



SPIS TREŚCI NUMERU 8(279)

Supernowa z 1054 roku <i>Barbara Mochejska</i>	str. 1
Historia pewnej matury <i>Rafał Kołodziej</i>	str. 1
Struktura cieczy <i>Henryk Drozdowski</i>	str. 4
Zadania	str. 6
Józef Piłsudski nauczycielem matematyki	str. 7
Ob ręce	str. 7
Mała Delta	str. 8
Sumy kwadratów wielomianów i funkcji wymiernych <i>Kazimierz Szymiczek</i>	str.10
Twierdzenie Waringa	str.13
Jak to zostało wymyślone?	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Sierpień	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

Zadania olimpijskie

Okladkę i ilustracje wykonał
Krzysztof BIESAGA

Wybór artykułów z *Delta*
 ukazuje się w języku angielskim
 w sieci Internet pod adresem
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:
 Uniwersytet Warszawski

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
 Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
 Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichocki
 – wiceprzewodniczący
 Krzysztof Ciesielski
 Jan A. Gaj
 Piotr Goldstein
 Tomasz Hofmokl
 Andrzej Hryniewicz
 Wiesław A. Kamiński
 Marta Kicińska-Habior
 Krzysztof Maślanka
 Andrzej Mąkowski
 Zdzisław Pogoda
 Feliks Przytycki
 Michał Różyczka
 Konrad Rudnicki
 Zbigniew Semadeni
 Grzegorz Sitarski
 Andrzej Woszczyk
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
 Wiktor Bartol
 Krzysztof Biesaga
 Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nac.
 Tomasz Kwast
 Anna Ludwicka
 Anna Rudnik
 Paweł Strzelecki
 Joanna Udalska
 Piotr Zalewski
 Adres Redakcji:
 ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
 tel. 43-02-41(-2) wewn. 21
 PAWELST@MIMUW.EDU.PL
 Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej
 w Warszawie, ul. Mińska 65.
 Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
 prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena
 jednego numeru w 1997 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
 okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
 cena numeru w 1997 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje
 dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO BP VIII O/W-wa, nr 10201084-77578-270-1-111**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1997 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe
 „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa
 egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się
 pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej.
 Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A.
 XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa,
 ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
 Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem
 zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,
 realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem
 otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.
 Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71
 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także
 tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.

Historia pewnej matury

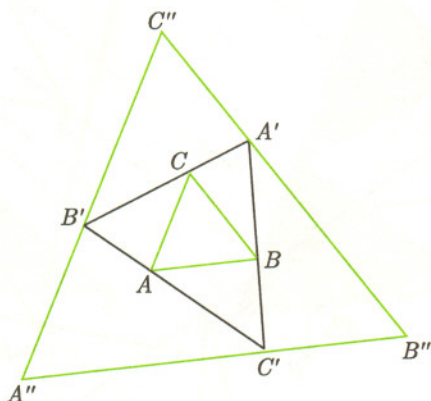
Rafał KOŁODZIEJ

Pewnego razu w pewnej szkole pewien uczeń pisał pracę maturalną z matematyki. Ponieważ nie rozwiązał żadnego zadania, wydawać by się mogło, że maturę obleje. Na szczęście w brudnopisie znalazł się szkic rozwiązania zadania z geometrii. Trudno było go ocenić, gdyż opierał się na twierdzeniu, którego nie znał ani nauczyciel, ani jego bliżsi i dalsi znajomi.

Twierdzenie 1.

Na trójkącie ABC opiszmy trójkąt $A'B'C'$, a na nim z kolei taki trójkąt $A''B''C''$ (kolejność wierzchołków jak na rys. 1), aby odpowiednie boki trójkąta $A''B''C''$ były równoległe do boków trójkąta ABC . Wówczas zachodzi równość

$$\frac{CA'}{CB'} = \frac{C'B''}{C'A''}.$$

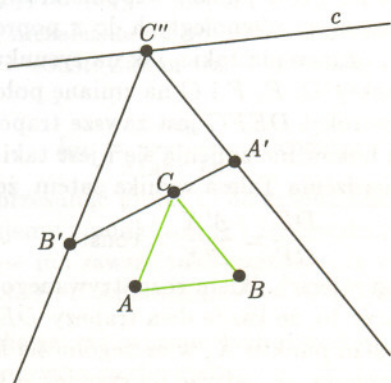


Rys. 1

Ponieważ od prawdziwości postawionej przez ucznia hipotezy zależała zarówno jego przyszłość, jak i reputacja nauczyciela – znalazł się i dowód, a właściwie dowody: analityczne, oparte na uciążliwych rachunkach. Trudno jednak przypuszczać, aby intuicja maturzysty postępowała mozolną drogą wskazaną przez Kartezjusza:

- punkt to para liczb,
- prosta to równanie liniowe,
- punkt wspólny dwu prostych to rozwiązanie układu równań liniowych, itd.

Ponieważ twierdzenia nie znalazłem w literaturze, z drugiej zaś strony syntetyczne sformułowanie obiecywało eleganckie rozwiązanie, postarałem się twierdzenie „zobaczyć”. Okazuje się, że łatwiej je zrozumieć, traktując rysunek 1 jako płaski cień pewnych obiektów leżących w przestrzeni trójwymiarowej.



Rys. 2

Supernowa

z 1054 roku

Barbara MOCHEJSKA

Wybuch gwiazdy supernowej jest jednym z najbardziej spektakularnych zjawisk obserwowanych na niebie. W miejscu, w którym przedtem nie dostrzegano żadnego obiektu, pojawia się niespodziewanie „nowa”, bardzo jasna gwiazda, która może być widoczna nawet w dzień. Stopniowo gwiazda traci na jasności, aby po kilku latach z powrotem stać się niewidoczna.

Podczas ostatnich dwóch tysięcy lat pojawienie się supernowych zostało zauważone i odnotowane kilkakrotnie. Na podstawie pozostałości, którym to mianem określa się mgławice powstałe w wyniku wybuchu gwiazdy, potwierdzono sześć takich eksplozji, w latach 185, 393, 1006, 1054, 1572 i 1604. Supernowa z 1572 r. została opisana przez Tychona Brahego. Jemu zawdzięczamy pomiary jej położenia i krzywą zmian blasku. Ostatnia supernowa, obserwowana między innymi przez Keplera, wybuchła na kilka lat przed wynalezieniem teleskopu. Od tego czasu nie obserwowano już żadnej supernowej w naszej Galaktyce – supernowa z 1987 r., widoczna doskonale gołym okiem, wybuchła wprawdzie blisko, ale jednak poza Galaktyką, w Wielkim Obłoku Magellana.

Skoro z odległości międzygalaktycznych supernowa może być widoczna gołym okiem, to łatwo się domyśleć, że jej jasność musi być niezwykła. Rzeczywiście, jasność gwiazdy po wybuchu wzrasta gwałtownie o kilkanaście wielkości gwiazdowych i osiąga wartość setek milionów jasności Słońca. Moc promieniowania takiej gwiazdy jest więc porównywalna z mocą całej przeciętnej galaktyki, składającej się z wielu miliardów gwiazd. Oczywiście, supernowa nie jest w stanie długo świecić tak intensywnie i – jak wspomnieliśmy – po kilku tygodniach wyraźnie słabnie, a po kilku latach staje się niewidoczna gołym okiem.

4 lipca 1054 r. w gwiazdozbiore Byka w pobliżu ζ Tauri pojawiła się nowa gwiazda. Na podstawie chińskich kronik

wiemy, że była widoczna w dzień przez 23 dni, a dopiero po 653 dniach zniknęła z nocnego nieba. Potwierdzają to zdarzenie kroniki japońskie i arabskie. Niestety, nie znaleziono żadnych informacji europejskich na ten temat. Natomiast w północnej Arizonie, na terenach zamieszkałych w XI–XIII w. przez Indian, odnaleziono dwa rysunki przedstawiające sierp Księżyca i jasną gwiazdę tuż pod nim. Przypuszcza się, że tą gwiazdą jest supernowa widziana rankiem 5 lipca 1054 r., gdyż Księżyc w takiej w przybliżeniu fazie znajdował się wtedy około 2° nad nią.

Prawie 700 lat później, w roku 1731, angielski lekarz i miłośnik astronomii, John Bevis odkrył mgławicę w pobliżu ζ Tauri. W 27 lat po nim, 12 września 1758 r., francuski poszukiwacz komet, Charles Messier, odkrył ją ponownie podczas obserwacji komety z tego roku. Zdarzenie to stało się dla niego inspiracją do stworzenia katalogu mgławic, gromad i galaktyk (choć to pojęcie wtedy jeszcze nie istniało), aby inni poszukiwacze nie mylili ich z kometami. Mgławica ta zajęła pierwsze miejsce w jego katalogu.

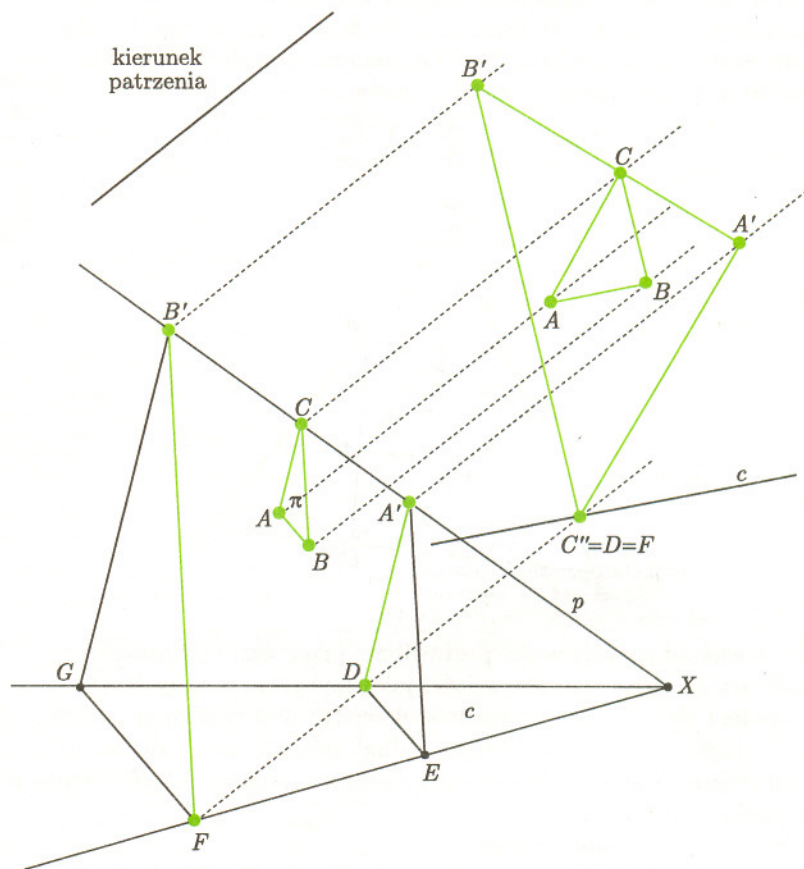
Długo nie było zgodności między astronomami co do natury nowo odkrytego obiektu. J. Herschel uważał, że jest to gromada gwiazd na granicy rozdzielczości teleskopu. J.E. Bode określił obiekt jako mgławicę bez gwiazd. Lord Rosse w 1884 r. zwrócił uwagę na budowę zewnętrznych części mgławicy i przyrównał je do łapek kraba, od czego powstała wkrótce jej oficjalna nazwa. Pomylił się jednak sądząc, że te łapki składają się z łańcuchów gwiazd. Wreszcie w 1913 r. na podstawie widma mgławicy stwierdzono, że składa się ona z gazu, a nie z gwiazd. Kilka lat później, w 1921 r., C.O. Lampland odkrył, że mgławica Krab rozszerza się. Prędkość ekspansji oceniono na $0,2$ na rok, co przy odległości około 6300 lat świetlnych odpowiada prędkości rzędu 1000 km/s. Mgławica musiała więc powstać w wyniku eksplozji. Z tempa jej ekspansji W. Baade w 1942 r. obliczył jej wiek na 760 lat, co później zostało zmienione na 900 lat. Dziś nie ulega wątpliwości, że mgławica Krab jest pozostałością po tytułowej supernowej.

