



SPIS TREŚCI NUMERU 7(278)

O zbieżności ciągów sum
Riemanna, wzorach Stirlinga,
Wallisa i. . .

Grzegorz Rządkowski

str. 1

Dyski protoplanetarne
Michał Różycka

str. 1

Probabilistyka i wybory

str. 4

Spektroskop za złotówkę

str. 5

Geometria Minkowskiego
Wojciech Kopczyński

str. 6

Mała Delta

str. 8

Cztery sposoby obliczenia
długości linii śrubowej

str. 9

Opór zastępczy wielokąta
i złota proporcja

Krzysztof Rejmer

str.10

Pion, poziom i promień Ziemi
Piotr Zalewski

str.12

Zadania

str.13

Klub 44

str.14

Patrz w niebo

str.16

Lipiec

str.16

Epsilon

str.17

W następnym numerze:

Supernowa A.D. 1054

Ilustracje wykonał
Krzysztof BIESAGA

Wybór artykułów z *Delty*
ukazuje się w języku angielskim
w sieci Internet pod adresem
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
– wiceprzewodniczący

Krzysztof Ciesielski
Jan A. Gaj
Piotr Goldstein
Tomasz Hofmokl
Andrzej Hryniewicz
Wiesław A. Kamiński
Marta Kicińska-Habior

Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Zdzisław Pogoda

Feliks Przytycki
Michał Różycka
Konrad Rudnicki

Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Andrzej Woszczyk

Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Anna Rudnik

Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Piotr Zalewski

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-41(-2) wewn. 21

PAWELST@MIMUW.EDU.PL
Wydrukowano

w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRME AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena
jednego numeru w 1997 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
cena numeru w 1997 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje
dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1997 r. wynosi 7 zł 50 gr.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe
„Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa
egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej.
Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A.
XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa,
ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰.
Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem
zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.

5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

	krajową	ze zleceniem za granicę	
	5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
	5 III	20 II	na II kwartał,
	5 VI	20 V	na III kwartał,
	5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,
realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem
otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.
Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71
wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także
tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.

O zbieżności ciągów sum Riemanna, wzorach Stirlinga, Wallisa i...

Grzegorz RZĄDKOWSKI

W niniejszym artykule proponujemy Czytelnikom ciekawy i stosunkowo prosty dowód wzorów Stirlinga i Wallisa.

Po przebrnięciu przez niezbędne przygotowania techniczne otrzymamy nie tylko obie sławne równości, ale też swego rodzaju maszynę do produkowania innych, podobnych.

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$.

Podzielmy ten przedział na n równych części punktami

$x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). Suma Riemanna funkcji f , dana wzorem

$$(1) \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

to suma pól prostokątów o wysokościach $f(x_k)$ i jednakowych

podstawach $\frac{b-a}{n}$. Gdy $f > 0$, suma (1) przybliża pole figury ograniczonej od góry wykresem funkcji $f(x)$, od dołu osią x -ów,

a z boków prostymi $x = a$ i $x = b$. Gdy $n \rightarrow \infty$, to granicą ciągu sum

Riemanna jest właśnie owo pole, czyli całka $\int_a^b f(x) dx$.

Zastanówmy się, jak szybko ciąg sum Riemanna zmierza do swojej

granicy. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ ma na przedziale $[a, b]$ ciągłą

pochoďną (a na końcach przedziału, czyli w punktach $x = a$ i $x = b$,

ma pochodne jednostronne). Różnicę między całką a sumą Riemanna

możemy zapisać następująco:

$$(2) \quad \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) dx.$$

Oznaczmy przez t_k środek przedziału $[x_{k-1}, x_k]$ (tzn. niech

$t_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$) i zastosujmy wzór na całkowanie przez części do

każdej z całek po prawej stronie (2), by po nietrudnym rachunku

otrzymać

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k)) dx &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k)' (f(x) - f(x_k)) dx = \\ &= \frac{b-a}{2n} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Po zsumowaniu względem k i pomnożeniu obydwu stron przez n

otrzymujemy

$$\begin{aligned} n \left(\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right) &= \\ &= \frac{b-a}{2} (f(a) - f(b)) - n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k) f'(x) dx. \end{aligned}$$

Dyski protoplanetarne

Michał RÓŻYCZKA

Współczesna teoria ewolucji układów planetarnych opiera się na założeniu, iż powstają one jednocześnie ze swymi gwiazdami centralnymi z gęstych obłoków materii międzygwiazdowej, w których nad wszystkimi pozostałymi siłami przeważały w pewnym momencie siły samograwitacji. Założenie to ma dziś mocną podstawę obserwacyjną. Po pierwsze, na gęste obłoki zbudowane z cząsteczek wodoru oraz tlenu węgla i innych związków chemicznych (tzw. obłoki molekularne) przypada ponad połowa masy ośrodka międzygwiazdowego (budulca na gwiazdy i planety jest więc w naszej Galaktyce wystarczająco dużo). Po wtóre, najgęstsze obłoki molekularne (a więc te, w których siły samograwitacji są najsilniejsze) mają masy porównywalne z masami gwiazd. Po trzecie wreszcie, młode gwiazdy występują wyłącznie w obłokach molekularnych lub w ich bezpośrednim sąsiedztwie.

W najgęstszych obłokach obserwuje się ruchy, które mogą być zinterpretowane jako obrót wokół dobrze określonej osi. Zgodnie z teorią, samograwitacyjne kurczenie się (tzw. kolaps) obłoku obdarzonego ruchem obrotowym prowadzi do powstania niewielkiego, stacjonarnego obiektu centralnego otoczonego rozległym dyskiem (tzw. dyskiem akrecyjnym). Wnętrze dysku jest również niemal stacjonarne (wszelkie ruchy poza ruchem obrotowym wokół obiektu centralnego odbywają się z prędkościami dużo mniejszymi niż lokalna prędkość orbitalna). Faza kolapsu jest bardzo krótka, trwa bowiem nie więcej niż 10^5 lat.

Uformowany już dysk podlega dalszej powolnej ewolucji, w której trakcie znajdująca się w nim materia częściowo osiada na obiekcie centralnym (proces ten nosi nazwę akrecji), częściowo zaś jest wywiewana w przestrzeń międzygwiazdową. Podczas trwającej kilka milionów lat fazy akrecji centralny obiekt dysku przekształca się w protogwiazdę, która od zwykłej gwiazdy różni się jedynie tym, iż w jej wnętrzu nie zachodzą jeszcze reakcje jądrowe. Jednocześnie w całym dysku z pierwiastków i związków chemicznych, które w macierzystym obłoku znajdowały się w stanie gazowym, powstają ziarna pyłowo-łodowe. Pod wpływem grawitacji ziarna te przemieszczają się następnie w pobliżu płaszczyzny równikowej dysku.

Jeśli chaotyczne ruchy składowej gazowej dysku (turbulencja) nie są zbyt silne, wędrownka ziaren jest procesem bardzo szybkim: na dotarcie do płaszczyzny

równikowej ziarna (nawet te powstałe tuż przy powierzchni dysku) potrzebują nie więcej niż stu lat. W płaszczynie równikowej wykształca się bardzo cienki dysk pyłowy, którego grubość może być nawet stokrotnie mniejsza od grubości dysku gazowego. Dysk o tak znikomej grubości wykazuje naturalną tendencję do rozpadu na fragmenty o masach rzędu 10^{15} kg, które pod wpływem samograwitacji w ciągu paru tysięcy lat skupiają się w planetozymale – obiekty o rozmiarach kilkudziesięciu kilometrów. Jeśli natomiast turbulencja jest silna (to znaczy: jeśli prędkości ruchów chaotycznych są porównywalne z prędkością dźwięku), cienki dysk pyłowy nie wykształca się. W takim przypadku planetozymale powstają wskutek przypadkowego zlepiania się ziaren pyłu chaotycznie krążących po całej objętości dysku, czas zaś potrzebny do ich utworzenia jest znacznie dłuższy i wynosi około stu tysięcy lat.

W toku dalszej ewolucji dysku nieelastyczne zderzenia między planetozymalami prowadzą do powstania protoplanet. Trwająca od dziesięciu do kilkuset milionów lat faza powstawania protoplanet jest najdłuższą z faz ewolucji dysku protoplanetarnego. Planetozymale, które przetrwały ją w nienaruszonym stanie, mogą być obserwowane w uformowanym już układzie planetarnym jako komety lub planetoidy.

Jak zatem widać, według współcześnie rozwijanej teorii dysk protoplanetarny jest kluczowym ogniwem w łańcuchu przemian prowadzących od obłoku materii międzygwiazdowej do otoczonej planetami gwiazdy. Pięknym potwierdzeniem tych teoretycznych przewidywań są prowadzone od kilku lat obserwacje dysków protoplanetarnych, którymi zajmujemy się w dalszej części tego artykułu.

Obecność dysku przy młodej gwiazdzie lub protogwiazdzie najłatwiej jest wykryć prowadząc obserwacje w podczerwieni. Objawia się on jednak wtedy nie jako obiekt o określonym kształcie i rozmiarach, lecz tylko jako „garb” w podczerwonej części widma (rys. 1). Promieniowanie podczerwone po części powstaje w samym dysku kosztem energii grawitacyjnej gazu i pyłu opadającego na ciało centralne, po części zaś jest przetworzonym promieniowaniem ciała centralnego. W miarę wyczerpywania się gazu i pyłu podczerwony garb maleje aż do zupełnego zaniku w widmie dojrzałej gwiazdy z całkowicie już uformowanym układem planetarnym.

Obserwacje w podczerwieni są wymownym, lecz jednak tylko pośrednim dowodem istnienia dysków protoplanetarnych. Dzięki obserwacjom prowadzonym w zakresie widzialnym (przede wszystkim za pomocą

Teraz przechodzimy do granicy po obu stronach poprzedniej równości, wykorzystując zależność

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - t_k) f'(x) dx = 0.$$

(Czytelnik spróbuje samodzielnie udowodnić, że tak istotnie jest przy założeniu ciągłości f' w $[a, b]$.) Końcowy efekt naszych przygotowań technicznych to wzór

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right) = \frac{b-a}{2} (f(a) - f(b)).$$

Podamy teraz kilka jego interesujących zastosowań. Weźmy pod uwagę funkcję $f(x) = \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x}$ i określmy jej wartości na całym przedziale $[0, 1]$, kładąc $f(0) = \ln \frac{\pi}{2}$. Tak określona funkcja jest ciągła na przedziale $[0, 1]$. Czytelnik zechce sprawdzić, że f ma na $[0, 1]$ również ciągłą pierwszą pochodną. Suma Riemanna funkcji f ma postać

$$(4) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \left[\ln \left(\sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \dots \sin \frac{n\pi}{2n} \right) - \ln \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \dots \frac{n}{n} \right) \right].$$

W dalszym ciągu wykorzystamy dwa znane wzory, które Czytelnik (o ile ich nie zna) może spróbować udowodnić sam lub wyszperać w różnych zbiorach zadań z analizy matematycznej, np. [1] i [2]. Oto one:

$$(5) \quad \sin \frac{\pi}{2n} \sin \frac{2\pi}{2n} \sin \frac{3\pi}{2n} \dots \sin \frac{n\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

Stosując je do wyrażenia całki funkcji f oraz jej sumy Riemanna, dostaniemy zależności

$$(6) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} - \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \frac{\ln n}{2n} - \frac{n-1}{n} \ln 2 - \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n},$$

$$(7) \quad \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = 1 - \ln 2.$$

Obie powyższe równości wstawiamy do wzoru (3) i spokojnie rachując mamy kolejno:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \ln 2 - \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n} + \frac{n-1}{n} \ln 2 + \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{2} \ln n - \ln 2 + \ln \frac{n!}{n^n} - \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{e^n n!}{\sqrt{2\pi n} n^n} \right) = 0$$

lub inaczej

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}} = 1.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór Stirlinga (8) wielokrotnie wykorzystywany w różnych artykułach w *Delcie* (np. na str. 4).

