + \frac{1}{(N+2)^a} + \dots, \quad a = \operatorname{Re} s. \end{aligned}$$

Dla $a > 1$ ostatnia suma po prawej stronie dąży do 0, przy $N \rightarrow \infty$.

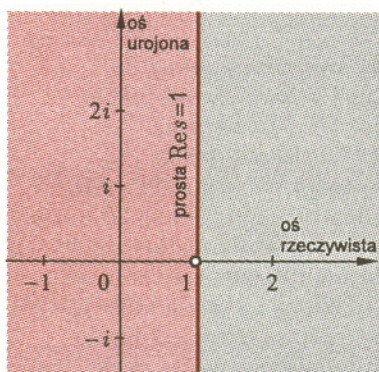
Iloczyn w (2) jest nazywany iloczynem Eulera i to Euler pierwszy udowodnił, że określa on tę samą funkcję co szereg (1). Z przedstawienia funkcji $\zeta(s)$ w formie (2) widać, że funkcja ta nie zeruje się dla $\operatorname{Re} s > 1$, ponieważ wszystkie czynniki są niezerowe, a iloczyn jest zbieżny.



Definicja pochodnej w sensie zespolonym wygląda identycznie jak w przypadku rzeczywistym: jeśli funkcja f jest zdefiniowana w pewnym otoczeniu punktu z_0 , wówczas $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Jednak warunek istnienia pochodnej w sensie zespolonym jest warunkiem nieporównanie silniejszym. Bierzemy się to stąd, że dopuszczamy argumenty zespolone, tzn. zmienna z może poruszać się nie tylko po linii prostej, lecz także po płaszczyźnie \mathbb{C} w otoczeniu z_0 .



Rys. 3



Rys. 4. Dla punktów szarej półpłaszczyzny wzory (1) i (2) dla funkcji $\zeta(s)$ mają sens. Można ją przedłużyć holomorficznie również na kolorową półpłaszczyznę (wraz z prostą $\text{Re } s = 1, s \neq 1$). W ten sposób jedynym punktem, w którym funkcja ζ nie jest określona, pozostaje $(1,0)$.

4. Funkcja zeta jako funkcja analityczna. Funkcja $\zeta(s)$ jest przykładem *funkcji analitycznej zespolonej* (lub inaczej *holomorficznej*), tzn. ma pochodną w sensie zespolonym w każdym punkcie swojej dziedziny.

Jedną z konsekwencji analityczności funkcji jest istnienie pochodnych wszystkich rzędów, choć w definicji zakładamy istnienie tylko pierwszej pochodnej! Ponadto, jeśli $f = f(z)$ jest funkcją analityczną zespoloną w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, to można udowodnić, że w otoczeniu każdego punktu $z_0 \in U$ funkcja f może być przedstawiona jako suma szeregu potęgowego o środku w punkcie z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \text{gdzie } a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (f^{(n)} \text{ jest } n\text{-tą pochodną } f).$$

Powyższy szereg potęgowy jest zbieżny w kole otwartym o środku w z_0 i promieniu r_0 , tzn. w $K(z_0, r_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r_0\}$ i rozbieżny dla $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r_0\}$ dla pewnego $0 < r_0 \leq \infty$. Na brzegu tego koła może być różnie ze zbieżnością.

Teraz postaramy się wyjaśnić, jak należy rozumieć *przedłużenie analityczne funkcji f* . Bierzemy dowolny punkt $z_1 \in K(z_0, r_0)$ i znów rozwijamy funkcję f w szereg potęgowy, ale tym razem o środku w z_1 . Ten nowy szereg jest zbieżny w pewnym kole $K(z_1, r_1)$ i rozbieżny poza domknięciem tego koła. Koło to może być zawarte w $K(z_0, r_0)$, ale nie musi. Jeśli nie jest zawarte, to funkcja f jest analityczna na sumie obu kół. Dalej bierzemy dowolny punkt $z_2 \in K(z_1, r_1)$, powtarzamy całą procedurę i kontynuujemy ją (patrz rys. 3). Funkcja f może być przedłużona na sumę tego ciągu kół. Identycznie możemy skonstruować inne ciągi kół, startując zawsze z koła $K(z_0, r_0)$. W ten sposób otrzymamy maksymalny zbiór, na którym funkcja analityczna zespolona jest zdefiniowana i poza który nie można jej przedłużyć analitycznie.

Okazuje się, że funkcja $\zeta(s)$, choć wzorem (1) czy (2) jest zdefiniowana tylko dla $\text{Re } s > 1$, może być analitycznie przedłużona na całą płaszczyznę zespoloną \mathbb{C} oprócz punktu 1 (patrz rys. 4). Jest to własność mniej oczywista, choć nie jest trudno ją udowodnić.

Łatwo jest udowodnić, że funkcja zeta może być przedłużona na półpłaszczyznę $\text{Re } s > 0$, to znaczy na prawo od osi urojonej. Mianowicie, mnożąc $1 - 2^{1-s}$ przez $\zeta(s)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} (1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= \left(1 - \frac{2}{2^s}\right) \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots - 2 \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \dots + \frac{1}{(2n)^s} + \dots\right) = \\ &= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s} + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}. \end{aligned}$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny dla $\text{Re } s > 0$. Zatem funkcja $\zeta(s)$ może być przedstawiona wzorem

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s},$$

gdzie prawa strona ma sens dla $\text{Re } s > 0$ oprócz $s = 1$. Na przykład,

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

W drugiej części tego artykułu będziemy więc zakładać, że funkcja $\zeta = \zeta(s)$ jest analityczna dla wszystkich s zespolonych oprócz 1, choć wzory (1) i (2) mają jedynie sens dla $\text{Re } s > 1$.

Autorzy pragną podziękować dr. R. Kopieckiemu, prof. A. Schinzlowi i prof. J. Urbanowiczowi za cenne uwagi, które istotnie ulepszyły pierwszą wersję obu części niniejszego artykułu.

Literatura.

[E] M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*. Academic Press 1974.
 [R] P. Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*. Springer-Verlag, New York 1996.
 [T] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta Function*. Clarendon Press, Oxford, 1986 (wydanie drugie).
 [W] A. Weil, *Number Theory. An Approach Through History. From Hammurabi to Legendre*. Birkhäuser 1984.

Badanie zjawiska indukcji elektromagnetycznej w ziemskim polu magnetycznym: a – układ doświadczalny; m – ruchoma część przewodu, n – nieruchoma część przewodu, \vec{B} – wektor indukcji magnetycznej wskazujący kierunek linii ziemskiego pola magnetycznego, S – statyw, b-f – różne sposoby wprawiania przewodu w ruch.

Powszechnie wiadomo, że nasza planeta – Ziemia – jest źródłem pola magnetycznego. Każdy zapewne używał przyrządu, wykorzystującego działanie ziemskiego pola magnetycznego, nazywanego kompasem lub busolą. Badania archeologiczne wykazały, że kompasy już w starożytności były znane w Chinach i na Bliskim Wschodzie. Ziemskie pole magnetyczne wykazuje wiele interesujących właściwości. Rozkład przestrzenny linii tego pola jest taki, jakby Ziemia była ogromnym magnesem sztabkowym, którego bieguny magnetyczne leżą w pobliżu biegunów geograficznych.

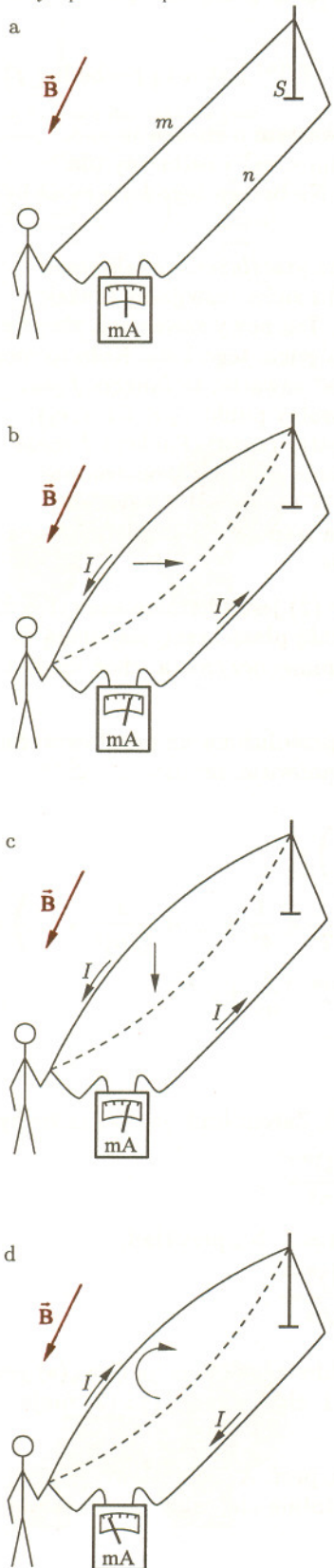
Położenie biegunów magnetycznych Ziemi nie jest stałe. Badania kierunku namagnesowania niektórych skał wykazały, że położenie to ulega okresowym zmianom, a co pewien czas bieguny nawet zamieniają się miejscami. Na szczęście procesy te trwają dziesiątki tysięcy lat, więc na razie możemy być spokojni o poprawność wskazań naszych kompasów. Linie pola magnetycznego Ziemi tworzą pewien kąt z jej powierzchnią, dlatego wyróżnia się składową poziomą i pionową tego pola. Ziemskie pole magnetyczne ma również istotne znaczenie dla ochrony życia na naszej planecie przed szkodliwym wpływem naładowanych cząstek promieniowania kosmicznego. Pole to odchyła i pułapkuje nadlatujące cząstki zmniejszając w ten sposób liczbę tych, które dochodzą do powierzchni Ziemi.

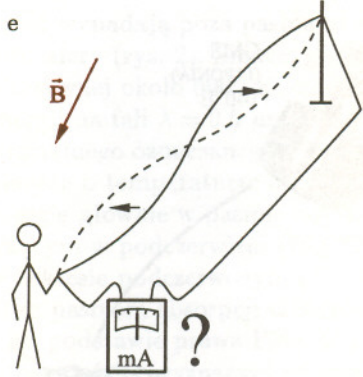
Żeby wyjaśnić przyczyny powodujące ziemskie pole magnetyczne, Elsasser i Bullard założyli, że wewnątrz ciekłego jądra Ziemi, utworzonego z roztopionych skał, przepływają prądy elektryczne tworzące szczególny układ przestrzenny. Prądy te, podobnie jak prąd płynący w przewodniku ze znanego doświadczenia Oersteda, są głównym źródłem ziemskiego pola magnetycznego. Przeprowadzone ostatnio symulacje komputerowe przekonują o słuszności tych założeń i opracowanego na ich podstawie modelu wytwarzania ziemskiego pola magnetycznego nazywanego dynamem geomagnetycznym.

Pole magnetyczne Ziemi jest raczej słabe. Typowy magnes używany do przytrzymywania obrazków na tablicy magnetycznej wytwarza pole około 5000 razy silniejsze od ziemskiego. Okazuje się, że mimo to ziemskie pole magnetyczne można wykorzystać do badania zjawiska indukcji elektromagnetycznej i wytwarzania prądu indukcyjnego. W tym celu należy przygotować jednożyłowy elastyczny przewód o długości co najmniej 20 m i polu przekroju poprzecznego około 1 mm² lub większym. Najlepiej nadaje się do tego celu przewód wykonany z linki miedzianej w izolacji z tworzywa sztucznego. Grubszy i dłuższy przewód umożliwia łatwiejsze uzyskanie prądu indukcyjnego o większym natężeniu. Oprócz tego potrzebny jest miliamperomierz prądu zmiennego z zakresem 1 mA i ciężki statyw. Jako miliamperomierz może służyć miernik uniwersalny (tzw. multimetr) ze wspomnianym zakresem pomiarowym.

Schemat układu doświadczalnego przedstawia rysunek a. W długim pomieszczeniu, np. w korytarzu, ustawiamy statyw S i przywiązujemy do niego przewód mniej więcej w połowie długości. Zamiast statywu można wykorzystać np. klamkę lub hak wbity w ścianę. Końce przewodu przyłączamy do zacisków miliamperomierza. Jedna część przewodu n będzie leżała nieruchomo na podłodze, a drugą m będziemy trzymać poziomo w ręku i na różne sposoby wprawiać w ruch. Doświadczenia te możemy wykonać również na zewnątrz budynku, np. na boisku szkolnym, i wtedy zamiast statywu wystarczy słupek lub drzewo. Należy zwrócić uwagę, żeby w pobliżu miejsca eksperymentu nie było sztucznych źródeł pola magnetycznego, np. linii elektroenergetycznych czy stacji transformatorowych.

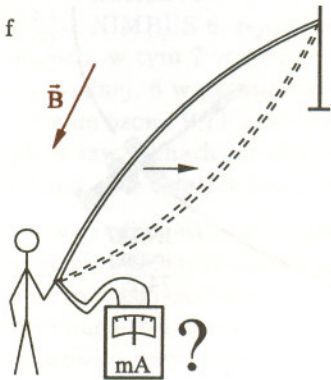
Kiedy obie części przewodu są nieruchome (rys. a), miliamperomierz nie pokazuje przepływu prądu. Potrząsając około raz na sekundę trzymaną w ręku częścią przewodu m w płaszczyźnie poziomej (rys. b) wytwarzamy falę stojącą, której strzałka powinna wynosić kilkadziesiąt centymetrów. Długość tej fali powinna być dwa razy większa niż długość ruchomej części przewodu. Poruszające się elementy przewodu przecinają prostopadłą do nich składową pionową ziemskiego pola magnetycznego. Suma indukowanych w tych elementach sił elektromotorycznych powoduje przepływ prądu wskazywany przez miliamperomierz.





Zmieniemy szybkość i amplitudę potrząsania przewodem. Zobaczymy, jak te zmiany wpływają na wskazania miliamperomierza. Spróbujemy również ustalić, jaki związek istnieje między kierunkiem przepływu prądu indukcyjnego a kierunkiem ruchu przewodu i kierunkiem linii ziemskiego pola magnetycznego, który możemy określić posługując się kompasem lub igłą magnetyczną.

To samo doświadczenie powtarzamy potrząsając ruchomą częścią przewodu m w płaszczyźnie pionowej (rys. c). Obserwujemy analogiczny efekt. W tym przypadku prąd indukcyjny powstaje w wyniku przecinania przez elementy przewodu prostopadłej do nich składowej poziomej ziemskiego pola magnetycznego. Część przewodu m można również wprawić w ruch obrotowy zataczając nią okręgi w sposób pokazany na rysunku d. Prąd indukcyjny będzie wtedy powstawał w rezultacie przecinania przez elementy przewodu obu składowych ziemskiego pola magnetycznego. Zmieniając kąt, jaki tworzy kierunek ustawienia ruchomej części przewodu z płaszczyzną południka magnetycznego, którą wyznacza igła kompasu, możemy zbadać wpływ tego parametru na wskazania miliamperomierza.



