

SPIS TREŚCI NUMERU 6(277)

Chemia topologiczna
Helena Dodziuk str. 1

Zaskakujące własności
 prawdopodobieństwa
 warunkowego
Jacek Jakubowski str. 4

Zadania str. 5

Wielościany składane
Jan Baranowski str. 6

Mała Delta str. 8

Patrz w niebo str. 9

Sieci elektryczne i liczby
 Fibonacciego
Krzysztof Rejmer str.10

Twierdzenie Ponceteła
 dla bilardu w elipsie
Rafał Kołodziej str.11

Oś globusa str.13

Klub 44 str.14

Kącik olimpijski str.16

Epsilon str.17

W następnym numerze:

Dyski protoplanetarne

Okładkę i ilustracje wykonał
Krzysztof BIESAGA

Wybór artykułów z *Delta*
 ukazuje się w języku angielskim
 w sieci Internet pod adresem
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:
 Uniwersytet Warszawski

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
 Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
 Andrzej Białynicki-Birula
 Bogdan Cichoński
 – wiceprzewodniczący
 Krzysztof Ciesielski
 Jan A. Gaj
 Piotr Goldstein
 Tomasz Hofmökł
 Andrzej Hrynkiwicz
 Wiesław A. Kamiński
 Marta Kicińska-Habior
 Krzysztof Maślanka
 Andrzej Mąkowski
 Zdzisław Pogoda
 Feliks Przytycki
 Michał Różyczka
 Konrad Rudnicki
 Zbigniew Semadeni
 Grzegorz Sitarski
 Andrzej Woszczyk
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
 Wiktor Bartol
 Krzysztof Biesaga
 Wojciech Kopczyński – z-ca red. nacj.
 Krystyna Kordos – sekr. red.
 Marek Kordos – red. nacj.
 Tomasz Kwast
 Anna Ludwicka
 Anna Rudnik
 Paweł Strzelecki
 Joanna Udalska
 Piotr Zalewski
 Adres Redakcji:
 ul. Smyczkowa 5/7; 02-678 Warszawa
 tel. 43-02-41(-2) wewn. 21
 PAWELST@MIMUW.EDU.PL
 Wydrukowano
 w Drukarni Naukowo-Technicznej
 w Warszawie, ul. Mińska 65
 Skład systemem T_EX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
 Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres
 prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena
 jednego numeru w 1997 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie
 okresu prenumeraty.
 W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)
 cena numeru w 1997 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą
 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.
Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje
 dodatkowo jeden egzemplarz pisma.
 Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1997 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem	
	za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

Nagrodę Nobla za rok 1996 w dziedzinie chemii otrzymali: Robert F. Curl Jr., Sir Harold W. Kroto oraz Richard E. Smalley za prace dotyczące fullerenów, o których jest mowa w tym artykule.

Chemia topologiczna

Helena DODZIUK

Wydaje się, że obecnie najciekawsze badania naukowe prowadzone są na styku różnych dziedzin. Przykładami tego mogą być zarówno biochemia, biofizyka, jak i liczne zastosowania matematyki w chemii. Jedną z bardzo interesujących dziedzin usytuowanych na pograniczu matematyki, chemii organicznej i biochemii jest **chemia topologiczna**.

Topologia jest działem matematyki badającym własności zbiorów (na przykład figur geometrycznych), które nie ulegają zmianie przy *homeomorfizmach*, to jest przekształceniach, które są ciągłe, odwracalne i na dodatek ich przekształcenia odwrotne też są ciągłe. Czworokąt i okrąg lub dowolne dwa okręgi są równoważne, ponieważ można homeomorficznie przekształcić jeden na drugi. Topologia pozwala jednak również odróżnić np. dwa okręgi koncentryczne od dwóch sąsiednich ogniw łańcucha (choć są one topologicznie równoważne) – są one bowiem *różnie położone w przestrzeni*, co oznacza, że nie istnieje taki homeomorfizm *całej* przestrzeni na nią samą, przy którym okręgi koncentryczne przeszłyby na ogniw łańcucha.

W chemii topologicznej lustrzane cząsteczki nazywa się *cząsteczkami chiralnymi*; różnią się one tak, jak lewa ręka od prawej. Związki, które nie dają się nałożyć na swoje zwierciadlane odbicie, nazywa się konsekwentnie chiralnymi. Odgrywają one ogromną rolę w przyrodzie, ponieważ większość cząsteczek organicznych, z których zbudowane są organizmy żywe – np. aminokwasy, cukry, spirala kwasu dezoksyrybonukleinowego DNA oraz rozmaite proste cząsteczki organiczne – jest chiralna.

Do niedawna zajmowanie się topologią i takimi obiektami, jak trójlistnik czy wstęga Möbiusa, było traktowane przez chemików jako matematyczne igraszki nie mające z ich dziedziną nic wspólnego. Pierwsza praca na temat możliwości syntezy cząsteczek o nietrywialnej topologii została w 1960 roku odrzucona przez renomowane czasopismo chemiczne *Tetrahedron*, które poświęcone jest syntezie organicznej. Autor, van Gulick, rozpowszechnił ją w maszynopiśmie, który był następnie wielokrotnie cytowany. Praca okazała się na tyle inspirująca, że wydrukowano ją bez zmian w innym czasopiśmie w 1993 roku, a więc w 33 lata po pierwszej próbie publikacji.

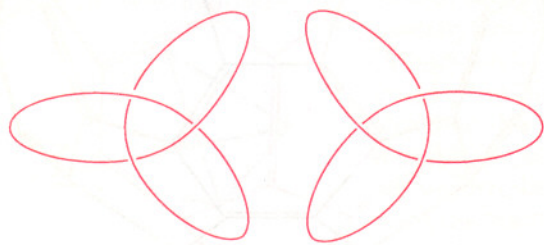
Bardzo interesującą gałęzią topologii jest *teoria węzłów* zajmująca się problemem jak stwierdzić, czy dwa węzły (czyli figury homeomorficzne z okręgami) są tak samo położone w przestrzeni. W szczególności, węzeł położony tak samo jak zwyczajny, „szkolny” okrąg nazywa się rozwiązalny. Taki jest węzeł na poniższym rysunku (proszę sprawdzić),



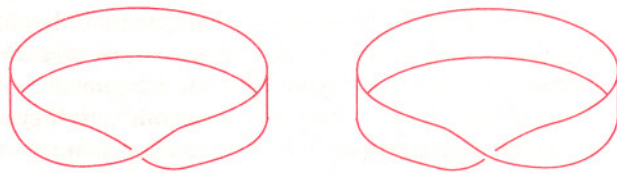
ale np. trójlistnik z rysunku 1 nie jest rozwiązalny.

Zwrot *nietrywialna topologia* pochodzi z chemicznego żargonu i oznacza mniej więcej *posiadanie interesujących własności topologicznych i geometrycznych*. Czytelnik zechce w podobny sposób znaleźć tłumaczenie używanych dalej terminów *cząstka topologiczna, izomeria topologiczna* itp.

Red.

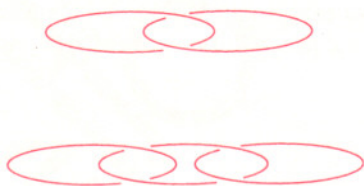


Rys. 1



Rys. 2

Obecnie znane są liczne przykłady cząsteczek organicznych o nietrywialnej topologii. Są wśród nich zarówno związki otrzymane na drodze syntezy chemicznej, jak również związki pełniące ważne role w organizmach żywych, np. makrocycliczne (czyli tworzące wielki pierścień) kwasy dezoksyrybonukleinowe DNA. Do pierwszych należą m.in. związki imitujące trójlistnik czy wstęgę Möbiusa (rys. 1, 2) oraz tak zwane *katenary*, mające budowę pozaczepianych ogniw tworzących łańcuch.



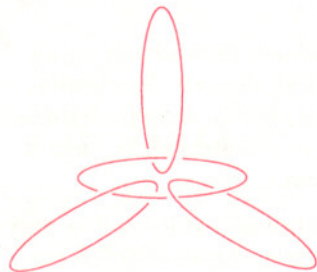
Są to nie tylko proste cząsteczki zbudowane z dwóch czy trzech ogniw, lecz także *polikatenany*, w których na centralnym pierścieniu „zawieszonych” jest kilka (do sześciu) pierścieni (rys. 3); otrzymany ostatnio *olimpiadan* (rys. 4) jest chyba w tej grupie związków najbardziej wyrafinowanym, obok trójlistnika, przykładem celowej syntezy organicznej.



Rys. 4

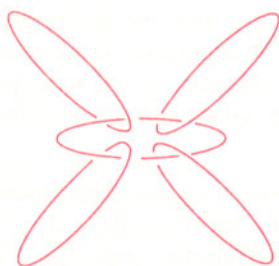


Rys. 5

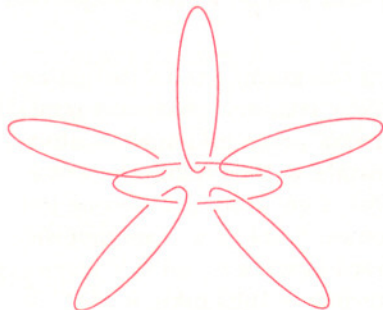


Pewną analogię do katenanów wykazują tak zwane *rotaksany* o budowie pokazanej na rysunku 5, które składają się ze związku łańcuchowego „przewleczonego” przez związek pierścieniowy, przy czym duże podstawniki na końcach łańcucha uniemożliwiają „ześlizgnięcie się” pierścienia, a zatem rozpad rotaksanu na cząsteczki składowe.

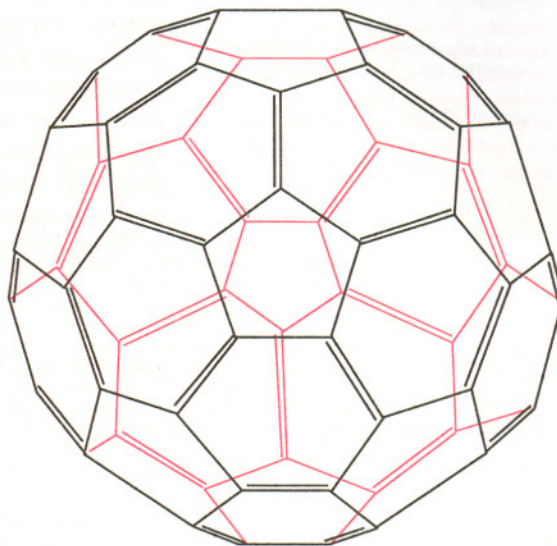
Taką budowę mają np. pochodne cyklodekstryn, o których pisaliśmy w *Delcie* 5/1996.