Zastosujmy teraz nasz wzór (3) do funkcji $f(x) = \ln \frac{(1+x) \sin \frac{\pi}{2} x}{x}$ określonej na przedziale $[0, 1]$ (z dodatkową umową, że $f(0) = \ln \frac{\pi}{2}$).

Funkcja ta, podobnie jak poprzednia, jest na przedziale $[0, 1]$ ciągła wraz ze swą pochodną. Bez wdawania się w zbędne szczegóły rachunkowe (Czytelnik w razie potrzeby zdoła je niewątpliwie samodzielnie uzupełnić) powiemy tylko, że suma Riemanna f i jej całka oznaczona wyglądają następująco:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \ln \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} - \frac{1}{n} \ln \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x} dx + \int_0^1 \ln(1+x) dx = \ln 2,$$

wzór (3) zaś po kosmetycznych zabiegach przybierze tym razem postać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi}.$$

Powyższy wzór to jedna z postaci znanego wzoru Wallisa wykorzystywanego często w podręcznikowych dowodach wzoru Stirlinga (patrz np. [3]). Tutaj otrzymaliśmy oba wzory niezależnie.

Zastosujmy jeszcze z ciekawości wzór (3) do kilku innych funkcji.

Weźmy, na przykład, $f(x) = \ln \frac{(2+x) \sin \frac{\pi}{2} x}{x}$ określoną na przedziale $[0, 1]$ z $f(0) = \ln \pi$. Rozumowanie podobne do poprzednich prowadzi w tym przypadku do wzoru

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{3n} n! (2n)!}{\sqrt{n} 2^{2n+1} (3n)!} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Dla $f(x) = \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x(1+x)}$ na przedziale $[0, 1]$ z $f(0) = \ln \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy:

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} (2n)!}{2\sqrt{n\pi} (2n)^{2n}} = 1,$$

czyli wzór Stirlinga (8), w którym podstawiono $2n$ zamiast n .

Dla $f(x) = \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{x(2+x)}$ na przedziale $[0, 1]$ z $f(0) = \ln \frac{\pi}{4}$ mamy z kolei

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n} 2^{2n} (3n)! (n)!}{\sqrt{3n\pi} 3^{3n} (n)^{2n} (2n)!} = 1.$$

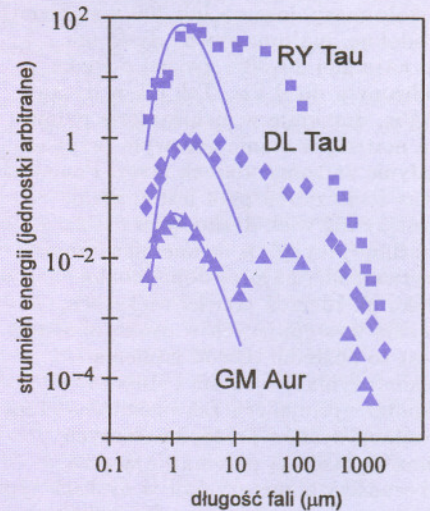
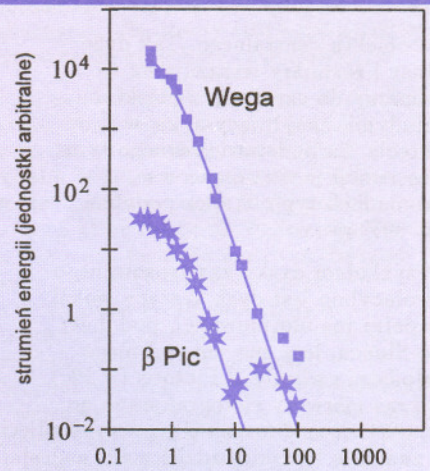
Dzieląc stronami (10) przez (9) otrzymujemy jeszcze jeden interesujący wzór

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (3n)! n!}{3^{3n} ((2n)!)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Widać, że wyżej opisany sposób prowadzi do uzyskania wielu ciekawych i użytecznych wzorów. Wyprowadzenie dalszych pozostawiamy inwencji Czytelnika.

Literatura:

- [1] J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*. WNT, Warszawa 1993.
- [2] L. Jeśmanowicz, J. Łoś, *Zbiór zadań z algebry*. PWN, Warszawa 1972.
- [3] K. Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*. PWN, Warszawa 1979.



Rys. 1. Podczerwone nadwyżki w widmach układów protoplanetarnych świadczące o obecności dysków akrecyjnych. Liniami ciągłymi oznaczono widma samych obiektów centralnych. teleskopu Hubble'a) oraz w zakresie radiowym przez radioteleskopy pracujące na falach milimetrowych mamy również dowody bezpośrednie: od paru lat niektóre (nieliczne na razie) dyski możemy po prostu oglądać. Piękną kolekcję zdjęć dysków (uzyskaną za pomocą teleskopu Hubble'a) krążących wokół młodych gwiazd i protogwiazd w gromadzie „Trapez” (gwiazdozbiór Oriona) możemy obejrzeć na okładkach. Typowa masa takiego dysku jest zbliżona do tzw. minimalnej masy mgławicy słonecznej, którą otrzymuje się poprzez „uzupełnienie” pierwiastków występujących w naszym układzie planetarnym tak, by ich proporcje wagowe odpowiadały proporcjom obserwowanym na Słońcu, i która wynosi $0,01 M_{\odot}$. Promienie dysków wahają się od kilkudziesięciu do kilkuset jednostek astronomicznych (jedna j.a. jest równa średniemu promieniowi orbity Ziemi). W niektórych przypadkach rozrzedzona materia gazowa i pyłowa bywa jednak obserwowana aż do odległości 2000 j.a.

od obiektu centralnego. Tak duże masy i rozmiary wskazują na to, iż mamy do czynienia z obiektami młodymi, znajdującymi się w fazie akrecji. Na podstawie różnego typu obserwacji można oszacować, iż w młodych gromadach typu Trapez podobne dyski ma 70–80% gwiazd.

Przykładem dysku zaawansowanego ewolucyjnie jest dysk krążący wokół w pełni już uformowanej, podobnej do Słońca, lecz znacznie od niego młodszej gwiazdy β Pictoris (β Pic). Po raz pierwszy sfotografowano go w 1984 r., niedawno zaś jego nowe zdjęcia o znacznie lepszej rozdzielczości nadesłał teleskop Hubble'a. Całkowita masa dysku β Pic nie przekracza $10^{-3} M_{\odot}$ (około masy Jowisza lub 300 mas Ziemi). Podobne, mało masywne dyski ma co najmniej 20–30% gwiazd o wieku zbliżonym do β Pic. Tak jak w dysku β Pic, dominuje w nich materia pyłowa; na materię w stanie gazowym przypada jedynie znikomy ułamek masy. Ponieważ czas życia ziaren pyłu jest znacznie krótszy niż wiek dysku typu β Pic, musimy przyjąć, iż są one nieustannie wytwarzane, najprawdopodobniej wskutek zderzeń jakichś większych, licznie występujących w dysku obiektów. Jest to pośredni dowód istnienia planetozymali, a zatem i słuszności hipotez opisujących zaawansowane etapy ewolucji dysków protoplanetarnych. Inną wskazówką przemawiającą za obecnością planetozymali w dyskach typu β Pic są nieregularnie powtarzające się rozbłyski w liniach widmowych niektórych pierwiastków, jakie zaobserwowano w samej β Pic. Jak wynika z obliczeń teoretycznych, takie właśnie rozbłyski towarzyszą zderzeniom planetozymali z gwiazdą centralną. Mamy też powody, by przypuszczać, iż dysk β Pic wszedł już w fazę formowania planet. W swej wewnętrznej części jest on mianowicie wyraźnie wygięty – w taki sposób, jakby podlegał na zakłóceniom grawitacyjnym generowanym przez okrążający gwiazdę centralną obiekt o masie zbliżonej do masy Jowisza.

Fakt, iż starsze dyski są wyraźnie mniej masywne od młodych, jednoznacznie wskazuje na działanie przewidzianych przez teorię procesów prowadzących do utraty masy z dysku. W swej obecnej postaci teoria nie jest jednak w stanie ani przewidzieć tempa utraty masy, ani nawet jednoznacznie wskazać procesów za tę utratę odpowiedzialnych. Zgodnie z obserwacjami etap ewolucji, na którym dochodzi do intensywnej utraty masy, przypada na początek fazy akrecji. Jest to etap niezmiernie ciekawy z teoretycznego punktu widzenia i bardzo ważny z punktu widzenia ewolucji układu planetarnego (bez znaczącej utraty masy z dysku obiekt

Probabilistyka i wybory

W *EPSILONIE* (70) w *Delcie* 1/1997 można przeczytać obszerny tekst Krzysztofa Ciesielskiego o niebezpieczeństwach płynących z nieumiejętnego interpretowania danych statystycznych. Podane przykłady dotyczą m.in. ostatnich wyborów prezydenckich; dorzucmy do nich swoje trzy grosze.

Z drugą turą wspomnianych wyborów wiąże się probabilistyczna ciekawostka. Otóż pewien znany polityk – dla krótkości nazwijmy go X – stwierdził, że nie widzi powodu, by brać udział w drugiej turze wyborów, skoro prawdopodobieństwo, że to właśnie jego głos rozstrzygnie o wyniku, jest równe $1/17\,000\,000$. Co X miał na myśli? Po chwili namysłu stwierdzamy, iż musiał przyjąć, że wyborcy są nierozróżnialni. Dla polityka to bardzo naturalne założenie – w ostatecznym rachunku jest mu bowiem wszystko jedno, czy wygrywa głosami profesorów, urzędników administracji średniego szczebla, czy też np. gospodyń wiejskich i cyklistów. A skoro wyborcy są nierozróżnialni, to drugie równie naturalne założenie mówi, że wszystkie wyniki drugiej tury wyborów mają równe prawdopodobieństwa. Gdy wyborców jest 17 mln (taką mniej więcej liczbę głosujących przewidywano przed drugą turą), to wyników jest $17\,000\,001$. Zatem istotnie, prawdopodobieństwo, że obaj kandydaci otrzymają równe liczby głosów, a wybory będą nierozstrzygnięte (o ile X nie pofatyguje się na spacer do urny), jest przy powyższych założeniach równe $1/17\,000\,000$ z dokładnością do czterdziestu miejsc po przecinku.

Dla większości z nas założenie o nieodróżnialności wyborców jest jednak dość absurdalne. W końcu nieomal wszystkim żona nie myli się z teściową, a własne dziecko z jego nauczycielką matematyki. Są nawet tacy, którym polityk X nie myli się z politykiem Y (choć nie wiem, czy nadal można tu mówić o *większości*).