Najpierw udowodnimy następujący

Lemat.

Ustalmy na płaszczyźnie punkty A, B, A' i B' . Niech C będzie dowolnym punktem prostej $A'B'$. Przez punkty A' i B' poprowadźmy proste równoległe odpowiednio do BC i AC (patrz rys. 2). Niech C'' oznacza punkt przecięcia skonstruowanych prostych. Miejscem geometrycznym punktów C'' jest prosta c równoległa do prostej AB .

To właśnie powyższy lemat można „zobaczyć” w trzech wymiarach. Popatrzmy (rys. 3) na kąt trójścienny, w którym przez c oznaczymy ścianę naprzeciw wyróżnionej krawędzi p .



Rys. 3

Rozważmy punkty $A', B' \in p$. Punkty A i B wybierzmy na różnych ścianach kąta trójściennego w ten sposób, żeby odcinek AB był równoległy do ściany c . Poprowadźmy przez odcinek AB płaszczyznę π do przecięcia z prostą p w punkcie C , następnie oznaczmy przez D, E, F i G punkty wspólne krawędzi kąta dwuściennego i płaszczyzn równoległych do π poprowadzonych z punktów A' i B' ; oznaczenia takie, jak na rysunku 3. Zastanówmy się, jak reagują punkty D, E, F i G na zmianę położenia punktu $C \in p$. Czworokąt $DEFG$ jest zawsze trapezem, kierunek pary równoległych boków nie zmienia się i jest taki, jak kierunek odcinka AB . Z twierdzenia Talesa wynika zatem, że

$$\frac{DE}{GF} = \frac{A'X}{B'X} = \text{const},$$

gdzie $X = p \cap c$ jest wierzchołkiem rozpatrywanego kąta trójściennego. Znaczy to, że każde dwa trapezy $DEFG$ są jednokładne względem punktu X , w szczególności kierunek DF nie zmienia się, a to oznacza, że patrząc na rysunek 3 w kierunku DF

z bardzo odległego punktu na płaszczyźnie c widzimy właśnie rysunek 2. (Prostą DF widzimy jako punkt C'' .) ■

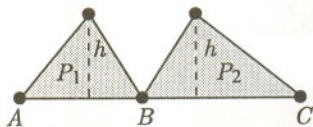
W dalszych rozważaniach zamiast o stosunku długości odcinków będziemy często mówić o stosunku pól trójkątów o jednakowych wysokościach i podstawach odpowiednio równych rozpatrywanym odcinkom – przy oznaczeniach z rysunku 4 mamy bowiem

$$\frac{AB}{BC} = \frac{P_1}{P_2}.$$

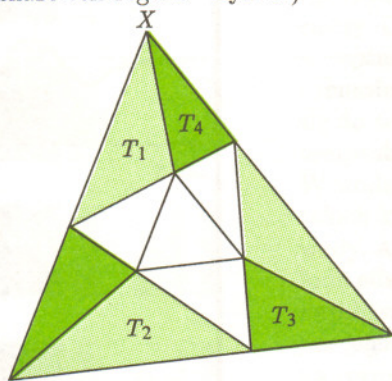
Będziemy również oznaczać przez I_X stosunek pól trójkątów położonych tak, jak na rysunku 5:

$$I_X := \frac{P(T_1)}{P(T_2)} \cdot \frac{P(T_3)}{P(T_4)}.$$

(Trójkąty oznaczamy kolejno: T_1, T_2, T_3, T_4 ; indeksy rosną, gdy punkt porusza się po obwodzie największego trójkąta od punktu X w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara – rys. 5.)



Rys. 4



Rys. 5

Dowód twierdzenia.

W nowych oznaczeniach równość z tezy twierdzenia to równość

$$I_{C''} = 1.$$

Zakładam, że Czytelnik zna dowód twierdzenia w przypadku, gdy punkty A, B, C są środkami boków trójkąta $A'B'C'$

Wszystkie pozostałe przypadki sprowadzimy do tego trywialnego. Łatwo sprawdzić, że zgodnie z definicją mamy

$$I_{A''} \cdot I_{B''} \cdot I_{C''} = 1.$$

Ustalmy teraz punkty A, B, A', B' i C' , to znaczy założmy, że się nie zmieniają. Przy zmianie położenia punktu C na odcinku $A'B'$ wyrażenie $\frac{AB'}{AC'}$, oczywiście, nie zmienia wartości. Z drugiej strony, z udowodnionego lematu i twierdzenia Talesa wynika, że stosunek $\frac{A'B''}{A'C''}$ nie zmienia się. Wobec tego wyrażenie

$$I_{A''} = \frac{P(T_1)}{P(T_2)} \cdot \frac{P(T_3)}{P(T_4)} = \frac{P(T_1)}{P(T_4)} \cdot \frac{P(T_3)}{P(T_2)} = \frac{AB'}{AC'} \cdot \frac{A'B''}{A'C''}$$

ma stałą wartość, niezależnie od położenia punktu C na AB .

Analogicznie $I_{B''} = \text{const.}$ Zatem trzeci stosunek, $I_{C''}$, jest także stały, bowiem

$$I_{C''} = \frac{1}{I_{A''} \cdot I_{B''}} = \text{const.}$$

Wystarczy teraz przesunąć punkt C do środka odcinka $A'B'$.

Podobnie postępujemy z punktami A i B . Ostatecznie, przekonujemy się, że stosunek $I_{C''}$ ma zawsze taką wartość, jak w przypadku trywialnym, gdy A, B, C są środkami boków trójkąta $A'B'C'$. ■

A swoją drogą ciekawe, czy właśnie taki dowód wymyślił wspomniany na początku maturzysta.

Obecnie wiemy, że supernową staje się gwiazda w późnej fazie ewolucji o masie większej od 8 mas Słońca. Gwiazda taka wytwarza w swoim wnętrzu żelazne jądro, w wyniku czego zachodzące tam reakcje termojądrowe ustają, ponieważ z żelaza nie da się syntetyzować kolejnych pierwiastków bez dostarczania energii. Powoduje to kurczenie się gwiazdy pod wpływem własnej grawitacji i wzrost temperatury w jądrze. Gdy temperatura dostatecznie wzrośnie, promieniowanie γ rozбивa jądra żelaza na neutrony i protony. Proces ten pochłania dużo energii, powoduje więc gwałtowne zapadnięcie się gwiazdy, mające charakter implozji. Opadające na jądro warstwy zewnętrzne ogrzewają się i odbijają od niego tworząc wkrótce mgławicę otaczającą niezwykle zwarty obiekt centralny, gwiazdę neutronową.

W czasie, gdy po raz pierwszy powiązano mgławicę Krab z wybuchem supernowej, rozważania teoretyczne już sugerowały, że końcowym produktem eksplozji może być gwiazda neutronowa. Jednak dopiero w latach 60. udało się z całą pewnością potwierdzić obecność gwiazdy neutronowej w centrum mgławicy. Mianowicie, jeżeli gwiazda na początku obracała się powoli i miała słabe pole magnetyczne, to jej zapadnięte jądro – wskutek zasady zachowania momentu pędu i zachowania strumienia magnetycznego – ma szansę obracać się bardzo szybko i mieć potężne pole magnetyczne. Taka szybko rotująca gwiazda neutronowa omiatająca otaczający ją gaz swoim silnym polem magnetycznym będzie w nim wywoływać emisję różnych rodzajów promieniowania, które z daleka może być, przy szczęśliwym usytuowaniu obserwatora, odbierane jako błyski (impulsy) pojawiające się w rytmie rotacji gwiazdy. Gwiazda neutronowa może w ten sposób ujawnić swoje istnienie jako tzw. pulsar. Pierwszy pulsar odkryty został w 1967 r. (pani Jocelyn Bell i Anthony Hewish – później Nagroda Nobla!), a już w roku następnym zarejestrowano pulsy radiowe o okresie około 0,033 s dobiegające z centrum mgławicy Krab. Tak więc symbol M 1, nadany przypadkowo nieznanemu obiektowi mgławicowemu przez Messiera, oznacza obecnie gwiazdę zmienną CM Tau, lub pulsara NP 0532, a w sumie jeden z najosobliwszych obiektów w Galaktyce.

Struktura cieczy

Henryk DROZDOWSKI

Użycie słowa „struktura” w stosunku do cieczy może się wydawać dziwne, gdyż pojęcie to kojarzy się z pewną trwałością kształtu. Czyż płynność nie jest wyrazem braku struktury? Jeszcze do niedawna zakładano, że struktura cieczy charakteryzuje się całkowitym brakiem uporządkowania. W budowie swojej ciecz miała być w pełni analogiczna do silnie zgęszczonego gazu. Współczesna fizyka przytacza argumenty, że tak nie jest i ciecze mają chwilową, wewnętrzną architekturę cząsteczkową. Odkrycie uporządkowania bliskiego zasięgu znacznie ułatwiło zrozumienie wielu strukturalnych właściwości stanu ciekłego. Wyjaśnimy, o co chodzi.

Istnienie trzech stanów skupienia materii tłumaczy się fizycznie wzajemną zależnością między termiczną energią kinetyczną cząsteczek a potencjalną energią ich wzajemnych oddziaływań. W niskich temperaturach, w których energia kinetyczna jest nieduża, materia istnieje w stanie stałym, w formie krystalicznej powstałej pod wpływem energii potencjalnej cząsteczek. Energia termiczna powoduje jedynie drobne perturbacje w sieci krystalicznej, nie naruszając jednakże wzajemnego, dalekozasięgowego uporządkowania cząsteczek. Dlatego też charakterystyczna dla stanu stałego jest anizotropia struktury. Z drugiej strony,

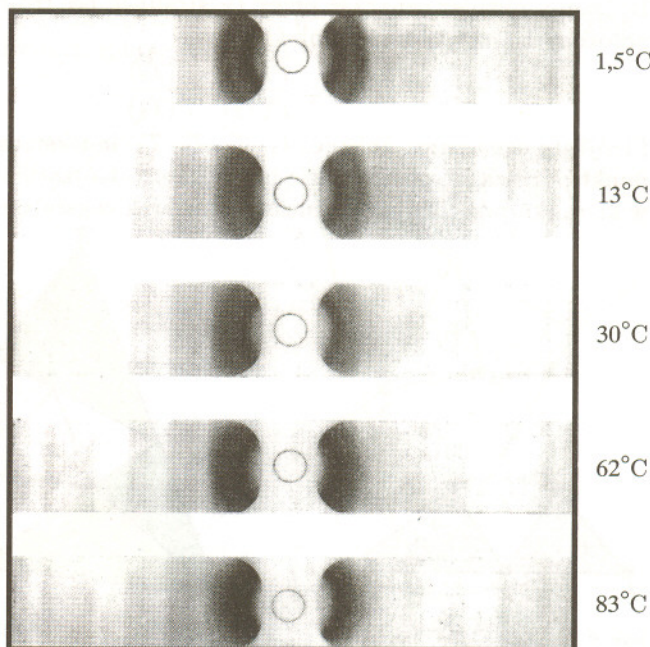
w wysokich temperaturach duża wartość energii termicznej powoduje zniszczenie regularnych wiązań krystalicznych i substancja przechodzi w stan gazowy, w którym energia potencjalna wzajemnych oddziaływań cząsteczek jest zanedbywalna.