Innym przykładem – na razie hipotetycznym – cząsteczek topologicznych są izomery *in* i *out* uwodornionych fullerenów C_{60} (fullereny to wysokosymetryczne związki węgla, których kształt jest zbliżony do kuli). Zbudowana z nienasyconych pierścieni pięcio- i sześciocłonowych cząsteczka C_{60} (rys. 6), w której wszystkie atomy węgla są równoważne, przypomina piłkę futbolową. Związek ten można uwodornić, to znaczy przyłączyć atomy wodoru do atomów węgla tak, by atomy wodoru znalazły się na zewnątrz, bądź też by znalazły się wewnątrz klatki węglowej. Obliczenia modelowe pokazują, że dla hipotetycznego, całkowicie uwodornionego fullerenu $C_{60}H_{60}$ najbardziej stabilny izomer ma 10 wiązań CH skierowanych do środka. Można wykazać, że bariera przejścia od tej ostatniej cząsteczki do izomeru ze wszystkimi wiązaniami CH skierowanymi na zewnątrz jest większa od energii potrzebnej do zerwania wiązania chemicznego. A więc również ta izomeria jest przykładem izomerii topologicznej.



Obecnie C_{60} otrzymuje się odparowując grafit w promieniu lasera. Dotychczas nie udało się (mimo intensywnych prób) otrzymać na drodze syntezy chemicznej ani tego fullerenu, ani jego całkowicie uwodornionej pochodnej. Jednak wydaje się, że metody obliczeniowe, nazywane czasami (w odróżnieniu od „mokrej chemii”, czyli syntezy) „suchą chemią”, są bardzo wiarygodne. Pozwala to wierzyć w większą stabilność izomeru *in* z dziesięcioma wiązaniami wodoru



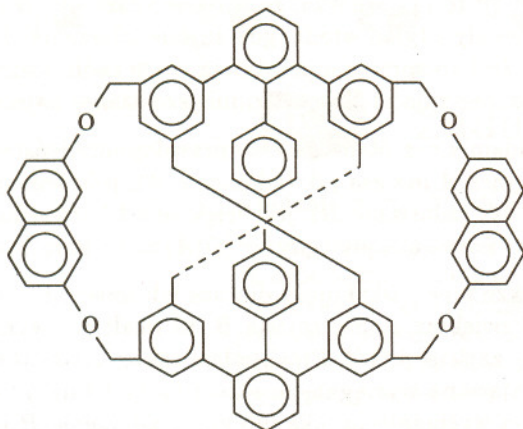
Rys. 6

wewnątrz klatki C_{60} . Warto tu również przypomnieć, że wysoka stabilność fullerenu została przewidziana teoretycznie na kilkanaście lat przed otrzymaniem tego związku. Prace te przeszły niezauważone, co znacznie utrudniło Kroto i Smalley’owi, którzy jako pierwsi zaobserwowali wyjątkowo stabilną cząsteczkę C_{60} , przypisanie jej prawidłowej budowy.

Rys. 3

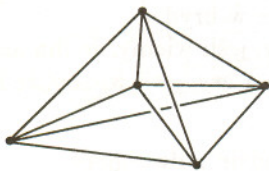
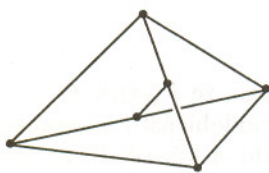
Cząsteczki o nietrywialnej topologii są w chemii czymś więcej niż zwykłą ciekawostką. Odgrywają one ważną rolę w rozwoju metod syntezy związków organicznych. Na przykład katenany otrzymywano kiedyś w sposób przypadkowy w reakcji zamykania dużych pierścieni. Przy takiej reakcji prawdopodobieństwo tego, że pewne (nieliczne) łańcuchy zamkną się tworząc pierścienie po przewleczeniu przez inny, uprzednio utworzony pierścień, jest niewielkie. Oczywiście, wydajności takich reakcji były więc bardzo niskie. Obecnie uzyskuje się większe ilości katenanów korzystając z tak zwanego zjawiska *preorganizacji*. Polega ono na tym, iż tak dobiera się reagujące związki, że ich fragmenty ustawiają się w odpowiedni sposób względem siebie, dzięki czemu zwiększa się prawdopodobieństwo uzyskania struktury „przewleczonej”. W ten sposób otrzymano zarówno katenany z rysunków 3 i 4, jak i cząsteczkę o strukturze trójlistnika (rys. 1).

Jeżeli przedstawić atomy wchodzące w skład cząsteczki jako punkty (zwane wierzchołkami) i połączyć liniami (zwanymi krawędziami) te z nich, między którymi jest wiązanie chemiczne, to otrzymany graf nazywa się grafem tej cząsteczki. Jak łatwo się domyślić, obecnie rozwija się również zastosowania teorii grafów w chemii.



Rys. 7

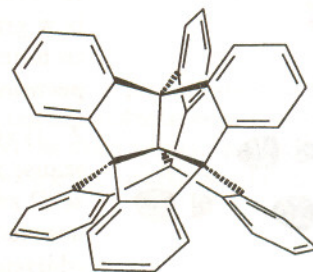
Twierdzenie Kuratowskiego. Graf jest niesplaszczalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest w nim co najmniej jeden z następujących dwóch fragmentów:



Była o tym mowa w poprzednim numerze *Delty*.

Red.

Omówione powyżej nietrywialne topologicznie cząsteczki charakteryzują się tym, że odpowiadające im grafy są niesplaszczalne, czyli nie dają się narysować na płaszczyźnie w ten sposób, by ich krawędzie nie przecinały się. Przedstawiona na rysunku 7 cząsteczka też ma niesplaszczalny graf, a wymieniamy ją w tym miejscu, bo stanowi rzadkie w literaturze chemicznej *polonicum* – została nazwana *cyklofanem Kuratowskiego* na cześć sławnego polskiego topologa, który jest też autorem zasadniczego twierdzenia o grafach niesplaszczalnych. Innym ciekawym przykładem cząsteczki o niesplaszczalnym grafie jest związek pokazany na rysunku 8.



Rys. 8

Bardzo interesujące są dwa inne zagadnienia związane z cząsteczkami topologicznymi. Pierwsze dotyczy ich wykorzystania w syntezie chemicznej. Jeśli pasek, z którego chcemy uzyskać wstęgę Möbiusa, przekręcimy przed sklejeniem nie raz, lecz dwa razy, to otrzymana powierzchnia po rozcięciu tworzyć będzie katenan złożony z dwóch przeplecionych wstęg Möbiusa. Drugie zagadnienie to pytanie o rolę, jaką grają w przyrodzie związki nietrywialne topologicznie. Już „zwykłe” cykliczne DNA ma nietrywialną topologię ze względu na przeplecenie pierścieni. Na podstawie pomiarów dokonanych metodą mikroskopii elektronowej stwierdzono, że w organizmach występują one dość często w postaci katenanu lub trójlistnika; jak dotąd nie wiadomo zresztą, jaką rolę pełni ich struktura w organizmach żywych. Bardzo interesujące jest badanie specjalnych enzymów, zwanych *topoizomerazami*, które umożliwiają syntezę takich topologicznie nietrywialnych struktur.

Jak widać, zainteresowanie cząsteczkami topologicznymi jest spowodowane nie tylko względami estetycznymi. Ich celowa synteza stanowi wyzwanie dla chemików, prowadząc w konsekwencji do opracowywania nowych, bardziej wydajnych metod otrzymywania cząsteczek organicznych. Uzyskuje się tą drogą nowe związki chemiczne i modeluje procesy zachodzące w organizmach żywych. Prowadzi to również do tworzenia nowych związków chemicznych stwarzających nadzieje na uzyskiwanie m.in. nowych materiałów dla elektroniki, nowych elementów sensorów czy urządzeń wykorzystujących nieliniowe efekty optyczne.

Zaskakujące własności prawdopodobieństwa warunkowego

Jacek JAKUBOWSKI

Prawdopodobieństwo warunkowe jest zdefiniowane wzorem $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ dla takich zdarzeń B , że $P(B) > 0$. Definicja jest naturalna, ma wiele „porządnych” własności i wiele zastosowań. Ale ma też własności, które przeczą potocznym wyobrażeniom i są bardzo zaskakujące dla większości osób. Niezdawanie sobie z nich sprawy prowadzi do błędnych rozumowań. Pokażę tu trzy przykłady takich zaskakujących własności.

Dla prostoty założmy, że przestrzeń zdarzeń elementarnych jest zbiorem skończonym.

Własność 1

(1) $P(A|B) > P(A) \iff P(B|A) > P(B)$,
gdyż każda strona jest równoważna nierówności $P(A \cap B) > P(B)P(A)$.

Gdy nierówność $P(A|B) > P(A)$ będziemy interpretowali w ten sposób, że zajście zdarzenia B zwiększa szansę zajścia zdarzenia A (co wydaje się sensowną interpretacją), to (1) oznacza, że zajście zdarzenia B zwiększa szansę zajścia zdarzenia A wtedy i tylko wtedy, gdy zajście zdarzenia A zwiększa szansę zajścia zdarzenia B . Jest to sprzeczne z intuicją wielu osób, którym wydaje się, że jeśli B zwiększa szansę zajścia A , to A zmniejsza szansę zajścia B .

Korzystając z (1) widzimy bez obliczania, że prawdopodobieństwo tego, iż w grze w brydża gracz A ma asa pik (zdarzenie A), jeśli wiemy, że ma co najmniej jednego asa (zdarzenie B), jest większe od bezwarunkowego prawdopodobieństwa, że ma asa pik (gdyż $P(B|A) = 1$ i korzystamy z (1)).