Przyjmijmy przeto inny model probabilistyczny: każdy z 17 mln wyborców oddaje głos niezależnie od pozostałych, wybierając z prawdopodobieństwem $1/2$ jednego z dwóch kandydatów. Mamy więc do czynienia ze schematem 17 mln prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu (albo, jak będą chcieć niektórzy, porażki) równym $1/2$. Jakie teraz jest prawdopodobieństwo p zdarzenia polegającego na tym, że obaj kandydaci otrzymają równe liczby głosów? Jak wie tzw. każdy młody człowiek,

$$p = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}, \quad \text{gdzie } n = 17\,000\,000 : 2 = 8\,500\,000.$$

No dobrze, ale ILE to właściwie jest? Gdy do przybliżenia silni wykorzystamy przypomniany na str. 2 wzór Stirlinga, to okaże się, że

$$p = 0,000193515\dots \simeq 0,0002.$$

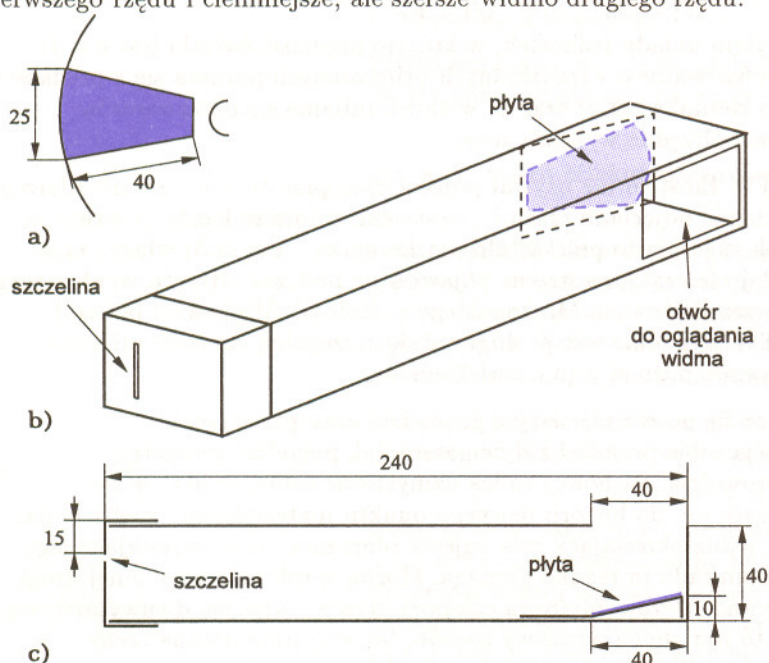
Wynik jest więc zaskakująco duży (zalecam przepytanie tych znajomych, którzy wiedzą dobrze, co to schemat Bernoulliego; dla mnie było to doświadczenie ciekawe pod względem zarówno różnorodności uzyskanych odpowiedzi, jak i stopnia ich nietrafności). Gdy nieco skomplikujemy nasz model i przyjmijmy, że liczba wyborców należy do przedziału – powiedzmy – $(16 \cdot 10^6, 18 \cdot 10^6)$ i może być z równym prawdopodobieństwem parzysta lub nieparzysta, to p , oczywiście, zmaleje, ale tylko około dwóch razy. Wynik będzie więc i tak ponad tysiącrotnie większy od postulowanego przez X -a.

A jak to jest *naprawdę*? Któż to wie... Kłopoty ze stosowaniem rachunku prawdopodobieństwa polegają m.in. na tym, że na takie pytania żaden odpowiedzialny matematyk nie odpowie w wiążący sposób. Jeśli zaś odpowiada, to znaczy, że zamiast matematyką chwilowo zajęł się filozofią.

Spektroskop za złotówkę

Płyta kompaktowa działa jak siatka dyfrakcyjna. Gołym okiem widać na niej „tęcze” powstające w świetle odbitym.

Bardzo łatwo zrobić sobie z takiej płyty spektroskop. Wystarczy wyciąć z niej piłką do metalu cząstkę (rys. a) i umieścić ją w pudełku wykonanym z cienkiej tekturki lub grubego czarnego kartonu, tak jak to przedstawiają rysunki b i c. Pudełko sklejaemy lub spinamy zszywaczem. Kawalek płyty przylepimy do podłoża – za brzeżki! – cienkimi paseczkami taśmy klejącej. Szczelinę – na przykład o szerokości 0,5 mm – można wyciąć w tekturce żyletką lub ostrym nożem. Wygodnie umieścić ją na dodatkowej pokrywce – w ten sposób można wykonać kilka wymiennych szczelin o różnych szerokościach (rys. b). Jeżeli zachować w przybliżeniu wymiary przedstawione w milimetrach na rysunku c, przez otwór będzie można oglądać dwa widma: jaśniejsze, mniej rozciągnięte widmo pierwszego rzędu i ciemniejsze, ale szersze widmo drugiego rzędu.



Ponieważ przeceniona płyta kompaktowa kosztuje poniżej 10 złotych, a można z niej zrobić 10 takich spektroskopów, pojedynczy egzemplarz kosztowałby właśnie około jednej złotówki. Stąd – może nie do końca uczciwy – tytuł.

W warunkach domowych można za pomocą naszego spektroskopu przeprowadzić następujące badania:

1. Obejrzeć widmo ciągłe żarówki. Najwygodniej użyć żarówki matowej albo patrzeć na żarówkę zwykłą przez torebkę foliową – aby rozmazać obraz włókna.
2. Obejrzeć widmo Słońca – także patrząc na nie przez folię plastikową. W widmie drugiego rzędu widać ślady prążków Fraunhofera.
3. Obejrzeć widmo liniowe świetlówki.
4. Zbadać absorpcję kolorowych celofanów. Jako źródła użyjemy matowej żarówki, a badane próbki umieszczamy przed szczeliną przyrządu. Można przy tym zasłaniać tylko połowę szczeliny, aby móc porównać widmo światła przechodzącego przez absorber z widmem odniesienia.

Nasz spektroskop jest, niestety, dość ciemny i nie nadaje się do oglądania widma neonówki czy typowych szkolnych rurek Geisslera.

Jerzy GINTER

centralny najprawdopodobniej nie mógłby przekształcić się w gwiazdę). Jak za chwilę zobaczymy, dla obserwatora zewnętrznego jest to także etap bardzo malowniczy.

W wielu (prawdopodobnie we wszystkich) przypadkach wpływ masy z dysku prowadzi do uformowania się dwóch wąskich (skolimowanych) strug gazu, które ciągle jeszcze nie mają polskiej nazwy i które chcąc nie chcąc musimy za literaturą fachową nazywać dżetami (ang. *jets*). Najwyraźniej widać to w układzie protoplanetarnym oznaczonym symbolem HH30 (fot. na przedniej okładce). Dzięki jego obserwacjom wiadomo, iż dżety powstają w wewnętrznych częściach dysków, blisko obiektu centralnego. Na ile blisko – tego na razie nie wiemy; w układzie HH30 na pewno bliżej niż 15 j.a. Wiadomo również, że mechanizm zasilający dżety nie przez cały czas pracuje z jednakową wydajnością; zamiast ciągłej strugi materii (lub na jej tle) obserwujemy bowiem szereg mgławicowatych tworów nazywanych w fachowej literaturze węzłami (ang. *knots*).

Najjaśniejsze węzły niektórych ze znanych dziś dżetów zostały zaobserwowane już prawie pół wieku temu przez George'a Herbiga i Guillermo Haro i otrzymały nazwę obiektów Herbiga-Haro (w skrócie – obiektów HH). Wówczas nie zdawano sobie jednak sprawy ani z istnienia dżetów, ani nawet z tego, że obiekty HH są ściśle związane z młodymi gwiazdami. Tradycyjne nazwy węzłów bywają dziś rozciągane na całe dżety, a nawet, jak w przypadku HH30, na całe układy protoplanetarne.

Porównując zdjęcia wykonane w odstępie co najmniej kilku miesięcy można zaobserwować przemieszczanie się węzłów. Stąd oraz z obserwacji spektroskopowych wiadomo, iż gaz płynący w dżecie oddala się od centrum dysku z prędkościami dochodzącymi do paruset km/s (bliskimi prędkości ucieczki z powierzchni obiektu centralnego). Dzięki takim prędkościom dżety i stowarzyszone z nimi łańcuszki węzłów – obiektów Herbiga-Haro – osiągają bardzo duże odległości od centrów swych macierzystych dysków (do 9 lat świetlnych w przypadku dżetu HH11; przypomnijmy, iż jest to kilkaset razy więcej niż promień dużego dysku protoplanetarnego). Niestety, ciągle jeszcze nie wiemy, co rozpędza dżety do tak dużych prędkości ani co sprawia, iż są one tak wąskie. Najprawdopodobniej w obu przypadkach istotną rolę odgrywają pola magnetyczne. Obserwacje dżetów, w których widać więcej szczegółów niż w HH30 (np. HH34 i HH47 pokazanych na fotografiach na okładce), pozwalają jednak już dzisiaj na zidentyfikowanie takich cech przepływu gazu, które w niedalekiej perspektywie mogą pomóc w rozwiązaniu obu zagadek.

Geometria Minkowskiego

Wojciech KOPCZYŃSKI



Za datę powstania szczególnej teorii względności (STW) przyjmuje się rok 1905, w którym ukazał się artykuł Alberta Einsteina *Zur Elektrodynamik der bewegter Körper* – w tłumaczeniu polskim *O elektrodynamice ciał w ruchu*. W artykule tym została zawarta w zasadzie cała treść fizyczna STW, zwłaszcza zaś zależność pomiarów czasu i długości od obserwatora uwidoczniła w efektach dylatacji czasu i skrócenia długości Lorentza–Fitzgeralda. Te i inne efekty relatywistyczne okazały się konsekwencjami *przekształceń Lorentza*, łączących współrzędne czasoprzestrzenne (t, x, y, z) jednego obserwatora inercyjnego ze współrzędnymi (t', x', y', z') innego takiego obserwatora. (Przez obserwatora inercyjnego rozumiemy takiego obserwatora, dla którego ruchy swobodne są ruchami prostoliniowymi i jednostajnymi.) Przekształcenia Lorentza mają postać

$$t' = \frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

przy czym: użyłem układu jednostek, w którym prędkość światła jest $c = 1$; przyjąłem, że obserwator o współrzędnych primowanych porusza się z prędkością V w dodatnim kierunku osi x ; oraz że w chwili mijania się obserwatorów wszystkie ich współrzędne wynoszą zero.

Formułując STW Einstein nie używał pojęcia czasoprzestrzeni – zbioru zdarzeń, operował oddzielnie pojęciami czasu i przestrzeni, mimo że każdy obserwator inercyjny – jak sugerują to przekształcenia Lorentza – ma swój własny czas i przestrzeń. Pojęcie czasoprzestrzeni pojawiło się podczas odczytu wygłoszonego w 1908 roku przez Hermanna Minkowskiego w Kolonii. Minkowski pokazał, że do opisu STW wygodnie jest posługiwać się szczególną czterowymiarową geometrią, nazwaną później jego nazwiskiem.

Osoby stykające się po raz pierwszy z geometrią czasoprzestrzeni często nie umieją sobie poradzić z dylematem: jak pogodzić geometrię z czterowymiarowością. Fachowcy radzą uzmysłowić sobie, że aby opisać zdarzenie należące np. do historii pewnego punktu materialnego, trzeba podać cztery liczby – jedną określającą czas zajścia zdarzenia i trzy określające jego położenie. Laikom rada ta rzadko pomaga. Można spróbować więc innej drogi i zamiast opisywać czterowymiarową czasoprzestrzeń, zająć się dwuwymiarową *czasopróstą*. I to jest chyba właściwy sposób, bo wszystkie istotne cechy 4-wymiarowej geometrii Minkowskiego widoczne są w jej 2-wymiarowym wariacie. Zajmę się więc geometrią czasoprosłej, tj. zbiorem zdarzeń należących do historii pewnej prostej spoczywającej względem pewnego obserwatora inercyjnego. Na czasoprosłej z przekształceń Lorentza pozostaje to, co istotne,

$$t' = \frac{t - Vx}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2}},$$

a o współrzędnych y i z można zapomnieć. Do sparаметryzowania tych przekształceń wygodnie jest użyć – zamiast prędkości V – *kąta hiperbolicznego* ψ , określonego wzorem

$$\sinh \psi = \frac{V}{\sqrt{1 - V^2}}.$$

Stosując wzory trygonometrii hiperbolicznej $\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1$ i $\tanh \psi = \sinh \psi / \cosh \psi$ szybko otrzymujemy

$$\cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}}, \quad \tanh \psi = V,$$

a przekształcenia Lorentza przybierają postać

$$t' = \cosh \psi \cdot t - \sinh \psi \cdot x, \quad x' = -\sinh \psi \cdot t + \cosh \psi \cdot x.$$

Wzory te jako żywo przypominają wzory na obrót kartezjańskiego układu współrzędnych wokół jego początku. Aby się o tym przekonać, należy podstawić $\psi = i\phi$ oraz $t = i\tau$. Korzystając wtedy z tożsamości $\cosh i\phi = \cos \phi$ oraz $\sinh i\phi = i \sin \phi$, otrzymujemy



Rozwiązanie zadania M 813.