Chaotyczna natura ruchów termicznych powoduje zniszczenie wzajemnego uporządkowania cząsteczek, które spotykają się jedynie w czasie przypadkowych zderzeń. Stan ciekły znajduje się między tymi dwoma granicznymi stanami materii i niezbędne w jego przypadku jest uwzględnienie zarówno energii termicznej ruchu cząsteczek, jak i energii potencjalnej ich wzajemnych oddziaływań. Każda cząsteczka cieczy, oprócz wykonywania bezładnych ruchów termicznych, stale oddziałuje z wieloma sąsiadami i dlatego też istotna jest korelacja między jej położeniem a położeniem sąsiadów. Korelacja tego typu nosi nazwę uporządkowania bliskiego zasięgu.

Do badań struktury cieczy najczęściej wykorzystuje się promienie Röntgena. W pomiarze stosuje się monochromatyczną, równoległą wiązkę takich promieni, którą kieruje się na ciecz mierząc intensywność promieniowania rozproszonego pod różnymi kątami. Promienie rentgenowskie rozpraszane są przez elektrony, a więc otrzymane na rentgenogramie obraz dyfrakcyjny (rys. 1) jest odbiciem rozkładu gęstości elektronowej wokół cząsteczki cieczy.

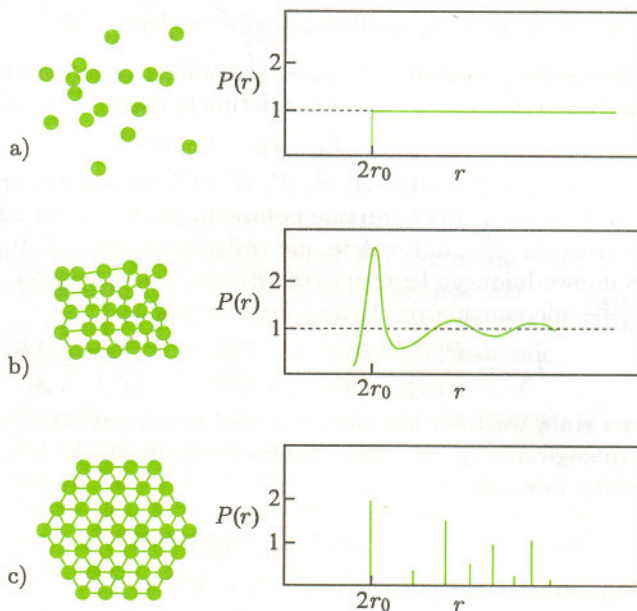
Monochromatyczne promieniowanie – promieniowanie o jednakowej długości fali lub długościach fali mieszczących się w bardzo wąskim zakresie.

Monochromatyczne promieniowanie rentgenowskie uzyskuje się poprzez wybranie za pomocą kolimatora promieniowania rentgenowskiego odbitego od kryształu pod określonym kątem. Kryształ jest tu odpowiednikiem siatki dyfrakcyjnej używanej dla światła.



Rys. 1. Rentgenogram wody w różnych temperaturach.

Funkcja rozkładu radialnego określa prawdopodobieństwo, że w danej odległości r od środka rozważanej cząsteczki znajduje się środek innej cząsteczki.

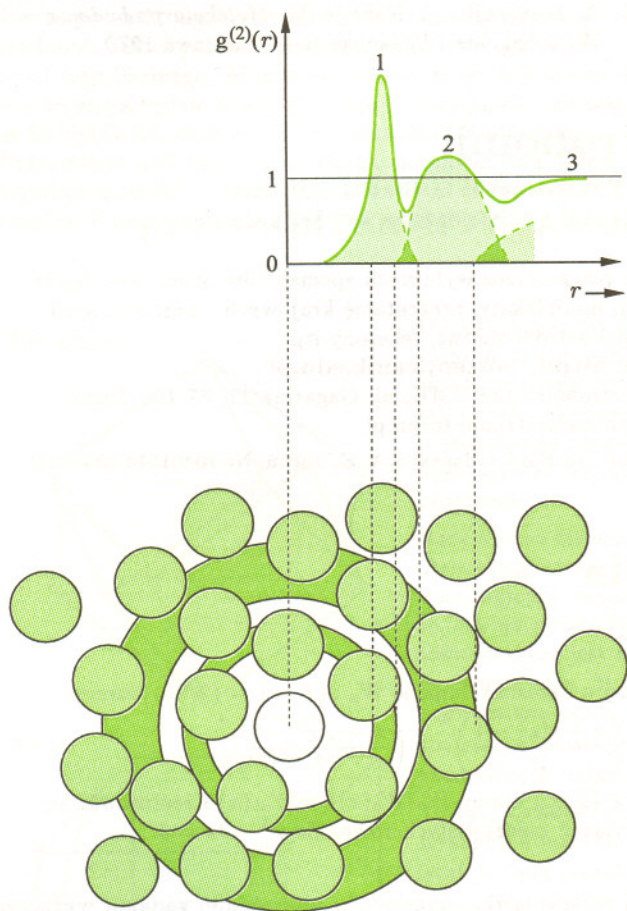


Rys. 2. Szkice położenia atomów i funkcje rozkładu radialnego dla a) gazu, b) cieczy jednoatomowej i c) ciała krystalicznego.

Do dalszego opracowania tych obrazów dyfrakcyjnych stosuje się radialne funkcje rozkładu. Dla kryształu

(rys. 2c) uzyskuje się widmo liniowe odległości międzycząsteczkowych, podczas gdy dla gazu (rys. 2a) prawdopodobieństwo znalezienia cząsteczek w określonej odległości od siebie jest stałe, począwszy od pewnej odległości związanej z ich rozmiarami – rys. 2b.

Poglądowy przykład geometrycznej konstrukcji funkcji radialnej w przestrzeni dwuwymiarowej, dla cieczy składającej się z jednego rodzaju atomów, pokazano na poniższym rysunku.



Rys. 3.

Bezpośrednim dowodem istnienia uporządkowania bliskiego zasięgu w cieczach jest obecność wyraźnie widocznych pików, przynajmniej pierwszego i drugiego, w funkcji rozkładu radialnego, które odpowiadają tzw. sferom koordynacyjnym.

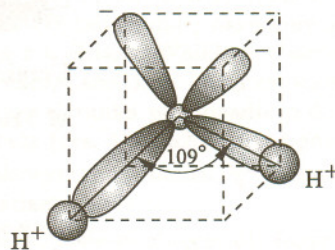
Sfera koordynacyjna – powłoka wyznaczona przez cząsteczki znajdujące się w tej samej odległości od wybranej cząstki centralnej; liczbę takich cząsteczek nazywamy liczbą koordynacyjną danej sfery.

Strukturę cieczy charakteryzują trzy parametry: minimalna odległość między cząsteczkami, promienie sfer koordynacyjnych i liczby koordynacyjne.

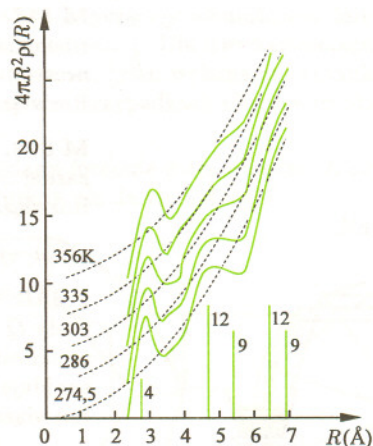
Obecnie istnieją dwa podstawowe modele struktury cieczy. W pierwszym z nich uważa się, że w cieczy występują obszary „kryształopodobne” zawierające uporządkowane zespoły cząsteczek oraz obszary

„gazopodobne”, w których cząsteczki są rozproszone chaotycznie. Każda cząsteczka spędza część czasu uwięziona w obszarach kryształopodobnych, część zaś – wyzwolona w obszarach gazopodobnych. W drugim modelu (zdefektowanego kryształu) przyjmuje się, że topnienie kryształu polega na wytworzeniu coraz większej liczby defektów sieci przestrzennej. Ze wzrostem temperatury rośnie liczba pustych węzłów (luk) w sieci i przy pewnej gęstości tych luk (w określonej temperaturze) struktura załamuje się, co prowadzi do wystąpienia płynięcia substancji, czyli powstania fazy ciekłej.

Dyfrakcja promieniowania rentgenowskiego oraz dyfrakcja neutronów dały dowód na istnienie lokalnego uporządkowania kryształopodobnego w każdej cieczy. Oznacza to, że część cząsteczek jest związana w postaci submikroskopowych kryształitów. Liczba i rozmiar tych kryształitów rośnie w miarę zbliżania się do temperatury topnienia, czyli im bliżej, w skali temperatur, ciecz i kryształ sąsiadują ze sobą. W wodzie widać bezpośrednio wpływ obecności takich kryształitów dzięki temu, że lód jest lżejszy od wody. Anomalia ta jest związana z ażurową budową lodu. Cząsteczki wody w fazie stałej mają w swym najbliższym otoczeniu cztery sąsiednie, rozmieszczone jak wierzchołki czworościanu foremnego, ze względu na rozmieszczenie ładunku w samej cząsteczce wody (rys. 4).



Rys. 4. Model cząsteczki wody.



Rys. 5. Porównanie (zmodyfikowanej czynnikiem $4\pi R^2$) funkcji rozkładu radialnego wody w różnych temperaturach (linie ciągłe) z funkcją rozkładu radialnego lodu (słupki; przy słupkach wyznaczających kolejne sfery koordynacyjne lodu podano odpowiadające im liczby koordynacyjne).

Występujące w wodzie krystality powinny mieć strukturę zbliżoną do struktury lodu. Rentgenowska funkcja rozkładu radialnego (rys. 5) ukazuje wzrost lodopodobnego uporządkowania wody w miarę zbliżania się do temperatury topnienia.

Pozwala to wyjaśnić anomalny współczynnik rozszerzalności cieplnej wody w zakresie temperatur od 0 do 4 stopni Celsjusza. W tym przedziale temperatur wzrost gęstości wody (w miarę wzrostu temperatury) związany ze zmniejszaniem się liczby i wielkości azurowych krystalitów przeważa nad „normalnym” zmniejszaniem się tej gęstości (powodowanym wzrostem odległości międzycząsteczkowych na skutek rosnącej energii termicznej cząsteczek).

Taki obraz cieczy możemy sobie wytworzyć na podstawie dostępnych danych doświadczalnych. Nie jest on wolny od luk i braków, stąd jest jeszcze ciągle uzupełniany i doskonalony nowymi wynikami badań.

Literatura

1. J. Hirschfelder, C.F. Curtis, R.B. Byrd, *Molecular Theory of Gases and Liquids*, Wiley, New York 1967.
2. F. Franks, *Woda*, WNT, Warszawa 1988.
3. H.N.V. Temperley, J.S. Rushbrooke, *Physics of Simple Liquids*, North Holland, Amsterdam 1968.
4. A. Januszajtis, J. Kalinowski, *Molekularna budowa ciał*, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1975.

Postępy Astronomii

Kwartalnik Polskiego Towarzystwa Astronomicznego DLA WSZYSTKICH ZAINTERESOWANYCH ASTRONOMIA

W nim znajdziecie m.in.: artykuły z rozmaitych dziedzin astronomii pisane przez wybitnych specjalistów, kolorowe zdjęcia różnych obiektów Wszechświata wykonane Teleskopem Kosmicznym, miniplakaty, prezentację krajowych i zagranicznych ośrodków astronomicznych, problemy astronomii w szkole, różności astronomiczne, felietony itp.

W INTERNECIE szukajcie nas na stronie: <http://postepy.camk.edu.pl>

Informacja i prenumerata: mgr Barbara Gertner, Centrum Astronomiczne UMK, ul. Gagarina 11, 87-100 Toruń
e-mail: basia@astri.uni.torun.pl lub aw@astri.uni.torun.pl

Prenumerata: 24 zł/rok. Wpłaty na konto: Polskie Towarzystwo Astronomiczne, Bank Gdański S.A. O/Toruń, Nr 10401514-6347-132



Zadania

Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 816. Dla liczby rzeczywistej a określmy funkcję $W_a : (2, \infty) \rightarrow (2, \infty)$ wzorem

$$W_a(x) = \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^a + \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^a.$$

Udowodnić, że dla każdego $x \in (2, \infty)$ mamy $W_a(W_b(x)) = W_{ab}(x)$ i zastosować tę własność do wyznaczenia rozwiązań rzeczywistych równania $x^3 - 3x = 3$.