Z (1) związane są także inne zaskakujące dla nas własności, np. jeśli D zwiększa szansę zajścia A i D zwiększa szansę zajścia B , to wcale nie wynika z tego, że D zwiększa szansę zajścia $A \cap B$. Przykładem takiej sytuacji może być doświadczenie polegające na wyciągnięciu jednej karty z talii 52 kart. Niech zdarzenie A polega na wyciągnięciu pika lub kiera, zdarzenie B polega na wyciągnięciu trefla lub kiera, natomiast zdarzeniu D sprzyja wyciągnięcie asa lub króla kier, lub trefla nie będącego asem, lub pika nie będącego asem (proszę wykazać, że $P(A|D) > P(A)$, $P(B|D) > P(B)$ i $P(A \cap B|D) < P(A \cap B)$).

Własność 2

Niech A, B, C będą takimi zdarzeniami, że $C \subset A \cap B$ i B nie zawiera się w A . Wtedy

$$P(C|A) > P(C|A \cup B).$$

(ta nierówność jest prostą konsekwencją definicji i tego, że $P(A) < P(A \cup B)$). W szczególności, gdy wiemy, że zaszło A , to prawdopodobieństwo warunkowe, że zaszło $A \cap B$, jest większe, niż gdy wiemy, że zaszło A lub zaszło B , lub zaszły oba naraz.

Korzystając z tego widzimy bez obliczania, że w grze w brydża prawdopodobieństwo zdarzenia, że gracz A ma 4 asy, jeśli wiemy, że ma asa pik, jest większe od prawdopodobieństwa, że gracz A ma 4 asy, jeśli wiemy, że ma co najmniej jednego asa.

Inny przykład: Wybieramy jedną rodzinę spośród rodzin z dwojgiem dzieci. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybierzemy rodzinę z dwoma chłopcami, jeśli wiemy, że w wybranej rodzinie jest chłopiec, jest mniejsze od prawdopodobieństwa zdarzenia, że w wybranej rodzinie jest dwóch chłopców, jeśli wiemy, że starsze dziecko jest chłopcem.

Ta własność, znana wśród matematyków grywających w brydża pod nazwą *paradoksu drugiego asa* (równie dobrze można tu bowiem mówić nie o 4, tylko o 2 asach), była ponad osiemdziesiąt lat temu przyczyną nieporozumienia między egzaminatorami na Wydziale Matematyki Uniwersytetu w Cambridge. Można o tym przeczytać w *A mathematician's miscellany* Johna Edensora Littlewooda.

Red.

Własność 3

Paradoks Simpsona

Może zachodzić:

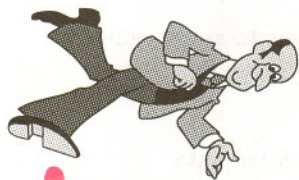
$$(2) \quad P(A|B) < P(A|B')$$

i jednocześnie

$$(3) \quad P(A|B \cap C) \geq P(A|B' \cap C), \quad P(A|B \cap C') \geq P(A|B' \cap C').$$

A' , B' , C' oznaczają zdarzenia przeciwne do A , B i C . Wydaje się to sprzeczne z intuicją, gdyż ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite $P(A|B)$ jest średnią ważoną z $P(A|B \cap C)$ i $P(A|B \cap C')$, a $P(A|B')$ jest średnią ważoną z $P(A|B' \cap C)$ i $P(A|B' \cap C')$. Ale odpowiednie wagi mogą być różne i w rezultacie (2) i (3) mogą zachodzić jednocześnie. Gdy zdarzenia B i C są niezależne, to ten paradoks nie może zajść. Paradoks pokazuje, z jak wielką uwagą i ostrożnością powinniśmy stosować wnioskowanie oparte na prawdopodobieństwie warunkowym. Słownie można sformułować paradoks w następujący sposób:

Może się zdarzyć sytuacja, że w mieście X jest większa umieralność chorych na raka niż w mieście Y , a mimo to dla chorych kobiet większa umieralność jest w mieście Y i dla chorych mężczyzn także większa umieralność jest w mieście Y .



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 810. Pewna bakteria z prawdopodobieństwem p po upływie sekundy dzieli się na dwie bakterie potomne, natomiast z prawdopodobieństwem $1 - p$ po upływie tej sekundy ulega naturalnemu rozkładowi. Każda z bakterii potomnych podlega podobnym prawom rozmnażania. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby potomstwa tej bakterii po n sekundach.

Rozwiązanie na str. 9

M 811. Udowodnić, że jeśli $p < \frac{1}{2}$, to potomstwo naszej bakterii z prawdopodobieństwem 1 wyginie po upływie jakiegoś czasu.

Rozwiązanie na str. 16

M 812. Obliczyć prawdopodobieństwo wyginięcia potomstwa naszej bakterii po upływie pewnego czasu, jeśli $p \geq \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Piotr ZALEWSKI

F 453. W trakcie pokazu fizycznego dokonano elektronicznego pomiaru czasu $\Delta t = 200 \mu\text{s}$, w którym zderzające się kulki o promieniu r (patrz rysunek) stykają się. Oszacować średnią siłę, z jaką działają one na siebie w czasie zderzenia (gęstość stali przyjmując równą $\rho = 7,5 \text{ g/cm}^3$).

Rozwiązanie na str. 16

Zadanie zaproponowane przez Michała Pawłaka na podstawie pokazu przeprowadzonego w ramach kursu „Wstępu do Fizyki” na Wydziale Fizyki UW.

F 454. Dowcip z brodą:

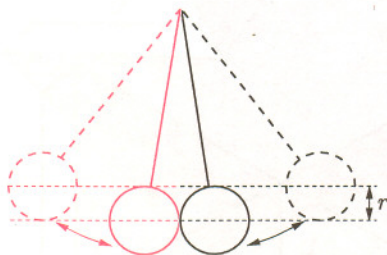
Kanonier dostał rozkaz przeniesienia za jednym razem trzech pocisków przez dość długą kładkę.

– Obywatelu działonowy, melduję, że kładka nie wytrzyma więcej niż ciężar mój i najwyżej jednego pocisku!

– Więc wykonajcie rozkaz żonglując, żołnierzu!

Czy rzeczywiście można zmniejszyć maksymalny nacisk na podłoże przez żonglowanie?

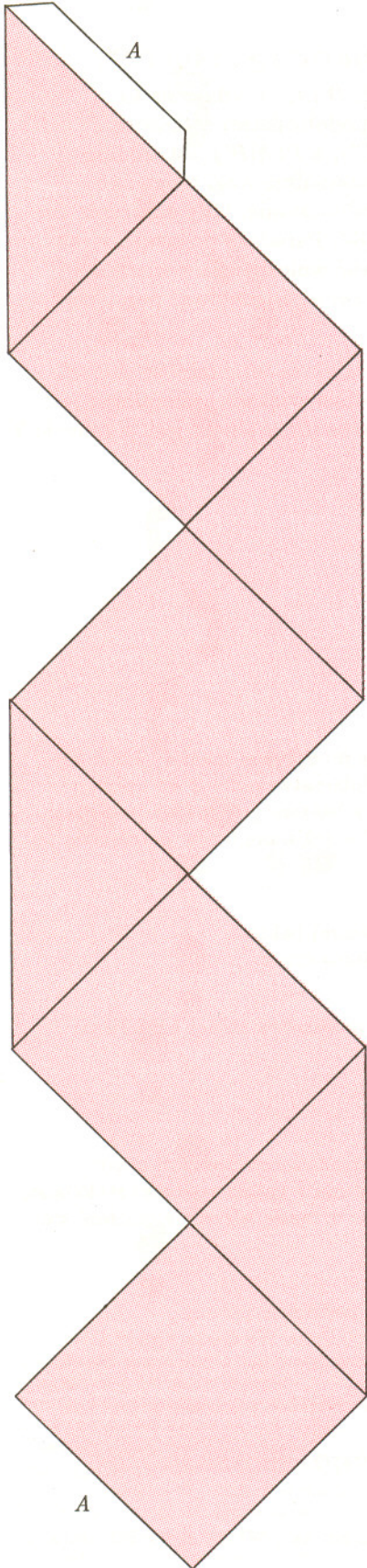
Rozwiązanie na str. 16



Wielościany składane

Jan BARANOWSKI

sześcian



Kilka lat temu prof. Tage Werner z Kopenhagi podczas pobytu w Warszawie wyjął z kieszeni prostokątny kawałek papieru i spytał, czy ktoś wie, co to jest. Kiedy upewnił się, że nikt nie wie, w mgnieniu oka złożył z tego czworościan foremny, po czym spłaszczył i z powrotem włożył do kieszeni. Zadaniem uczestników spotkania było odtworzenie tej sztuczki.

Ponieważ sam od dawna zajmuję się bryłami, bardzo mnie to zaintrygowało. Jeszcze tego samego dnia skleciłem taki składany model sześcianu. Potem następane.

Model czworościanu to pierścień złożony z ośmiu połówek trójkąta równobocznego. Sześcian udało mi się pociąć, gdy wyobraziłem sobie wpisany weń składany czworościan. Płaszczyzny cięć czworościanu wystarczy przedłużyć.

Miałem kilka pomysłów cięcia ośmiościanu, żadnego jednak już nie pamiętam, bo tutaj sprawa okazała się o wiele prostsza. Wystarczy wybrać któryś z kwadratów, jakie tworzą krawędzie ośmiościanu i rozciąć powierzchnię wzdłuż dwóch sąsiednich boków. Inaczej – wzdłuż krawędzi mających wspólny wierzchołek i w tym wierzchołku będących na wprost siebie.

Przy cięciu i składaniu kolejnych wielościanów starałem się, by papier był łamany tylko wzdłuż krawędzi, by ciąg łączących się fragmentów ścian nie miał końca (by tworzył pierścienie – przynajmniej jeden), by cięcia były jak najprostsze i oszczędne.