Niech $w_i = \frac{v_i}{|v_i|}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

W ten sposób sprowadzamy zadanie do przypadku wektorów o długości jednostkowej. Niech A_i oznacza koniec wektora v_i o początku w punkcie O . Z twierdzenia cosinusów wnioskujemy, że

$$|A_i A_j| \geq \sqrt{|OA_i|^2 + |OA_j|^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ dla } i \neq j.$$

Zatem kule o środkach A_1, \dots, A_n i promieniach $\sqrt{2}/2$ mają rozłączne wnętrza. Z drugiej strony są one zawarte w kuli o środku O i promieniu $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc z porównania objętości wynika, że

$$\frac{4}{3}\pi \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \geq n \cdot \frac{3}{4}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3,$$

czyli

$$n \leq (\sqrt{2} + 1)^3 = 5\sqrt{2} + 7 < 15.$$

To oszacowanie dalekie jest od optymalnego. Jak je poprawić?

Przypominamy, że

$$\sinh \psi = \frac{1}{2} (e^\psi - e^{-\psi})$$

natomiast

$$\cosh \psi = \frac{1}{2} (e^\psi + e^{-\psi}).$$

$$\tau' = \cos \phi \cdot \tau - \sin \phi \cdot x, \quad x' = \sin \phi \cdot \tau + \cos \phi \cdot x,$$

czyli wzory na obrót.

Kąt hiperboliczny ψ jest bardzo wygodnym sposobem parametryzacji przekształceń Lorentza. Przy składaniu przekształceń Lorentza kąty hiperboliczne dodają się – podobnie jak dodają się zwykłe kąty przy składaniu obrotów. W ten sposób kąt hiperboliczny przejmuje rolę prędkości z fizyki przedrelatywistycznej. Jeśli mamy trzech obserwatorów, obserwator 2 porusza się względem obserwatora 1 z prędkością $V_1 = \operatorname{tgh} \psi_1$, a obserwator 3 porusza się względem obserwatora 2 z prędkością $V_2 = \operatorname{tgh} \psi_2$, to prędkość obserwatora 3 względem obserwatora 1 dana jest w fizyce przedrelatywistycznej wzorem $V = V_1 + V_2$, a w fizyce relatywistycznej uwikłanym wzorem $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Geometria Minkowskiego przejmuje z geometrii euklidesowej pojęcia afiniczne, a więc pojęcia punktu, prostej i prostych równoległych (które nigdzie się nie przecinają). Różni się zaś od geometrii euklidesowej pojęciami metrycznymi, a więc takimi jak długość odcinka (wektora), pojęcie kąta między prostymi i twierdzenie Pitagorasa.

Warto zauważyć, że odpowiednikiem kwadratu wektora o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie (x, τ) , czyli

$$x^2 + \tau^2,$$

jest w geometrii Minkowskiego liczba

$$x^2 - t^2,$$

która zwana jest interwałem i która przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak ujemne. W związku z tym wektory dzielimy na: czasowe – dla których liczba ta jest ujemna, zerowe – dla których wynosi zero i przestrzenne – dla których jest dodatnia. Końce wektorów zerowych w czasoprzestrzeni leżą na tzw. prostych zerowych $x = \pm t$ (w czasoprzestrzeni zaś tworzą tzw. stożek Minkowskiego).

Mając już pojęcie kwadratu u^2 wektora u , można stworzyć pojęcie iloczynu skalarnego wektorów u i v , stosując wzór

$$2u \cdot v = (u + v)^2 - u^2 - v^2.$$

Wektory u, v , takie że $u \cdot v = 0$, nazywamy prostopadłymi. Łatwo zauważyć, że do wektora czasowego może być prostopadły tylko wektor przestrzenny, natomiast wektor zerowy jest prostopadły tylko do współliniowego z nim wektora zerowego (uwaga: wymiar = 2). Oś x jest prostopadła do osi t , a ponieważ wszyscy obserwatorzy inercjalni są równoprawni, więc dotyczy to także osi x' i t' . Gdy wykonasz rysunki tych osi posługując się przekształceniami Lorentza, Twoja euklidesowa intuicja powie Ci, że te stwierdzenia nie mogą być jednocześnie prawdziwe dla obu par osi. Chcąc wyczuć geometrię Minkowskiego, powinieneś więc częściowo odejść od euklidesowej intuicji.

Aby można było zbudować na czasoprzestrzeni trójkąt prostokątny, jedna z jego przyprostokątnych musi być czasowa, a druga przestrzenna. Skieruję wzdłuż tych przyprostokątnych osie t i x odpowiadające pewnemu obserwatorowi inercjalnemu. Przeciwnprostokątna może być czasowa, zerowa lub przestrzenna.

W przypadku gdy przeciwnprostokątna jest czasowa, można wzdłuż niej skierować oś t' pewnego obserwatora inercjalnego (rys. 1), a odpowiednik wzoru Pitagorasa przybierze postać $t'^2 = t^2 - x^2$. Na przeciwnprostokątnej jest $x' = 0$, więc przekształcenia Lorentza dają $x = Vt$, czyli

$$t' = \sqrt{1 - V^2} t < t.$$

Zatem ta forma wzoru Pitagorasa odpowiada efektowi dylatacji czasu: czas w układzie poruszającym się biegnie wolniej.

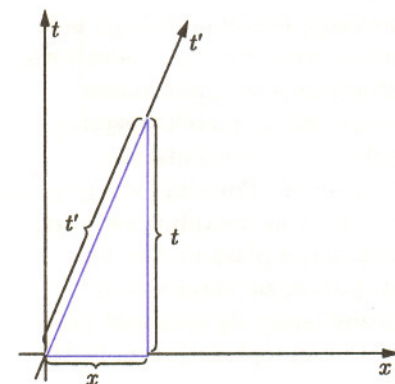
W przypadku gdy przeciwnprostokątna jest przestrzenna, można wzdłuż niej skierować oś x' pewnego obserwatora inercjalnego (rys. 2), a odpowiednik wzoru Pitagorasa przyjmie postać $x'^2 = x^2 - t^2$. Teraz na przeciwnprostokątnej $t = Vx$, czyli

$$x' = \sqrt{1 - V^2} x < x.$$

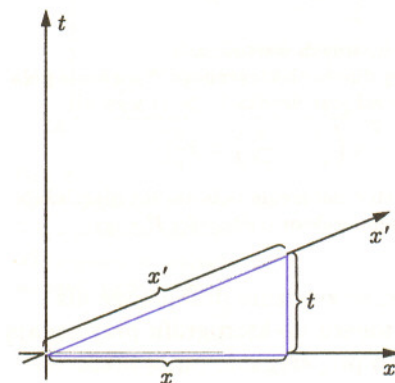
Zatem ta forma wzoru Pitagorasa odpowiada efektowi skrócenia Lorentza-Fitzgeralda: pręt poruszający się jest widziany jako krótszy.



Rozwiązanie zadania F 455. Ślady zostawiane przez gwiazdy są przecięciami stożków (powstałych przez obrót prostej przechodzącej przez środek układu optycznego i gwiazdę wokół osi równoległej do osi świata) z płaszczyzną błony fotograficznej. Przecięcie stożka i płaszczyzny może wyznaczać prostą, tylko jeżeli płaszczyzna zawiera oś symetrii stożka lub jeżeli stożek jest płaszczyzną, tzn. ma kąt rozwarcia π . W opisanym przypadku tylko druga możliwość wchodzi w grę (dlaczego?). W takim razie gwiazda musi leżeć na równiku niebieskim, tzn. musi mieć deklinację 0 stopni.



Rys. 1

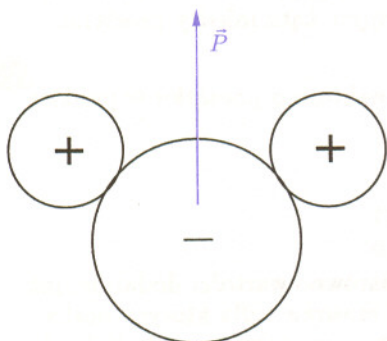


Rys. 2



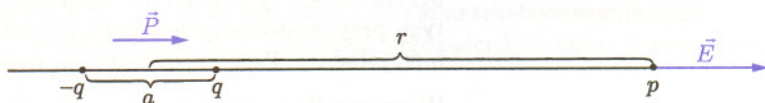
Zamki z piasku

Zapewne każdy choć raz, będąc dzieckiem, budował zamki z piasku na brzegu morza, jeziora lub rzeki. Wystarczy wypełnić piaskiem kubełek lub inny pojemnik, ostrożnie odwrócić go, a następnie postawić na ziemi i delikatnie podnieść. Piasek dość wiernie zachowa jego kształt. Potocznie nazywa się to stawianiem babek. Zamek można także formować za pomocą twardych przedmiotów, na przykład ściskając piasek dwiema listwami, lub rzeźbić go w ubitej pryzmie mokrego piasku. Pozostawienie zamku na pastwę Słońca i wiatru grozi jego zniszczeniem. Wysychając zacznie się rozsypywać. Można go uratować zwilżając jego powierzchnię. Budując malownicze fortece na plaży warto zastanowić się, co sprawia, że są one względnie trwałe.



Cząsteczka wody ma trwały moment dipolowy. Jest tak dlatego, że elektrony znajdują się bliżej jądra tlenu.

Spoistość ziaren mokrego piasku wynika z obecności ładunków elektrycznych na ich powierzchni oraz specyficznych własności wody. Nawet jeśli całkowity ładunek ziarna jest zerowy, może ono wytwarzać pole elektryczne w otaczającej je przestrzeni, jeśli na jego powierzchni znajdują się rozseparowane ładunki elektryczne. Pole dipola elektrycznego zmienia się z odległością jak $1/r^3$, podczas gdy pole coulombowskie zmienia się jak $1/r^2$, a więc pole dipola maleje szybciej. W przypadku mokrego piasku decydujące znaczenie ma obecność wody pomiędzy jego ziarnami. Z powodu swej specyficznej budowy cząsteczki wody mają trwały moment dipolowy, który oddziałuje z polem elektrycznym ziaren. Powoduje to zwiększenie się lepkości wody znajdującej się pomiędzy ziarnami piasku. Jeśli odległości między ziarnami są duże, rozdziela je szeroka warstwa wody, której cząsteczki w przeważającej części nie czują istnienia słabego pola elektrycznego – w takiej sytuacji ziarna piasku płyną wraz z wodą. Dodatkowo, na powierzchni mokrego piasku (na granicy z powietrzem) spójność ziaren jest zwiększana przez siły napięcia powierzchniowego. Kiedy piasek wysycha, znika woda znajdująca się między ziarnami, decydująca o jego spoistości. Ponadto ładunki przemieszczają się na powierzchni ziaren. Powstaje wtedy tzw. podwójna warstwa Helmholtza, w której jony dodatnie znajdują się bliżej, a ujemne dalej od powierzchni. Dzięki niej ziarna suchego piasku lekko się odpychają. Jeśli do wody dodamy nieco gliceryny, pojawi się ekranowanie ładunków znajdujących się na ziarnach i przez to zmniejszy się spoistość piasku. Paradoksalnie, im więcej gliceryny (a więc cieczy o dużej lepkości), tym będzie ona (tzn. spoistość piasku) mniejsza.



Układ dwóch ładunków o przeciwnych znakach, ale takich samych wartościach bezwzględnych q , rozsuniętych na odległość a , nosi nazwę dipola elektrycznego. Natężenie pola w punkcie p znajdującym się na osi dipola w odległości r od jego środka ($r \gg a$) wynosi:

$$E = \frac{q}{(r - \frac{a}{2})^2} - \frac{q}{(r + \frac{a}{2})^2} \approx q \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r^3} \right) - q \left(\frac{1}{r^2} - \frac{a}{r^3} \right) = \frac{2aq}{r^3},$$

a więc maleje szybciej niż pole coulombowskie. Dla dużych r natężenie pola zanika niezależnie od położenia punktu p . Momentem dipolowym \vec{P} nazywamy wektor o długości $P = qa$ skierowany od ujemnego do dodatniego ładunku.