Warto również zrealizować warianty doświadczenia przedstawione na rysunkach e, f. Wprawiamy w ruch część przewodu m z tak dobraną częstotliwością, żeby wytworzyła się fala stojąca o długości takiej samej, jak długość tej części (rys. e). Czy wówczas miliamperomierz wskaże przepływ prądu? Spróbujemy również wprawić w taki sam ruch obie części przewodu (rys. f). Żeby ograniczyć niezależne ruchy tych części, można skleić je w kilku miejscach opaskami z taśmy klejącej albo związać sznurkiem. Co wskazuje w tym przypadku miliamperomierz? Dlaczego?

Badane przez nas zjawisko indukcji elektromagnetycznej zostało powszechnie wykorzystane m.in. w prądnicach – zarówno tych małych, zasilających instalację oświetleniową roweru, jak i tych wielkich, które pracują w elektrowniach. W prądnicach występują jednak pola magnetyczne znacznie silniejsze od ziemskiego.

Satelita meteorologiczny

Ryszard BALCER

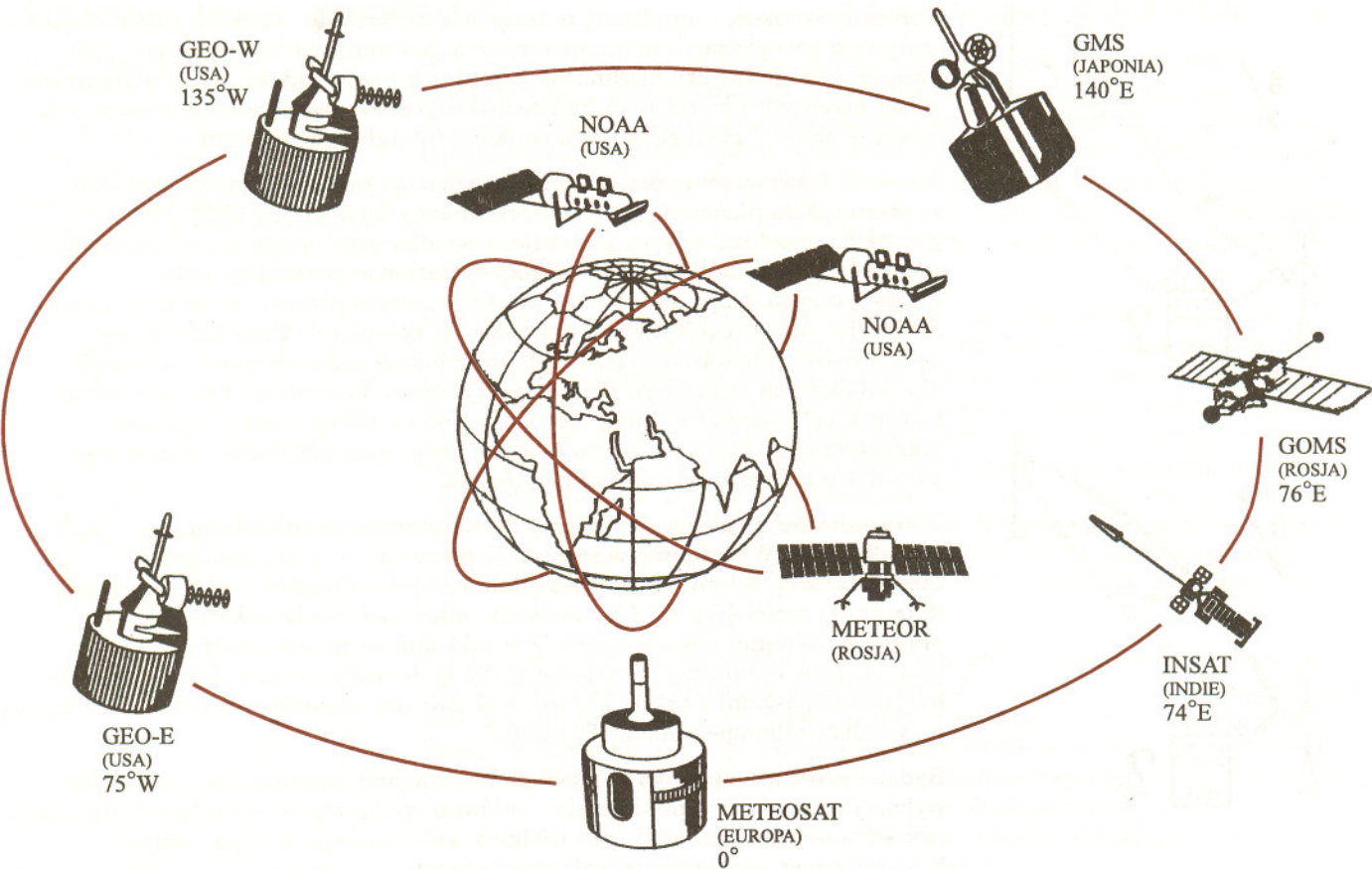
Orbity satelitów

Pierwszy sztuczny satelita Ziemi wystrzelony został na orbitę przez Związek Radziecki 4 X 1957 r., co zapoczątkowało szybki rozwój astronautyki i związanych z nią dziedzin nauki i techniki. Wkrótce pojawiły się kolejne satelity, w tym również tzw. meteorologiczne. Pierwszym w pełni zasługującym na tę nazwę był TIROS (*Television and InfraRed Observational Satellite*) wystrzelony na orbitę 1 IV 1960 r. na wysokość 644 km. Jego zadaniem było głównie zademonstrowanie możliwości obserwowania zachmurzenia z wysokości orbity satelity za pomocą kamery telewizyjnej. Następnymi, skonstruowanymi w połowie lat 60., były amerykańskie satelity z serii NIMBUS zdolne już do przekazywania danych o procesach zachodzących w atmosferze Ziemi. Wtedy też pojawił się pierwszy radziecki satelita meteorologiczny KOSMOS 122.

Ze względu na zajmowane orbity satelity dzielimy na geostacjonarne i biegunowe. Satelita geostacjonarny obiega Ziemię w płaszczyźnie równika z kątową prędkością orbitalną równą kątowej prędkości rotacji Ziemi, znajduje się więc niezmiennie nad ustalonym punktem równika. Wysokość orbity geostacjonarnej

wynosi około 36 000 km, co odpowiada promieniowi orbity 6,6 promienia Ziemi. Geostacjonarność nie oznacza jednak zupełnej niezmienności położenia względem powierzchni naszego globu. Perturbacje ze strony przede wszystkim Księżycy i Słońca powodują powolne odchodzenie satelity od przewidzianego punktu i po pewnym czasie wymagana jest korekcja jego położenia. Na orbicie geostacjonarnej znajduje się obecnie sześć satelitów meteorologicznych: METEOSAT (Europa), nad długością geograficzną 0° , GOES-E (USA), $75^\circ W$, GOES-W (USA), $135^\circ W$, GMS (Japonia), $140^\circ E$, GOMS (Rosja), $76^\circ E$, INSAT (Indie), $74^\circ E$. Stanowią one razem zespół światowej obserwacji pogody (World Weather Watch).

Satelitą biegunowym z kolei jest satelita, który został wystrzelony na orbitę przechodzącą (prawie) nad biegunami Ziemi. Wysokości orbit meteorologicznych satelitów biegunowych mogą być dowolne, zazwyczaj są równe około 850 km z czasem obiegu rzędu 100 min. Trzy satelity biegunowe: dwa z serii NOAA (USA) oraz METEOR (Rosja) uzupełniają obserwacje satelitów geostacjonarnych. (Na koniec lat 90. planowane jest wysłanie europejskich satelitów polarnych.) Cały zespół dziewięciu satelitów meteorologicznych jest schematycznie przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1

Czujniki satelitów i zasada pomiarów

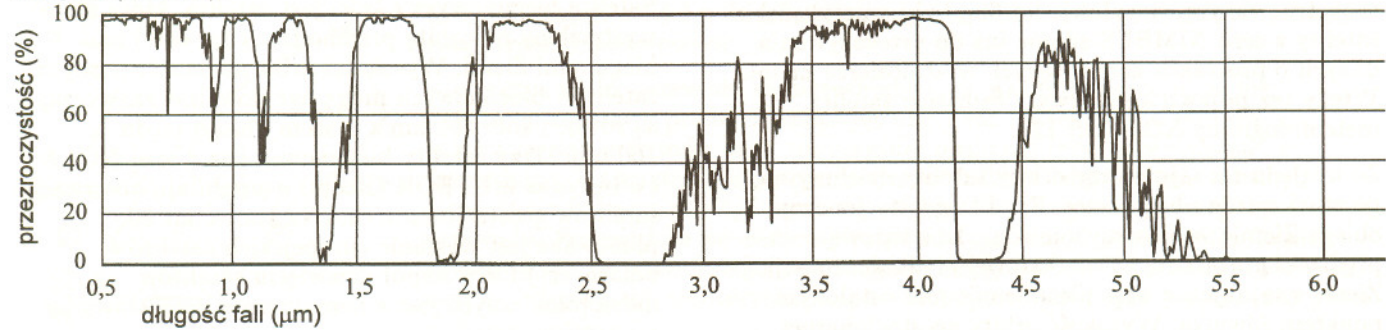
Zasadniczym wyposażeniem satelitów meteorologicznych są radiometry, czyli przyrządy do pomiaru natężenia promieniowania. Prawo Plancka określa natężenie promieniowania $B(\lambda, T)$ jako funkcję długości fali i temperatury, przy założeniu, że ciało promieniuje jak czarne. Z pomiaru natężenia promieniowania na dowolnej długości fali można więc wyznaczyć temperaturę ciała, ponieważ jego odległość od satelity jest znana. Rzeczywiste obiekty nie są jednak ciałami doskonale czarnymi. Stosunek rzeczywistego natężenia promieniowania do wartości teoretycznej dla tej samej fali i przy tej samej temperaturze nazywamy emisyjnością: $I(\lambda, T)/B(\lambda, T) = \epsilon(\lambda, T)$.

Emisyjność powierzchni Ziemi jest zbliżona do jedności, a ciała o emisyjności $\epsilon < 1$ nazywamy ciałami szarymi (tabelka).

Emisyjności różnych ciał

powierzchnia	temperatura (°C)	emisyjność
skóra człowieka	32	0,98
lód	-10	0,96
wilgotna gleba	20	0,95
sucha gleba	20	0,92
piach	20	0,90
śnieg	-10	0,85
polerowane złoto	100	0,02

Wybór odpowiedniego przedziału długości fal pozwala mierzyć temperaturę charakteryzującą rozmaite obiekty, jak powierzchnię Ziemi, wody, lodu, górną granicę chmur itp. Ponieważ atmosfera Ziemi to mieszanina gazów i aerozoli, chcąc obserwować np. powierzchnię Ziemi, należy wybrać te przedziały,



Rys. 2

które wypadają poza pasmami absorpcji składników atmosfery (rys. 2). Słońce, gwiazda o temperaturze efektywnej około 6000 K, emituje maksimum energii na fali $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ (jest to środek zakresu widzialnego oznaczanego VIS), natomiast Ziemia, planeta o temperaturze około 300 K, promieniuje energię głównie w pasmie fal około $10\text{--}12 \mu\text{m}$, leżącym w podczerwieni (IR). Obserwując zatem w zakresie podczerwonym ($\lambda > 0,7 \mu\text{m}$), leżącym poza pasmem absorpcji składników atmosfery, można – na podstawie prawa Plancka i uwzględniając emisyjności – wyznaczyć temperaturę interesujących obiektów. Np. radiometr HIRS/2 (*High Resolution Infrared Radiation Sounder*), zainstalowany na satelicie NIMBUS 6, rejestrował promieniowanie w 20 kanałach, w tym 7 w pasmie CO_2 $15 \mu\text{m}$, 7 w pasmie pary wodnej, 6 w pasmie też CO_2 $4,3 \mu\text{m}$, jeden w pasmie ozonu $9,71 \mu\text{m}$ i 3 poza pasmami absorpcji, czyli w tzw. oknach atmosferycznych ($11,11, 3,76$ i $0,7 \mu\text{m}$ – to ostatnie jest pasmem VIS).

Typowy radiometr zainstalowany na satelicie odbiera promieniowanie (przepuszczone przez stosowne filtry) z bardzo wąskiego kąta bryłowego – poniżej jednego miliradiana. Na powierzchni Ziemi odpowiada to obszarowi o rozmiarach rzędu kilometra. Pomiar promieniowania z tego obszaru odpowiada jednemu pikselowi (elementowi obrazowemu) na ekranie monitora. W miarę ruchu satelity pomiary kodowane są w postaci kolejnych pikseli tworzących w ten sposób linie, z których powstaje pełny obraz, jak to się dzieje na ekranie telewizora.

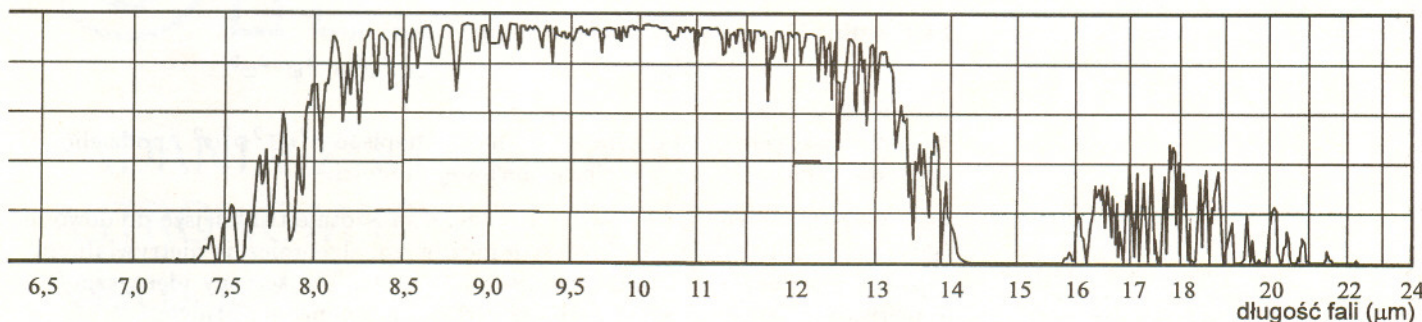
Obserwacje satelitarne

Satelita europejski METEOSAT, zawieszony nad Zatoką Gwinejską, pozwala na otrzymywanie co pół godziny obrazu całej widocznej półkuli Ziemi w kanałach leżących w trzech zasadniczych pasmach: wspomnianych już VIS i IR oraz IRWV (*Infrared Water Vapor*, $5,7\text{--}7,1 \mu\text{m}$). Pasma IRWV, odpowiadające falam absorbowanym przez atmosferyczną parę wodną, pozwala na wyznaczenie jej zawartości w słupie powietrza objętym obserwacją, a na całym obrazie – zmian ilości pary wodnej z czasem w różnych miejscach globu. W przypadku tego satelity jeden piksel obejmuje kąt $0,065$ mrad,

czemu odpowiadają 2 km przy obserwacjach z wysokości – jak pamiętamy – około $36\,000 \text{ km}$. Oczywiście, obrazy w pasmie VIS pochodzą tylko z dziennej półkuli Ziemi, natomiast w podczerwieni można śledzić rozkład chmur również na stronie nocnej. Na podstawie temperatury można też rozpoznać, na jakiej wysokości leżą obserwowane chmury, na zasadzie: chmury zimniejsze leżą wyżej. Z takich obserwacji powstają następnie mapy pogody, a jedną z nich możemy codziennie zobaczyć na ekranie telewizora po Wiadomościach przed godz. 20.