Rozwiązanie na str. 15

M 817. Dla liczby naturalnej n funkcja W_n określona w poprzednim zadaniu wyznacza wielomian (wartości wielomianu na nieskończonym zbiorze $(2, \infty)$ określają go na całej prostej). Udowodnić, że współczynniki wielomianów W_n są liczbami całkowitymi.

Rozwiązanie na str. 16

M 818. Udowodnić, że jeśli wielomian P spełnia równanie $P(x^2 - 2) = P(x)^2 - 2$ dla każdej liczby rzeczywistej x , to jest jednym z wielomianów $-1, 2, W_1, W_2, W_3, \dots$

Rozwiązanie na str. 16

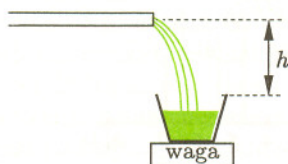
Redaguje Jarosław KULPA

F 457. Wiadro o masie $m = 0,5$ kg stoi na wadze. Do wiadra wlewa się strumień wody $Q = 0,5$ kg/s z wysokości $h = 2$ m, przy czym wiadro jest na tyle szerokie, że zaniedbujemy zmiany wysokości w wiadrze. Obliczyć wskazanie wagi, gdy w wiadrze znajduje się dokładnie $m = 0,5$ kg wody.

Rozwiązanie na str. 12

F 458. Obliczyć górne ograniczenie na promień mgławicy, z której mógł się uformować Układ Słoneczny. Wyrazić ten promień w latach świetlnych (1 rok świetlny = $9,46 \cdot 10^{15}$ m). Przyjąć, że masa mgławicy była porównywalna z masą Układu Słonecznego $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg, oraz że temperatura gazu była mniejsza niż $T = 3$ K. Masa cząsteczki wodoru jest równa $m = 3,34 \cdot 10^{-27}$ kg.

Rozwiązanie na str. 12



Ten, mało znany, szczególnie biograficzny tak wspomina sam Marszałek – w swym słynnym artykule „Dno oka”, ogłoszonym w „Głosie Prawdy” z dnia 7 kwietnia 1929 r.:

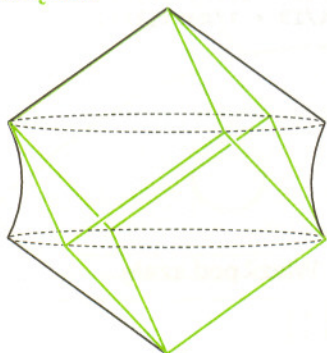
Przypominam sobie z bardzo dawnych czasów, gdy wypadkowo, zastępując swego kolegę, miał coś w rodzaju korepetycji chłopca, chcącego złożyć egzaminy z czterech klas gimnazjalnych, i pamiętam dobrze, jak musiałem jemu wyklądać algebrę, która rozpoczęła swą wędrówkę po główkach chłopców już w klasie trzeciej. Osobiście, będąc bardzo zdolnym chłopcem, nie mogłem sobie przypomnieć, aby te początki algebry stanowiły dla mnie jakąkolwiek trudność. Jakież jednak było moje zdumienie, gdy nie mógł tego biednego chłopca przekonać, że jeżeli dodamy do a , b , to suma będzie $a + b$, gdyż ten nieszczęśliwiec uważał, że to będzie ab , czyli zmieniał dodawanie na mnożenie. Pracowałem nad tym zagadnieniem cierpliwie dwa długie tygodnie co dzień, tracąc z dniem każdym cierpliwość i możliwość posiadania jakiegokolwiek względności

dla tego biedaka. Biedny chłopak w końcu drugiego tygodnia, przy podejściu do tej tak prostej dla mnie kwestii, zaczynał potnieć tak gwałtownie, że zdawało mi się zaczynać mdleć. Sama jednak kwestia nieszczęsnej abstrakcji, związana z pojęciem wielkości a i b , nie udawała mu się ani razu, gdyż jego biedny umysł przerabiał to ciągle na zwykłe litery a i b . A mój kolega nie przyjeżdżał i z obowiązku musiałem to nieszczęście ciągnąć dalej. W końcu po dwóch tygodniach straciłem zupełnie cierpliwość i ja, który nigdy dziecka palcem nie dotknąłem, zdecydowałem, że jedyną formą nauczania takiego hebesa jest sieć go różgami, tak, by przynajmniej mechanicznie odzwyczaił się od głupiego mieszania liter z wielkościami matematycznymi.

Opowieść ta pobudza do rozmyślań nad rolą uzdolnień matematyczno-dydaktycznych w działalności społecznej i politycznej.

Mieczysław KARPINIEC

Obwód



Rys. 1

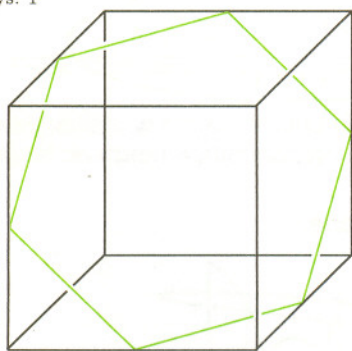
Od kilkunastu lat dużą popularność zdobyła gałąź geometrii zwana *geometrią intuicywną* (po polsku lepiej wyglądałoby *intuicyjną*, ale niech tam). Gałąź ta zajmuje się elementarnie sformułowanymi problemami, których na pierwszy rzut oka nie widać, jak ugryźć. Wyodrębniła zaś się z tego powodu, by wywalczyć dla swoich wielbicieli prawo do zawodowego zajmowania się właśnie jej problemami. Nie wchodząc w dyskusję nad jej miejscem w matematyce spróbujmy sami pozмагаć się z jednym z jej problemów.

Rzut oka na sześcian obracający się wokół prostej przechodzącej przez jego przeciwległe wierzchołki (rys. 1) przekonuje nas, że ma on talię. Można więc zapytać o najmniejszy promień okręgu nałożonego na tę talię – dalej nazwiemy go obwędą – i o to, czy na pewno taka obwód nie zsunie się z sześcianu. Wnikliwe obserwacje pozwalają stwierdzić, że jest to okrąg opisany na przekroju sześcianu będącym sześciokątem foremnym (rys. 2), a spojrzenie na sześcian z kierunku prostopadłego do tego przekroju pozwala uzasadnić, dlaczego obwód nie spada (rys. 3). Rachunki zaś pozwalają stwierdzić, że obwód na sześcianie jednostkowym ma promień $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i zdumieć się, że taka sama obwód, tylko inaczej założona, z sześcianu spadnie.

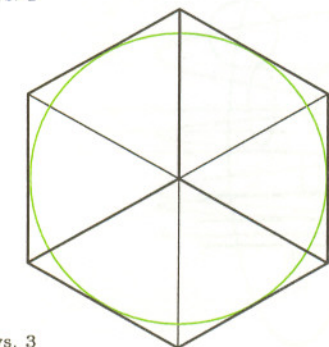
To było ciekawe. Zajmijmy się więc pytaniem, jakie są obwędą dla innych wielościanów. Rysunek 4 pozwala stwierdzić, że dla czworościanu foremnego o krawędzi 1 obwód istnieje i ma promień $\frac{\sqrt{2}}{4}$; jest ona okręgiem opisanym na kwadratowym przecięciu tego czworościanu. Nie narysowałem obrazka dotyczącego ośmiościanu foremnego o krawędzi 1, tylko zrobiłem rachunki: promień jest $\frac{1}{2}$. Dla dwunastościanu i dwudziestościanu z kolei nie obliczyłem promieni, tylko wykonałem rysunki rzutu tych brył na płaszczyznę obwędą (rys. 5 i 6); w obu przypadkach obwędą to okręgi opisane na jednym i wpisane w inny dziesięciokąt.

Jest rzeczą oczywistą, że nie tylko wielościany foremne mają obwędą. A czy w ogóle istnieją wielościany wypukłe, na które obwędą nie da się nałożyć?

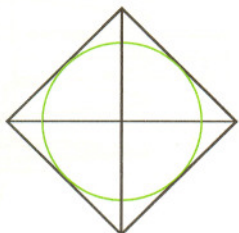
Marek KORDOS



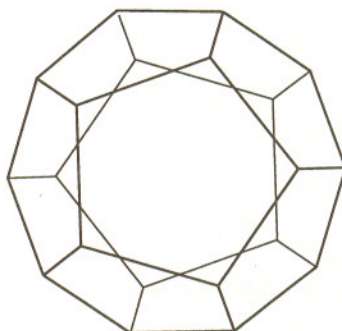
Rys. 2



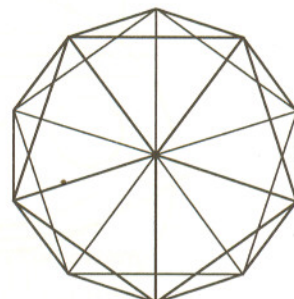
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Historia o pewnym kotku

Był sobie raz kotek. Miał skomplikowane imię:

```
ParametricPlot[{  
  {Cos[t], Sin[t]},  
  {0.5+Cos[t]/5, 0.2+Sin[t]/5},  
  {-0.5+Cos[t]/5, 0.2+Sin[t]/5},  
  {0.2+t/5, -1/2},  
  {0.2+t/5, -1/4},  
  {0.2+t/5, -3/8},  
  {-0.2-t/5, -1/2},  
  {-0.2-t/5, -1/4},  
  {-0.2-t/5, -3/8},  
  {1/Sqrt[2], t/13 + 1/Sqrt[2]},  
  {-1/Sqrt[2], t/13 + 1/Sqrt[2]},  
  {t/20-1/Sqrt[2], -t/20+2*Pi/13 + 1/Sqrt[2]},  
  {-t/20+1/Sqrt[2], -t/20+2*Pi/13 + 1/Sqrt[2]},  
  {-3/20, -3/4+t/30},  
  {-1/20, -3/4+t/30},  
  {1/20, -3/4+t/30},  
  {3/20, -3/4+t/30}  
}, {t,0,2*Pi},  
AspectRatio -> Automatic,  
Axes -> False ]
```

ale miły wygląd:

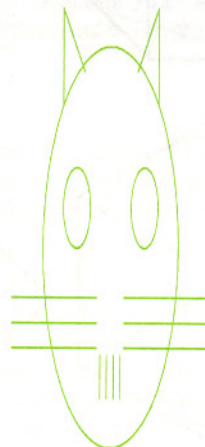


Wszędzie go było pełno. Właził pod szafę

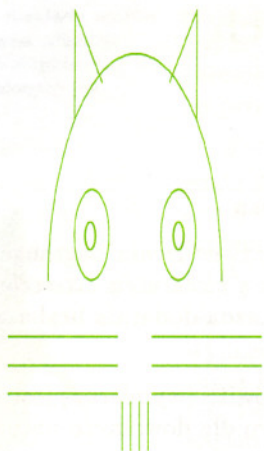


albo między szafą a ścianą:

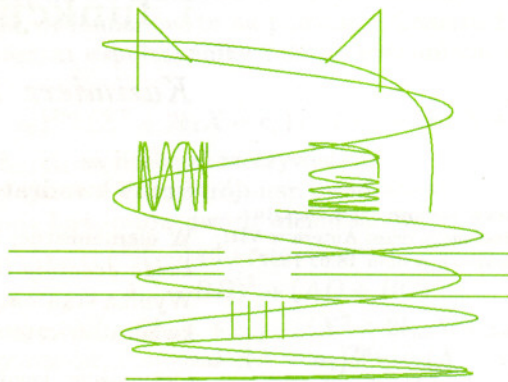
Był miłym, zadowolonym z siebie kotkiem:



Straszyl domowników:



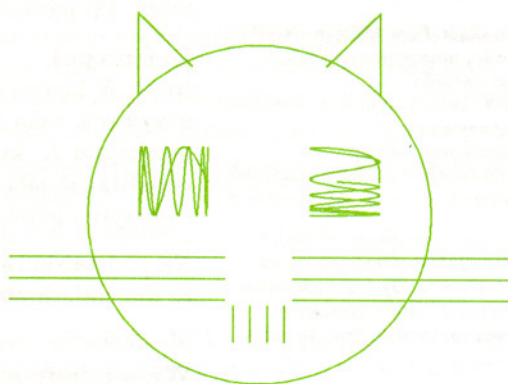
zeszmacony, utyflany, podrapany:



Ponieważ go dobrze karmiono, nabierał coraz bardziej obfitych kształtów:



i jeszcze następnego dnia miał obłęd w ślepkach:



Co się działo w marcu, trudno ująć słowami. Wracał do domu wytłamszony:



ale po każdej takiej kilkudniowej wyprawie wracał do swoich poprzednich kształtów:



i znów był miłym, spokojnym kocurkiem.