Zapewne każdy z codziennego doświadczenia wie, że znacznie drobniejsze niż ziarna piasku cząsteczki kawy czy, na przykład, toneru do kserografu przyciągają się, nawet gdy są suche. Siły odpowiedzialne za to przyciąganie mają także elektryczną naturę, choć mechanizm tego zjawiska jest inny niż w przypadku mokrego piasku.

Zamki z piasku budował Krzysztof REJMER



Cztery sposoby obliczenia długości linii śrubowej

Zajmiemy się następującym pouczającym zadaniem.

Obliczyć długość linii określonej w sposób parametryczny równaniami

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = ct,$$

gdzie a, c to dodatnie stałe, natomiast $t \in [0, 6\pi]$.

Oto rozwiązanie, a raczej kilka różnych rozwiązań. Parametr t interpretujemy jako czas. Punkt (x, y, z) porusza się po walcu. Po upływie czasu t punkt znajdzie się w A na wysokości ct . Po upływie kolejnych 2π jednostek czasu punkt znajdzie się w B na wysokości $c(t + 2\pi)$. Stąd $AB = c2\pi$. Zatem zwoje spirali są odległe o $c2\pi$.

Pierwszy sposób. Rozcinamy walec wzdłuż linii PQ (patrz rys. 2). Powstaje prostokąt o podstawie długości $2\pi a$. Zwoje spirali przechodzą na odcinki, bo $\frac{ct}{a} = \frac{c}{a} = \text{const}$. Stąd wynika, że szukana długość linii śrubowej to

$$3\sqrt{4\pi^2 a^2 + 4\pi^2 c^2} = 6\pi\sqrt{a^2 + c^2}.$$

Drugi sposób. Wektor wodzący poruszającego się punktu ma postać

$$\vec{r}(t) = [a \cos t, a \sin t, ct].$$

Prędkość $\vec{v}(t)$ końca wektora w chwili t znajdujemy różniczkując $\vec{r}(t)$ względem t ,

$$\vec{v}(t) = [-a \sin t, a \cos t, c].$$

Zatem szybkość końca wektora $\vec{r}(t)$ w chwili t wynosi

$$v(t) = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + c^2} = \text{const}.$$

Teraz szukaną długość linii śrubowej obliczamy ze wzoru

$$\text{Droga} = \text{czas} \cdot \text{szybkość} = 6\pi\sqrt{a^2 + c^2}.$$

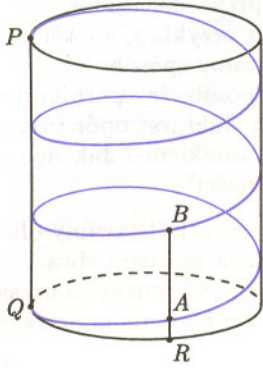
Trzeci sposób. Prędkość punktu w chwili t , tj. w punkcie A , jest wypadkową prędkości obrotowej i prędkości podnoszenia.

Mamy (patrz rys. 3) $\vec{AK} = [a, c]$ i $AK = \sqrt{a^2 + c^2} = \text{const}$. Stąd, jak przed chwilą,

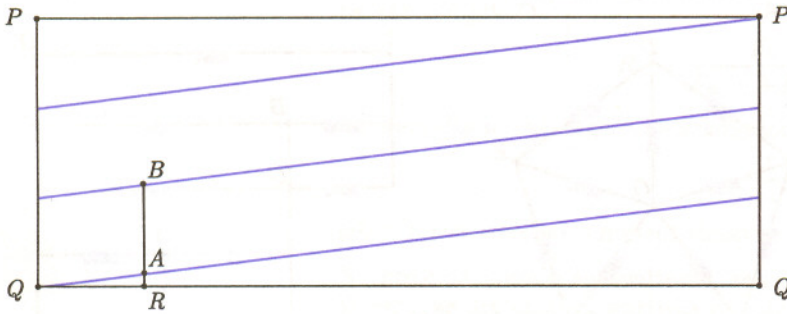
$$\text{Droga} = \text{czas} \cdot \text{szybkość} = 6\pi\sqrt{a^2 + c^2}.$$

Czwarty sposób. Długość linii obliczamy całkując szybkość poruszającego się punktu.

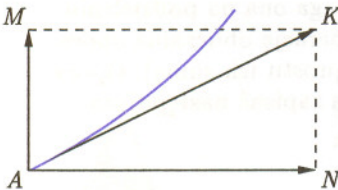
$$\begin{aligned} \text{Długość linii} &= \int_0^{6\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \\ &= \int_0^{6\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + c^2} dt = \\ &= \int_0^{6\pi} \sqrt{a^2 + c^2} dt = 6\pi\sqrt{a^2 + c^2}. \end{aligned}$$



Rys. 1. Długość łuku QR jest równa at , $RA = ct$, $AB = c \cdot 2\pi$.



Rys. 2



Rys. 3.
 \vec{AM} – prędkość podnoszenia,
 \vec{AN} – prędkość obrotowa,
 \vec{AK} – prędkość wypadkowa,
 szybkość podnoszenia

$$AM = \frac{ct}{t} = c,$$

szybkość obrotowa

$$AN = \frac{at}{t} = a.$$

Robert HAJŁASZ

Opór zastępczy wielokąta i złota proporcja

Krzysztof REJMER



Rozwiązanie zadania M 814.

Niech X będzie dowolnym punktem płaszczyzny. Oznaczmy przez $n(R, t)$ liczbę żywych modliszek, które w chwili t są w odległości nie większej niż R od punktu X . Łatwo sprawdzić, że

$$\frac{1}{2}n(r+10, t) \geq n(r, t+1),$$

bo w ciągu minuty modliszka przebywa najwyżej 10 metrów, a zatem każda modliszka, która w chwili $(t+1)$ znajduje się w odległości nie większej niż r od X , w chwili t była odległa od X o nie więcej niż $r+10$, podobnie jak wszystkie modliszki, które zabiła między chwilą t a $t+1$ (dlaczego?). Czynniki $\frac{1}{2}$ wyraża fakt, że na każdą żywą w chwili $t+1$ modliszkę przypada co najmniej jedna zabita między chwilą t a $t+1$. Zatem

$$\begin{aligned} n(0, 15) &\leq \frac{1}{2}n(10, 14) \leq \\ &\leq \frac{1}{4}n(20, 13) \leq \dots \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{15}}n(150, 0) \leq \\ &\leq \frac{1}{32768} \frac{\pi(150+1)^2}{\pi} < 1, \end{aligned}$$

czyli po kwadransie żadna modliszka nie będzie przebywać w punkcie X . Punkt ten można wybrać dowolnie, co kończy dowód. (Por. zadania o saloonach mlecznych z *Delty* 8/1996.)

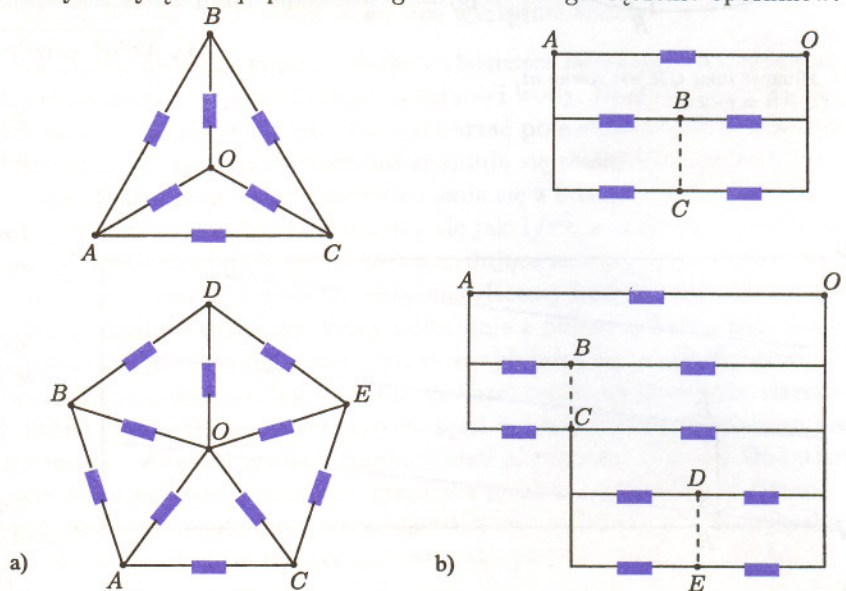


Rozwiązanie zadania M 815. Ponieważ $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$, więc jeden czynnik iloczynu znika.



Złota proporcja w naturalny sposób pojawia się w wielu zagadnieniach geometrycznych, ale nie tylko. Opór zastępczy prostej, nieskończonej sieci zbudowanej z oporników o jednostkowym oporze (patrz *Delta* 6/1997) jest równy właśnie współczynnikowi złotej proporcji. W przyrodzie można ją odnaleźć w zagadnieniu filotaksji. A oto jeszcze jeden przykład, w którym złota proporcja i liczby Fibonacciego pojawiają się w naturalny sposób. Z oporników o jednostkowym oporze zbudowano wielokąt w taki sposób, że oporniki łączą jego kolejne wierzchołki oraz wierzchołki ze środkiem. Jaki jest opór takiego układu mierzony między dowolnym z wierzchołków i środkiem? Jak się on zmienia, gdy liczba wierzchołków dąży do nieskończoności?

Ten mało znany problem ma ciekawe rozwiązanie, które przedstawimy dla wielokątów o nieparzystej liczbie wierzchołków. Rysunek pokazuje dwa najprostsze takie wielokąty: trójkąt i pięciokąt wraz z równoważnymi im sieciami zbudowanymi wyłącznie poprzez szeregowo i równoległe łączenie oporników.



a) Wielokąty oporników.

b) Sieci zastępcze oporników. Punkty B i C mają ten sam potencjał, podobnie punkty D i E mają ten sam potencjał.

Opór mierzony jest pomiędzy punktami A i O . Równoważność wynika z symetrii; z jej powodu niektóre pary punktów mają ten sam potencjał, a zatem można usunąć łączący je opornik (lub połączyć je dowolnym oporem) bez zmiany oporu całości układu. Na rysunku te usunięte oporniki zaznaczone są przerywanymi liniami. Oznaczmy przez r operację obliczania oporu zastępczego dla dwóch równoległe połączonych oporników (polega ona na podzieleniu iloczynu obu oporów przez ich sumę), a przez s operację obliczania oporu zastępczego dla połączenia szeregowego (czyli po prostu ich sumę). Opory zastępcze dla pierwszych trzech wielokątów można zapisać następująco

$$R_3 = 1r1 = \frac{1}{2},$$

$$R_5 = 1r\frac{1}{2}s\frac{1}{2}r1 = \frac{5}{11},$$

$$R_7 = 1r\frac{1}{2}s\frac{1}{2}r\frac{1}{2}s\frac{1}{2}r1 = \frac{13}{29},$$

Wielkość $\frac{1}{2}$ jest wynikiem równoległego połączenia dwóch jednostkowych oporów. Kolejne operacje w powyższych ciągach symboli można wykonywać zaczynając zarówno od lewej, jak i od prawej strony, co widać z symetrii wyrażeń. Nie wolno natomiast zacząć rachunków od środka wyrażenia; żeby zrozumieć dlaczego – wystarczy popatrzeć na równoważne wielokątom sieci zastępcze. Mówiąc inaczej, istnieją tylko dwa poprawne sposoby rozmieszczenia



Rozwiązanie zadania F 456.