Chmury, które stale pokrywają znaczną część powierzchni Ziemi, utrudniają obserwacje samej powierzchni w pasmach VIS i IR. Rozwiązaniem jest użycie pasm mikrofalowych, np. $\lambda = 6 \text{ mm}$. Kąt widzenia jest wtedy znacznie większy i pikselowi na powierzchni Ziemi odpowiada obszar o średnicy ponad 100 km . Promieniowanie Ziemi w tym zakresie jest znacznie słabsze, ale z kolei odbiorniki mikrofal mają większą czułość niż detektory podczerwieni. Zakres mikrofalowy pozwala np. łatwo identyfikować aktualne opady, co jest cenne zwłaszcza nad oceanami, gdyż informacje z tych obszarów są praktycznie nie do zdobycia w inny sposób. Obszary bezopadowe od objętych opadami różnią się temperaturą o ponad 50 K . Badania i obserwacje w pasmie mikrofalowym mają szczególne zastosowanie do wykrywania opadów o charakterze tropikalnym oraz do śledzenia globalnego rozkładu opadów. Prowadzi się też obserwacje tzw. metodą cięciw (LIMB), pozwalające na wyznaczenie rozkładu koncentracji gazów z wysokością w atmosferze przy wykorzystaniu ich pasm absorpcji. Istota tej metody polega na rejestracji przez satelitę, w czasie ruchu po orbicie, promieniowania Słońca lub innej gwiazdy przenikającego atmosferę Ziemi na różnych wysokościach. Przebieg natężenia tego promieniowania jest odbiciem koncentracji danego absorbenta, którą można w ten sposób prześledzić niemal w całej grubości atmosfery.

Dane otrzymywane z pomiarów satelitarnych są gromadzone w kilku centrach, takich jak Waszyngton, Darmstadt, Tokio, Delhi, a następnie rozsyłane do użytkowników. Obecnie jest możliwość stosunkowo łatwego dotarcia do nich dzięki sieci komputerowej INTERNET.



Izometria – przekształcenie nie zmieniające odległości.

Figura stała w danym przekształceniu to taka, że obraz każdego jej punktu też jest jej punktem – punkty te nie muszą być stałe.

Symetria osiowa – izometria, której wszystkie punkty stałe tworzą prostą.

Symetria z poślizgiem – złożenie symetrii z przesunięciem o wektor równoległy do jej osi; jedynie wtedy obojętna jest kolejność wykonywania tych przekształceń.

Dla dowolnego przekształcenia λ i μ przez $\mu\lambda$ rozumiemy złożenie, czyli wykonanie najpierw przekształcenia λ , a potem μ , przez λ^2 oznaczamy złożenie przekształcenia λ z nim samym, przez λ^{-1} oznaczamy przekształcenie odwrotne do λ itd.

Słowo Banacha ma związek z problemem paradoksalnego rozkładu kuli i istnieniem miary uniwersalnej, ale to zupełnie inna historia.

Słowo Banacha

Proponujemy sprawdzanie własnej sprawności na izometriach płaszczyzny – słowo Banacha będzie punktem docelowym naszych rozważań.

A oto ciąg twierdzeń, z których każde nietrudno wynika z poprzednich. Szanowny Czytelniku – przypomnij sobie lub wymyśl odpowiadające im dowody. Nie ma tu nic, czego nie miałyby wiedzieć uczeń szkoły średniej, więc na pewno każdemu się uda. Przypominamy: izometrie, o których mowa, to izometrie płaszczyzny.

1. Jeśli izometria ma jeden punkt stały, to stałe są wszystkie okręgi o środku w tym punkcie.
2. Jeśli izometria ma dwa punkty stałe A i B , to ma ich więcej – co najmniej wszystkie punkty prostej AB .
3. Jeśli izometria ma trzy niewspół liniowe punkty stałe, to jest identycznością (każdy punkt jest jej punktem stałym).
4. Izometria jest jednoznacznie wyznaczona przez obrazy trzech niewspół liniowych punktów.
5. Każda izometria jest złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych (najlepszą formą dowodu jest tu podanie algorytmu nakładającego za pomocą symetrii dany trójkąt na przystający do niego).
6. Złożenie dwóch symetrii o osiach równoległych to przesunięcie (nie od rzeczy jest tu wskazać wektor tego przesunięcia).
7. Złożenie dwóch symetrii o osiach przecinających się to obrót (o jaki kąt?).

8 (Arnold Schmidt). Złożenie trzech symetrii osiowych o osiach parami równoległych, jak też o osiach przechodzących przez jeden punkt, to też symetria osiowa.

9. Pozostałe złożenia symetrii osiowych to symetrie z poślizgiem.
Uwaga: twierdzenia 6 – 9 składają się na twierdzenie Michela Chaslesa: *każda izometria płaszczyzny to przesunięcie, obrót lub symetria z poślizgiem (dopuszczamy poślizg zerowy).*

10. Złożenie dwóch przesunięć to też przesunięcie.
11. Złożenie dwóch obrotów to obrót lub przesunięcie (kiedy co?).
12. Jeśli przekształcenie φ jest izometrią, to φ^2 jest przesunięciem lub obrotem.

13. Jeśli φ i ψ są izometriami, to $\varphi^2\psi^2\varphi^{-2}\psi^{-2}$ jest przesunięciem. Tu warto chyba dać wskazówki.

- 1° Należy oddzielnie rozpatrzyć cztery przypadki wyznaczone przez twierdzenie 12, a więc przesunięcie-przesunięcie, przesunięcie-obrót, obrót-przesunięcie, obrót-obrót, z których istotnie trudny jest ostatni.
- 2° Jeśli γ i δ są obrotami o różnych środkach i ich złożenie też jest obrotem, to $\delta\gamma$ i $\gamma\delta$ są obrotami o ten sam kąt, ale o różnych środkach.
- 3° W przypadku przesunięcie-przesunięcie zawsze otrzymujemy identyczność – to tutaj nie ma znaczenia, ale bardzo pomaga w dowodzie następnego twierdzenia.

14 (Stefan Banach). Jeśli φ i ψ są izometriami, to $\varphi^2\psi^2\varphi^{-2}\psi^{-2}\varphi^4\psi^{-2}\varphi^{-2}\psi^2\varphi^{-2}\psi^{-2}\varphi^2$

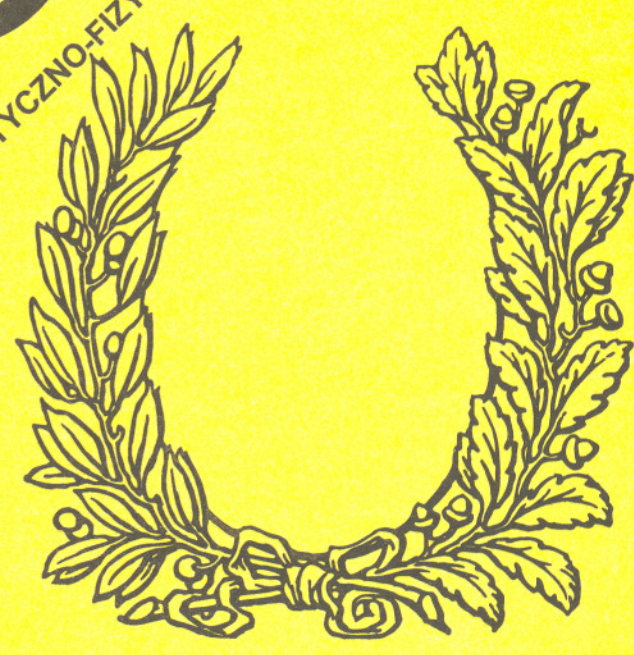
jest identycznością. Tu wskazówka jest prosta: zamiast φ^4 należy napisać $\varphi^2\psi^{-2}\psi^2\varphi^2$ i podzielić cały napis nawiasami na cztery części jednakowej długości.

Jeśli wszystko przebiegło sprawnie, to teraz dwa istotnie trudniejsze do dowodu fakty: napis Banacha jest najkrótszym możliwym, algebraicznie nietrywialnym napisem opisującym za pomocą dowolnych izometrii płaszczyzny identyczność, to pierwszy, i drugi – dla izometrii przestrzeni taki napis nie istnieje.

de|o

$h=6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s $\pi=3,141592\dots$

POPULARNY MIESIĘCZNIK MATEMATYCZNO-FIZYCZNO-ASTRONOMICZNY



Dodatek olimpijski

ZADANIA Z I ETAPÓW OLIMPIADY
ASTRONOMICZNEJ, FIZYCZNEJ I MATEMATYCZNEJ
Nieco o Olimpiadzie Informatycznej

Olimpiada Matematyczna

Już po raz czterdziesty dziewiąty organizowane są w Polsce zawody matematyczne dla uczniów szkół średnich pod nazwą *Olimpiada Matematyczna*. Jest to najstarsza z olimpiad przedmiotowych. Jej twórcą był profesor Stefan Straszewicz.

Na początku każdego roku szkolnego rozsyłane są do szkół zadania, których rozwiązania należy przysyłać we wskazanych terminach do komitetów okręgowych. Zadania te i adresy komitetów okręgowych publikowane są również w *Delcie*. Do następnego etapu powoływani są ci uczestnicy Olimpiady, których rozwiązania zostały najwyżej ocenione. Nie trzeba wcale rozwiązywać wszystkich zadań. Większość uczestników nadsyła tylko kilka rozwiązań. Oni również mogą być zakwalifikowani do drugiego etapu; oczywiście, jednak im więcej rozwiązań (poprawnych!) przysyła zawodnik, tym większą ma szansę.

Zawody stopnia drugiego przeprowadzane są w lutym jednocześnie w dziesięciu miastach będących siedzibami komitetów okręgowych. W ciągu dwóch kolejnych dni odbywają się pięciogodzinne egzaminy pisemne. Każdego dnia zawodnicy otrzymują trzy zadania do samodzielnego rozwiązywania; próby nawiązywania współpracy są udaremniane przez komisję. Ci spośród uczestników zawodów stopnia drugiego, którzy najlepiej rozwiążą zadania, są powoływani do zawodów finałowych. Finał organizowany jest w kwietniu i przebiega analogicznie, jak zawody stopnia drugiego. Wyniki uzyskane w finale są podstawą do przyznania tytułu laureata Olimpiady lub wyróżnienia. Wyniki te są również podstawą do ustalenia składów delegacji na Międzynarodową Olimpiadę Matematyczną (istniejącą od 1959 roku), Austriacko-Polskie Zawody Matematyczne oraz Olimpiadę Matematyczną Państw Bałtyckich.

Wszyscy zawodnicy dopuszczeni do finału są zwolnieni z egzaminu z matematyki na maturze, mając z urzędu wystawioną ocenę celującą. Laureaci i finaliści korzystają ze znacznych ułatwień przy ubieganiu się na studia wyższe. Zakres tych ułatwień ustalają senaty wyższych uczelni. W szczególności wydziały matematyki uniwersytetów przyjmują finalistów Olimpiady Matematycznej bez żadnych egzaminów wstępnych.

Tegoroczne zadania I etapu Olimpiady są na str. vii.

Olimpiada Fizyczna

W grudniu 1951 roku do wszystkich polskich szkół średnich rozesłano treść zadań pierwszego etapu I Olimpiady Fizycznej. W zawodach wzięło wówczas udział 351 zawodników, a tytuł Laureata zdobyło 21 z nich. Od tego czasu zawody odbywają się co roku. Wśród Laureatów Olimpiady znaleźć można wielu znanych dziś uczonych, którzy właśnie sukcesem „olimpijskim” rozpoczynali swą karierę. Pierwsze zawody Olimpiady Fizycznej to już „niepamiętne czasy” nie tylko dla uczestników tegorocznych zawodów, a zapewne i ich rodziców, ale również dla wielu członków obecnego Komitetu Głównego. Rozpoczynając publikowanie zadań I Etapu Olimpiady Fizycznej w *Delcie* pozwalamy sobie poświęcić kilka słów jej twórcom.

inicjatorem zorganizowania Olimpiady Fizycznej był profesor Wojciech Rubinowicz. Ważną rolę odegrała też jego żona, doktor Elżbieta Rubinowicz. Pierwszym Przewodniczącym Komitetu Głównego Olimpiady został profesor Jerzy Pniewski, a jej Kierownikiem Organizacyjnym profesor Leonard Sosnowski. To w znacznej mierze dzięki uporowi profesora Sosnowskiego wśród zadań olimpijskich znalazły się również zadania doświadczalne, do dziś stanowiące najtrudniejszy element przygotowania zawodów, a sądząc po uzyskiwanych ocenach – jeden z trudniejszych sprawdzianów dla uczestników. Komitet Główny powołał wówczas 9 Komitetów Okręgowych (dziś jest ich 12) organizujących drugi etap zawodów (etapem trzecim są zawody finałowe rozgrywane co roku w czasie ferii wielkanocnych w Warszawie).

W 1967 roku profesor Czesław Ściśłowski zorganizował w Warszawie Pierwszą Międzynarodową Olimpiadę Fizyczną. Od tego czasu zawody odbywały się (z małymi wyjątkami) co roku. Prawo reprezentowania Polski zyskuje pięciu najlepszych Laureatów Olimpiady Fizycznej.

Tegoroczne zadania I stopnia Olimpiady są na . str. iv–vi.