Małą Deltę przygotował Michał SZUREK

Sumy kwadratów wielomianów i funkcji wymiernych

Kazimierz SZYMICZEK

Sumy kwadratów i liczba Pitagorasa

Niniejszy tekst stanowi zapis odczytu PTM wygłoszonego przez Autora w VIII LO w Katowicach w dniu 18.02.1997 r.

W elementarnej teorii liczb dowodzi się twierdzenia Lagrange'a mówiącego, że *każda dodatnia liczba całkowita jest sumą kwadratów czterech liczb całkowitych*. Wynika stąd natychmiast, że również każda dodatnia liczba wymierna jest sumą kwadratów czterech liczb wymiernych.

Oczywiście, każda *dodatnia* liczba całkowita (wymierna) jest sumą kwadratów liczb całkowitych (wymiernych), bowiem dla dowolnych naturalnych n, m mamy $n = n \cdot 1^2$ oraz $\frac{m}{n} = mn \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2$. Istotą twierdzenia Lagrange'a jest zatem to, że każda liczba całkowita (wymierna), która w ogóle jest sumą kwadratów liczb całkowitych (wymiernych) daje się przedstawić jako suma akurat *czterech* takich kwadratów. W związku z tą własnością liczby 4 nazywamy ją *liczbą Pitagorasa* pierścienia liczb całkowitych \mathbf{Z} (a także ciała liczb wymiernych \mathbf{Q}). Pojęcie liczby Pitagorasa można wprowadzić dla każdego pierścienia.

Pierścień to zbiór P , w którym określone są dodawanie i mnożenie spełniające następujące warunki:

1. Zbiór P tworzy wraz z dodawaniem grupę abelową.
2. Mnożenie jest łączne.
3. Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Kto nie wie, co to grupa, niech zajrzy np. do *Delty* 9/1995. Pierścień tworzą np. liczby całkowite czy też wielomiany jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych (albo wymiernych, albo całkowitych).

Pierścień przemienny, z jedynką i bez dzielników zera nazywamy pierścieniem całkowitym (lub dziedziną całkowitości).

Definicja 1

Niech K będzie dowolnym pierścieniem. *Liczbą Pitagorasa* pierścienia K nazywamy taką najmniejszą liczbę naturalną $p = p(K)$, że każdy element a pierścienia K , który jest sumą kwadratów elementów pierścienia K , można przedstawić jako sumę p kwadratów elementów K . Jeśli taka liczba p nie istnieje, to przyjmujemy, że $p(K) = \infty$.

Na podstawie twierdzenia Lagrange'a mamy $p(\mathbf{Z}) = 4 = p(\mathbf{Q})$. Jest też jasne, że dla ciała liczb rzeczywistych \mathbf{R} i liczb zespolonych \mathbf{C} mamy $p(\mathbf{R}) = 1 = p(\mathbf{C})$.

Wielomiany jednej zmiennej

Rozpatrzmy teraz pierścień $\mathbf{R}[X]$ wielomianów jednej zmiennej X o współczynnikach rzeczywistych. Postaramy się znaleźć liczbę Pitagorasa tego pierścienia. Przede wszystkim więc należy rozpatrzeć te wielomiany $g \in \mathbf{R}[X]$, które można przedstawić w postaci sumy kwadratów wielomianów:

$$g = g_1^2 + \dots + g_n^2, \quad g_i \in \mathbf{R}[X].$$

Podstawiając tutaj w miejsce zmiennej X dowolną liczbę $x \in \mathbf{R}$ otrzymamy $g(x) = g_1(x)^2 + \dots + g_n(x)^2 \geq 0$. A więc każdy wielomian $g \in \mathbf{R}[X]$, który jest sumą kwadratów wielomianów pierścienia $\mathbf{R}[X]$, przyjmuje tylko wartości nieujemne. Wynika stąd w szczególności, że *najwyższy współczynnik* wielomianu g jest liczbą dodatnią. Rzeczywiście, jeśli $g = cX^n + c_1X^{n-1} + \dots + c_n$ i $c < 0$, to z równości

$$g(x) = cx^n \left(1 + \frac{c_1}{cx} + \dots + \frac{c_n}{cx^n}\right)$$

wynika, że dla dużych dodatnich $x \in \mathbf{R}$ wielomian g przyjmuje wartości ujemne.

Lemat 1

Liczba $k \geq 1$ jest krotnością pierwiastka a wielomianu g , jeśli istnieje taki wielomian h , że

$$g = (X - a)^k h \quad \text{oraz} \quad h(a) \neq 0.$$

Inaczej mówiąc, krotność to najwyższy wykładnik potęgi jednomianu $X - a$ dzielącej wielomian g .

Niech $g \in \mathbf{R}[X]$. Jeśli $g(x) \geq 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x , to krotność każdego rzeczywistego pierwiastka a wielomianu g jest liczbą parzystą.

Dowód

Jeśli $a \in \mathbf{R}$ jest pierwiastkiem wielomianu g o *nieparzystej* krotności, to $g = (X - a)^{2k+1}h$, gdzie $h(a) \neq 0$. Stąd wynika, że wartości wielomianu g – wbrew założeniu – zmieniają znak przy przejściu przez a . ■

Twierdzenie 1

$p(\mathbf{R}[X]) = 2$.

Na przykład,

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2);$$

ogólnie istnienie takiego rozkładu wynika z Zasadniczego Twierdzenia Algebry, które głosi, że wielomian stopnia ≥ 1 o współczynnikach zespolonych ma zespolony pierwiastek.

Dowód

Każdy wielomian $g \in \mathbf{R}[X]$ można przedstawić jako iloczyn wielomianów stopnia 1 oraz wielomianów stopnia 2 z ujemnymi wyróżnikami. Jeśli więc $g \in \mathbf{R}[X]$ jest sumą kwadratów wielomianów, to na podstawie Lematu 1 i wcześniejszej uwagi o najwyższym współczynniku takiego wielomianu, daje się on przedstawić w postaci

$$g = d(X - a_1)^{2n_1} \cdots (X - a_k)^{2n_k} (X^2 + 2b_1X + c_1) \cdots (X^2 + 2b_mX + c_m),$$

gdzie $d, a_1, \dots, a_k, b_1, c_1, \dots, b_m, c_m$ są liczbami rzeczywistymi, $d > 0$ i wyróżniki $4b_i^2 - 4c_i$ są ujemne. Każdy trójmian kwadratowy o ujemnym wyróżniku jest sumą kwadratów dwóch wielomianów, bo $X^2 + 2bX + c = (X + b)^2 + (\sqrt{c - b^2})^2$. Stąd i z tożsamości

$$(1) \quad (A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2$$

wynika przez indukcję, że iloczyn $(X^2 + 2b_1X + c_1) \cdots (X^2 + 2b_mX + c_m)$ jest sumą kwadratów dwóch wielomianów. Ponieważ $c(X - a_1)^{2n_1} \cdots (X - a_k)^{2n_k}$ jest kwadratem wielomianu, więc także g jest sumą kwadratów dwóch wielomianów.

Udowodniliśmy więc, że $p(\mathbf{R}[X]) \leq 2$. Wystarczy teraz wskazać taki wielomian $g \in \mathbf{R}[X]$, który jest sumą kwadratów wielomianów należących do $\mathbf{R}[X]$, ale sam nie jest kwadratem w $\mathbf{R}[X]$. Weźmy np. wielomian $X^2 + 1$. Gdyby był on kwadratem wielomianu, to byłby kwadratem wielomianu stopnia 1 i wobec tego miałby pierwiastek rzeczywisty, a tak, oczywiście, nie jest. ■

Ciało \mathbf{Q} liczb wymiernych jest *ciałem ułamków* pierścienia \mathbf{Z} liczb całkowitych. Podobnie można dla pierścienia $\mathbf{R}[X]$ wielomianów utworzyć jego ciało ułamków $\mathbf{R}(X)$, które nazywa się *ciałem funkcji wymiernych* o współczynnikach rzeczywistych i zawiera wszystkie ułamki $\frac{f}{g}$, gdzie $f, g \in \mathbf{R}[X]$ oraz $g \neq 0$. Liczbę Pitagorasa ciała funkcji wymiernych $\mathbf{R}(X)$ zainteresowani Czytelnicy znajdą teraz z łatwością, dowodząc, że $p(\mathbf{R}(X)) = 2$. (Wskazówka: proszę zauważyć, że dla dowolnych $f, g \in \mathbf{R}[X]$, $g \neq 0$, mamy $f/g = (1/g)^2 fg$.)

Wielomiany dwóch zmiennych

Wyznaczenie liczby Pitagorasa pierścienia $\mathbf{R}[X, Y]$ wielomianów dwóch zmiennych X i Y o współczynnikach rzeczywistych okazuje się bardzo trudne. Rozpatrzmy tak zwany *wielomian Motzkina*

$$f = 1 + X^2Y^4 + X^4Y^2 - 3X^2Y^2,$$

którego własności sygnalizują, że nie ma analogii w wyznaczaniu liczby Pitagorasa między pierścieniami wielomianów jednej i dwóch zmiennych.

Lemat 2

$f(x, y) \geq 0$ dla każdych $x, y \in \mathbf{R}$, tzn. wielomian f spełnia podstawowy warunek konieczny na to, by mógł być sumą kwadratów wielomianów.

Dowód

Na podstawie twierdzenia o średniej arytmetycznej i geometrycznej mamy

$$\frac{1 + x^2y^4 + x^4y^2}{3} \geq \sqrt[3]{1 \cdot x^2y^4 \cdot x^4y^2} = x^2y^2.$$

Stąd wynika, że $f(x, y) = 1 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2 \geq 0$. ■

Lemat 3

Wielomian f jest sumą 4 kwadratów funkcji wymiernych.

Dowód

Zamiast wielomianu f wygodniej będzie rozpatrzeć wielomian $(X^2 + 1)f$. Tak jak wielomian f przyjmuje on tylko nieujemne wartości i wobec tego ma szansę być sumą kwadratów wielomianów. Zauważamy najpierw, że

$$\begin{aligned} (X^2 + 1)f &= (X^2 + 1)(1 + X^2Y^4) + (X^2 + 1)(X^2 - 3)X^2Y^2 = \\ &= X^4Y^4 + 1 + X^2Y^4 + X^2 + (X^4 - 2X^2 - 3)X^2Y^2. \end{aligned}$$

Stąd, zapisując $-3X^2Y^2$ jako $-2X^2Y^2 - 2X^2Y^2 + X^2Y^2$, otrzymujemy

$$(X^2 + 1)f = (X^2Y^2 - 1)^2 + (XY^2 - X)^2 + (X^2 - 1)^2X^2Y^2.$$



W ciele $\mathbf{R}(X)$ obowiązują dokładnie takie same reguły dla dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia ułamków, jak w ciele liczb wymiernych.