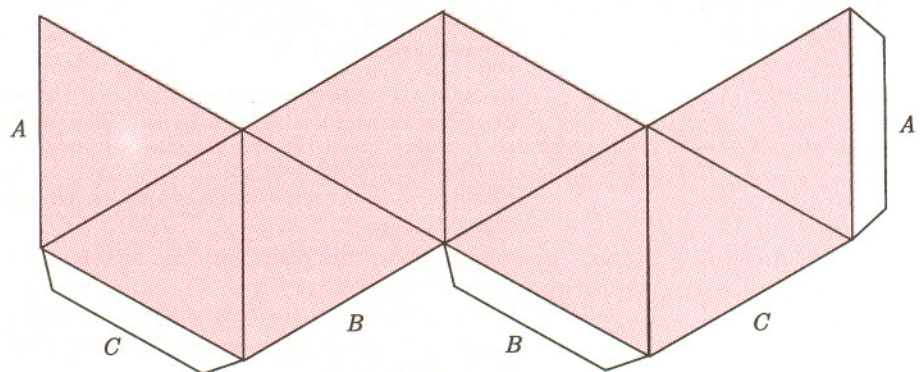
Można zauważyć pewne ograniczenia. Jeżeli mamy do czynienia z wierzchołkiem, w którym zbiega się nieparzysta liczba ścian, a raczej jeżeli suma kątów płaskich przy tym wierzchołku nie da się podzielić „sprawiedliwie” na pół, tak żeby żaden z tych kątów nie „wystawał” z połówki – wtedy cięcie musi mieć przynajmniej koniec w tym wierzchołku. Tak nie musi być w przypadku parzystych wierzchołków, np. sześcioośmiościanu czy dwunastościanu rombowego.

Dużo kłopotu sprawił mi dwudziestościan foremny, którego powierzchnię podziurawiłem wreszcie sześcioma cięciami. Model daje się zwinąć najpierw na kształt ośmiościanu foremnego, a później rozplaszczyc.

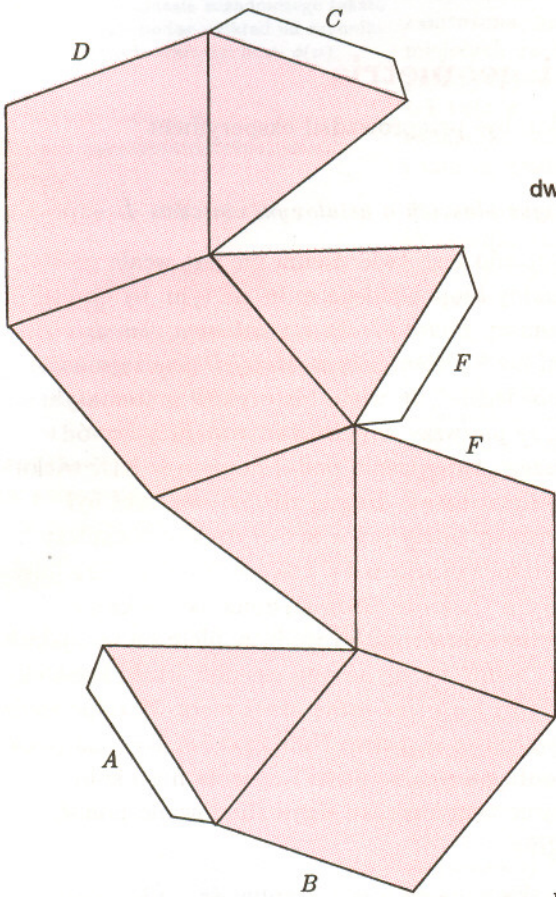
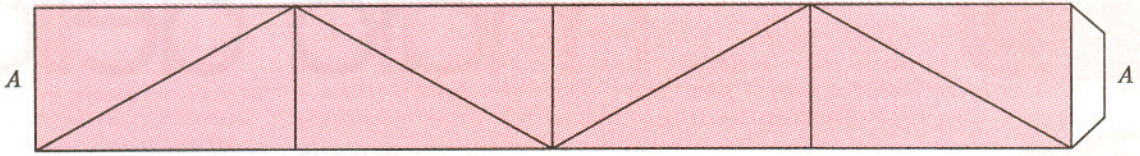
Nie udało mi się w satysfakcjonujący mnie sposób pociąć dwunastościanu foremnego. Jego wina – ma aż dwadzieścia nieparzystych wierzchołków. Może uda się to któremuś z Czytelników?

Robiąc modele (nie dotyczy to czworościanu i ośmiościanu) trzeba dobrze dobrać surowiec, papier nie może być ani za wiotki, ani zbyt sztywny.

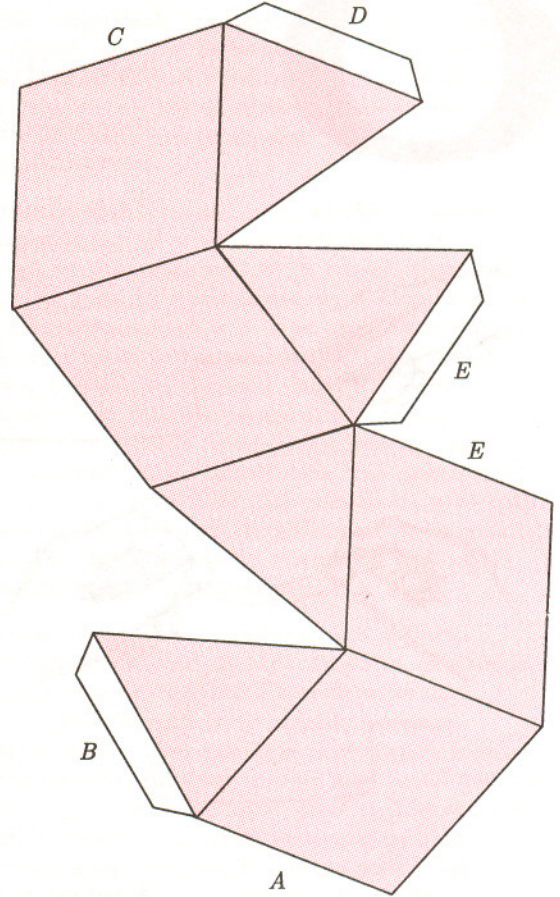
ośmiościan foremny



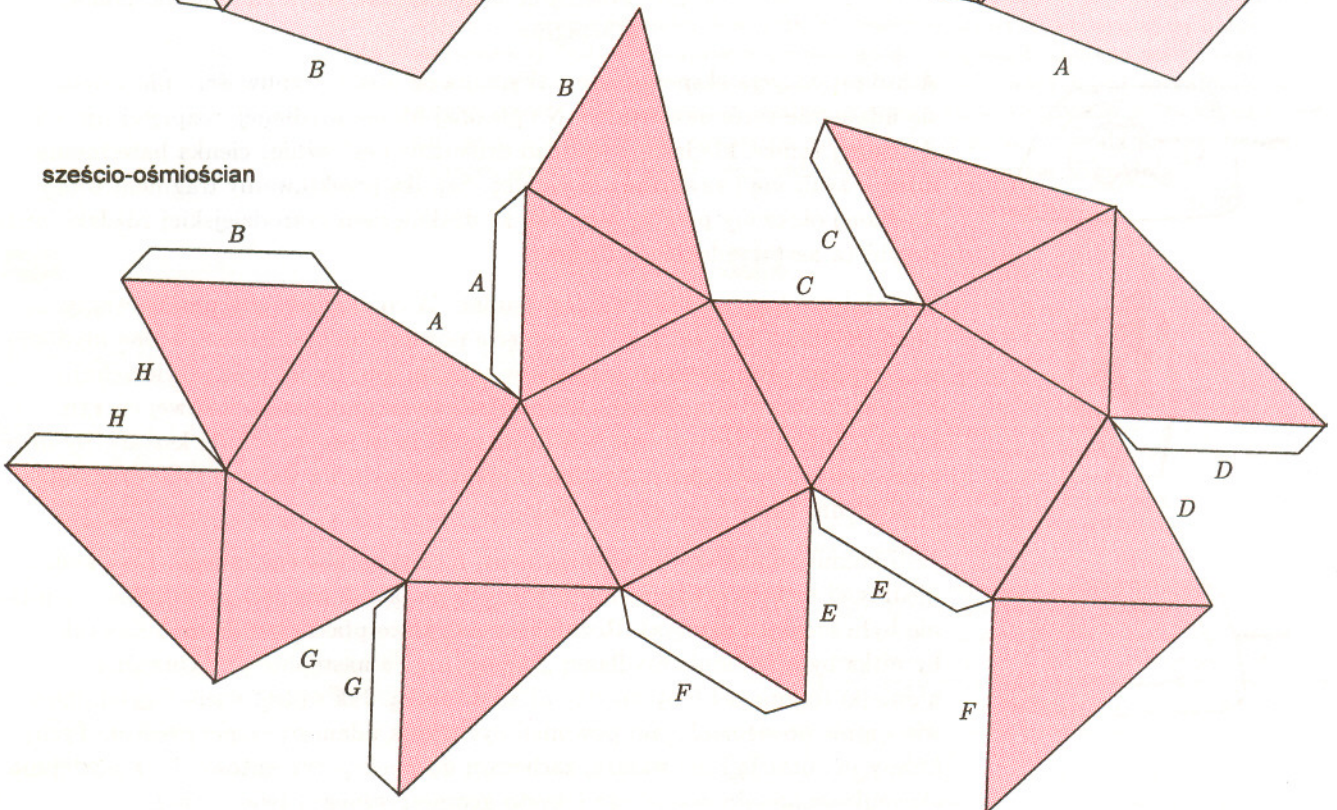
czworościan foremny



dwunastościan
rombówy



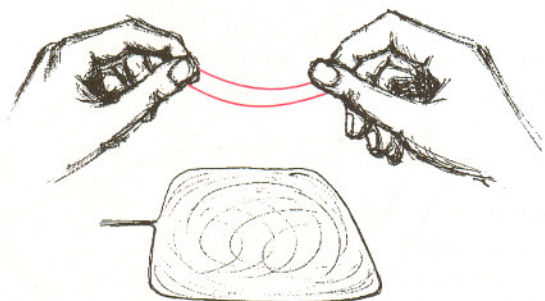
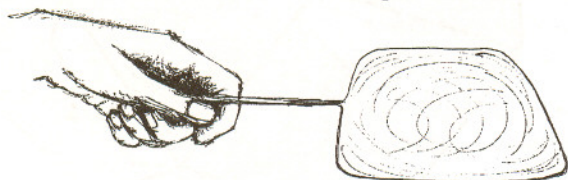
sześćcio-ośmiościan



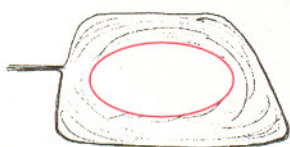
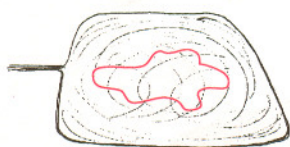
Wergiliusz, mydło i geometria

Proponujemy Ci, drogi Czytelniku, byś przeprowadził eksperyment potwierdzający następujące

Twierdzenie. *Ze wszystkich figur płaskich o ustalonym obwodzie L największe pole ma koło.*



Ścisły dowód tego twierdzenia nie jest wcale prosty. Niebanalny kłopot polega m.in. na tym, by określić, co to znaczy *figura płaska o ustalonym obwodzie L* , ale tym nie będziemy się w *Małej Delcie* zajmować. Dość powiedzieć, że wielu historyków matematyki uważa, że pierwszy w pełni zadowalający dowód powyższego twierdzenia podał dopiero w XIX wieku Karl Weierstrass. Z drugiej strony, sam fakt był najwyraźniej znany już w starożytności. Świadczy o tym m.in. zawarta w IV księdze *Eneidy* Wergiliusza opowieść o Dydonie. Otóż Dydona, córka króla Tyru, miała otrzymać od wodzów plemion nubijskich kawałek ziemi, by się na nim osiedlić – taki kawałek, który dałby się *objąć jedną skórą wołu*. W odpowiedzi na niewątpliwe skąpstwo Nubijczyków, Dydona pocięła skórę wołu na cienkie paski i opasała nimi koło. Później na tym kawałku ziemi zbudowano ponoć Kartaginę.