XLI OLIMPIADA ASTRONOMICZNA

INFORMACJE REGULAMINOWE

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół średnich.
2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne. Rozwiązywanie zadań zawodów II stopnia i III stopnia odbywa się w warunkach kontrolowanej samodzielności.
3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do **13 października 1997 r.**, rozwiązania 3 zadań, dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.
4. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii I etapu, do **17 listopada br.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.
5. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyższe (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).
6. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod adresem: KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY ASTRONOMICZNEJ, Planetarium Śląskie, 41-500 Chorzów, skr. poczt. 10, w terminach podanych w p. 3 i 4.
7. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia

samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

8. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A-4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: rok i miejsce urodzenia, pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi).

9. O uprawnieniach laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty wyższych uczelni. Wśród nagród dla najlepszych znajdują się teleskopy.

ZALECANA LITERATURA: obowiązujące w szkołach średnich podręczniki do przedmiotów ścisłych; H. Chrupała, M.T. Szczepański *25 lat olimpiad astronomicznych*; *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI-XXXV* (w dwóch częściach); J.M. Kreiner *Astronomia z astrofizyką*; J. Mietelski *Astronomia w geografii*; E. Rybka *Astronomia ogólna*; David H. Levy *NIEBO – Poradnik użytkownika*; D.L. Moché *Astronomia – przewodnik po Wszechświecie*; *Słownik szkolny – Astronomia* – praca zbiorowa; atlas nieba; obrotowa mapa nieba; czasopisma: *Urania*, *Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie*, *Świat Nauki*, *Delta*, *Fizyka w Szkole*.

Pierwsza seria zadań

1. Na lato bieżącego roku przewidziano lądowanie sond kosmicznych na Marsie. Wyniki badań będą przesyłane na Ziemię drogą radiową przez kilka lat. Zakładając, że orbity Ziemi i Marsa są kołowe i współpłaszczyznowe, wyznacz minimalny przedział częstotliwości odbiornika rejestrującego w tym czasie na Ziemi sygnał, emitowany z częstotliwością ν przez nadajnik na Marsie. W obliczeniach przyjmij częstotliwość $\nu = 12$ GHz oraz wartości umieszczone w tabelce:

	R orbity [10^6 km]	R planety [km]	T obiegu [doby]	T obrotu [godz.]
Ziemia	149,6	6378	365,26	23,9
Mars	227,9	3393	686,98	24,6

2. Grupa 10 obserwatorów dysponująca identycznymi lunetami podjęła równoczesną obserwację z zamiarem odnalezienia komety o nieznanym położeniu, a będącej w zasięgu ich instrumentów. Każdy z nich dokonał obserwacji jednego, losowo wybranego fragmentu nieba mieszczącego się w polu widzenia lunety. Oblicz prawdopodobieństwo odnalezienia komety wiedząc, że gwiazda o deklinacji $\delta = -6^\circ$ przechodzi przez średnicę pola widzenia lunety w czasie $t = 7$ minut.

3. Które z gwiazd jaśniejszych od 4^m mogłyby być obecnie obserwowane podczas zaćmień Słońca blisko brzegu tarczy słonecznej? Czy liczba takich gwiazd może ulec zmianie w przeciągu kilkudziesięciu tysięcy lat?

4. Napisz krótki artykuł popularnonaukowy na temat „Podobieństwa i różnice między planetoidami a kometami”. Do artykułu, którego objętość nie może przekroczyć 2 stron (3600 znaków), należy dołączyć spis wykorzystanej literatury.

Zadania obserwacyjne

1. Tabelka podaje momenty zakryć obiektów przez Księżyc dla Warszawy. Zakrycia mogą być obserwowane również w innych miejscowościach, oczywiście w innym czasie. Dokonaj próby zaobserwowania przynajmniej jednego z tych zakryć. Niezależnie, czy zakrycie nastąpi, czy też nie, do opisu obserwacji dołącz mapkę przebiegu zjawiska. Przedyskutuj zgodność między przewidywanym a zaobserwowanym przebiegiem zjawiska.

data	moment zakrycia	jasność obiektu
21.09.1997	20 ^h 54, ^m 3	5, ^m 5
21.09.1997	20 ^h 02, ^m 2	3, ^m 6 ϑ Tau
16.10.1997	22 ^h 18, ^m 1	4, ^m 5
9.11.1997	18 ^h 16, ^m 0	3, ^m 8 λ Aqr
12.11.1997	01 ^h 35, ^m 3	0, ^m 7 Saturn

2. W tabelce podano przybliżone efemerydy planetoidy (4) Vesta. Przeprowadź obserwację tej planetoidy i przedyskutuj zgodność między efemerydą a wynikami swoich obserwacji. Do rozwiązania dołącz samodzielnie wykonaną mapkę zaobserwowanych pozycji planetoidy.

data	rektascensja	deklinacja	jasność
10.09.1997	02 ^h 11 ^m	+1,8	7, ^m 0
25.09.1997	02 ^h 05 ^m	+0,5	6, ^m 7
10.10.1997	01 ^h 52 ^m	-1,0	6, ^m 4
25.10.1997	01 ^h 38 ^m	-2,2	6, ^m 4
10.11.1997	01 ^h 25 ^m	-2,7	6, ^m 8

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji astronomicznych prowadzonych w latach 1996, 1997, a w szczególności obserwacji zaćmienia Księżycy 16.09.1997 r.

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. W przypadku zastosowania metody fotograficznej należy dołączyć negatyw.

Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 17 listopada 1997 r.

XLVII OLIMPIADA FIZYCZNA

ZADANIA ZAWODÓW I STOPNIA

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej w terminach:

część I – do 15 października br.,

część II – do 15 listopada br.

O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć w broszurze i na afiszu rozesłanych do szkół średnich.

Część I (termin wysyłania rozwiązań – 15 października 1997 r.)

Podaj lub wybierz i krótko uzasadnij prawidłową odpowiedź (za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty).

A) Gdy działamy stałą siłą F na ciało, to moc, jaką wydatkujemy (opory ruchu ciała są do zaniedbania),

- a) maleje;
- b) jest stała;
- c) wzrasta.

B) Droga hamowania samochodu w przypadku, gdy koła są zablokowane (nie obracają się wcale), jest

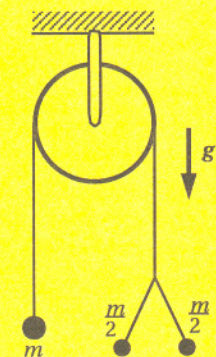
- a) krótsza niż
- b) taka sama jak
- c) dłuższa niż

w przypadku, gdy koła podczas poślizgu, choćby wolno, ale obracają się zgodnie z kierunkiem jazdy ($\omega < v/r$, gdzie ω – częstość kołowa obrotów, v – prędkość chwilowa samochodu, r – promień kół).

C) Do jednego z końców nici przełożonej przez nieruchomy blok jest przymocowana masa m . Drugi koniec nici rozwidła się symetrycznie na dwie części, do końców których są przymocowane dwie małe kulki plasteliny o masach $m/2$ i $m/2$. Nici jest wiotka i nieważka, zaś nieważki blok nie powoduje żadnych oporów ruchu.

W chwili początkowej wszystkie masy spoczywają w konfiguracji przedstawionej na rys. 1. Po zwolnieniu układu i złączeniu się kulek plasteliny masa m będzie

- a) pozostawała nieruchomo w położeniu początkowym;
- b) znajdowała się w spoczynku wyżej niż początkowo;
- c) znajdowała się w spoczynku niżej niż początkowo;
- d) poruszała się do góry;
- e) poruszała się do dół.



Rys. 1

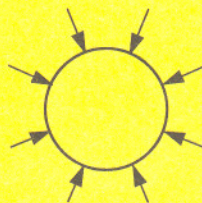
D) Na dwóch nieważkich niciach, o długości l każda, zawieszono poziomo cienki pręt, rys. 2. Pręt może się kołysać zarówno w płaszczyźnie rysunku, jak i prostopadle do niej. Okres drgań w płaszczyźnie rysunku jest

- a) mniejszy niż
 - b) taki sam jak
 - c) większy niż
- okres drgań „prostopadłych”.

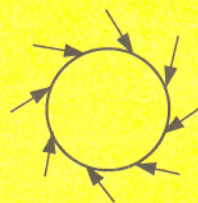


Rys. 2

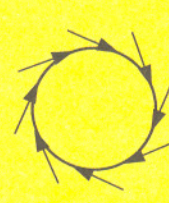
E) W przestrzeni kosmicznej, w pewnym układzie inercyjnym, rakieta porusza się po okręgu ze stałą szybkością. W jakim kierunku działa na nią siła odrzutu? Wskaż właściwy rysunek: 3a, 3b lub 3c.



Rys. 3a



Rys. 3b

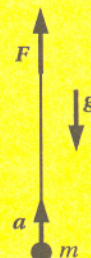


Rys. 3c

F) Nici napięta siłą $F = N/2$, gdzie N jest wytrzymałością nici na zerwanie, powoduje ruch masy m do góry z przyspieszeniem $a = 2 \text{ m/s}^2$, rys. 4. Zwiększając wartość siły F zwiększamy wartość przyspieszenia masy m . Maksymalne przyspieszenie, jakie możemy nadać tej masie ciągnąc nitę do góry, jest równe

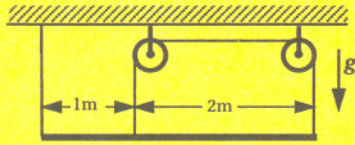
- a) 4 m/s^2 ;
- b) 10 m/s^2 ;
- c) 14 m/s^2 .

(Przyjmujemy, że wartość przyspieszenia ziemskiego jest równa 10 m/s^2 .)



Rys. 4

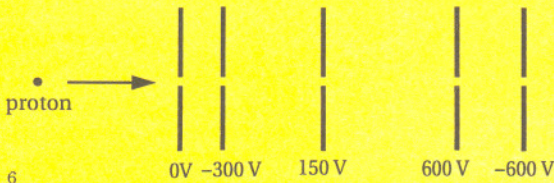
G) Jednorodny pręt o masie 10 kg wisi na trzech linkach, rys. 5. Oblicz siły napięcia linek.



Rys. 5

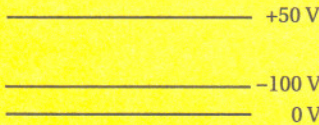
H) Proton o energii kinetycznej 300 eV pada z lewej strony na układ pięciu płytek, rys. 6, których odległości wzajemnie wynoszą kolejno: 10 cm, 20 cm, 30 cm i 15 cm, a potencjały względem Ziemi wynoszą kolejno: 0 V, -300 V, 150 V, 600 V i -600 V. Z której strony układu płytek wyleci proton (lewej czy prawej) i jaka będzie wartość jego prędkości względem wartości początkowej,

- mniejsza?
- taka sama?
- większa?



Rys. 6

I) Trzy przewodzące płyty, o powierzchni 1 m^2 każda, umieszczono równolegle jedna nad drugą, rys. 7. Odległości między nimi wynoszą 2 cm i 5 cm, a ich potencjały są równe 0 V, -100 V i 50 V. Ile wynosi całkowity ładunek elektryczny zgromadzony na płycie o potencjale -100 V? Zaniedbaj efekty brzegowe.



Rys. 7

J) Między dwiema zwartymi płaskimi płytami metalowymi znajduje się równoległa do nich cienka płyta izolatora naładowana równomiernie ładunkiem elektrycznym Q , rys. 8. Wartość pola elektrycznego na zewnątrz układu

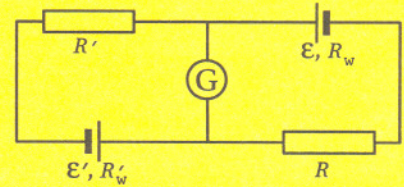
- zależy od odległości naładowanego izolatora od jednej z płyt metalowych (np. górnej);
- zależy od całkowitego ładunku, jaki znajduje się na zwartych płytach metalowych;
- jest równa zero, gdyż przewodzące płyty zawsze ekranują ładunek płyty izolatora. Zaniedbaj efekty brzegowe.



Rys. 8

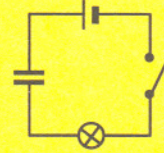
K) Elektryczny grzejnik domowy ma dwie spirale. Wyjaśnij dlaczego grzejnik: grzeje najslabiej, gdy żarzą się dwie spirale; grzeje średnio, gdy żarzy się tylko jedna; grzeje najmocniej, gdy znów żarzą się dwie spirale.

L) Jaki musi być związek między podanymi na rys. 9 wielkościami, aby galwanometr wskazywał zero?

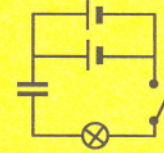


Rys. 9

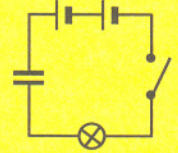
M) We wszystkich narysowanych obwodach, rys. 10, zarówno ogniwa, jak i kondensatory są jednakowe. Początkowo kondensatory są nienaładowane. Uporządkuj obwody według wielkości ładunku, który przepływa przez żarówkę po zamknięciu klucza.



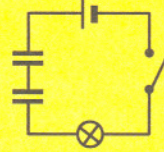
Rys. 10a



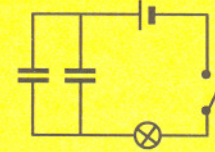
Rys. 10b



Rys. 10c

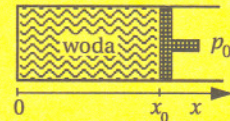


Rys. 10d

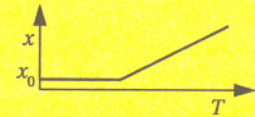


Rys. 10e

N) W cylindrze zamkniętym tłokiem mogącym przesuwac się bez tarcia znajduje się woda, rys. 11. Na zewnątrz cylindra panuje ciśnienie normalne p_0 . Który z poniższych wykresów (11a, 11b, 11c) zależności położenia tłoka od temperatury wewnątrz cylindra odpowiada możliwemu fizycznie procesowi?



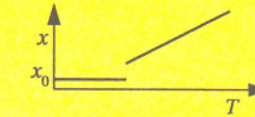
Rys. 11



Rys. 11a

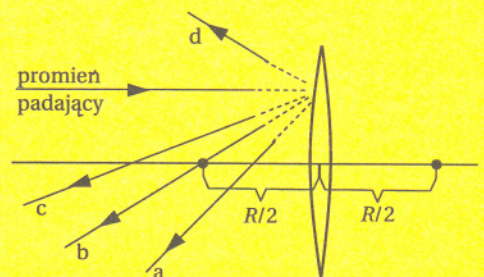


Rys. 11b



Rys. 11c

O) Cienka soczewka dwuwypukła o jednakowych promieniach krzywizny R jest wykonana ze szkła. Wskaż, które z promieni (a, b, c, d) pokazanych na rysunku 12 powstają w wyniku jednokrotnego odbicia od powierzchni soczewki.