Skorzystamy z pojęcia kąta hiperbolicznego ψ , który w układzie jednostek, takim że $c \neq 1$, wyraża się wzorem

$$\operatorname{tgh} \psi = \frac{v}{c}$$

(dla przejścia między dwiema kolejnymi gwiazdami). Ponieważ kąt hiperboliczny jest wielkością addytywną, więc dla przejścia między N -tą gwiazdą a obserwatorem wynosi on

$$\Psi = N\psi,$$

czyli odpowiednia prędkość wynosi

$$V = c \cdot \operatorname{tgh} \left(N \operatorname{Artgh} \frac{v}{c} \right).$$

Gdy $N \rightarrow \infty$, to $V \rightarrow c$.

nawiasów; są to takie rozmieszczenia, przy których we wnętrzu każdej pary nawiasów znajduje się co najwyżej jedna para nawiasów (oczywiście, może ona zawierać w swoim wnętrzu inną parę) i jedna operacja łączenia oporników. Zauważmy, że każdy opór zastępczy powyższego ciągu (oprócz, oczywiście, pierwszego) otrzymamy umieszczając we wnętrzu wyrażenia odpowiadającego jego poprzednikowi symbol $r\frac{1}{2}s\frac{1}{2}$ bezpośrednio przed końcowym $r1$ (lub $\frac{1}{2}s\frac{1}{2}r$ bezpośrednio po pierwszym $1r$). Zapiszmy opór n -kąta w postaci ułamka

$$R_n = ar1 = \frac{k}{l},$$

gdzie a jest wynikiem operacji poprzedzających $r1$, natomiast k i l są liczbami względnie pierwszymi (fakt, że wynik dla dowolnego n jest liczbą wymierną, jest trywialny). Posługując się regułami łączenia oporów w natychmiastowy sposób możemy wyrazić a przez k i l

$$a = \frac{k}{l-k}.$$

Wartość oporu dla $n+2$ -kąta jest, zgodnie z tym, co już powiedzieliśmy, równa

$$R_{n+2} = ar\frac{1}{2}s\frac{1}{2}r1 = \frac{3k+l}{5k+3l}.$$

W ten sposób, zaczynając od pierwszego elementu ciągu, dla którego $k=1$ i $l=2$, możemy obliczyć dowolny jego element.

Zwróćmy teraz uwagę na następujący ciekawy fakt. Dla obliczonych trzech oporów zastępczych liczniki ułamków są liczbami Fibonacciego, natomiast mianowniki są sumami liczby poprzedzającej i następującej w ciągu Fibonacciego po liczbie będącej licznikiem. Czy jest to przypadek, czy też prawidłowość? Gdyby to była prawda dla dowolnego oporu, jego wartość można by zapisać jako

$$R_n = \frac{F_n}{F_{n+1} + F_{n-1}} = \frac{1}{2\frac{F_{n+1}}{F_n} - 1},$$

a zatem dla n dążącego do nieskończoności opór dążyłby do

$$\frac{1}{2\tau - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

gdzie τ jest współczynnikiem złotej proporcji.

Najprostszy sposób sprawdzenia, że tak jest istotnie, to dowód indukcyjny. Wiemy, że dla małych wartości n opór zastępczy R_n wyraża się w opisany sposób przez liczby Fibonacciego. Załóżmy zatem, że dla pewnego n zachodzi

$$R_n = \frac{k}{l} = \frac{F_n}{F_{n+1} + F_{n-1}}.$$

Dla n większego o 2 mamy

$$R_{n+2} = \frac{3k+l}{5k+3l} = \frac{F_n + F_{n+1}}{F_n + 3F_{n+1}}.$$

Ostatni ułamek przepiszemy w postaci

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+2} + 2F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+3} + F_{n+1}},$$

co kończy dowód.

W przypadku gdy wielokąt ma parzystą liczbę wierzchołków, jego opór zastępczy także wyraża się przez liczby Fibonacciego, choć jest to bardziej złożona formuła. Jednak i wtedy dla n dążącego do nieskończoności opór dąży do $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Sprawdzenie tego niech pozostanie ćwiczeniem dla dociekliwego Czytelnika.

W analogiczny sposób można obliczyć pojemność zastępczą wielokąta zbudowanego z jednakowych kondensatorów o jednostkowej pojemności. Znając wynik dla wielokąta zbudowanego z oporników wynik dla kondensatorów możemy podać natychmiast. We wszystkich równaniach musimy zastąpić $\frac{1}{2}$ przez 2 oraz zamienić miejscami r i s , a ostateczny wynik, czyli pojemność zastępcza to, oczywiście, $\sqrt{5}$.

Na koniec pozostaje jeszcze dodać, że zaprezentowany tu sposób obliczenia zastępczego oporu został podany przez Kanadyjczyka Roberta H. Marcha.



Pion, poziom i promień Ziemi

Piotr ZALEWSKI



Rys. 1. Wszystkie pionowe sznurki wiszą w jednej płaszczyźnie.

Według *Słownika Języka Polskiego* (PWN 1988) pion to „linia pokrywająca się z kierunkiem siły ciężkości na powierzchni Ziemi”. *Słownik Wyrazów Obcych* precyzuje pojęcie pionu jako „kierunku wypadkowej dwóch sił: siły przyciągania Ziemi i siły odśrodkowej ruchu obrotowego Ziemi”. Spróbujmy jednak spojrzeć na to pojęcie oczami ludzi żyjących przed Newtonem, tzn. nie używając nieznanymi (niezdefiniowanymi) określeń, jak siła czy przyciąganie. Codzienne doświadczenie podpowiada, że rzeczy położone „wyżej” w (nie)sprzyjających warunkach spadają niżej i to „prosto z góry na dół”. Właśnie to „prosto” chcielibyśmy nazwać pionem, o ile tylko uda nam się podać przepis na jednoznaczne jego wyznaczenie. Spadające ciała nie bardzo się do tego nadają, poręczniej jest posłużyć się przyrządem w postaci ciężarka zawieszonoego na sznurku, czyli właśnie pionem. Nazwa, poprzez włoskie *piombo*, pochodzi od *plumbum* – łacińskiego określenia ołowiu, od wieków używanego do wyrobu takich ciężarek. Pionem nazwijmy więc kierunek wskazywany przez „obciążony sznurek” zawieszony w danym punkcie (po ustaniu ruchu wahadłowego ciężarka). Fajnie, tylko czy wszystkie „obciążone sznurki” wskazują ten sam pion? Powtórzenie doświadczenia przedstawionego na rysunku 1 powinno rozwiązać tę wątpliwość z „dokładnością” do stosunku amplitudy wahania ciężarka do długości sznurka. Dokładność ta jest porównywalna z różnicą między zacytowanymi na wstępie definicjami, wynoszącą dla szerokości geograficznej Warszawy 4 tysięczne stopnia.

Przejdźmy teraz do poziomu. Względem danego punktu coś może być „wyżej” albo „niżej”. Jeżeli nie jest ani wyżej, ani niżej, to powiemy, że jest na tym samym „poziomie”. Tylko jak to stwierdzić? Inaczej mówiąc: jak zdefiniować „poziom”? Skoro pion wyznacza „pion”, to pewnie „poziom” można wyznaczyć za pomocą poziomu – na przykład wody. Jeżeli zaniedbamy efekty brzegowe, to powierzchnia wody w dowolnie skomplikowanym naczyniu po uspokojeniu się wydaje się wyznaczać płaszczyznę. W dodatku prostopadłą do kierunku pionowego, o czym można się przekonać (z przyzwyczajoną dokładnością) obserwując pion zawieszony w studni i jego odbicie w tafli wody. Będzie się ono wydawało przedłużeniem pionu, bez względu na to, z której strony studni będziemy patrzyli. (Jeżeli nie jest oczywiste, że to świadczy o prostopadłości, to warto poeksperymentować z patyczkiem i lusterkiem.)



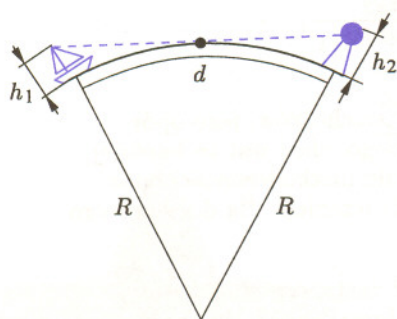
Rys. 2

W ten sposób nie tylko zdefiniowaliśmy pion i poziom odwołując się jedynie do prostych obserwacji, ale przekonaliśmy się dodatkowo o ich wzajemnym powiązaniu. W praktyce do wyznaczania poziomu używa się tzw. *waserwagi* lub *poziomnicy* (rys. 2). Przy okazji nie zaszkodzi przypomnieć, że w celu sprawdzenia poprawności wskazań poziomiccy wystarczy przyłożyć ją np. do tablicy, odrysować, a następnie obrócić o 180 stopni wokół osi pionowej (a czy waserwaga może być sfalszowana?).

No dobrze, ale po co to wszystko przypominać? Przede wszystkim, ponieważ nie korzystaliśmy ani ze znajomości praw mechaniki, ani z wiadomości o naszej planecie, więc tak zdefiniowane pojęcia pionu i poziomu można wykorzystać przy odkrywaniu tych praw lub wiadomości. I tak: dokładność naszych definicji nasuwa pytanie o kształt Ziemi. Inaczej mówiąc, na ile poziom jest płaszczyzną? Każdy, kto choć raz był nad morzem albo na samotnym wzniesieniu, ma prawo podejrzewać, że Ziemia nie jest płaska. Sprawdźmy te podejrzenia mierząc promień krzywizny poziomu.

Sposób pierwszy: żeglarski

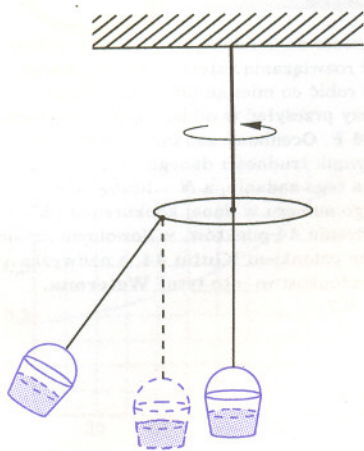
Potrzebujemy jachtu, latarni i morza. Gdy będziemy oddalać się od lądu, latarnia morska zacznie stopniowo chować się za horyzontem. Rysunek 3 przedstawia schematycznie wielkości, które musimy zmierzyć, aby



$$R \approx \frac{1}{2} \left(\frac{d}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}} \right)^2$$

Rys. 3.

oszacować promień Ziemi. Pomiar taki można przeprowadzić nad odpowiednio dużym jeziorem lub zatoką bez odbijania od brzegu. Polecam Śniardwy, Zatokę Gdańską, Zalew Wiślany i Zalew Szczeciński. Bardzo ciekawym problemem jest określenie dokładności takiego pomiaru.



Rys. 4

Sposób drugi: Eratostenesa

Eratostenes jako pierwszy oszacował promień Ziemi. Dokonał tego w III wieku p.n.e. Jego pomysł polegał na określeniu różnicy szerokości geograficznej dwóch miejsc na tym samym południku. Różnica szerokości wyrażona w mierze łukowej jest równa odległości między tymi miejscami wyrażonej w jednostkach promienia krzywizny. W Polsce takimi miejscami mogą być np. Gdynia i Wodzisław Śląski. Różnicę szerokości geograficznych łatwo można zmierzyć porównując długości cieni rzucanych przez tej samej wysokości przedmioty w to samo południe.

Sposób trzeci: fotograficzny – zobacz „Patrz w niebo” na stronie 16

Po zmierzeniu promienia Ziemi stwierdzimy, że odchylenie poziomu od płaszczyzny, na odległościach rzędu kilkudziesięciu metrów, jest zanedbywalne w większości zastosowań praktycznych. Niestety, nasze pomiary będą najprawdopodobniej za mało dokładne, aby stwierdzić odchylenie poziomu od kulistości. Pozostanie również kwestia deformacji poziomu związanych z niejednorodnością Ziemi. Czy pomimo tego pion zawsze pozostanie lokalnie prostopadły do poziomu? A co zrobić z naszymi definicjami w przypadku wiaderka na karuzeli (rys. 4)? Ale to już osobny temat.