A oto propozycja eksperymentu. Wymaga on nieco cierpliwości i nie zawsze się udaje, ale spróbować warto. Na płaskiej błonie mydlanej, rozpiętej np. na drucianej ramce, kładziemy (bardzo delikatnie i ostrożnie) cienką bawełnianą nitkę – zwilżoną i zawiązaną w pętelkę. Szpilką przekuwamy fragment błony mydlanej otoczony pętelką nici. Jak za dotknięciem czarodziejskiej różdżki, nitka przybiera kształt idealnego okręgu.

Wyjaśnienie tego zjawiska nie jest trudne. W momencie, gdy przekuwamy błonę mydlaną wewnątrz nitki, napięcie powierzchniowe zmusza błonę mydlaną na zewnątrz nitki do skurczenia się w taki sposób, by jej pole powierzchni było najmniejsze z możliwych (odpowiada to najmniejszej możliwej energii błony). Zatem, pusty obszar wewnątrz nitki musi przybrać taki kształt, by mieć pole możliwie największe. Zgodnie z przytoczonym na wstępie twierdzeniem, odpowiedni kształt ma właśnie koło.

Jeśli komuś znudzi się ten eksperyment, można spróbować innego. Dwa końce niedługiej nitki przywiązujemy w różnych punktach ramki z drutu (tak, by nitka nie była sztywno napięta). Rozpinamy na ramce płaską bańkę mydlaną tak, by nitka była w błonie mydlanej „zanurzona”, a następnie przekuwamy niewielki fragment błony między nitką a ramką. Jak sądzę, wielu Czytelników wie i umie powiedzieć, jaki powinien być wynik udanego eksperymentu. Tych, którzy nie umieją i nie wiedzą, zachęcam do poeksperymentowania, a następnie sformułowania odpowiedniego (czysto geometrycznego) twierdzenia.

Małą Deltę przygotował Paweł STRZELECKI

Szanowna Redakcjo!

Z dużą ciekawością przeczytałem artykuł o kryptografii zamieszczony w numerze marcowym. Postanowiłem spróbować rozwiązać problem postawiony przez Autora na marginesie zasadniczego tekstu artykułu, czyli podać rozkład na czynniki liczby n , a także wartości liczb $\phi(n)$ oraz d .

W artykule podano, że

$$n = 245432656233769542083107,$$

a zatem

$$p = 435635644373$$

i

$$q = 563389748759.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \phi(n) &= 245432656232770516689976 = \\ &= 2^3 \cdot 103 \cdot 127 \cdot 191 \cdot 21534659 \cdot 570203723. \end{aligned}$$

Stąd zaś

$$d = 56638305284485503851533.$$

Mamy bowiem

$$\begin{aligned} 13 \cdot 56638305284485503851533 - \\ - 3 \cdot 245432656232770516689976 = 1. \end{aligned}$$

Problem był niezbyt trudny, ale dość ciekawy.

Serdeczne pozdrowienia
Waldemar GORZKOWSKI
Warszawa, 97-02-28

Chyba każde doniesienie o obecności wody gdzieś we Wszechświecie budzi podejrzenie, że może tam właśnie są warunki sprzyjające życiu. Woda jest wszak jednym z podstawowych składników organizmów żywych – w każdym razie, tylko takie organizmy znamy. Jednak aby życie mogło zaistnieć, woda musi występować w stanie płynnym, a to możliwe jest w niezmiernie wąskim, jak na warunki kosmiczne, zakresie temperatur. Tymczasem poza Ziemią w Układzie Słonecznym woda jest na ogół zamrożona, np. na satelitach Jowisza, w kometach, czy nawet w wiecznie ocienionych miejscach na Merkury. Nawet na Marsie sezonowe pojawianie się i zanikanie czap polarnych nie oznacza, że woda dosłownie przepływa z jednego bieguna na drugi. Może tak było w zamierzchłej przeszłości, lecz obecnie lód na ogrzewającym się biegunie sublimuje, woda w postaci gazowej przenoszona jest przez wiatr na przeciwny biegun i tam się osadza.

Para wodna jest jedną z substancji zdolnych do przejawiania zjawiska maserowego. W ośrodku takim możliwa jest mianowicie tzw. inwersja obsadzeń poziomów energetycznych, tzn. w stanie o energii wyższej może znaleźć się więcej cząsteczek niż w stanie o energii niższej, co więcej – zachodzi to w temperaturze, w której zasadniczo tak być nie powinno. Inwersja obsadzeń osiągnana jest w wyniku tzw. pompowania, czyli zazwyczaj oświetlenia ośrodka przez jakies zewnętrzne źródło. Gdy ośrodek jest już „napompowany”, wtedy foton o określonej częstości (innej niż częstość promieniowania pompującego) może wymusić przejście jakiejś cząsteczki do stanu niższego z jednoczesnym wyświeceniem identycznego fotonu, mającego tę samą częstość, fazę i kierunek. Z kolei te dwa fotony mogą zmusić dwie inne cząsteczki do wyświecenia dwóch następnych identycznych fotonów itd. Tak rozwija się w ośrodku zjawisko maserowe (słowo maser to skrót od Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation), mikrofalowy odpowiednik zjawiska laserowego dla światła (a słowo laser to skrót od Light Amplification. . . i dalej tak samo).

Najodleglejším obiektem, o którym wiadomo, że zawiera wodę, jest aktywna galaktyka Markarian 1, leżąca w Rybach w odległości 60 Mpc. Woda ta, oczywiście, znajduje się tam w formie nie sprzyjającej życiu, a odkryta została w wyniku zaobserwowania mikrofalowej linii emisyjnej charakterystycznej dla wodnego masera. Maser ten zasilany jest przez aktywne jądro galaktyki (zawierające zapewne masywną czarną dziurę) i w tej jednej linii mikrofalowej emituje moc ponad 130 razy przewyższającą całkowitą moc Słońca. Jest to w przybliżeniu sześć rzędów wielkości więcej od przeciętnej mocy kosmicznych maserów, którymi zazwyczaj są obłoki rozproszonej materii położone w pobliżu gorących gwiazd. Dlatego maser taki bywa żargonowo nazywany „megamaserem”. Obecnie znanych jest co najmniej pięć megamaserów. Nie wiadomo dokładnie, dlaczego zjawisko takie w pewnych galaktykach zachodzi, a w innych nie, natomiast można przypuszczać, że woda jest związkiem występującym we Wszechświecie obficie, niż się dotychczas zdawało.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania M 810. Niech X_n będzie zmienną losową oznaczającą liczbę bakterii po upływie n sekund, Y_1, Y_2, \dots zaś niech będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, przyjmującymi z prawdopodobieństwem p wartość 2, natomiast z prawdopodobieństwem $1 - p$ wartość 0. Wówczas $EX_0 = 1$, a dla $n \geq 1$ mamy

$$\begin{aligned} EX_n &= E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{X_{n-1}}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_k) \cdot P(X_{n-1} = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (EY_1 + EY_2 + \dots + EY_k) \cdot P(X_{n-1} = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} EY_1 \cdot kP(X_{n-1} = k) = \\ &= EY_1 \sum_{k=0}^{\infty} kP(X_{n-1} = k) = 2p \cdot EX_{n-1}. \end{aligned}$$

Zatem $EX_n = (2p)^n$.



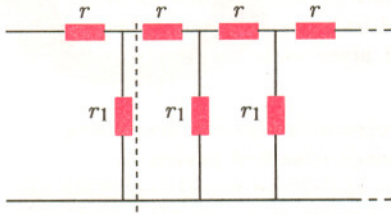
Rozwiązanie zadania M 812. Oznaczmy przez q_n prawdopodobieństwo wyginięcia potomstwa bakterii nie później niż po n sekundach. Wówczas $q_0 = 0$, a dla $n \geq 1$ mamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite $q_n = pq_{n-1}^2 + (1 - p)$. Oczywiście, q_n jest ciągiem niemalejącym, ograniczonym z góry przez 1, więc zbieżnym do pewnej liczby $g \in [0, 1]$. Przechodząc do granicy w rekurencyjnym wzorze na q_n dostajemy $g = pg^2 + 1 - p$. Stąd $g = 1$ lub $g = (1 - p)/p \leq 1$. Przez indukcję łatwo dowodzimy, że $q_n \leq (1 - p)/p$ dla wszystkich n naturalnych, stąd $g \leq (1 - p)/p$, toteż ostatecznie $g = (1 - p)/p$ jest szukanym prawdopodobieństwem.