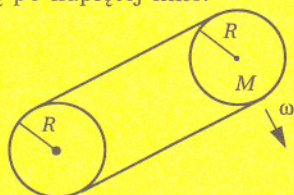
Rys. 12

ZADANIA TEORETYCZNE

Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

Zadanie T1

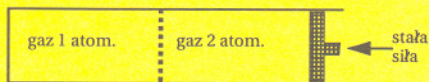
Krażek o promieniu R jest sztywno przymocowany do płaskiej powierzchni stołu. Krażek jest opasany jednorodną, cienką, wiotką i nierozciągliwą liną o długości całkowitej l i masie m , rys. 13. Drugi jednorodny krążek w kształcie walca o takim samym promieniu R i masie M ślizga się bez tarcia po powierzchni stołu tocząc się po napiętej linie. Układ obraca się wokół nieruchomego krążka z częstością kątową ω . Nie zachodzi poślizg liny po żadnym z dwóch krążków. Oblicz energię kinetyczną układu.



Rys. 13

Zadanie T2

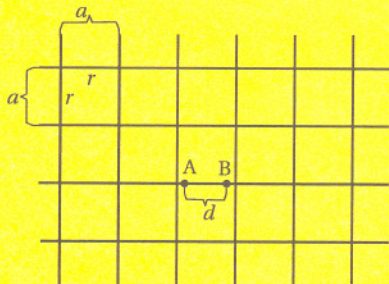
Rysunek 14 przedstawia cylinder zamknięty tłokiem, przedzielony nieruchomą półprzepuszczalną przegrodą. Początkowo w lewej komorze znajduje się gaz jednoatomowy, a w prawej – dwuatomowy. Początkowo oba gazy zajmują jednakowe objętości, znajdują się w jednakowej temperaturze i pod jednakowym ciśnieniem. Parcie gazu na tłok jest równoważone przez stałą siłę przyłożoną z zewnątrz do tłoka. Przez półprzepuszczalną przegrodę może powoli przepływać gaz jednoatomowy, nie może natomiast przepływać gaz dwuatomowy. Ścianki cylindra i tłok nie przewodzą ciepła, natomiast przegroda przewodzi ciepło. Między gazami nie zachodzi reakcja chemiczna. Oblicz temperaturę końcową gazów po ustaleniu równowagi przyjmując początkową temperaturę równą $T_0 = 300$ K. Do opisu gazów w równowadze stosuj równanie Clapeyrona.



Rys. 14

Zadanie T3

Oblicz opór zastępczy pomiędzy punktami A i B (rys. 15) nieskończonej sieci kwadratowej utworzonej z jednorodnych kawałków drutu o oporze r i długości a . Odległość między punktami A, B wynosi d ($d < a$).



Rys. 15

ZADANIA DOŚWIADCZALNE

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

Zadanie D1

Masz do dyspozycji żarówkę zawieszoną na znanej wysokości H nad podłogą, „szkiełko zegarkowe”, linijkę oraz papier. Wyznacz współczynnik załamania oleju jadalnego.

Uwagi:

1. Szkiełko zegarkowe można kupić w sklepach ze szkłem laboratoryjnym lub pożyczyć je ze szkolnej pracowni chemicznej.
2. Do pomiarów wybierz szkiełko zegarkowe o sferycznym kształcie powierzchni.

Zadanie D2

Masz do dyspozycji żarówkę samochodową (o napięciu nominalnym 12 V), zasilacz napięcia stałego regulowany w zakresie $0 \div 12$ V, woltomierz, amperomierz, przewody elektryczne umożliwiające zestawienie układu pomiarowego. Zakładając, że zależność mocy P pobieranej przez żarówkę od temperatury bezwzględnej jej włókna T ma postać

$$P = A + BT + CT^4,$$

wyznacz wartości współczynników A, B, C .

Przyjmij, że opór włókna zmienia się wraz z jego temperaturą zgodnie ze wzorem

$$R(T) = R_0[1 + \alpha_R(T - T_0)],$$

gdzie R_0 oznacza opór drutu w temperaturze T_0 , natomiast temperaturowy współczynnik oporu $\alpha_R = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Do doświadczenia użyj zwykłej (nie halogenowej) żarówki o niezbyt dużej mocy, aby za pomocą dostępnego zasilacza możliwe było zasilanie żarówki napięciem nominalnym.

Zadanie D3

Masz do dyspozycji wodę, rurkę szklaną o średnicy wewnętrznej mniejszej niż 3 mm, wysokie naczynie o przezroczystych ściankach, plastikową linijkę, olej jadalny. Wyznacz stosunek gęstości oleju do gęstości wody.

XLIX OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} |x-y| - \frac{|x|}{x} = -1 \\ |2x-y| + |x+y-1| + |x-y| + y - 1 = 0. \end{cases}$$

2. Proste zawierające wysokość trójkąta ABC , wpisanego w okrąg o środku O , przecinają się w punkcie H , przy czym $AO = AH$. Obliczyć miarę kąta CAB .

3. Ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) są określone przez warunki

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = a_n(a_n - 1),$$

$$2^{b_n} = a_n, \quad 2^{n-c_n} = b_n,$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Wykazać, że ciąg (c_n) jest ograniczony.

4. Dana jest liczba dodatnia a .

Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c mające następującą własność: dla każdej pary liczb dodatnich x, y spełniona jest nierówność

$$(c-1)x^{a+1} \leq (cy-x)y^a.$$

II seria

5. Dana jest liczba całkowita $n \geq 1$.

Rozwiązać równanie

$$|\operatorname{tg}^n x - \operatorname{ctg}^n x| = 2n |\operatorname{ctg} 2x|.$$

6. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC , punkt E leży na boku AC . Punkty P i Q są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów B i E na prostą AD . Udowodnić, że $BE = AE + AC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AD = PQ$.

7. Dane są liczby całkowite dodatnie m oraz n . Niech $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f: A \rightarrow A$ przyjmujących dokładnie m wartości oraz spełniających warunek:

jeżeli $k, l \in A, k \leq l$,

$$\text{to } f(f(k)) = f(k) \leq f(l).$$

8. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielościan wypukły mający k krawędzi oraz płaszczyzna nie przechodząca przez żaden z jego wierzchołków i przecinająca r krawędzi, przy czym $3r > 2k$.

III seria

9. Niech $a_0 = 0,91$ oraz

$$a_k = 0, \underbrace{99 \dots 9}_{2^k} \underbrace{00 \dots 0}_{2^{k-1}} 1 \text{ dla } k = 1, 2, 3, \dots$$

Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 a_1 \dots a_n)$.

10. Środkowe AD, BE, CF trójkąta ABC przecinają się w punkcie G . Na czworokątach $AFGE$ i $BDFG$ można opisać okręgi. Wykazać, że trójkąt ABC jest równoboczny.

11. W turnieju tenisowym uczestniczyło n graczy. Każdy rozegrał z każdym innym jeden mecz; nie było remisów. Udowodnić, że istnieje taki gracz A , który każdego innego gracza B pokonał bezpośrednio lub pośrednio, tzn. gracz A wygrał z B lub gracz A pokonał pewnego zawodnika C , który wygrał z tym graczem B .

12. Niech $g(k)$ będzie największym dzielnikiem pierwszym liczby całkowitej k , gdy $|k| \geq 2$, oraz przyjmijmy $g(-1) = g(0) = g(1) = 1$. Rozstrzygnąć, czy istnieje wielomian W stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych, dla którego zbiór liczb postaci $g(W(x))$ (x - całkowite) jest skończony.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem właściwego komitetu okręgowego Olimpiady najpóźniej dnia

13 października 1997 r.

12 listopada 1997 r.

10 grudnia 1997 r.

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy komitetów okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa elbląskiego, gdańskiego i słupskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej - Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa bielskiego, częstochowskiego i katowickiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej - Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Dla województwa krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej - Instytut Matematyczny Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa białkopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzesckiego i zamojskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej - Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 232, 20-031 Lublin.

Dla województwa kieleckiego, łódzkiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej - Instytut Matematyczny Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Matejki 48/49, pok. 24, 60-769 Poznań.

Dla województwa gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, plockiego, toruńskiego i wrocławskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej - Instytut Matematyczny Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego, suwalskiego i warszawskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej - Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego:

Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej - Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

Olimpiada Informatyczna

W tym przypadku nie podajemy zadań, gdyż regulamin wymaga, by były one ogłoszone dla wszystkich tego samego dnia.

W roku szkolnym 1996/97 odbyła się IV Olimpiada Informatyczna w Polsce. Olimpiada została powołana przez Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego, zgodnie z zarządzeniem Ministra Edukacji Narodowej, dotychczasym organizacją olimpiad przedmiotowych. Przewodniczącym Komitetu Głównego Olimpiady jest prof. dr hab. inż. Stanisław Waligórski z Instytutu Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego.

Olimpiada jest trójstopniowa. Integralną częścią rozwiązywania każdego zadania jest program napisany w języku programowania wysokiego rzędu dla komputera zgodnego z IBM PC. Zawody I stopnia polegają na samodzielnym opracowaniu rozwiązań czterech zadań w ciągu około trzech tygodni i wysłaniu ich do Komitetu Głównego. Zawody II i III stopnia polegają na rozwiązaniu zadań w ciągu dwóch pięciogodzinnych sesji przeprowadzonych w różnych dniach w warunkach kontrolowanej samodzielności. Na zawodach tych jednego dnia rozwiązuje się zwykle dwa lub trzy trudne problemy i pisze do nich działające i znajdujące rozwiązanie programy. Uczniowie korzystają z języków Pascal i C++.

Olimpiada Informatyczna ma następujące cele:

Stworzenie motywacji dla zainteresowania nauczycieli i uczniów nowymi metodami informatyki.

Rozszerzenie współdziałania nauczycieli akademickich z nauczycielami szkół w kształceniu młodzieży uzdolnionej.

Kształtowanie umiejętności samodzielnego zdobywania i rozszerzania wiedzy informatycznej.

Stwarzanie młodzieży możliwości szlachetnego współzawodnictwa, a nauczycielom – warunków do twórczej pracy z młodzieżą.

Wyłanianie reprezentacji Rzeczypospolitej Polskiej na Międzynarodową Olimpiadę Informatyczną.

W 1996 roku Olimpiada Informatyczna umocniła swoje osiągnięcia:

1. Reprezentacja Polski na VIII Międzynarodową Olimpiadę Informatyczną w Vespem (Węgry) uzyskała, w gronie 57 krajów i 215 zawodników, po raz trzeci z rzędu lepsze wyniki niż w roku poprzedzającym, uzyskując 2 medale złote, srebrny i brązowy. Nasi zawodnicy zdobyli:

Piotr Zieliński	3 miejsce	191 pkt.
Jakub Pawlewicz	14 miejsce	180 pkt.
Andrzej Gąsienica-Samek	21 miejsce	175 pkt.
Adam Borowski	68 miejsce	136 pkt.

na 200 możliwych.

W nieoficjalnej punktacji drużynowej dało to Polakom 4. miejsce za zawodnikami Chin, Rosji i Słowacji.

2. Reprezentacja Polski w odmłodzonym składzie (Jakuba Pawlewicza, który ukończył szkołę średnią, zastąpił Eryk Kopczyński, uczeń drugiej klasy liceum) na III Olimpiadzie Informatycznej Centralnej Europy była zdecydowanie najlepsza. Nasi reprezentanci zajęli w gronie 7 krajów,

stanowiących ścisłą czołówkę światową, pierwsze miejsce drużynowo i indywidualnie. Polscy zawodnicy: Adam Borowski (Starogard Gdański), Eryk Kopczyński (Warszawa, najmłodszy uczestnik Olimpiady), Piotr Zieliński (Poznań) i Andrzej Gąsienica-Samek (Warszawa) uplasowali się na miejscach pierwszym, trzecim, piątym i siódmym oraz zdobyli medale: złoty, dwa srebrne i brązowy. Nasza młoda drużyna (wszyscy mają jeszcze szansę startować w kolejnych olimpiadach międzynarodowych) ma już wielkie osiągnięcia, ale jeszcze bardzo dużo do zdobycia: Puchar IFIP dla najlepszego młodego informatyka świata oraz najlepszy wynik drużynowy na Olimpiadzie Międzynarodowej.

3. Tak jak w poprzednich latach, przed rozpoczęciem zawodów kolejnej Olimpiady, ukazała się obszerna publikacja o krajowej III Olimpiadzie zawierająca sprawozdanie z przebiegu zawodów, teksty wszystkich zadań konkursowych (w tym również z zawodów międzynarodowych) wraz z rozwiązaniami autorów zadań i omówieniem rozwiązań uczniowskich, a także z dyskietką zawierającą wzorcowe programy i testy, za pomocą których można ocenić własne rozwiązania. Trudno przecenić rolę tej publikacji dla rozwoju młodych informatyków, a aktualność jej wydawania staje się dobrą tradycją, choć wymaga dużego wysiłku redaktora prof. dr hab. Macieja M. Sysły.

4. W tegorocznych zawodach I stopnia startowało blisko 1000 uczniów, dwa razy więcej niż w każdym z dwu poprzednich lat, a uzyskane przez zawodników wyniki były bardzo dobre. Na to, by zakwalifikować się do zawodów II stopnia, trzeba było uzyskać ponad 69% maksymalnej liczby punktów.

5. Polsce powierzono w tym roku organizację IV Olimpiady Informatycznej Centralnej Europy (CEOI). Jako miasto Olimpiady wybrany został Nowy Sącz. Władze Nowego Sącza z prezydentem miasta Andrzejem Czerwińskim i starostą gmin nowosądeckich Rudolfem Borusiewiczem zaplanowały wiele działań, aby impreza była bardzo udana. OPTIMUS SA, który jest głównym sponsorem CEOI, podjął się dostarczenia sprzętu i prowadzenia serwisu.

W Olimpiadzie można zdobyć cenne trofea. Laureaci Olimpiady mogą być zwolnieni nie tylko z egzaminu dojrzałości z przedmiotu informatyka, ale i z egzaminów wstępnych do wielu szkół wyższych. Oprócz tego wielu finalistów otrzymuje cenne nagrody rzeczowe. Imprezę finansuje Ministerstwo Edukacji Narodowej oraz sponsorzy. W tym roku głównym sponsorem jest Ogólnopolska Fundacja Edukacji Informatycznej, bardzo zasłużona dla rozwoju edukacji informatycznej w Polsce.