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 813. W przestrzeni dane są niezależne wektory v_1, v_2, \dots, v_n o tej własności, że każde dwa z nich tworzą kąt rozwarty. Udowodnić, że $n < 15$.
Rozwiązanie na str. 6

M 814. Na płaszczyźnie rozmieszczono nieskończenie wiele modliszek w taki sposób, by odległość między żadnymi dwiema z nich nie była mniejsza niż dwa metry. Zakładając, że modliszka porusza się z prędkością nie większą niż 10 metrów na minutę, a ponadto owad ten momentalnie umiera z rozpaczy, jeśli upłynie minuta od chwili, gdy po raz ostatni zamordował współplemieńca, udowodnić, że po kwadransie żadna modliszka nie zostanie się przy życiu. Prokreację zaniedbujemy.
Rozwiązanie na str. 10

M 815. Udowodnić, że

$$\prod_{m=2}^{1996} \left(\prod_{n=m+1}^{1997} |\sqrt[m]{m} - \sqrt[n]{n}| \right) \leq \frac{1}{2000}.$$

Rozwiązanie na str. 10

Zadanie z obozu przygotowawczego Olimpiady Matematycznej.

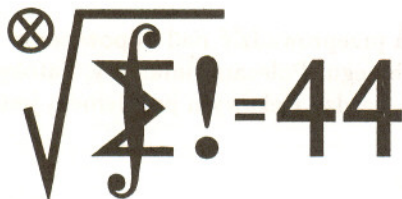
Redaguje Piotr ZALEWSKI

F 455. Z miejsca o szerokości geograficznej ϕ zrobiono zdjęcie nocnego nieba z długim czasem ekspozycji. Jedna z gwiazd zostawiła prostoliniowy ślad. Podać deklinację tej gwiazdy.
Rozwiązanie na str. 7

F 456. Obserwator inercjalny widzi N gwiazd poruszających się wzdłuż prostej. Prędkość pierwszej gwiazdy względem obserwatora wynosi v , a prędkość i -tej gwiazdy względem $(i-1)$ -szej, dla $i = 2, \dots, N$, też wynosi v . Obliczyć prędkość N -tej gwiazdy względem obserwatora. Wykonać przejście graniczne $N \rightarrow \infty$.
Rozwiązanie na str. 11

Zadanie F 456 zaproponował Krzysztof Rejmer.





Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 329 ($WT=1,50$), 330 ($WT=2,17$),
z numeru 11/1996

- Piotr Żmijewski - Łódź 42,82
- Krzysztof Zapisek - Warszawa 40,70
- Bartłomiej Dydą - Wrocław 40,00
- Jarosław Łazuka - Warszawa 35,44

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1997

Przypominamy treść zadań:

337. Niech $\alpha = (i\sqrt{3} - 1)/2$. Wyznaczyć wszystkie funkcje f zmiennej zespolonej z , o wartościach zespolonych, spełniające równanie funkcyjne $f(\alpha z + 1) + f(z) = z^2$.

338. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$:
$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} k^n = 0.$$

337. Liczby $1, \alpha, \alpha^2$ są trzema różnymi pierwiastkami trzeciego stopnia z jedności. Tak więc $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \alpha^3 = 1$. Obliczamy kolejne iteracje funkcji liniowej $l(z) = \alpha z + 1$:

$$ll(z) = \alpha^2 z + \alpha + 1, \quad lll(z) = \alpha^3 z + \alpha^2 + \alpha + 1 = z.$$

W podanym równaniu

$$(1) \quad f(l(z)) + f(z) = z^2$$

zastępujemy z najpierw przez $l(z)$, a następnie przez $ll(z)$:

$$(2) \quad f(ll(z)) + f(l(z)) = (l(z))^2,$$

$$(3) \quad f(lll(z)) + f(ll(z)) = (ll(z))^2.$$

A ponieważ $f(lll(z)) = f(z)$, zatem związki (1), (2), (3) stanowią (dla ustalonej liczby z) układ trzech równań liniowych z niewiadomymi $f(z), f(l(z)), f(ll(z))$. Rozwiązując ten układ otrzymujemy wynik:

$$f(z) = \frac{1}{2}(z^2 + (ll(z))^2 - (l(z))^2);$$

po przekształceniu:

$$f(z) = (\alpha + 1)z^2 - 2\alpha z + \frac{1}{2}(\alpha - 1).$$

Ta funkcja spełnia równanie (1) i jest jego jedynym rozwiązaniem.

338. Weźmy pod uwagę funkcję

$$g(x) = (e^x - 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} e^{kx}$$

i obliczmy jej n -tą pochodną:

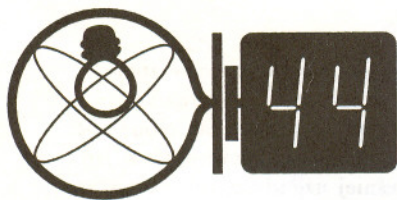
$$g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} k^n e^{kx}.$$

Z rozwinięcia potęgowego funkcji e^x dostajemy równość

$$g(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^{2n} = x^{2n} + c_1 x^{2n+1} + c_2 x^{2n+2} + \dots;$$

napisane szeregi potęgowe są zbieżne dla wszystkich x ; dokładne wartości współczynników c_j nie mają znaczenia. Z otrzymanej równości wynika, że $g^{(n)}(0) = 0$. W połączeniu z wcześniejszym wzorem daje to tezę zadania.





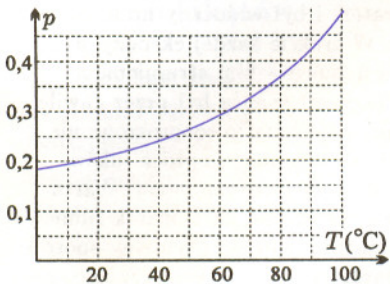
Przypominamy treść zadań:

235. Na rysunku 1 przedstawiono zależność od temperatury stosunku masy cukru i wody p w roztworze nasyconym. Obliczyć maksymalną temperaturę wody, której dolanie do nasyconego roztworu cukru w wodzie o temperaturze 100°C spowoduje krystalizację części cukru (choćby niewielkiej). Rozważyć dwa przypadki:

- a) dolewamy niewielką ilość wody,
- b) dolewamy ilość wody równą $1/3$ początkowej ilości wody w roztworze.

Należy przyjąć, że ciepło pobrane lub oddane podczas zmiany temperatury roztworu jest równe sumie wyrażeni odpowiadających zmianie temperatury wody i cukru, przy czym ciepło właściwe cukru jest równe $0,30$ ciepła właściwego wody.

236. Napastnik biegnący w stronę bramki przeciwnika znajduje się na wprost niej i otrzymuje boczne podanie: piłka toczy się poziomo z prędkością 25 m/s równoległe do linii bramkowej w odległości 20 m od niej. Gdy napastnik kopie piłkę, jego noga porusza się do przodu z prędkością 15 m/s . Ocenie orientacyjnie niezbędną do zdobycia bramki dokładność czasu Δt , w którym noga przekracza dowolną linię. Szerokość bramki wynosi $7,3\text{ m}$, a średnica piłki – 22 cm . Pominąć rolę bramkarza i kwestie związane z wysokością poprzeczki i nogi.



Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 229 ($WT=1,38$), 230 ($WT=3,25$)
z numeru 12/1996

Przemysław Gworys	- Częstochowa	45,05
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	43,35
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	32,66

Jako piąty z kolei do grona Weteranów
Klubu 44F dołącza P. Gworys.

235. Rozważymy najpierw punkt b). Przesycenie roztworu i krystalizacja nadwyżki cukru nastąpi wtedy, gdy spełniona będzie nierówność

$$p(T_0) > (1 + q)p(T_k),$$

gdzie $T_0 = 100^\circ\text{C}$ jest temperaturą początkową roztworu, T_k jest temperaturą po dolaniu wody, a $q = 1/3$ jest stosunkiem masy dolanej wody do początkowej masy wody w roztworze. Z wykresu odczytujemy $p(T_0) \approx 0,49$ (lub nieco mniej) i obliczamy $p(T_0)/(1 + q) \approx 0,36 \div 0,37$. Rozpatrując dalej przypadek graniczny (gdy nierówność przechodzi w równość) odczytujemy maksymalną wartość $T_k \approx 81^\circ\text{C}$. Aby wyznaczyć początkową temperaturę wody T , ułożymy bilans ciepła:

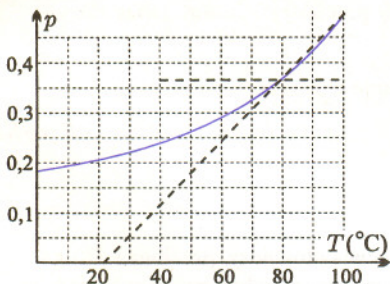
$$c_w(T_0 - T_k) + p(T_0)c_c(T_0 - T_k) = qc_w(T_k - T),$$

gdzie c_w i c_c są ciepłami właściwymi wody i cukru. Dzieliąc obie strony przez c_w dochodzimy do równania

$$\tau(T_0 - T_k) = q(T_k - T),$$

gdzie $\tau = 1 + p(T_0)c_c/c_w \approx 1,146$. Stąd obliczamy $T \approx 15^\circ\text{C}$. Powyższe rachunki można zinterpretować graficznie w sposób następujący: prowadzimy na wykresie $p(T)$ prostą poziomą na wysokości $p(T_0)/(1 + q)$, na przecięciu tej prostej z wykresem znajdujemy T_k i przez te dwa punkty wykresu prowadzimy sieczną przedłużając ją do przecięcia z osią temperatury (rys. 2). Odcinek pomiędzy punktem przecięcia a T_k jest równy $(T_0 - T_k)/q$ i w celu wyznaczenia T należy go powiększyć o czynnik τ , tzn. T jest punktem na osi temperatury, którego odległość od T_k jest τ razy większa niż odległość wspomnianego punktu przecięcia od T_k .

Przedstawiona interpretacja graficzna pozwala bez trudności przejść do granicy $q \rightarrow 0$, $T_k \rightarrow T_0$ (punkt a) zadania) – wystarczy tylko zamiast siecznej poprowadzić styczną do wykresu w punkcie T_0 . Styczna ta przecina oś temperatury w punkcie odpowiadającym około 40°C ; po pomnożeniu $100^\circ\text{C} - 40^\circ\text{C} = 60^\circ\text{C}$ przez τ otrzymujemy 69°C , czyli $T \approx 31^\circ\text{C}$.

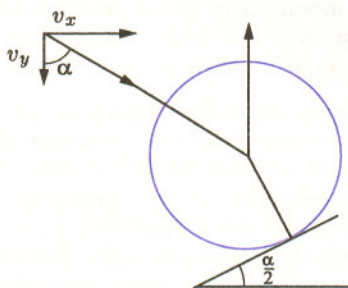


Rys. 2

236. Dla uproszczenia pominiemy obrót piłki i przyjmiemy, że siła działająca na nią w chwili kopnięcia jest prostopadła do jej powierzchni. Założmy też, że masa nogi jest znacznie większa od masy piłki, a odbicie jest sprężyste (pominięte efekty są istotne dla kierunku lotu piłki, ale ich znaczenie dla wymaganej dokładności czasu jest prawdopodobnie niewielkie). W układzie związanym z butem piłka porusza się ukośnie (rys. 3), przy czym składowa x prędkości jest równa $v_x = 25\text{ m/s}$, a wartość bezwzględna składowej y – równa $v_y = 15\text{ m/s}$, zatem wartość kąta kierunkowego α wynika z równania $\text{tg } \alpha = v_x/v_y$. Aby odbicie nastąpiło w przód, kąt odbicia powinien wynosić $\alpha/2$. Błąd czasu Δt oznacza na rysunku 3 pionowe przesunięcie buta (którego rozmiary pomijamy) o odcinek $\Delta y = v_y \Delta t$; punkt zetknięcia przesunie się wtedy po powierzchni piłki o $\Delta y / \sin(\alpha/2)$, a kierunek lotu odbitej piłki zmieni się o

$$\Delta\alpha = \frac{2\Delta y}{r \sin(\alpha/2)} = \frac{2v_y \Delta t}{r \sin(\alpha/2)},$$

gdzie r – promień piłki. Powyższy wzór przedstawia kąt $\Delta\alpha$ w układzie odniesienia związanym z butem, natomiast aby ocenić jego maksymalną wartość pozwalającą trafić do bramki, należy przejść do układu nieruchomego, przy czym $\Delta\alpha$ ulegnie podzieleniu przez czynnik $1 + \cos \alpha$ (szczegółowo wyprowadzenia pomijamy). Przyrównując otrzymane wyrażenie do szerokości katowej bramki i podstawiając dane liczbowe znajdujemy $\alpha = 59^\circ$, $\Delta t \approx 1\text{ ms}$.