Rozwiązanie zadania F 457. Waga mierzy wypadkową sił ciężkości wiadra i wody oraz siły F , z jaką oddziałuje na nią strumień wody. Prędkość wody wpadającej do wiadra obliczamy z zasady zachowania energii

$$\Delta mgh = \frac{\Delta mv^2}{2} \implies v = \sqrt{2gh}.$$

Siła F wynosi

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta mv}{\Delta t} = Q\sqrt{2gh}.$$

Przeliczając tę siłę na masę i dodając masy wiadra i wody otrzymujemy wskazanie wagi:

$$\frac{Q\sqrt{2gh}}{g} + M + m = 1,32 \text{ kg}.$$



Rozwiązanie zadania F 458.

Prędkość cząsteczek wodoru, z których w dominującej części zbudowana była mgławica, obliczamy ze wzoru

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

gdzie k jest stałą Boltzmanna. Z drugiej strony, aby układ był trwały, energia cząsteczek wodoru na powierzchni mgławicy musi być mniejsza od zera

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} < 0.$$

Stąd

$$R < \frac{2GM}{v^2} = 7,1 \cdot 10^{15} \text{ m} = 0,75 \text{ roku świetlnego}.$$

Literatura:

1. J.W.S. Cassels, On the representation of rational functions as sums of squares. *Acta Arith.* **9** (1964), 79–82.
2. J.W.S. Cassels, W.J. Ellison, and A. Pfister, On sums of squares and on elliptic curves over function fields. *J. Number Theory* **3** (1971), 125–149.
3. M.D. Choi, Z.D. Dai, T.Y. Lam, and B. Reznick, The Pythagoras number of some affine algebras and local algebras. *J. Reine Angew. Math.* **336** (1982), 45–82.
4. A. Pfister, Zur Darstellung definitiver Funktionen als Summe von Quadraten. *Invent. Math.* **4** (1967), 229–237.
5. Y. Pourchet, Sur la représentation en somme de carrés des polynômes à une indéterminée sur un corps de nombres algébriques, *Acta Arith.* **19** (1971), 89–104.

Wykazaliśmy więc, że dla pewnych trzech wielomianów A , B i C mamy $(X^2 + 1)f = A^2 + B^2 + C^2$. Mnożąc obie strony tej równości przez $(X^2 + 1)$ dostaniemy, dzięki tożsamości (1),

$$(X^2 + 1)^2 \cdot f = (AX - B)^2 + (BX + A)^2 + (CX)^2 + C^2.$$

Dzieląc obie strony tej tożsamości przez $(X^2 + 1)^2$ otrzymamy tezę Lematu. ■

Lemat 3 nie jest całkiem satysfakcjonujący. Wydaje się, że rozpatrywanie wielomianu $(X^2 + 1)f$ zamiast f było pójściem na łatwiznę i dało niezbyt elegancki rezultat – przedstawienie wielomianu f w postaci sumy kwadratów funkcji wymiernych zamiast sumy kwadratów wielomianów. Te pretensje są jednak przedwcześnie.

Twierdzenie 2

Wielomian f nie daje się przedstawić jako suma kwadratów wielomianów pierścienia $\mathbf{R}[X, Y]$.

Dowód

Przypuśćmy, że $f = f(X, Y) = f_1^2 + \dots + f_n^2$, gdzie $f_j = f_j(X, Y) \in \mathbf{R}[X, Y]$. Ponieważ f ma stopień równy 6, więc stopnie wszystkich wielomianów f_j nie przekraczają 3. Z równości $f(X, 0) = 1$ otrzymujemy $f_1^2(X, 0) + \dots + f_n^2(X, 0) = 1$, skąd wynika, że $f_j(X, 0)$ są wielomianami stałymi. Jeśli więc $f_j(X, 0) = a_j \in \mathbf{R}$, to także $f_j(0, 0) = a_j$, to znaczy: a_j jest wyrazem wolnym wielomianu f_j .

Podobnie sprawdzamy, że $f_j(0, Y)$ są wielomianami stałymi oraz $f_j(0, Y) = a_j = f_j(0, 0)$. Wobec tego wielomian $f_j - a_j$ dzieli się zarówno przez X , jak i przez Y ; mając stopień nie większy niż 3 musi być postaci

$$f_j = a_j + (b_j + c_j X + d_j Y) \cdot XY,$$

gdzie a_j, b_j, c_j, d_j są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Porównując współczynniki jednomianu $X^2 Y^2$ w hipotetycznej równości $f = f_1^2 + \dots + f_n^2$ otrzymujemy $b_1^2 + \dots + b_n^2 = -3$, sprzeczność. ■

Wielomiany wielu zmiennych

Problem wyznaczenia liczby Pitagorasa ciała funkcji wymiernych $n \geq 2$ zmiennych $K_n := \mathbf{R}(X_1, \dots, X_n)$ nad ciałem liczb rzeczywistych jest bardzo trudny i jest otwarty dla $n > 2$.

Wiadomo, że $p(K_n) \geq n + 1$ (J.W.S. Cassels, 1964) oraz $p(K_n) \leq 2^n$ (A. Pfister, 1967). Dla $n = 2$ te oszacowania wykazują, że $p(K_2) = 3$ lub 4. Ustalenie faktycznej wartości $p(K_2)$ okazało się być niezwykle skomplikowanym zagadnieniem. W 1971 roku J.W.S. Cassels, W.J. Ellison i A. Pfister wykazali, że rozpatrywany wcześniej w tym artykule wielomian Motzkina nie jest sumą trzech kwadratów w K_2 i tym samym udowodnili w końcu, że $p(K_2) = 4$. Ich dowód wykorzystuje bardzo zaawansowane techniki teorii krzywych eliptycznych i nie daje się przenieść na przypadek $n > 2$.

Przypuszcza się, że $p(K_n) = 2^n$ dla wszystkich n , ale dla $n \geq 3$ nie uzyskano żadnego postępu w kierunku dowodu tej hipotezy.

Jest rzeczą interesującą porównać liczbę Pitagorasa pierścienia całkowitego A i jego ciała ułamków K . Z łatwością stwierdza się, że $p(K) \leq p(A)$. Ponadto, dla $A = \mathbf{Z}$ oraz dla $A = \mathbf{R}[X]$ mamy odpowiednio $K = \mathbf{Q}$ oraz $K = \mathbf{R}(X)$ i, jak wiemy, w obydwu przypadkach mamy $p(K) = p(A)$.

Nie jest to jednak obowiązująca reguła. M.D. Choi, Z.D. Dai, T.Y. Lam i B. Reznick udowodnili w 1982 roku, że pierścień wielomianów n zmiennych ($n \geq 2$) $A = \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ nad ciałem liczb rzeczywistych ma nieskończoną liczbę Pitagorasa, podczas gdy dla jego ciała ułamków $K = K_n$ mamy oszacowanie Pfistera $p(K_n) \leq 2^n$. W tej samej pracy udowodniono także inny zaskakujący rezultat: $p(\mathbf{Z}[X]) = \infty$. Z drugiej strony, Y. Pourchet udowodnił, że $p(\mathbf{Q}[X]) = 5$.

Twierdzenie Waringa

W latach 70. XVIII wieku Edward Waring wysunął hipotezę, której szczególnym przypadkiem jest twierdzenie Lagrange'a, mówiące o tym, że każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych. Hipoteza ta orzekała, że *dla dowolnego naturalnego wykładnika $k \geq 1$ istnieje liczba naturalna m o tej własności, że każda liczba naturalna jest sumą k -tych potęg m liczb całkowitych nieujemnych.*

Twierdzenie Lagrange'a orzeka zatem, że dla $k = 2$ hipoteza Waringa jest prawdziwa – stosowną liczbą jest $m = 4$.

Od 1909 roku wiemy, że hipoteza Waringa jest twierdzeniem – udowodnił to David Hilbert. Nie jesteśmy jednak pewni, czy znamy wzór pozwalający dla każdego k obliczyć najmniejszą wartość m .

Wiadomo bowiem już od dawna, że

$$m \geq 2^k + \left[\left(\frac{3}{2} \right)^k \right] - 2.$$

Łatwo to uzasadnić. Weźmy pod uwagę liczbę $\left[\left(\frac{3}{2} \right)^k \right] \cdot 2^k - 1$. Jest ona mniejsza od 3^k , więc w jej przedstawieniu jako sumy k -tych potęg występują tylko potęgi dwójki i jedyńki.

Ponieważ

$$\left[\left(\frac{3}{2} \right)^k \right] \cdot 2^k - 1 = 2^k \cdot \left(\left[\left(\frac{3}{2} \right)^k \right] - 1 \right) + (2^k - 1),$$

więc do jej uzyskania jako sumy k -tych potęg potrzeba tyle razy napisać 2^k , ile wynosi pierwszy nawias, i tyle razy 1, ile wynosi drugi, co kończy uzasadnienie podanego oszacowania.

We wszystkich przeliczonych przypadkach można w tym oszacowaniu zastąpić nierówność przez równość. Tak więc liczba trzecich potęg potrzebna do uzyskania dowolnej liczby naturalnej to 9 (to maksimum realizuje np. 23), liczba czwartych potęg to 19 (np. 79) itd. aż do $k = 471\,600\,000$. Ale czy równość zachodzi dla każdego k ? W 1957 roku Kurt Mahler wykazał, że istnieje taka liczba K , że dla wszystkich $k > K$ w oszacowaniu jest równość.

Tak więc dla Was, Czytelnicy, pozostało jedynie odpowiedzieć na nierozstrzygnięte do tej pory pytanie, czy K jest mniejsze od 471 600 000 – co zamykałoby problem – czy też nie. Powodzenia.



Jak to zostało wymyślone?

Stwierdzenie, że *jeśli p i q są sumami dwóch kwadratów [liczb całkowitych], to $p \cdot q$ też można przedstawić jako sumę dwóch kwadratów [liczb całkowitych] i to dwoma sposobami,*

można znaleźć już w pracach Diofantosa, żyjącego w III wieku. Oczywiście, nie jest to prawda – czasami oba sposoby okazują się jednakowe.

Te dwa sposoby to

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = \\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

Dzisiaj, gdy znamy liczby zespolone, wiemy, że jest to prawda nie tylko dla liczb całkowitych, i wynika z przemienności mnożenia liczb zespolonych. Mamy bowiem

$$(z_1)^2 \cdot (z_2)^2 = (z_1 \cdot z_2)^2,$$

skąd wynika

$$|z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2.$$

Podstawiając $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ otrzymujemy pierwszy sposób, natomiast $z_1 = a + ib$, $z_2 = d + ic$ daje nam drugi sposób.

No dobrze, ale jak odkrył tę prawidłowość Diofantos? Przecież nie znał liczb zespolonych.

Odpowiedź, że wystarczy rozwinąć lewą i prawą stronę i okaże się, że jest dobrze, jest nie na temat. Do tego bowiem, aby te strony rozwijać, trzeba je mieć, czyli jakimś sposobem wpaść na pomysł takiej równości. Tymczasem sam Diofantos nie zostawił nam w tej kwestii żadnych wskazówek.

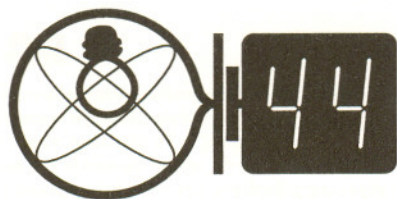
Być może zrobił to tak:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = \\ &= (a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) = \\ &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \end{aligned}$$

Diofantos jest postacią tajemniczą nie tylko dlatego, że nie znamy żadnych szczegółów jego biografii. Sposób pisania przez niego prac przypomina czasy Babilonu czy Średniego Państwa Egipskiego, które to czasy już dla Diofantosa były odległe o 2 tysiące lat. Pisał wprawdzie po grecku, ale to taka sama wskazówka, jaką dzisiaj stanowiłoby stwierdzenie, że ktoś pisze swe prace po angielsku.