Zwycięzcy IV olimpiady krajowej reprezentowali Polskę na IV Olimpiadzie Informatycznej Centralnej Europy w lipcu 1997 r. w Nowym Sączu oraz będą Polskę reprezentowali na IX Międzynarodowej Olimpiadzie Informatycznej w grudniu 1997 r. w Kapsztadzie w Republice Południowej Afryki.



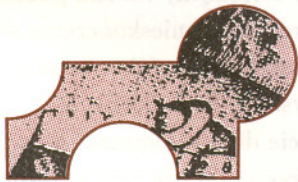
Rozwiązanie zadania F 459. Gdyby Ziemia nie miała atmosfery, a Słońce było obiektem punktowym, w dniu astronomicznej równonocy długość nocy równałaby się długości dnia. Ze względu na ugięcie się promieni w atmosferze widzimy Słońce przy wschodzie i zachodzie, gdy jest ono jeszcze, lub już, faktycznie pod horyzontem.

Upraszczając własności atmosfery do modelu jednorodnej warstwy, znajdujemy położenie katowe β Słońca poniżej horyzontu

$$\frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ - \beta)} = n \Rightarrow \beta = 1,35^\circ.$$

Sumując otrzymujemy $\alpha + \beta = 1,6^\circ$. Przeliczając ten kąt na wydłużenie dnia oraz biorąc pod uwagę zarówno wschód, jak i zachód Słońca, otrzymujemy, że dzień jest dłuższy od nocy o

$$\frac{2 \cdot 1,6}{360} \cdot (24 \cdot 60) \text{ minut} = 13 \text{ minut}.$$



Rozwiązanie zadania F 460. Ciśnienie wywierane przez wentylator jest równe

$p = \frac{\rho u^2}{2}$, gdzie u jest prędkością przepływu powietrza. Moc wentylatora wynosi $P_0 = p \frac{dV}{dt} = pQ$, gdzie $Q = \frac{dV}{dt}$ jest ilością wymienianego powietrza. Z drugiej strony $Q = u \cdot S$, gdzie $S = 4\pi r^2$ jest polem powierzchni wentylatora. Eliminując prędkość z powyższych równań otrzymujemy

$$P_0 = \frac{\rho Q^3}{2S^2},$$

skąd ostatecznie

$$Q = \sqrt[3]{\frac{2P_0 S^2}{\rho}} = 0,143 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Aby zwiększyć przepływ dwukrotnie, moc musiałaby zwiększyć się 8-krotnie!

Patrz w niebo

Komety okresowe, rozsypując się stopniowo wskutek wielokrotnych zbliżeń do Słońca, rozsiewają na swoich orbitach drobne okruchy, a gdy Ziemia w taki strumień okruchów wpada, widzimy na niebie tzw. deszcz meteorów. Z obfitością takiego deszczu bywa różnie, w każdym razie coroczny sierpniowy spadek Perseidów zawdzięczamy komecie Swifta-Tuttle'a. Jest to kometa o okresie około 130 lat, ostatnio zbliżyła się do Słońca (a więc i do Ziemi) w 1992 r., a następne zbliżenie zajdzie w 2126 r. Nie byłoby w tym żadnej sensacji, gdyby nie pogłoski o możliwym jej wtedy zderzeniu z Ziemią.

Ruch komety Swifta-Tuttle'a w przeszłości został prześlędzony dość skrupulatnie. Stwierdzono, że obserwowano ją w Chinach w latach 188 n.e. i 69 p.n.e., za to nie ma o niej zapisów z lat 447 i 574 p.n.e., gdy powinna być łatwo widoczna gołym okiem. Przypuszcza się, że dokumenty z tamtych lat zostały zniszczone w ramach palenia ksiąg w 213 r.p.n.e. W sumie, według najnowszych obliczeń, kometa 5 VIII 2126 r. minie Ziemię w odległości 23 mln km.

Ale przecież ruchem komety rządzi nie tylko grawitacja ze strony Słońca i planet. Wskutek parowania gazów z jądra komety doznaje ona słabego odrzutu, albo też drobne odłamki odpadają od niej w wyniku rotacji. Są to przyczyny tzw. anomalii niegrawitacyjnych w ruchu komety. Tak się jednak składa, że kometa Swifta-Tuttle'a nie wykazuje mierzalnych anomalii niegrawitacyjnych, co w świecie komet jest dość wyjątkowe. To z kolei każe przypuszczać, że jej jądro jest wyjątkowo wielkie i masywne. Według pewnych ocen jądro ma co najmniej 24 km średnicy (co prawda jeszcze większa jest zapewne kometa Hale'a-Boppa, jej jądro zostało ocenione na niemal 50 km średnicy).

Od ostatniego pojawienia kometa była śledzona tak długo, aż jej jasność spadła bardziej niż do 22 mag. W ten sposób poznany został wielki huk jej orbity i wyszła na jaw jeszcze jedna jej osobliwość, mianowicie jej okres obiegu wokół Słońca jest z wysoką dokładnością 11 razy dłuższy od roku jowiszowego. Nie wiadomo, jak taki rezonans wpłynie na orbitę komety w dalszej przyszłości. Kometa ta wydaje się więc jedynym poważnym kandydatem na obiekt zagrażający Ziemi.

Tomasz KWAST

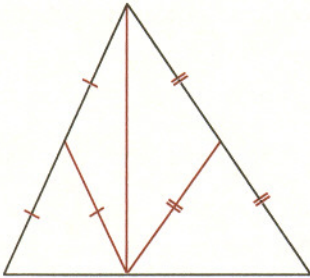
Wrzesień

23 IX o godz. 1:56 czasu letniego zaczyna się astronomiczna jesień, inaczej mówiąc mamy równonoc jesienną. Każdy, kto zerknął do zadania F 459 w tym numerze *Delty*, wie już, że atmosfera załamując światło słoneczne pozornie przyspiesza moment wschodu i opóźnia moment zachodu Słońca, a więc powoduje, że dzień zawsze jest dłuższy, niż gdyby atmosfery nie było. Ale jest jeszcze gorzej, mianowicie termin „równonoc” jest po prostu mylący, oznacza moment, gdy Słońce przekracza równik niebieski. Chciałoby się zapytać: jeżeli równonoc wypada w dzień, to dzień ten jest równy której nocy – poprzedzającej czy następującej? Analogicznie, gdy równonoc wypada w noc, a jeżeli nawet w jednym miejscu moment ten wypada w dzień, to po drugiej stronie Ziemi będzie to w nocy itd. Krótko mówiąc, w okolicy 23 IX (i za każdym razem przy każdej równonocy) dzień trwa jedynie w przybliżeniu tak długo jak noc, nigdy dokładnie.

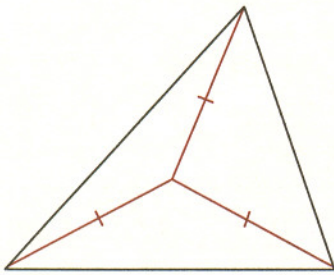
Wenus jest nadal w Pannie, Mars w Wadze, planet tych więc nie widać. Jowisz nadal w Koziorożcu i dobrze go widać w pierwszej połowie nocy, a Saturn w Rybach i widać go przez całą noc. Księżyc znajdzie się bardzo blisko Saturna 18 IX i Aldebarana 22 IX. Pełnia wypada 16 IX i nastąpi wtedy całkowite zaćmienie Księżyca – środek zaćmienia o godz. 20:47 czasu letniego. Księżyc w nowiu 2 IX wywoła jeszcze częściowe zaćmienie Słońca, ale z Polski będzie ono niewidoczne.

T.K.

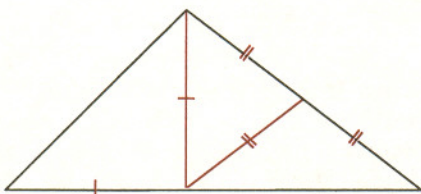
Trójkąt równoramienny



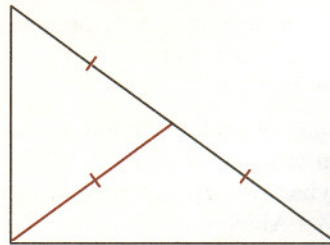
Rys. 1



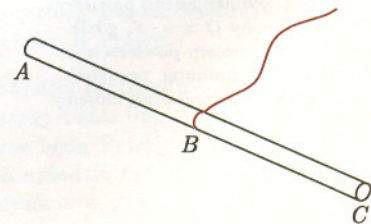
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



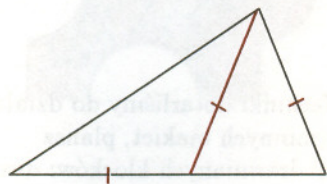
Rys. 5. $AB = BC =$ długość sznurka

O trójkącie równoramiennym każdy słyszał i każdy coś o nim wie. To taki, który ma dwa boki równe. W takim trójkącie kąty między każdym z równych boków a tym trzecim są równe. To twierdzenie nosi łacińską nazwę *pons asinorum*, czyli *ośli most*, gdyż już od Starożytności panowało przekonanie, że ten, kto nie umie tego dowieść, niczego nie jest w stanie się nauczyć.

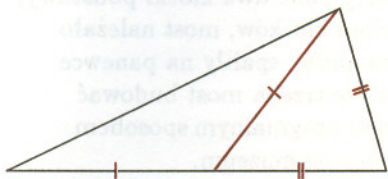
Trójkąty równoramienne mają tę miłą własność, że można z nich zbudować każdy trójkąt. Mówiąc dokładniej, każdy trójkąt można podzielić na cztery trójkąty równoramienne (rys. 1) – ale każdy trójkąt ostrokątny można podzielić na trzy takie trójkąty (rys. 2), podobnie jak niektóre, nawet nieskończenie wiele (ale nie wszystkie!), rozwartokątne (rys. 3), natomiast każdy trójkąt prostokątny można rozłożyć na dwa trójkąty równoramienne (rys. 4). To ostatnie spostrzeżenie wykorzystywano w starożytnym Egipcie do wyznaczania kąta prostego. Stosowny przyrząd stanowił patyk, w którego połowie przywiązany był sznurek sięgający akurat do końca patyka (rys. 5); każdy bez trudu wymyśli, jak się czegoś takiego używa.

Tak się zresztą składa, że wśród trójkątów ostrokątnych jest nieskończenie wiele takich, które dadzą się podzielić na dwa trójkąty równoramienne w taki sposób, jak na rysunku 6, i nieskończenie wiele takich, które dadzą się rozbić tak, jak na rysunku 7.

Cóż jeszcze można powiedzieć o trójkącie równoramiennym? Oto niepełna lista jego własności:



Rys. 6



Rys. 7

1. Ma oś symetrii.
2. Jedna z jego wysokości jest symetralną boku.
3. Jedna z jego wysokości dzieli go na dwa trójkąty podobne.
4. Jedna z jego wysokości jest dwusieczną kąta przy wierzchołku.
5. Jedna z jego wysokości dzieli go na dwa trójkąty o równych polach.
6. Istnieje okrąg zawierający dwa wierzchołki, który ma środek w trzecim.
7. Jego suma z odbiciem symetrycznym względem jednego z boków jest równoległobokiem.
8. Środek okręgu opisanego na nim, środek okręgu wpisanego i jeden z wierzchołków są współliniowe.
9. Jeśli przez środki pewnych dwóch jego boków przeprowadzić prostą równoległą do trzeciego i odbić symetrycznie względem tej prostej część o mniejszym polu, to otrzyma się cztery trójkąty podobne.

No dobrze, i co z tego? Właśnie. Po pierwsze, spróbujcie uzupełnić tę listę o (niezbyt trywialne) dalsze własności. Po drugie, zastanówcie się, czy wśród tych dziewięciu własności, a także wśród tych, które sami wymyślicie, są takie, które przysługują *tylko* trójkątom równoramiennym. Wreszcie, po trzecie: jak uzasadnić wszystkie przedstawione wyżej twierdzenia o rozkładzie trójkątów na trójkąty równoramienne?

Małą Deltę opracowali: Wiktor BARTOL i Marek KORDOS



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 820. Udowodnić, że jeśli (a_n) jest nierosnącym ciągiem liczb dodatnich, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Rozwiązanie na str. 15

M 821. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny przy $\alpha = 1$.

Rozwiązanie na str. 15

M 822. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)^\alpha}$ jest zbieżny dla $\alpha > 1$ i rozbieżny przy $\alpha = 1$.

Rozwiązanie na str. 15

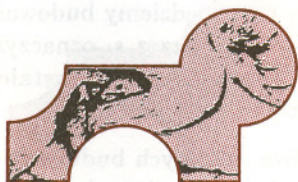
Redaguje Jarosław KULPA

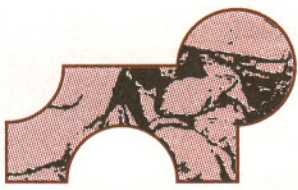
F 459. Oszacować, o ile dłuższy jest dzień od nocy na równiku w dniu astronomicznej równonocy. Współczynnik załamania powietrza jest równy $n = 1,000280$, a promień kątowy Słońca $\alpha = 0,25^\circ$.

Rozwiązanie na str. 9

F 460. Wentylator wywiewnika w łazience ma moc $P_0 = 15$ W. Promień wywiewnika jest równy $r = 6$ cm. Oszacować, ile powietrza może maksymalnie wymienić wentylator w ciągu sekundy. Ile razy należałoby zwiększyć moc wentylatora, aby zwiększyć jego wydajność dwa razy? Gęstość powietrza jest równa $\rho = 1,3$ kg/m³.

Rozwiązanie na str. 9



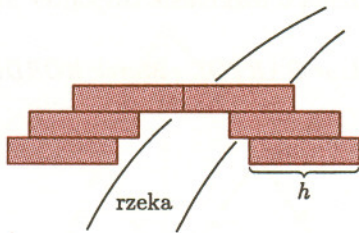


Mosty z klocków

Piotr RYBKA

W czasie ostatniej rodzinnej wizyty w Muzeum Techniki dotarliśmy do działu poświęconego budownictwu mostowemu. Obok ogromnych makiet, plansz i rysunków był skromny stół z trzema kompletami drewnianych klocków: dwoma łukowymi i jednym zestawem zwykłych, prostopadłościennych o kwadratowej podstawie. Podczas gdy córka wybrała zajęcia mniej obciążające, rodzice zajęli się sprawdzaniem swych umiejętności konstruktorskich. Najtrudniejsze okazało się zadanie z klockami prostopadłościennymi: były dane dwa klocki podstawy, odstęp między nimi równał się dwóm wysokościami klocków, most należało zbudować z pozostałych ośmiu. Pierwsze naiwne próby spaliły na panewce – konstrukcja się waliła. Potem żona zauważyła, że trzeba most budować od góry i było jasne, że trzeba zastanowić się nad optymalnym sposobem budowania. Nie było nam dane przeprowadzić tego w muzeum.