Uwaga. Wnikliwy Czytelnik może zechcieć rozważyć bardziej złożony model reprodukcji, gdy każda z bakterii z prawdopodobieństwem p_0 ginie nie pozostawiając potomstwa, z prawdopodobieństwem p_1 żyje dalej, z prawdopodobieństwem p_2 dzieli się na dwie potomne, z prawdopodobieństwem p_3 na trzy itd. Okazuje się, że wówczas warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by bakterie wyginęły z prawdopodobieństwem 1 po pewnym czasie, jest $1 \geq \sum kp_k$ (wartość oczekiwana liczby potomków jednej bakterii po jednej sekundzie nie przekracza 1) i $p_0 > 0$. Podobny model stosuje się do bardziej związanych z rzeczywistym światem zagadnień, np. dziedziczenia nazwisk w linii męskiej lub DNA mitochondrialnego w linii żeńskiej.

Sieci elektryczne i liczby Fibonacciego

Krzysztof REJMER

Obliczanie oporu zastępczego układu oporników to chyba najbardziej nudne i mechaniczne zadanie, jakie można spotkać w fizyce. Istnieje jednak i tu kilka problemów niewiele wykraczających poza rutynę szeregowych i równoległych połączeń, a mimo to o zaskakujących rozwiązaniach. Choć nie są one nowe, to jednak chyba na tyle rzadko dyskutowane, by warto było o nich wspomnieć w *Delcie*.



Rys. 1

Rozważmy nieskończoną sieć oporników pokazaną na rysunku 1. Jeśli oderwiemy pierwsze dwa, znajdujące się na lewo od linii przerywanej, sieć pozostanie taka sama, a więc jej opór zastępczy R także nie zmieni się. Rysunek 2 pokazuje sposób, w jaki można go obliczyć. Jest on pierwiastkiem równania

$$R = r + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r_1}},$$

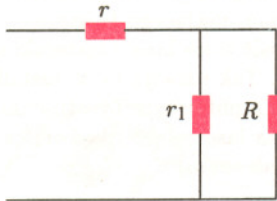
które można przepisać w postaci równania kwadratowego. Jego fizycznym rozwiązaniem jest

$$R = \frac{r}{2} (1 + \sqrt{1 + 4a}),$$

gdzie $a = \frac{r_1}{r}$. Jeśli oba opory, r i r_1 , mają jednakową wartość, to $a = 1$ i opór zastępczy jest równy

$$R = r\tau,$$

gdzie $\tau = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$ jest współczynnikiem złotej proporcji. Pozostałoby przez chwilę jeszcze przy tym szczególnym przypadku jednakowych oporów. Zauważmy najpierw, że wystarczy rozważyć sieć zbudowaną z oporników o jednostkowym oporze. Jeśli opór pojedynczego opornika jest równy r , to opór zastępczy takiej sieci jest po prostu r razy większy od oporu zastępczego sieci zbudowanej z jednostkowych oporników; wynika to z analizy wymiarowej. Opór zastępczy takiej sieci możemy obliczyć w inny sposób, wykorzystując własności ciągu Fibonacciego.



Rys. 2

Rozważmy pokazany na rysunku 3 ciąg skończonych sieci, z których każda następna powstaje w wyniku dołączenia do poprzedniej dwóch dodatkowych oporników. Opory zastępcze tych sieci są równe

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 + 1 = \frac{2}{1}, \\ R_2 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{R_1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3}, \\ R_3 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{R_2}} = \frac{13}{8}, \\ &\dots \end{aligned}$$

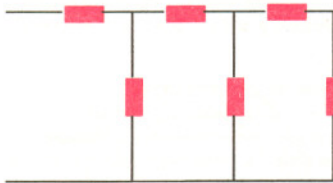
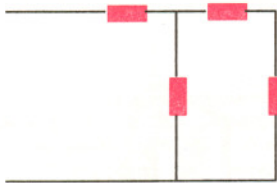
Łatwo zauważyć, że jest to podciąg ciągu stosunków kolejnych liczb Fibonacciego $\frac{F_{n+1}}{F_n}$

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots,$$

zbieżnego do współczynnika złotej proporcji, gdy $n \rightarrow \infty$. Gdy rozbudowujemy w ten sposób do nieskończoności sieć oporników o jednostkowym oporze, także jej opór zastępczy dąży do wartości równej τ .

Podobne zagadnienie można przedyskutować dla sieci zawierającej powtarzające się sekwencje zbudowane z dwóch dowolnych impedancji, niekoniecznie rzeczywistych oporów. Nie jest to już wtedy całkiem akademicki problem, gdyż taka sieć może być modelem sieci przesyłowej.

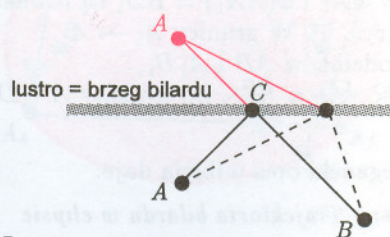
Powyższy przykład nie jest jedynym przykładem sieci elektrycznej, w którego rozwiązaniu pojawia się współczynnik złotej proporcji i liczby Fibonacciego, ale o tym opowiemy przy innej okazji.



Rys. 3

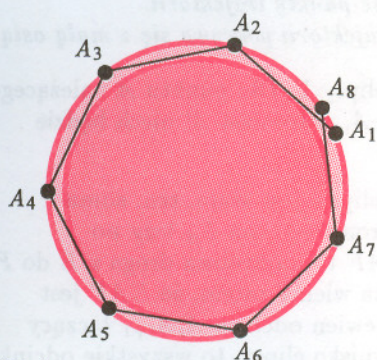
Twierdzenie Ponceleta dla bilardu w elipsie

Rafał KOŁODZIEJ

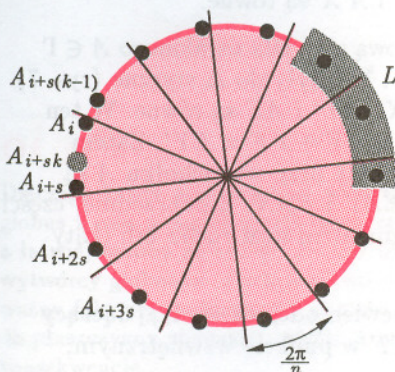


Rys. 1

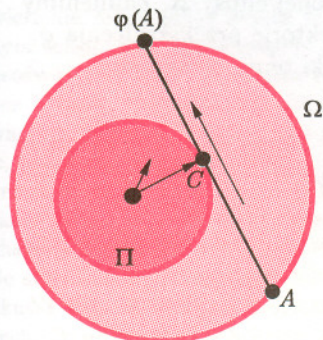
Proszę sprawdzić, że kąt wpisany rzeczywiście jest równy kątowi między cięciwą i okręgiem.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Większość z nas uderzała w kulę bilardową na prostokątnym stole bilardowym. Zasady gry zależą od rodzaju rozgrywki, natomiast ruch kuli bilardowej nie. O ile kuli nie nadajemy rotacji, odbija się ona od bandy zgodnie z prawem *kąt padania równa się kątowi odbicia*. Wystarczy odbić odcinek BC względem brzegu stołu, aby wykazać, że prawo to jest równoważne innemu: kula odbija się od brzegu w takim punkcie C , by jej droga z punktu A do punktu B była najkrótsza (jest to tzw. *zasada Fermata*, zob. rys. 1).

Spróbujmy zobaczyć, jak wygląda ruch bili na stole w kształcie koła. Uderzona bila odbija się kolejno od brzegu stołu (okręgu) w punktach A_1, A_2, A_3 , itd.; ciąg punktów: A_1, A_2, A_3, \dots nazywamy *trajekcją*, a sumę wszystkich odcinków $A_i A_{i+1}$ – *torem ruchu bili* (rys. 2). Załóżmy, że okrąg ma promień równy 1. Wówczas długość łuku okręgu między punktami A_i i A_{i+1} możemy mierzyć kątem środkowym opartym na tym łuku, albo – równie dobrze – dwukrotnie mniejszym kątem wpisanym. Ten z kolei jest równy kątowi między cięciwą $A_i A_{i+1}$ i okręgiem (czy też dokładniej, styczną do niego w punkcie A_i). Wynikają z tego dwa fakty: (a) równość kątów między cięciwą a okręgiem oraz (b) równość łuków, na których oparte są sąsiednie odcinki toru.

Zatem trajektoria punktu w bilardzie o kształcie koła jest trajekcją *obrotu* – o kąt, na którym oparty jest odcinek $A_i A_{i+1}$.

Twierdzenie 1. *Trajektoria obrotu jest okresowa albo gęsta (gęstość oznacza, że do każdego łuku okręgu należy pewien punkt trajektorii).*

Dla dowodu rozpatrzmy dwa przypadki:

1. Długość łuku $A_i A_{i+1}$ jest liczbą współmierną z 2π , czyli $\frac{A_i A_{i+1}}{2\pi}$ jest liczbą wymierną p/q . Wtedy trajektoria jest okresowa z okresem q , bo łuk $A_i A_{i+q}$ ma długość $2\pi \cdot p$.
2. $\frac{A_i A_{i+1}}{2\pi}$ jest liczbą niewymierną.

By zakończyć dowód Twierdzenia 1, wystarczy udowodnić następujący

Lemat. *Trajektoria obrotu o kąt niewspółmierny z 2π jest gęsta na okręgu.*

Dowód lematu (nie wprost). Załóżmy przeciwnie, że pewien łuk L nie zawiera żadnego punktu trajektorii A_1, A_2, A_3, \dots . Pokryjmy okrąg n łukami o długości $\frac{2\pi}{n}$, gdzie n dobieramy tak, aby $\frac{2\pi}{n} < L$ (patrz rys. 3). Ponieważ trajektoria ma więcej niż n punktów, więc dzięki *zasadzie szufladkowej Dirichleta* znajdziemy łuk pokrycia, na którym leżą dwa punkty trajektorii A_i, A_{i+s} . Wystarczy rozpatrzeć $k+1$ punktów trajektorii punktu A_i w obrocie o kąt $A_i A_{i+s}$, czyli zbiór punktów $A_i, A_{i+s}, A_{i+2s}, A_{i+3s}, \dots, A_{i+k \cdot s}$, gdzie $k \cdot A_i A_{i+s} > 2\pi$, aby w dowolnym łuku dłuższym niż $A_i A_{i+s}$, w szczególności w łuku L , znalazł się jeden z nich. ■

Zdefiniujmy teraz inne przekształcenie φ okręgu, które na pierwszy rzut oka nie wygląda na obrót, a jednak... Najpierw wewnątrz koła wyznaczonego przez okrąg Ω wybierzmy okrąg Π .