Wygląda więc na to, że ciekawość na temat *jak on na to wpadł* możemy zaspokajać jedynie sami zręcznie na to wpadając.

Marek KORDOS



Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

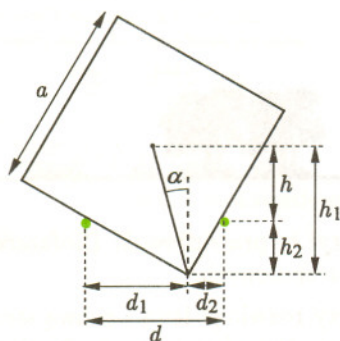
Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1997

Przypominamy treść zadań:

237. Jednorodny sześciąt o boku a położono na dwóch cienkich, równoległych i poziomych prętach odległych o d (rys.). Tarcie między sześciątem a prętami nie występuje.

- a) Jaki warunek muszą spełniać a i d , aby dla $\alpha = 0$ równowaga była trwała, tzn. aby po małym przechyle następował powrót do tego położenia?
b) Jaki warunek muszą spełniać a i d , aby sześciąt mógł spoczywać na prętach w równowadze dla pewnego kąta α różnego od zera? Czy ten stan równowagi będzie trwały?



237. Oznaczmy różnicę wysokości środka sześciąta i prętów przez h . Jest ona dana wzorem $h = h_1 - h_2$ (zob. rys.), przy czym $h_1 = (a/\sqrt{2}) \cos \alpha$. Aby wyznaczyć h_2 , podzielimy d na części d_1 i d_2 i rozwiążemy układ równań

$$d = d_1 + d_2, \quad h_2 = d_1 \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = d_2 \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha).$$

Po przekształceniach otrzymujemy $h_2 = (d/2) \cos 2\alpha$. Zatem

$$h = (a/\sqrt{2}) \cos \alpha - (d/2) \cos 2\alpha = -du^2 + (a/\sqrt{2})u + (d/2),$$

gdzie $u = \cos \alpha$. Widzimy, że $h(u)$ jest funkcją kwadratową osiągającą maksimum dla $u = a/2d\sqrt{2}$. Ponieważ fizycznie interesujący jest tylko przedział $0^\circ \leq \alpha < 45^\circ$ ($1 \geq u > 1/\sqrt{2}$), więc wnioskujemy, że:

- a) równowaga w położeniu $\alpha = 0$ jest trwała dla $a < 2d\sqrt{2}$ i nietrwała dla $a \geq 2d\sqrt{2}$ (oczywiście, aby sześciąt zatrzymał się na prętach, musi być spełniony warunek $a\sqrt{2} > d$),
b) jeśli $2d \leq a < 2d\sqrt{2}$, to dla kąta α danego wzorem $\cos \alpha = a/2d\sqrt{2}$ występuje dodatkowo położenie równowagi nietrwałej.

238. Zderzenia są niesprężyste wtedy, gdy energia kinetyczna przechodzi w energię drgań cząsteczek lub na odwrót. Zatem pierwiastek A jest gazem jednoatomowym, a pierwiastek B – dwuatomowym.

W niskich temperaturach drgania cząsteczek ulegają „zamrożeniu” (energia kinetyczna jest za mała, aby je wzbudzić), zatem dla obu gazów zderzenia będą sprężyste.

W wysokich temperaturach energia kinetyczna będzie wystarczająca do wzbudzenia stanów elektronowych (przejścia elektronów na inną orbitę), a więc dla obu gazów zderzenia będą niesprężyste.

Podczas zderzeń atomów A z cząsteczkami B cząsteczki mogą zostać pobudzone do drgań, czyli zderzenia będą niesprężyste.

W charakterze uzupełnienia podajemy za *Encyklopedią Fizyki* wartości typowych energii: poziomy elektronowe – kilka eV, poziomy oscylacyjne (związane z drganiami cząsteczek) od 0,1 do 0,001 eV, poziomy rotacyjne (związane z obrotami cząsteczek) od 10^{-3} do 10^{-5} eV.

Ponieważ średnia energia termiczna w temperaturze T jest rzędu kT , gdzie $k \approx 10^{-4}$ eV/K jest stałą Boltzmanna, więc widzimy, że – zależnie od dokładniejszej wartości energii drgań cząsteczki – możliwe jest „zamrożenie” tych drgań poprzez obniżenie temperatury. Wzbudzenie poziomów elektronowych będzie natomiast wymagało podwyższenia temperatury do kilkudziesięciu tysięcy kelwinów.

Poziomów rotacyjnych możemy nie brać pod uwagę ze względu na bardzo małą wartość ich energii (niesprężystość zderzeń może być niezauważalna). Można też przyjąć, że energia kinetyczna cząsteczek obejmuje energię ich ruchu obrotowego – przy takiej interpretacji zderzenia ze wzbudzeniem poziomów rotacyjnych uznalibyśmy za sprężyste.

Przypominamy treść zadań:

339. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkty P i Q leżą odpowiednio na półprościach AB^{\leftarrow} i AD^{\leftarrow} , przy czym $|AP| = |CD|$, $|AQ| = |BC|$. Wykazać, że środek odcinka PQ leży na prostej AC .

340. Dowieść, że dla liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a+b+c}{3} + \sqrt[3]{abc} \right) \geq \frac{1}{3} \left(\sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab} \right).$$

339. Niech R będzie punktem symetrycznym do P względem A .

Mamy równości:

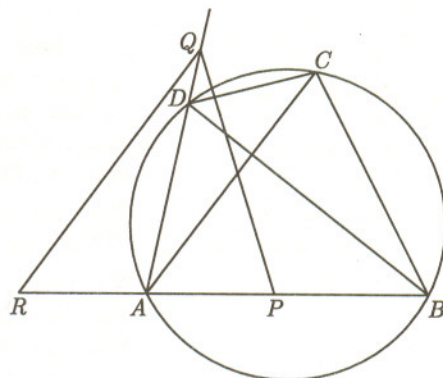
$$|QA| = |BC|, \quad |AR| = |AP| = |CD|,$$

$$|\angle QAR| = 180^\circ - |\angle QAB| = |\angle BCD|;$$

wynika z nich, że trójkąt QAR przystaje do trójkąta BCD , i wobec tego

$$|\angle ARQ| = |\angle CDB| = |\angle BAC|.$$

To znaczy, że prosta RQ jest równoległa do AC . Prosta AC połowi odcinek PR , więc na mocy twierdzenia Talesa połowi także odcinek PQ . Stąd teza.



340. Nie tracąc ogólności przyjmijmy, że $a \geq b \geq c \geq 0$. Gdy $c = 0$, nierówność dana do udowodnienia sprowadza się do nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną liczb a, b . Dalej zakładamy więc, że $c > 0$. Oznaczmy: $a/c = x^2$, $b/c = y^2$; wówczas $x \geq y \geq 1$, a dowodzona nierówność, pomnożona stronami przez $6/c$, przybiera postać:

$$x^2 + y^2 + 1 + 3(xy)^{2/3} \geq 2y + 2x + 2xy.$$

Przenosimy wszystko na lewą stronę i przekształcamy otrzymaną różnicę, wprowadzając w pewnym momencie oznaczenie $q = (xy)^{1/6}$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 + 3(xy)^{2/3} &= \\ &= (x - y)^2 - 2(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy} + 1 + 3(xy)^{2/3} = \\ &= (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 [(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2] - 4q^3 + 1 + 3q^4 \geq \\ &\geq 3q^4 - 4q^3 + 1 = (q - 1)^2(3q^2 + 2q + 1) \geq 0. \end{aligned}$$



Rozwiązanie zadania M 816. Oznaczmy $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$. Wówczas odwrotność liczby $f(x)$ to $\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}$, więc

$$W_b(x)^2 - 4 = (f(x)^b + f(x)^{-b})^2 - 4 = (f(x)^b - f(x)^{-b})^2.$$

Zatem,

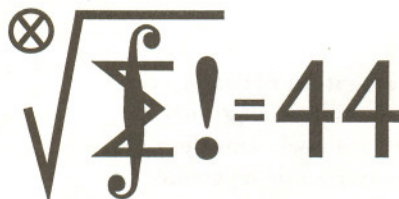
$$\begin{aligned} W_a(W_b(x)) &= \left(\frac{W_b(x) + \sqrt{W_b(x)^2 - 4}}{2} \right)^a + \left(\frac{W_b(x) - \sqrt{W_b(x)^2 - 4}}{2} \right)^a = \\ &= \left(\frac{f(x)^b + f(x)^{-b} + (f(x)^b - f(x)^{-b})}{2} \right)^a + \left(\frac{f(x)^b + f(x)^{-b} - (f(x)^b - f(x)^{-b})}{2} \right)^a = \\ &= f(x)^{ab} + f(x)^{-ab} = W_{ab}(x). \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że $W_3(x) = x^3 - 3x$. Dla

$$x_0 = W_{1/3}(3) = \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

mamy $x_0^3 - 3x_0 = W_3(x_0) = W_3(W_{1/3}(3)) = W_1(3) = 3$.

Uwaga: Każde nietrywialne równanie sześciennego daje się przez proste podstawienie typu $x = ay + b$ sprowadzić do równania postaci $y^3 - 3y = c$, co umożliwia zastosowanie powyższej metody.



Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 331 (WT=2,60), 332 (WT=1,80),
z numeru 12/1996

Piotr Żmijewski	- Łódź	45,42
Bartłomiej Dyda	- Wrocław	44,40
Krzysztof Zapisek	- Warszawa	41,22
Jarosław Łazuka	- Warszawa	37,78
Jerzy Witkowski	- Radlin	37,03

Witamy w Klubie dwóch nowych
członków: panów Żmijewskiego oraz Dydę
(numery 81 i 82 w Klubie **44M**)





Rozwiązanie zadania M 817.

Czytelnik zechce samodzielnie udowodnić, że $W_{n+1}(x) = xW_n(x) - W_{n-1}(x)$ i wynioskować stąd tezę zadania.

Wskazówka: Ponieważ tożsamość dotyczy wielomianów, więc wystarczy ją sprawdzić na nieskończonym zbiorze punktów, np. postaci $x_k = k + \frac{1}{k}$. Może przydać się fakt, że $W_n(k + \frac{1}{k}) = k^n + \frac{1}{k^n}$.

Można też zauważyć, podobnie jak P.L. Czebyszew, że

$$W_n(2 \cos t) = 2 \cos nt,$$

wobec czego

$$2 \cos(n+1)t = 2 \cos t \cdot 2 \cos nt - 2 \cos(n-1)t.$$

Linie absorpcyjne w widmie gwiazdy powstają w materii rozciągającej się między fotosferą gwiazdy (emitującą światło o widmie ciągłym) a obserwatorem. Zazwyczaj większość tej materii stanowi atmosfera gwiazdy, często jednak światło przechodzi jeszcze przez materię międzygwiazdową, która wzbogaca widmo gwiazdy o swoje linie. Jak odróżnić linie gwiazdowe od międzygwiazdowych? Jeżeli gwiazda jest składnikiem układu podwójnego, to okresowo zmienia się jej prędkość względem Ziemi, a wtedy w wyniku zjawiska Dopplera jej linie widmowe okresowo przesuwają się na przemian ku czerwieni i ku fioletowi – natomiast linie międzygwiazdowe pozostają nieruchome. Dzięki temu właśnie linie międzygwiazdowe zostały odkryte (J.F. Hartmann, 1905). Jeżeli gwiazda jest pojedyncza, to cały układ jej linii na ogół nie będzie pasował do układu linii międzygwiazdowych wskutek różnych prędkości gwiazdy i obłoków materii międzygwiazdowej. Ponadto linie międzygwiazdowe są ostrzejsze od gwiazdowych (bo materia międzygwiazdowa jest zimna) i dużo jest wśród nich linii wzbronionych (bo materia międzygwiazdowa jest bardzo rozrzedzona).