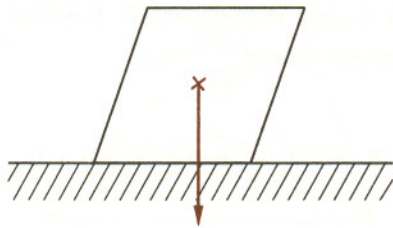
Dopiero w zaciszu domowym można było znaleźć i zapisać rozwiązanie problemu: *ile jednakowych, jednorodnych klocków potrzeba do zbudowania mostu nad rzeką o szerokości l , tak by klocki podstawy pewnie stały na brzegu i nie przewieszały się nad rzeką?*



Autor przyznaje, że nie widział w praktyce tak budowanego mostu. Naszym poczynaniom nadajmy więc miano inżynierii klockowej. Postawiony problem dzięki swej prostocie łatwo poddaje się analizie. Dostrzegamy od razu naturalne pytania, na które każdy budowniczy musi sobie odpowiedzieć: (1) jakie zjawiska fizyczne są istotne? (2) czy zadanie jest wykonalne? i (3) jak przy danych ograniczeniach zbudować strukturę optymalną?

Ostatnie pytanie na ogół jest najtrudniejsze. Od razu jednak możemy spostrzec jedną rzecz: most powinien być symetryczny. Bo gdyby nie był, to jedna połowa przeszła byłaby dłuższa od drugiej (obie mają po tyle samo klocków), a wtedy dłuższy most można by zbudować kopiując symetrycznie owo dłuższe przeszło. Zatem od tej chwili zajmujemy się wyłącznie symetrycznymi mostami.

Jak powiedzieliśmy, trzeba zacząć od zrozumienia fizyki (w tym przypadku statyki) problemu. Ze szkoły wiadomo, że bryła pozostaje w równowadze, jeśli rzut jej środka ciężkości nie wychodzi poza obręb podstawy.



Musimy zatem umieć wyznaczyć środek ciężkości układu klocków. Rachunki upraszczają się, gdy przedstawimy układ U jako rozłączną sumę podukładów U_1 i U_2 , których masy i środki ciężkości są znane. Wtedy zadanie sprowadza się do wyznaczenia środka ciężkości dwóch odległych o d jednostek punktów materialnych o masach m_1 i m_2 – mówiąc o odległościach będziemy tu i dalej myśleli jedynie o „odległości w poziomie”, czyli o odległości rzutów. Ich odległości d_i od środka ciężkości całego układu spełniają równania

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = d, \\ m_1 d_1 = m_2 d_2. \end{cases}$$

Łatwo stąd wyliczyć, że

$$(*) \quad d_1 = d \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{i} \quad d_2 = d \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Jeśli pamiętamy, że środek ciężkości klocka wypada w połowie jego wysokości, to powyższy wzór całkowicie wystarczy do dalszych obliczeń.

Zajmijmy się matematyczną stroną problemu. Nasz most będziemy budować od góry, to znaczy będziemy dokładać kolejne klocki od dołu. Przez s_i oznaczmy odległość środka ciężkości i -tego klocka od środka ciężkości układu powstałego przez dołożenie tego klocka do zbudowanego już układu $i - 1$ klocków.

(1) Przypuśćmy, że mamy dwa klocki podstawy i dwa, z których budujemy przeszło. Zadanie jest łatwe: klocek przeszła nie może być wysunięty dalej niż $\frac{1}{2}h$,





bo wtedy rzut jego środka ciężkości będzie wychodził poza obręb podstawy i most runie, tj. połowa przęsła l_1 to $\frac{1}{2}h$. Połóżmy jeszcze $\Delta_1 = l_1$ i nazwijmy ten układ klocków U_1 .

(2) Dajmy na to, że (prócz podstawy) mamy 2 klocki do budowy połówki przęsła. By długość przęsła była największa, optymalny układ U_1 dwóch klocków (opisany wyżej) stawiamy na trzecim tak, aby środek ciężkości U_1 wypadał na krawędzi podstawy trzeciego klocka. Każda próba większego wysunięcia któregośkolwiek klocka kończy się katastrofą budowlaną. Znajdźmy jeszcze środek ciężkości układu U_1 . Jest to łatwe: mamy 2 punkty materialne (rzuty środków ciężkości klocków) o równych masach odległe o $\frac{1}{2}h$, zatem ze wzoru (*) wynika, że ich środek ciężkości wypada w $\frac{1}{4}h$, tj. $s_2 = \frac{1}{4}h$. Daje to możliwość wysunięcia U_1 o $\Delta_2 = \frac{1}{2}h - s_2$ nad krawędź trzeciego klocka. Tym samym długość połowy przęsła wynosi $l_2 = l_1 + \Delta_2$.

(n) Możemy teraz zastanowić się nad przypadkiem ogólnym: oprócz klocka podstawy mamy n klocków do budowy połowy przęsła. Zakładamy, że wiemy już, jak ułożyć połowę (najdłuższego możliwego) przęsła z $n - 1$ klocków – nazwijmy ten układ U_{n-1} , odpowiadającą mu długość przęsła oznaczmy przez l_{n-1} i przyjmijmy jeszcze, że $s_{n-1} < \frac{1}{2}h$.

Ze wzoru (*) wynika, że gdy środek ciężkości U_{n-1} znajduje się na prawej krawędzi n -tego klocka, to $s_n = \frac{h}{2} \frac{n-1}{n}$. Wynika stąd od razu, że $s_n < \frac{1}{2}h$, a cały opisany przed chwilą układ możemy wysunąć o $\Delta_n = \frac{1}{2}h - s_n = \frac{h}{2n}$ nad podstawę (tak, by środek ciężkości wypadał na krawędzi klocka podstawy). Żadnego z klocków bardziej wysunąć się nie da, bo przesuwałoby to rzut środka ciężkości układu n klocków poza obręb podstawy.

Zatem połowa długości nowego przęsła to

$$l_n = l_{n-1} + \Delta_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n = \frac{1}{2}h \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}h \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Powyższe rozumowanie to nic innego, jak (indukcyjny) dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Mając $2n$ jednakowych i jednorodnych klocków o wysokości h do budowy przęsła i dodatkowo dwa takie same klocki podstawy, można z nich zbudować symetryczny most nad rzeką o największej szerokości równej $h \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.*

Od razu zauważamy, że zadanie z muzeum było wykonalne, bo $2 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$. Można jeszcze zadać pytanie, czy są rzeki, nad którymi nie da się zbudować mostu opisaną metodą. Jest to pytanie o zbieżność szeregu harmonicznego $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$.

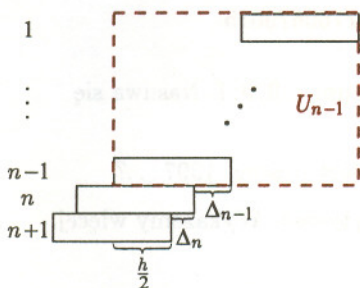
Niech $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$. Zauważmy, że dla $n > 2^k$ mamy $S_n \geq S_{2^k}$. Ponadto,

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \frac{k}{2}.$$

Wynika stąd

Wniosek. *Rzeka może być dowolnie szeroka.*

Choć wiedza z zakresu inżynierii klockowej może nie wystarczyć do zbudowania prawdziwego mostu, to jednak budowniczości prawdziwych mostów potrzebują matematyki. Muszą umieć dostrzegać ogólniejsze związki w szczególnych praktycznych problemach; muszą też umieć analizować otrzymane w ten sposób abstrakcyjne zadanie. Myśmy zrobili to samo, choć na zabawową skalę.



Inny dowód rozbieżności szeregu harmonicznego można znaleźć w zadaniach M 820 i M 821.





Początkowe cyfry symboli Newtona

Grzegorz BARTCZAK i Andrzej NOWICKI

Jeśli n, k są liczbami naturalnymi oraz $n \geq k$, to przez $\binom{n}{k}$ oznacza się liczbę $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Wiadomo, że $\binom{n}{k}$ jest liczbą naturalną, będącą liczbą wszystkich k -elementowych podzbiorów zbioru n -elementowego. Spójrzmy na kilka przykładów.

$$\binom{1997}{1} = 1997$$

$$\binom{1999}{2} = 1997001$$

$$\binom{494}{3} = 19970444$$

$$\binom{4681}{4} = 19979587391790$$

$$\binom{7517}{5} = 199739353621084563$$

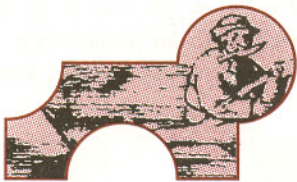
$$\binom{1562}{6} = 19979205577825494$$

$$\binom{7207}{7} = 199795303587200399319241$$

$$\binom{4108}{8} = 1997841430944510255346671$$

$$\binom{9653}{9} = 1997917655787531327615853237150$$

$$\binom{158}{10} = 1997837760676615$$



Każda z wypisanych tu liczb rozpoczyna się cyframi 1, 9, 9, 7. Nasuwa się pytanie:

Czy dla każdego k istnieje takie n , że liczba $\binom{n}{k}$ jest postaci 1997...?

Wykażemy, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna. Wykażemy więcej. Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Niech k będzie liczbą naturalną i niech $c_1 \neq 0, c_2, \dots, c_m$ będzie dowolnym ciągiem cyfr układu dziesiętnego. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n , że początkowe cyfry liczby $\binom{n}{k}$ są równe odpowiednio c_1, c_2, \dots, c_m .

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystamy dwa prościutkie lematy.

Lemat 1

Załóżmy, że a, b, c są liczbami rzeczywistymi, $b > a$ oraz $c > 0$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna s_0 , że dla wszystkich liczb naturalnych $s \geq s_0$ zachodzi nierówność $sb > sa + c$.

Dowód

Niech $s_0 = \left\lceil \frac{c}{b-a} \right\rceil + 1$ (przez $[x]$ oznaczamy część całkowitą liczby x). Wówczas s_0 jest liczbą naturalną i dla wszystkich $s \geq s_0$ mamy:

$$s \geq s_0 = \left\lceil \frac{c}{b-a} \right\rceil + 1 > \frac{c}{b-a}.$$

Zatem, jeśli $s \geq s_0$, to $s(b-a) > c$, czyli $sb > sa + c$.

Lemat 2

Niech u, v będą liczbami rzeczywistymi i niech k będzie liczbą naturalną. Załóżmy, że $u - v > k > 1$. Istnieje wtedy taka liczba naturalna n , że $u > n > n - k + 1 > v$.

Dowód

Przyjmijmy $n = [v] + k$. Wtedy:

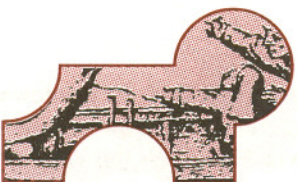
$$u > v + k \geq [v] + k = n > n - k + 1 = [v] + 1 > v.$$

Teraz możemy już udowodnić zapowiedziane twierdzenie.

Dowód twierdzenia

Niech $a = \sqrt[k]{M}$, $b = \sqrt[k]{M+1}$, $c = \sqrt[k]{(k!)^{k-1}}$, gdzie

$$M = c_1 10^{m-1} + c_2 10^{m-2} + \dots + c_{m-1} 10 + c_m.$$



**Rozwiązanie zadania M 820.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} a_n \right) \geq a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} a_{2^k} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

Z drugiej strony,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \right) \leq a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

Zatem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ wtedy i tylkowtedy, gdy $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$, co było do udowodnienia.

Twierdzenie jest oczywiste dla $k = 1$. W tym przypadku wystarczy za n przyjąć liczbę M (gdyż $\binom{M}{1} = M$). Załóżmy więc dalej, że $k > 1$.

Z lematu 1 wynika, że istnieje liczba naturalna t spełniająca nierówność $10^t b > c + 10^t a$, czyli

$$10^t \sqrt[k]{M+1} > \sqrt[k]{(k!)^{k-1}} + 10^t \sqrt[k]{M}.$$

Mnożąc tę nierówność stronami przez $\sqrt[k]{k!}$ otrzymujemy:

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} > k! + 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!}$$

i stąd

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} - 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!} > k! \geq k > 1.$$

Z lematu 2 wynika teraz, że istnieje liczba naturalna n spełniająca nierówności:

$$10^t \sqrt[k]{(M+1)k!} > n > n - k + 1 > 10^t \sqrt[k]{M \cdot k!}.$$

Podnosząc to do k -tej potęgi i dzieląc stronami przez $k!$ otrzymujemy:

$$10^{kt}(M+1) > \frac{n^k}{k!} > \frac{(n-k+1)^k}{k!} > 10^{kt}M$$

i stąd dalej

$$10^{kt}(M+1) > \frac{n^k}{k!} > \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} > \frac{(n-k+1)^k}{k!} > 10^{kt}M.$$

Wykazaliśmy zatem, że istnieje taka liczba naturalna n , że

$$10^{kt}(M+1) > \binom{n}{k} > 10^{kt}M.$$

Początkowe cyfry liczby $\binom{n}{k}$ są więc odpowiednio równe cyfrom liczby M , czyli cyfrom c_1, c_2, \dots, c_m . To kończy dowód twierdzenia. ■

Przypomnijmy (patrz na przykład [1]), że liczbą *trójkątną* nazywamy każdą liczbę postaci

$$t_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

a liczbą *tetraedralną* nazywamy każdą liczbę postaci

$$T_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Ponieważ $t_n = \binom{n+1}{2}$ oraz $T_n = \binom{n+2}{3}$, więc z przedstawionego twierdzenia wynikają następujące dwa wnioski.

Wniosek 1 ([1], str. 41)

Niech $c_1 \neq 0, c_2, \dots, c_m$ będzie dowolnym ciągiem cyfr układu dziesiętnego. Istnieje wtedy liczba trójkątna t_n , której początkowe cyfry są równe odpowiednio c_1, c_2, \dots, c_m .

Wniosek 2 ([1], str. 57)

Niech $c_1 \neq 0, c_2, \dots, c_m$ będzie dowolnym ciągiem cyfr układu dziesiętnego. Istnieje wtedy liczba tetraedralna T_n , której początkowe cyfry są równe odpowiednio c_1, c_2, \dots, c_m .

Twierdzenie zachodzi dla cyfr dowolnego układu numeracji (niekoniecznie dziesiętnego). Chcąc się o tym przekonać wystarczy w przedstawionym dowodzie zastąpić wszystkie występujące w nim liczby 10 podstawą numeracji $q > 1$. Z dowodu wynika również, że liczb n , o których mowa w twierdzeniu, istnieje nieskończenie wiele.