Definicja. *Obrazem punktu $A \in \Omega$ jest taki punkt $\varphi(A) \in \Omega$, że odcinek $A\varphi(A)$ jest styczny do okręgu Π i, co więcej, w punkcie styczności C zwrot wektora $\overrightarrow{A\varphi(A)}$ jest przeciwny do ruchu wskazówki zegara na tarczy Π (patrz rys. 4).*

Aby zrozumieć, że φ jest (w pewnym sensie...) obrotem, wyobraźmy sobie, że okrąg Ω jest wykonany z bardzo cienkiego drutu o zmiennej gęstości masy; matematycy mówią w takiej sytuacji o *gęstości miary*. Odległość punktów mierzymy nie długością łuku, lecz masą kawałka drutu zawartego między punktami. Drut dobierzmy w ten sposób, aby gęstość miary w punkcie A była proporcjonalna do $\frac{1}{AC}$.

Wielkie twierdzenie Ponceleta w klasycznym sformułowaniu głosi, mówiąc niezbyt precyzyjnie, że: jeśli dla dwóch stożkowych Γ_1 i Γ_2 istnieje n -kąt $A_1A_2 \dots A_n$ wpisany w Γ_1 i opisany na Γ_2 , to dla dowolnych punktów $B', B'' \in \Gamma_1$, takich, że prosta $B'B''$ jest styczna do Γ_2 , istnieje wielokąt $B'B''B_3 \dots B_n$ wpisany w Γ_1 i opisany na Γ_2 . Znane w literaturze dowody tego twierdzenia nie są ani łatwe, ani krótkie; zainteresowanych odsyłamy do XVI rozdziału *Géométrie* M. Bergera, wyd. Cedic – Fernand Nathan, Paris 1977 (istnieje przekład rosyjski).

Z twierdzeniem Ponceleta wiąże się w oczywisty sposób tekst Michała Stukowa opublikowany w *Delcie* 4/1997.

Red.

Takie spojrzenie pozwoli nam podać szkic dość prostego dowodu tzw. wielkiego twierdzenia Ponceleta.

Twierdzenie 2 (tw. Ponceleta, przypadek szczególny). Dla ustalonego Π , φ jest obrotem (przy nowym sposobie mierzenia łuku), tzn. zachowuje długość łuku.

Dowód. Wystarczy wykazać, że długości łuków AA_1 i $\varphi(AA_1) = BB_1$ są równe. Dla krótkiego łuku oznacza to, że $\frac{AA_1}{AC} \simeq \frac{BB_1}{BC}$ (rys. 5). W granicy $A_1 \rightarrow A$ możemy zastąpić punkt C punktem przecięcia odcinków AB i A_1B_1 , tzn. punktem D . Ale, oczywiście, mamy równość $\frac{AA_1}{AD} = \frac{BB_1}{BD}$, bo trójkąty AA_1D i BB_1D są podobne (dlaczego?). ■

Zagrajmy teraz bilą na eliptycznym stole Γ . Elegancki opis odbicia daje:

Twierdzenie 3 (małe twierdzenie Ponceleta) Trajektoria bilardu w elipsie spełnia jeden z następujących warunków:

1. Każdy odcinek łączący sąsiednie punkty trajektorii przechodzi przez ognisko elipsy.
2. Istnieje elipsa Δ współogniskowa z Γ , do której są styczne wszystkie odcinki łączące sąsiednie punkty trajektorii.
3. Istnieje hiperbola Δ współogniskowa z Γ , do której są styczne wszystkie proste zawierające odcinki łączące sąsiednie punkty trajektorii.
4. Każdy odcinek łączący sąsiednie punkty trajektorii pokrywa się z małą osią elipsy.

Dowód (szkic). Niech E i F będą ogniskami elipsy Γ . Dla punktu A należącego do elipsy niech L_A oznacza styczną do elipsy w A , natomiast A' niech będzie odbiciem ogniska F względem L_A (rys. 6).

Droga z punktu E do F przez każdy punkt na elipsie jest stała, tzn. suma $EA + AF$ nie zależy od wyboru A . Z drugiej strony, styczna L_A leży po przeciwnej stronie Γ niż E i F , zatem droga EAF to najkrótsza droga z E do F przez punkt prostej L_A . Dzięki zasadzie Fermata wiemy zatem, że EAF jest fragmentem toru ruchu bili (rys. 6); jeśli więc pewien odcinek A_iA_{i+1} łączący sąsiednie punkty trajektorii przechodzi przez ognisko elipsy, to wszystkie odcinki A_iA_{i+1} mają tę własność (warunek 1 z tezy Tw. 3).

Uwaga 1. Dla każdego $X \in L_A$ odległości FX i $A'X$ są równe.

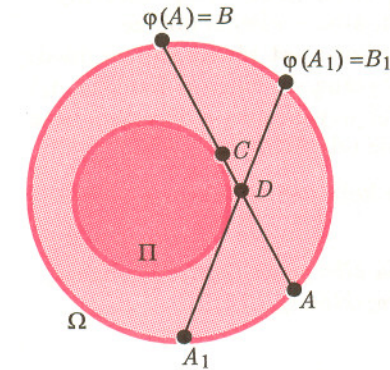
Rozpatrzmy teraz pewną elipsę Δ współogniskową z Γ . Dla ustalonego $A \in \Gamma$ weźmy takie punkty $X, Y \in \Delta$, by odcinki XA i YA były do Δ styczne (rys. 7). Zgodnie z Uwagą 1 długości odcinków AA', AX', AY' i AF są równe. W ten sam sposób sprawdzamy, że $EX' = EX + XF = EY + YF = EY'$. Zatem trójkąty EAX' i EAY' są przystające, więc ich kąty przy wierzchołku A są równe. Łatwo sprawdzić, że równe są też kąty EAY i FAX . Z poprzedniej części dowodu wynika więc, że łamana YAX jest fragmentem toru ruchu bili (kąty padania i odbicia w punkcie A są równe).

Czytelnik Wnikliwy zechce sprawdzić, że gdy pewien odcinek A_iA_{i+1} łączący sąsiednie punkty trajektorii przecina odcinek EF w punkcie wewnętrznym, to zachodzi warunek 3 lub 4 z tezy Tw. 3. ■

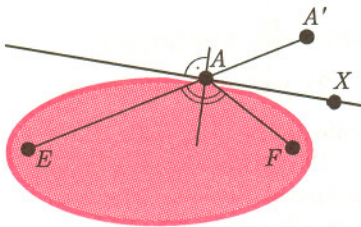
Z powodów technicznych ograniczymy dalsze rozważania do przypadku, gdy każdy odcinek toru ruchu bili jest styczny do ustalonej elipsy Δ . Zamienimy teraz sprytnie trajektorię bilardu w elipsie na trajektorię przekształcenia ϕ , a potem – na trajektorię φ (rys. 8 i okładka). Dzięki temu otrzymamy następujący wynik.

Twierdzenie 4 (Poncelet). Trajektoria bilardu w elipsie Γ jest okresowa ze stałym okresem $n(\Delta)$ (zależnym tylko od Δ) albo gęsta.

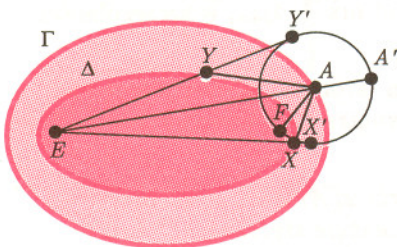
Dowód (szkic). Trajektorię bilardu A_1, A_2, A_3, \dots zamienimy na trajektorię B_1, B_2, B_3, \dots pewnego przekształcenia ϕ w następujący sposób. Odcinek A_iA_{i+1} jest styczny do Δ w punkcie X ; zdefiniujmy B_i jako X' . Udowodniliśmy już, że pewien okrąg o środku A_i zawiera punkty F, X', Y' i A'_i . Co więcej, okrąg ten jest styczny wewnątrz do okręgu o środku E i promieniu $R = EA'_i = EA_i + A_iF$ równym długości nici rysującej elipsę Γ .



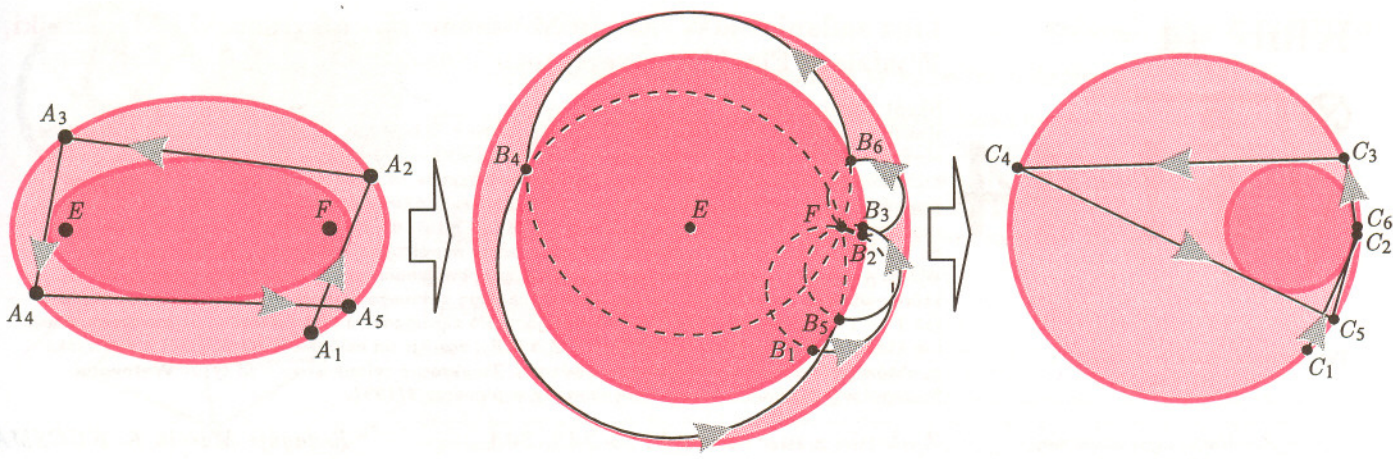
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Ponieważ $EB_i = EX + XF$ jest długością nitki rysującej elipsę Δ (czyli ma wartość stałą, niezależną od i), więc przekształcenie ϕ przeprowadzające B_i w B_{i+1} jest przekształceniem okręgu o środku E i promieniu $r = EX + XF$, gdzie $X \in \Delta$. Inaczej mówiąc, przy oznaczeniach z rysunku 7, ϕ przeprowadza punkt $X' = B_i$ w punkt $\phi(X') = Y' = B_{i+1}$.