Nie warto dowodzić, że poznanie składu chemicznego materii rozproszonej ma ogromne znaczenie dla poznania w ogóle ewolucji materii i jej obiegu we Wszechświecie. Toteż można uznać, że trzy lata temu rozpoczął się chyba nowy etap tych badań, gdy mianowicie teleskop Hubble'a umożliwił zaobserwowanie po raz pierwszy międzygwiazdowych linii pierwiastków naprawdę ciężkich, takich jak cynk, ołów, tal, gal, german, krypton, cyna, arsen, występujących w ilościach rzędu jeden atom na dziesiątki miliardów atomów wodoru. Z tego, co wiemy obecnie o nukleosynthese, pierwiastki najlżejsze (wodór, hel i lit) powstały przede wszystkim podczas Wielkiego Wybuchu. Pierwiastki od helu do cynku powstają w centrach gwiazd w wyniku syntezy termojądrowej. Z kolei pierwiastki jeszcze cięższe tworzą się w rezultacie wychwytywania neutronów, z tym że może się to odbywać spokojnie i powoli w jądrze gwiazdy lub gwałtownie podczas wybuchu supernowej. Wreszcie supernowe wybuchając wzbogacają materię międzygwiazdową w owe pierwiastki ciężkie. Nasza obecna wiedza o ewolucji gwiazd wydaje się wprawdzie dość dobrze ugruntowana i ogólnie zgodna z obserwacjami, niemniej jednak możliwość bezpośredniego wyznaczenia ilości ciężkich pierwiastków w materii międzygwiazdowej stanowi nowy i zarazem bardzo subtelny sposób konfrontowania teorii z obserwacjami, sposób, który dotychczas był niewykonalny z powodów czysto technicznych.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania M 818.

Przypadek, gdy P jest wielomianem stałym, pozostawiamy do rozważenia Czytelnikowi.

Niech $n \geq 1$ będzie stopniem wielomianu P . Łatwo widzieć, że współczynniki przy x^n w wielomianie P i wielomianie W_n (który również jest stopnia n) są równe 1. Zatem $R(x) = P(x) - W_n(x)$ jest wielomianem stopnia $r < n$. Z założeń zadania mamy

$$W_n(x^2 - 2) + R(x^2 - 2) = (W_n(x) + R(x))^2 - 2,$$

a ponieważ $x^2 - 2 = W_2(x)$, więc na mocy tezy zadania M 816 otrzymujemy po nietrudnym rachunku

$$R(x^2 - 2) - R(x)^2 = 2W_n(x)R(x).$$

Gdy wielomian R nie jest wielomianem zerowym, to stopień wielomianu po lewej stronie tego równania jest nie większy niż $2r$, a $2W_n(x)R(x)$ jest stopnia $n + r > 2r$, co prowadzi do sprzeczności. Zatem $R(x) \equiv 0$, czyli $P(x) = W_n(x)$, co było do wykazania.

Uwaga: Rodzina W_n ma wiele innych ciekawych własności – np. jest jedyną (z dokładnością do zamiany zmiennych typu $W_n(\frac{ax+b}{a})$) oprócz x^n pełną (tzn. zawierającą co najmniej jeden wielomian każdego stopnia) rodziną wielomianów parami komutujących, tj. takich, których kolejność złożenia nie odgrywa roli. Czytelnik Zawzięty może udowodnić, że

$$\int_{-2}^2 \frac{W_m(x)W_n(x)}{\sqrt{4-x^2}} dx = 0 \quad \text{dla } m \neq n.$$

Sierpień

Uważny obserwator może zauważyć, że Jowisz, który już od dłuższego czasu jest widoczny praktycznie przez całą noc, cofa się. Określenie to oznacza, że porusza się na niebie w stronę przeciwną niż Słońce w swoim ruchu rocznym. Wszystkie planety obiegają Słońce w tę samą stronę (gdyby patrzeć z Gwiazdy Polarnej, były to kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara), dlaczego więc Jowisz się cofa? Otóż nie zapominajmy, że ruch planet obserwujemy z Ziemi, która też się porusza, a ponieważ jest bliżej Słońca niż Jowisz – porusza się szybciej. Są zatem okresy, np. właśnie teraz, gdy Ziemia i Jowisz znajdują się po tej samej stronie Słońca i Ziemia Jowisza po prostu wyprzedza. Ponieważ płaszczyzny orbit Ziemi i innych planet tworzą niewielkie kąty, planeta w okresie swojego ruchu wstecznego cofa się nie dokładnie „po swoich śladach”, lecz zatacza dość płaskie pętle na niebie. Fakt ten znany był astronomom od starożytności, a wytłumaczył go w ten naturalny sposób Kopernik.

9 VIII Jowisz znajdzie się niemal dokładnie po przeciwnej stronie Ziemi niż Słońce – konfiguracja taka nazywa się opozycją. Księżyc, którego pełnia wypada 18 VIII, zbliży się do Wenus 6 VIII, do Marsa 9 VIII, do Jowisza 17 VIII i do Aldebarana 25 VIII, a ponadto – uwaga! – 22 VIII zakryje Saturna. Nastąpi to około godziny 4 (czasu letniego), więc posiadacze lepszych lunet tej nocy chyba się nie wyśpią. Błyskające na niebie meteory to głównie Perseidy. Można je widzieć niemal przez cały miesiąc z maksimum około 12 VIII.

T.K.

Jeszcze raz o izometriach

W pierwszym numerze *EPSILONA* pisaliśmy o tym, że jeśli funkcja z płaszczyzny w płaszczyznę zachowuje odległość (euklidesową) 1, to jest izometrią. Analogiczne twierdzenie prawdziwe jest także dla funkcji z \mathbf{R}^n w \mathbf{R}^n dla $n \geq 2$. Oczywiście, problem można sformułować dla dowolnej przestrzeni metrycznej (to znaczy takiej, w której określona jest odległość między jej elementami) i nietrudno wykazać, że wówczas rozwiązanie może być inne. Wystarczy wziąć \mathbf{R} i funkcję, która liczbie przyporządkowuje jej część całkowitą.

Odległość euklidesową na płaszczyźnie zapisujemy analitycznie:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2};$$
 podobnie robimy to w przestrzeni \mathbf{R}^n , czyli zbiorze ciągów n -elementowych. Naturalnym uogólnieniem jest zbiór ciągów nieskończonych; jeżeli rozważać będziemy zbiór

ciągów, dla których szereg $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ jest zbieżny, a odległość

określimy jako $\left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$, to otrzymamy

przestrzeń metryczną, oznaczaną przez matematyków l_2 . Ze względu na dobór metryki można tę przestrzeń traktować jako uogólnienie \mathbf{R}^n .

W przestrzeni l_2 z tego, że funkcja zachowuje odległość 1, nie wynika, że zachowuje wszystkie odległości. Oto idea konstrukcji przykładu; wykorzystamy pewne fakty z matematyki wyższej.

Wiadomo, że w przestrzeni l_2 istnieje podzbiór A gęsty i przeliczalny, to znaczy taki, że domknięcie A jest całą przestrzenią i elementy A można ponumerować liczbami naturalnymi. W szczególności każdemu elementowi x należącemu do l_2 można przyporządkować taki $a_n \in A$, że odległość między a_n i x jest mniejsza niż $\frac{1}{2}$. Oznaczmy to przyporządkowanie przez f .

Niech teraz b_n będzie elementem l_2 – czyli ciągiem – zdefiniowanym następująco: n -ty wyraz ciągu to $\frac{1}{\sqrt{2}}$, pozostałe zaś równe są 0. Łatwo sprawdzić, że dla różnych k i n elementy b_k i b_n są odległe o 1. Z określenia funkcji f wynika natomiast, że jeśli dwa elementy l_2 są odległe o 1, to ich obrazy przez funkcję f są różne. Jeżeli teraz weźmiemy funkcję $g: A \rightarrow l_2$, która element a_n przekształca na b_n , to nietrudno dostrzec, że funkcja $g \circ f$ zachowuje odległość 1. Izometrią jednak ona nie jest (dlaczego?)

Można zadać pytanie, co się stanie, gdy (w przypadku przestrzeni l_2) dodamy założenie o ciągłości funkcji zachowującej odległość 1. Otóż jeszcze 10 lat temu problem ten był otwarty i nic mi nie wiadomo o tym, by ostatnio ktoś go rozwiązał...

K.C.

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelný), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmicheowski, Marcin Pożniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ϵ .

Andrzej Turowicz (1904–1989) był księdzem i jednocześnie profesorem matematyki. Znał wielu sławnych polskich matematyków, w szczególności ze Lwowa, i opowiadał o nich barwne anegdoty. Ale i on sam był bohaterem oryginalnych historii...

Gdy przed kolokwium habilitacyjnym (1963) ojciec Turowicz zapytał prof. Ważewskiego, jak taki egzamin wygląda, gdyż chciał się przygotować, otrzymał odpowiedź: „no cóż, w najgorszym razie zostanie ksiądz męczennikiem, a przecież ksiądz o niczym innym nie marzy?”.

Wniosek o nominację profesorską Turowicza czekał prawie rok na opinię wojewódzkiego komitetu PZPR w Krakowie (wydanie pozytywnej opinii przez komitet było konieczne dla nadania wnioskowi dalszego biegu). Komitet zwlekał. W końcu, po ponagleniu przez sekretariat PAN, wydano werdykt: „stwierdzono, że docent Turowicz nie wyzyskiwał swojego stanowiska dla robienia propagandy religijnej”. Podobno, gdy wniosek dotarł już do Rady Państwa, do Dyrekcji Instytutu Matematycznego PAN nagle zatelefonował ówczesny I sekretarz KC PZPR, W. Gomułka, z pytaniem, dlaczego docent Turowicz mieszka w opactwie w Tyńcu. Odpowiedziano mu, że to wynika z papierów dołączonych do wniosku, na co on odrzekł: „a, no to dobrze”.

Ongiś z wizytą do Instytutu Matematycznego PAN w Krakowie, gdzie profesor Turowicz pracował, przybył z wizytą rumuński matematyk; obecność księdza w instytucie bardzo go zaskoczyła. Gdy następnego dnia przyszedł i ksiądz profesora nie było, zapytał: *A gdzie towariszcz pop?*

Idziemy do szkoły

Dawno temu, na noworocznej herbatce pracowników Instytutu Matematyki UJ, Dyrektor zadał zagadkę: ilu pracowników ma Instytut? Dał wskazówkę, że jest to ładna liczba. Z kilku miejsc rozległy się głosy, że 77 – i była to odpowiedź dobra.

EPSILON ma prawie siedem lat. Pierwszy numer, przygotowany jesienią 1990, wyszedł drukiem w marcowym numerze *Delty* w roku 1991. Numer siedemdziesiąty siódmy ukazuje się w sierpniu, a 1 września siedmiolatki idą do szkoły.

Idziemy do szkoły i my! Czas na nas – trzeba się nauczyć pisać i czytać! W kilku najbliższych numerach *Delty* Czytelnicy nie znajdą *EPSILONA*. Wydawanie naszej kolumny zostaje zawieszona na czas nieokreślony. Trudno sprecyzować, na jak długo; może tylko na kilka miesięcy, może do $+\infty$?

Na jakiś czas zniknie zatem w *Delcie* winieta z krakowską czapką, symbolami ϵ i δ , i kwantyfikatorami takimi, jak je piszą matematycy na całym świecie i jak je pisali nawet w okresie zimnej wojny od USA po ZSRR – wszędzie, z wyjątkiem polskich szkół i polskich podręczników szkolnych (choć np. w podręcznikach Zofii Krygowskiej symbole kwantyfikatorów w ogóle nie były używane, Autorka pisała je słowami).

Sami jesteście bardzo ciekawi, czy (ewentualnie kiedy) spotkamy się jeszcze na łamach *Delty*?