Na zakończenie zannotujmy pytanie:

Czy liczby postaci $n!$ oraz liczby postaci $\binom{2n}{n}$ mają własność opisaną w twierdzeniu?

Autorzy nie znają odpowiedzi na to pytanie.

Literatura

[1] W. Sierpiński, *Liczby trójkątne*, Biblioteczka Matematyczna 12, PZWS, Warszawa, 1962.

**Rozwiązanie zadania M 821.** Na mocy zadania M 820 wystarczy zbadać zbieżność szeregu

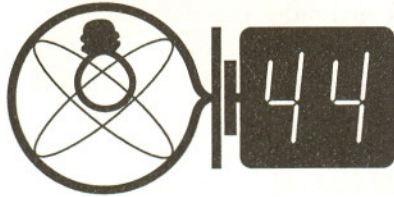
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k.$$

Dla $\alpha = 1$ jest to, oczywiście, szereg rozbieżny, natomiast dla $\alpha > 1$ – zbieżny szereg geometryczny, co dowodzi tezy zadania.

**Rozwiązanie zadania M 822.** Na mocy zadania M 820 wystarczy zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k (\log_2 2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Teza zadania wynika więc bezpośrednio z tezy zadania M 821.



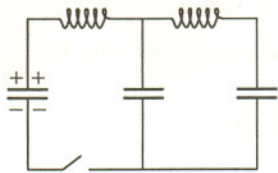
Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 231 ($WT=1,00$), 232 ($WT=2,90$) 233 ($WT=2,54$), 234 ($WT=3,57$) z numerów 1/1997 i 2/1997

Andrzej Idzik - Bolesławiec 47,68
Przemysław Gadziński - Środa Śl. 35,20
Jarosław Łazuka - Warszawa 13,81
Andrzej Nowogrodzki - Chocianów 13,10

Mały region na zachód od Wrocławia zapelnia większą część naszej Ligowej czołówki. Gratulacje dla 23. członka Klubu Fizycznego - p. Idzika, któremu na zbieranie 44 punktów wystarczyło niewiele ponad rok!

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1997



239. Wprowadźmy oznaczenia: długość górnej nici l_1 , masa ciężarka m , szukana prędkość v , wytrzymałość nici W , rozciągliwość r , długość dolnej nici l_2 , przyspieszenie ziemskie g , stała sprężystości nici $k = W/(rl)$ (równa $k_1 = 1562$ N/m dla górnej nici i $k_2 = 2083$ N/m dla dolnej). Oznaczmy też przesunięcie ciężarka w stosunku do początkowego położenia równowagi przez $x(t)$, a chwili, kiedy dolna nić zaczyna się napinać, przypiszmy $t = 0$. Wydłużenie dolnej nici jest równe $vt - x(t)$, a dopóki obie nici są całe, równanie ruchu ciężarka ma postać

$$mx''(t) = k_2(vt - x(t)) - k_1x(t).$$

Przy warunkach początkowych $x(0) = x'(0) = 0$ rozwiązaniem jest

$$x(t) = \frac{vk_2}{k_1 + k_2} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right),$$

gdzie $\omega = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$. W obu rozpatrywanych przypadkach a) i b) najpierw powinna ulec zerwaniu dolna nić. Nastąpi to w takiej chwili t_0 , w której spełniony jest warunek $k_2(vt_0 - x(t_0)) = W$ (gdy jest kilka rozwiązań, należy wybrać najwcześniejsze), natomiast dla górnej nici napięcie powinno w tej chwili nie przekraczać dozwolonej wartości, tzn. $mg + k_1x(t_0) < W$. Analiza numeryczna pozwala stwierdzić, że przy zadanych wartościach stałych nierówność ta będzie spełniona dla $v > 0,724$ m/s. (Można się też posłużyć

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Zadania z fizyki nr 242, 243

Redaguje Jerzy B. BROJAN

242. Prawidłowa regulacja układu kierowniczego w samochodzie wymaga, aby kąt skręcenia przednich kół był niejednakowy. Wyjaśnić przyczynę tej różnicy. Jeśli w dobrze wyregulowanym samochodzie przy skręceniu prawego przedniego koła w prawo o 20° lewe przednie koło skręca w prawo o 18° , to o jaki kąt skręca lewe koło przy skręceniu prawego w prawo o 40° ?

243. Trzy jednakowe kondensatory i dwie jednakowe cewki połączono w obwód przedstawiony na rysunku. Początkowo lewy kondensator był naładowany do napięcia U , pozostałe dwa były nienaładowane, a prąd w żadnej części obwodu nie płynął. W jakich granicach będzie się zmieniać napięcie na każdym z kondensatorów po zamknięciu klucza? Opór obwodu pominać.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1997

Przypominamy treść zadań:

239. Na nici o długości 40 cm (długość w stanie nie napiętym) wisi ciężarek o masie 2 kg, do którego od dołu przywiązany jest luźny odcinek takiej samej nici o długości 30 cm. Z jaką prędkością powinien się przesuwać w dół ruchem jednostajnym dolny koniec tego odcinka, aby w następstwie jego napięcia

- zerwaniu uległ tylko dolny odcinek nici,
- zerwaniu uległy oba odcinki (gdy ciężarek znajdował się ponad końcem poruszającym się jednostajnie)?

Wytrzymałość nici wynosi 50 N, a maksymalna rozciągliwość - 8%, przy czym zakładamy, że wydłużenie jest proporcjonalne do siły napinającej aż do chwili zerwania.

240. Wysyłający światło punkt porusza się z prędkością v_1 i przecina oś optyczną soczewki pod kątem α_1 , a w tym momencie obraz tego punktu przecina oś pod kątem α_2 . Z jaką prędkością v_2 porusza się obraz?

w tym miejscu dość zawiłymi przekształceniami analitycznymi.)

Po zerwaniu dolnej nici ciężarek porusza się ruchem harmonicznym z częstością $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$ i amplitudą

$A = \sqrt{(x(t_0))^2 + (x'(t_0)/\omega_1)^2}$. Górna nić nie zerwie się, jeśli $mg + k_1A < W$, a z analizy numerycznej otrzymujemy $v > 0,796$ m/s. Takie jest rozwiązanie punktu a), natomiast w przypadku b) prędkość v powinna zawierać się między 0,724 m/s a 0,796 m/s.

240. Różniczkując równanie soczewkowe

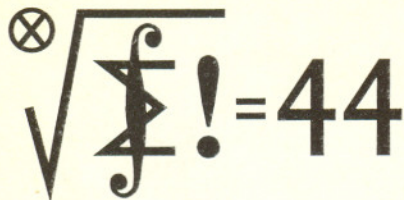
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

wyznaczamy związek między małymi przesunięciami dx i dy (znaki pomijamy)

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2}.$$

Z równania $h'/h = y/x$ (gdzie h i h' są bardzo małymi odległościami przedmiotu i obrazu od osi) mamy $dh'/dh = y/x$. Podstawiając $v_1 \cos \alpha_1 = dx/dt$, $v_2 \cos \alpha_2 = dy/dt$, $v_1 \sin \alpha_1 = dh/dt$, $v_2 \sin \alpha_2 = dh'/dt$ otrzymujemy

$$v_2 = v_1 \frac{\sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2 \cos \alpha_1}.$$



Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 331 ($WT=2,60$), 332 ($WT=1,80$),
z numeru 12/1996

Krzysztof Zapisek – Warszawa 41,22
Jerzy Witkowski – Radlin 39,14
Jarosław Łazuka – Warszawa 37,78
Marcin Kasperski – Warszawa 36,77

345. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równanie

$$\frac{1}{bc-a^2} + \frac{1}{ca-b^2} + \frac{1}{ab-c^2} = 0.$$

Dowieść, że

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2} + \frac{b}{(ca-b^2)^2} + \frac{c}{(ab-c^2)^2} = 0.$$

346. Rozważamy zdanie:

(*) Każdy wielościan wypukły, który nie zawiera żadnego czworościanu o objętości 1, jest zawarty w pewnym czworościanie o objętości mniejszej niż V .

(a) Dowieść, że dla $V = 27$ zdanie (*) jest prawdziwe.

(b) Czy zdanie (*) jest prawdziwe dla jakiegokolwiek liczby V mniejszej od 27?

Zadanie 346 jest wariacją na temat zadania 342 (proponowanego przez Czytelnika). Polecenie zadania 342 było równoważne następującemu: udowodnić stwierdzenie (*) dla $V = 8$. Taka teza nie jest jednak prawdziwa. Zarówno rozwiązanie proponowane przez autora zadania, jak i rozwiązanie, które miał na uwadze redaktor ligi zadaniowej, jest poprawne tylko dla $V \geq 27$; liczba 8 pojawiła się w wyniku pomyłki – za którą, rzecz jasna, przepraszamy Czytelników.

Aby nie psuć uczestnikom ligi przyjemności zastanowienia się nad problemem, zamieszczamy to zadanie (a raczej: analogiczne zadanie) ponownie, w postaci polecenia (a) oraz pytania (b).

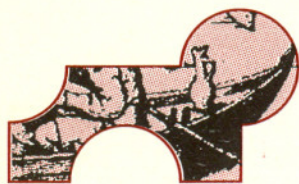
Przysłane przez uczestników ligi rozwiązania zadania 342, zawierające dowody nieprawdziwości podanego w nim twierdzenia, będą uwzględnione w punktacji ligowej, w „kolejce ligowej 341/342”. Zapewne niektóre z tych rozwiązań będą zawierały uwagi dające dowód tezy (a) oraz pełną lub częściową odpowiedź na pytanie (b). Takie uwagi (jeśli ich autorzy nie przysłały rozwiązania zadania 346) będą ocenione i punktowane w „kolejce 345/346”, w takiej mierze, w jakiej będą stanowić przyczynek do rozwiązania tego zadania.

Rozwiązania (?) zadań z matematyki z numeru 5/1997

Przypominamy treść zadań:

341. Na każdym polu szachownicy prostokątnej o wymiarach $m \times n$ leży kartonik pomalowany z jednej strony na żółto, a z drugiej na niebiesko. Wykonujemy serię ruchów. W każdym ruchu wybieramy jedno pole, po czym przewracamy na drugą stronę leżący na nim kartonik, a także wszystkie inne kartoniki znajdujące się w rzędzie poziomym i w rzędzie pionowym przechodzącym przez wybrane pole. W chwili początkowej cała szachownica jest żółta. Udowodnić, że stosując opisaną procedurę można doprowadzić do tego, by cała szachownica stała się niebieska oraz obliczyć minimalną liczbę ruchów, która jest do tego konieczna.

342. Zamiast treści i szkicu rozwiązania – komentarz do zadania 346; patrz wyżej.



341. Przyjmijmy, że szachownica ma n rzędów poziomych (wierszy) i m rzędów pionowych (kolumn). Weźmy pod uwagę serię ruchów, opisanych w treści zadania. Pomalujmy każde pole szachownicy jednym z dwóch kolorów: czarnym, jeśli to pole zostało „wybrane” nieparzystą liczbą razy, a białym – jeśli parzystą. Żądany efekt zostanie uzyskany wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary numerów (i, j) ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$) krzyż złożony z $(n+m-1)$ pól leżących w i -tym wierszu i j -tej kolumnie będzie zawierał nieparzystą liczbę czarnych pól. Pokolorowanie spełniające ten warunek będziemy nazywać „dobrym”. Szukając algorytmu optymalnego czasowo można ograniczyć uwagę do takich ciągów ruchów, w których każde pole zostaje wybrane co najwyżej jeden raz; czas (liczba ruchów) jest wówczas równy liczbie czarnych pól.

Przypadek (1): liczby n i m są parzyste. Pokolorowanie wszystkich pól na czarno jest wtedy dobre. Wykażemy, że jest to jedyne dobre pokolorowanie. Przypuśćmy, że pewne pole (i_0, j_0) jest białe. Dla $i = 1, \dots, n$ oznaczmy przez k_i liczbę czarnych pól w i -tym wierszu bez pola (i, j_0) . Niech l_{j_0} będzie liczbą czarnych pól w j_0 -tej kolumnie. Krzyż wyznaczony przez pole (i, j_0) zawiera $k_i + l_{j_0}$ czarnych pól. Ma to być liczba nieparzysta (dla każdego i). Zatem liczby k_1, \dots, k_n są jednakowej parzystości, wobec czego ich suma jest liczbą parzystą. To znaczy, że k_{i_0} jest liczbą tej samej parzystości, co liczba $K = \sum_{i \neq i_0} k_i$, czyli liczba czarnych pól w szachownicy z usuniętym krzyżem (i_0, j_0) . Zamieniając w tym rozumowaniu

role wierszy i kolumn wnosimy, że także l_{j_0} jest liczbą tej samej parzystości, co K . Otrzymujemy sprzeczność z warunkiem, że $k_{i_0} + l_{j_0}$ ma być liczbą nieparzystą. Tak więc pokolorowanie, w którym zostaje choć jedno pole białe, nie jest dobre.

Przypadek (2): liczby n i m są nieparzyste. Możemy przyjąć, że $n \leq m$. Pokolorowanie jednej kolumny na czarno, a całej reszty na bialo, jest dobre. Z drugiej strony, w każdym wierszu musi być co najmniej jedno czarne pole. Zatem minimalna liczba czarnych pól w dobrym pokolorowaniu wynosi n . Odrzucając założenie, że $n \leq m$, dostajemy jako wynik liczbę $\min\{n, m\}$.

Przypadek (3): liczby n i m są różnej parzystości. Niech, na przykład, m będzie liczbą parzystą, n nieparzystą. Pokolorowanie jednej kolumny na czarno, a całej reszty na bialo, jest dobre. Przypuśćmy, że istnieje dobre pokolorowanie, w którym jest mniej niż n czarnych pól (zatem $n > 1$). Pewien wiersz jest wtedy w całości biały. Usuwamy go i otrzymujemy szachownicę $(n-1) \times m$. W myśl konkluzji przypadku (1) wszystkie jej pola muszą być czarne. Ale $(n-1)m \geq n$, wbrew przypuszczeniu, że liczba czarnych pól jest mniejsza od n . Szukane minimum wynosi więc n .

Zbieramy wyniki otrzymane w poszczególnych przypadkach i mamy odpowiedź: minimalna liczba ruchów dających wymagany efekt (czyli minimalna liczba czarnych pól w dobrym pokolorowaniu) jest równa mn , gdy liczby m, n są obie parzyste; w przeciwnym zaś razie jest równa najmniejszej liczbie nieparzystej w zbiorze $\{m, n\}$.