Rys. 3

Patrz w niebo

Dzisiaj propozycja patrzenia w niebo za pomocą aparatu fotograficznego. Najprostszym, ale wdzięcznym zadaniem dla początkującego fotoastronoma jest rejestracja pozornego ruchu obrotowego nieba. Wystarczy w gwiazdzistą, bezksiężycową noc położyć aparat fotograficzny obiektywem w górę z osią optyczną skierowaną mniej więcej wzdłuż osi obrotu Ziemi i otworzyć migawkę na kilkanaście minut. Najwygodniej użyć do tego celu aparatu z możliwością uruchamiania spustu migawki za pomocą dokręcanego wężyka. Aparat musi być, oczywiście, zaopatrzone w tzw. „czas B” pozwalający na dowolnie długą ekspozycję. Otrzymamy zdjęcie, na którym gwiazdy pozostawią ślady w kształcie łuków o długości kątowej wynoszącej niecały stopień na każde 4 minuty ekspozycji. (Jeżeli aparat nie będzie leżał wzdłuż osi świata, łuki nie będą fragmentami okręgów, gdyż na zdjęciu otrzymujemy obraz przekształcenia, w którym danemu punktowi półsfery odpowiada przecięcie prostej – wyznaczonej przez ten punkt i środek sfery – z płaszczyzną błony fotograficznej.)

Naszemu Czytelnikom polecamy dwa ambitniejsze warianty takiej obserwacji: pomiar różnicy długości doby gwiazdowej i oficjalnej (związanej z czasem średnim słonecznym) oraz wyznaczenie długości równoleżnika, czyli pośrednie oszacowanie promienia Ziemi.

W pierwszym przypadku należy unieruchomić aparat i wykonać po jednym zdjęciu, o tej samej porze i czasie ekspozycji, w dwie kolejne noce. Po wywołaniu filmu pozostanie zmierzona kątą względnego przesunięcia łuków gwiazd. Przyjemność wymyślenia optymalnej metody pomiaru tego kąta i oszacowania jego dokładności, wykonania stosownych obliczeń oraz wyciągnięcie wniosków pozostawiamy Czytelnikom.

Pomiar długości równoleżnika będzie odrobinę bardziej skomplikowany. Głównie z powodu trudności w dokładnym umocowaniu aparatu fotograficznego w warunkach amatorskich. Z tego powodu wykorzystamy pole grawitacyjne w celu uzyskania wystarczająco dokładnego układu odniesienia. Potrzebne będą dwie ekspedycje:

wschodnia i zachodnia, każda wyposażona w aparat fotograficzny (najlepiej na statywie), zegarek i pion oraz pogodna i bezwietrzna (ze względu na pion) noc. Ekspedycje te powinny dokonać jednoczesnych zdjęć (najlepiej całą serię wcześniej uzgodnionych ekspozycji) aparatami skierowanymi wzdłuż osi świata z miejsc oddalonych od siebie o pewną odległość w kierunku wschód-zachód. Przed rozpoczęciem sesji zdjęciowej należy zawiesić pion w taki sposób, aby znajdował się kilka metrów przed aparatem i był widoczny mniej więcej pośrodku pola widzenia. W trakcie każdej ekspozycji konieczne jest oświetlenie pionu wąskim strumieniem światła, tak aby każdy fragment sznura był przez chwilę oświetlany, a jednocześnie żeby światło rozproszone nie dostało się do obiektywu. W rezultacie, oprócz łuków gwiazd, powinien zostać utrwalony obraz pionu. Warto wcześniej (przed wyprawą) poświęcić kilka klatek filmu na próby. Po wyświetleniu można wybrać optymalny sposób oświetlenia, dający najbardziej ostry i wystarczająco wyraźny obraz.

Do opracowania materiału obserwacyjnego najlepiej użyć rzutnika. Najpierw wykonujemy odbitkę zdjęcia ekspedycji wschodniej (zachodniej), a następnie na wywołane zdjęcie rzucamy odpowiadający mu obraz filmu ekspedycji zachodniej (wschodniej). Należy tak manipulować zdjęciem (i ewentualnie powiększeniem, jeżeli aparaty nie były identyczne), aby łuki gwiazd nałożyły się. Teraz wystarczy zmierzyć kąt, jaki tworzą obrazy pionów, a następnie dokonać odpowiednich obliczeń i interpretacji wyników. Dokładność pomiaru powinna wynieść małe kilkadziesiąt minut łukowych, co pozwala swobodnie zmierzyć kąt rzędu 1 stopnia. Wynika stąd, że ekspedycje powinny oddalić się (dla szerokości geograficznych Polski) na około 70 km, co znakomicie odpowiada np. rowerowemu biwakowi. Możliwy jest także wariant z jedną ekspedycją dokonującą obserwacji z różnych miejsc w kolejne noce. Należy wtedy wziąć pod uwagę różnicę pomiędzy czasem gwiazdowym a oficjalnym.

Czekamy na krótkie relacje z Waszych ekspedycji.

Gościnnie Piotr ZALEWSKI

Lipiec

Przesilenie letnie było dopiero co (21 VI) i noce są jeszcze bardzo krótkie i jasne. Tzw. noc astronomiczna to umownie czas, gdy Słońce znajduje się pod horyzontem głębiej niż 18° . Szerokość geograficzna obserwatora ϕ , deklinacja Słońca δ i jego wysokość h o północy spełniają zależność:

$$\phi + \delta - h = 90^\circ.$$

Zatem skoro w chwili przesilenia letniego jest $\delta = 23,5^\circ$, a dla Warszawy $\phi = 52^\circ$, to wtedy $h = -14,5^\circ$ i nocy astronomicznej nie ma w ogóle. Dopiero w ostatnim tygodniu lipca deklinacja Słońca maleje poniżej 20° i noce astronomiczne się pojawiają.

Wieczorem wysoko na niebie widać tzw. Letni Trójkąt utworzony przez trzy bardzo jasne gwiazdy: Wega (α Lutni), Deneba (α Łabędzia) i Altaira (α Orła).

W przybliżeniu przez te gwiazdozbiory przebiega Droga Mleczna. Nad północno-wschodnim horyzontem widać Wielką Mglawicę w Andromedzie, czyli jedną z sąsiednich galaktyk, a w Herkulesie jasną gromadę kulistą M13.

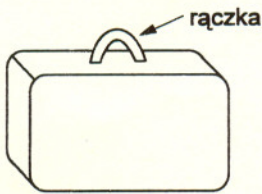
Wenus znajduje się w Lwie, a więc teraz jej nie widać, Mars jest w Pannie – też niewidoczny, Jowisz w Koziorożcu – widoczny przez całą noc, choć dość nisko, Saturn w Rybach – widoczny w drugiej połowie nocy.

W lipcu Księżyc dwukrotnie zakryje Aldebarana (2 i 29VII), ale będzie to podczas dnia, więc i tak zjawisk tych nie zobaczymy, a 25 VII przejdzie blisko Saturna. Z meteorów można w ostatniej dekadzie lipca próbować śledzić rój δ -Akwarjyd (promieniujący z Wodnika), a pod sam koniec miesiąca zaczną pojawiać się Perseidy. Pełnia Księżycza wypada 20 VII, a 4 VII Ziemia przechodzi przez aphelium, punkt orbity najbardziej oddalony od Słońca, czemu zresztą nie towarzyszą żadne specjalne zjawiska.

Tomasz KWAST

Uszy wielokątów

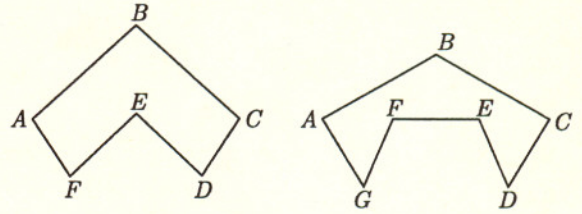
Czy wielokąty mogą mieć uszy? Mogą, tak samo jak rozmaitości mogą mieć ręczki. Dla rozmaitości dwuwymiarowych (czyli tworów, które lokalnie wyglądają jak kawałki płaszczyzny, ewentualnie powyginanej) określa się *rączki* – i nie ma w tej nazwie nic dziwnego, wystarczy popatrzeć na rysunek.



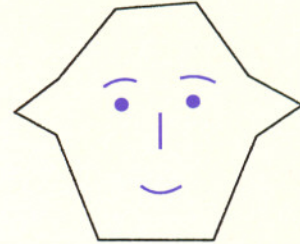
Wielokąty mogą więc mieć uszy – wystarczy owe uszy zdefiniować, czyli po prostu jakieś części wielokąta uszami nazwać. Z tym że nazwa powinna mieć jakieś uzasadnienie, nie wypada np. nazwać uchem dowolnego wielokąta zawartego w wyjściowym...

Załóżmy, że mamy dany wielokąt, mający więcej niż trzy wierzchołki (czyli różny od trójkąta). *Uchem* wielokąta nazwano taki trójkąt utworzony przez trzy kolejne wierzchołki, że bok trójkąta **nie będący** bokiem rozważanego wielokąta zawiera się (bez końców) we wnętrzu wielokąta. W obu przedstawionych wielokątach uchem **nie jest** trójkąt ABC .

Przedstawiony sześciokąt ma cztery uszy (które?), siedmiokąt zaś – tylko dwa (dlaczego?).



Nazwę łatwo uzasadnić; wystarczy popatrzeć na kolejny rysunek.



Każdy n -kąt może mieć co najwyżej n uszu (czemu?). Wypukły n -kąt ma ich niewątpliwie dokładnie n (jak to uzasadnić?).

Definiowanie ucha nie miałyby sensu, gdyby nie dało się czegoś o tych uszach udowodnić. I istotnie. Jest twierdzenie, które mówi, że *każdy wielokąt ma co najmniej dwoje uszu o wewnątrz rozłącznych*. W języku angielskim twierdzenie to nosi dumną nazwę *Two Ears Theorem*. Dowód, choć nie jest bardzo trudny, nie jest też banalny.

„Ściany mają uszy...” mówi stara piosenka. Trudno w tym momencie nie zadać pytania: a czy wielo(-)ściany mają uszy? Tu definicja nie byłaby tak prosta, jak w przypadku wielokątów... To jest jednak już inna historia.

K.C.

Jak wiadomo, w Kawiarni Szkockiej we Lwowie matematycy stawiali problemy, a czasem za ich rozwiązanie oferowali nagrody. Ongiś Stanisław Mazur postawił pewien problem i zakomunikował go Hermannowi Auerbachowi. Auerbach zaczął nad problemem myśleć. Myślał, myślał... Wtedy Mazur powiedział:

– Za rozwiązanie oferuję butelkę wina.

Na co Auerbach natychmiast:

– A, w takim razie ja rezygnuję. Mnie wino szkodzi.

(Historię słyszeliśmy od ks. prof. A. Turowicza)

W *EPSILONIE* 8/1996 informowaliśmy o tym, że w jednej z krakowskich księgarni książka Iana Stewarta „Czy Bóg gra w kości?” została umieszczona w dziale „Religia” i ekspedientka nie zgodziła się jej przenieść na półkę z pozycjami matematycznymi. Doniesiono nam, że nie był to jedyny taki przypadek! Otóż przed wojną słynna monografia Stefana Banacha „Teoria operacji” w pewnej księgarni leżała na półce obok książek lekarskich.

Może Czytelnicy znają inne przykłady książek matematycznych, które zostały (lub mogłyby zostać) zaszeregowane nie tam, gdzie trzeba?