Inwersja względem okręgu o środku F zamieni trajektorię B_1, B_2, B_3, \dots na trajektorię C_1, C_2, C_3, \dots przekształcenia φ . Zauważmy bowiem, że łuki $B_i B_{i+1}$ okręgów przechodzących przez F zamienią się po inwersji na odcinki, a okręgi o środku E i promieniach r, R przejdą na inne okręgi (niewspółśrodkowe; patrz rys. 8). Twierdzenie 2 tłumaczy, że C_1, C_2, C_3, \dots jest (przy odpowiednim sposobie mierzenia długości łuku) trajektorią obrotu. ■

Na koniec zadanie dla wytrwałych: proszę udowodnić twierdzenie Ponceleta bez założenia, że każdy odcinek łączący sąsiednie punkty trajektorii jest styczny do elipsy Δ .

Bilardzista, który chce trafić na stole eliptycznym w inną bilę w karambolu, musi więc umieć wyobrażać sobie elipsy i hiperbole współogniskowe (rysunek z okładki), tylko gdzie sprawdzić w praktyce nabytą wiedzę?

Oś globusa

Dlaczego każdy globus ma oś odchyloną od pionu? Przecież globus z osią pionową przedstawiałby tę samą Ziemię, a łatwiej byłoby go zrobić. Jednak nie jest to fantazja wytwórcy globusów. Pochylenie osi obrazuje bardzo ważny fakt przyrodniczy: oś ziemską nie jest prostopadła do płaszczyzny ziemskiej orbity. A ma to ogromne konsekwencje.

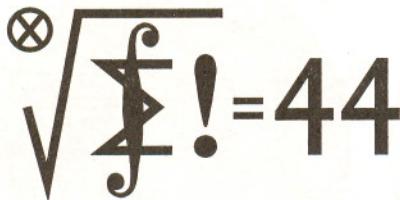
Gdyby oś ziemską była prostopadła do płaszczyzny orbity, to w dowolnym miejscu orbity, a więc przez cały rok, oświetlenie Ziemi przez Słońce byłoby stale takie samo, w tym sensie, że granica między półkulą oświetloną i nieoświetloną (tzw. terminator) przechodziłaby zawsze przez bieguny. Człowiek znajdujący się na dowolnym równoleżniku miałby stale 12-godzinny dzień i 12-godzinna noc, panowałaby więc permanentna równonoc.

W rzeczywistości jednak oś ziemską jest pochylona o około $23,5^\circ$ i, co więcej, w trakcie obieganania Słońca zachowuje stały kierunek w przestrzeni, a konkretnie jest stale skierowana (w przybliżeniu) w Gwiazdę Polarną. Wskutek tego terminator tylko dwa razy w ciągu roku przechodzi przez bieguny (około 21 III i 21 IX), a między tymi datami Słońce oświetla bardziej albo północną, albo

południową półkulę Ziemi. Krótko mówiąc, pochylenie osi ziemskiej jest przyczyną występowania pór roku. Półkula północna jest najsilniej nasłoneczniona w okolicy 21 VI. Jest to początek naszego lata i zarazem data, gdy Słońce oświetla prostopadłymi promieniami miejsca Ziemi odległe na północ od równika o $23,5^\circ$ – bardziej na północ już się nie da, a równoleżnik o tej szerokości geograficznej to zwrotnik Raka. Oczywiście, na początku naszej zimy promienie prostopadłe padają na zwrotnik Koziorożca o szerokości $-23,5^\circ$. Tak więc ta sama przyczyna powoduje też występowanie stref klimatycznych na Ziemi.

A jak jest na innych planetach? Okazuje się, że rozmaicie. Oś obrotu Jowisza jest praktycznie prostopadła do płaszczyzny jego orbity, tam więc pór roku nie ma – panuje permanentna równonoc, a Słońce oświetla prostopadłe tylko równik planety. Oś obrotu Urana – przeciwnie – jest nachylona o około 90° , leży więc w płaszczyźnie jego orbity. Wskutek tego co pół tamtejszego roku Słońce oświetla prostopadłe raz jeden, raz drugi jego biegun. Wobec tego, może na Ziemi nie jest tak źle: nie jest tak monotonna jak na Jowiszu, ale też nie ma takich skrajności jak na Uranie.

Tomasz KWAST



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 1997

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 327 (WT=1,94), 328 (WT=3,23),
z numeru 10/1996

Krzysztof Zapisek - Warszawa 40,70
Piotr Żmijewski - Łódź 39,15
Bartłomiej Dyda - Wrocław 36,33
Jarosław Łazuka - Warszawa 33,94

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Zadania z matematyki nr 343, 344

Redaguje Marcin E. KUCZMA

343. Niech $(g(n) : n = 1, 2, 3, \dots)$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich dodatnich liczb całkowitych, które nie są kwadratami liczb całkowitych (np. $g(1) = 2, g(4) = 6, g(13) = 17$, itd.). Dla liczby rzeczywistej x oznaczmy przez $r(x)$ jedyną liczbę całkowitą leżącą w przedziale $(x - \frac{1}{2}; x + \frac{1}{2})$. Dowieść, że $g(n) = n + r(\sqrt{n})$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

344. Obliczyć kres dolny zbioru liczb będących sumami szeregów postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_{n+1}}, \text{ gdzie } a_0 = 1, a_{n-1} \geq a_n > 0 \text{ dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Zadanie **344** zaproponował pan Marcin Kasperski z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1997

Przypominamy treść zadań:

335. Na bokach AB i AC trójkąta ABC o polu S i obwodzie $2p$ odłożono (odpowiednio) odcinki AK, AL o długościach k, l . Pole trójkąta AKL wynosi S' . Udowodnić, że prosta KL przechodzi przez środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $2pS' = (k + l)S$.

336. Ciąg (a_n) jest określony wzorami: $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2 - 2$ dla $n \geq 1$. Dowieść, że każdy jego wyraz jest równy ilorazowi pewnych dwóch wyrazów ciągu Fibonacciego (określonego wzorami: $u_1 = u_2 = 1, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ dla $n \geq 1$).

335. Prosta KL przecina dwusieczną kąta A w punkcie P dzielącym odcinek KL w stosunku $k : l$, czyli będącym środkiem ciężkości układu dwóch mas punktowych: masy l umieszczonej w punkcie K i masy k umieszczonej w punkcie L . Wobec tego

$$\vec{AP} = \frac{l}{k+l} \cdot \vec{AK} + \frac{k}{k+l} \cdot \vec{AL}.$$

Przy zwykłych oznaczeniach $a = |BC|, b = |CA|, c = |AB|$ dostajemy stąd równość

$$(1) \quad \vec{AP} = \frac{l}{k+l} \cdot \frac{k}{c} \cdot \vec{AB} + \frac{k}{k+l} \cdot \frac{l}{b} \cdot \vec{AC} = \frac{kl}{k+l} \left(\frac{1}{c} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{b} \cdot \vec{AC} \right).$$

W szczególnym przypadku, gdy $k = bc/(a+b), l = b$, mamy sytuację następującą: punkt L pokrywa się z C , a punkt P pokrywa się ze środkiem I okręgu wpisanego w trójkąt ABC , i zgodnie ze wzorem (1):

$$\vec{AI} = \left(\frac{bc}{a+b} \cdot b \right) \left(\frac{bc}{a+b} + b \right)^{-1} \left(\frac{1}{c} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{b} \cdot \vec{AC} \right) = \frac{bc}{a+b+c} \left(\frac{1}{c} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{b} \cdot \vec{AC} \right);$$

stąd

$$(2) \quad \frac{1}{c} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{b} \cdot \vec{AC} = \frac{2p}{bc} \cdot \vec{AI}.$$

Wracamy do przypadku ogólnego: dla dowolnych parametrów k, l zachodzi równość (1), która po uwzględnieniu wzoru (2) przybiera postać

$$\vec{AP} = \frac{kl}{k+l} \cdot \frac{2p}{bc} \cdot \vec{AI} = \frac{2p}{k+l} \cdot \frac{S'}{S} \cdot \vec{AI}.$$

Zatem punkt P pokrywa się z I wtedy i tylko wtedy, gdy $2pS' = (k + l)S$.

336. Przyjmijmy: $v_n = u_{2n}, w_n = v_{n+1}/v_n$. Wykażemy, że $a_n = w_n$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ (tę równość można odgadnąć wypisując kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n) i znajdując ich przedstawienia w postaci ilorazów możliwie najwcześniejszych wyrazów ciągu (u_n)).

Liczby Fibonacciego dane są wzorem jawnym

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \text{ gdzie } \alpha, \beta \text{ są pierwiastkami trójmianu } x^2 - x - 1 \ (\alpha > \beta);$$

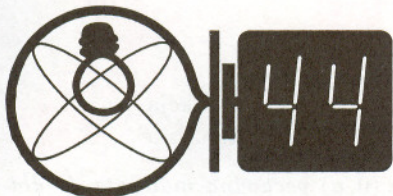
zgodnie ze wzorem Viète'a, $\alpha\beta = -1$. Obliczamy:

$$w_n = \frac{\alpha^{2^{n+1}} - \beta^{2^{n+1}}}{\alpha^{2^n} - \beta^{2^n}} = \alpha^{2^n} + \beta^{2^n};$$

stąd

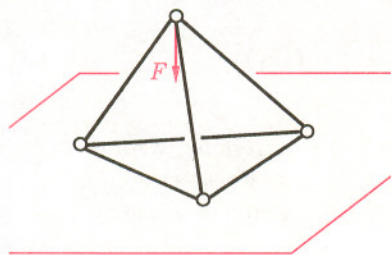
$$w_n^2 = \alpha^{2^{n+1}} + 2(\alpha\beta)^{2^n} + \beta^{2^{n+1}} = \alpha^{2^{n+1}} + 2 + \beta^{2^{n+1}} = w_{n+1} + 2;$$

ciąg (w_n) spełnia tę samą rekurencję, co ciąg (a_n) . Skoro zaś $w_1 = u_4/u_2 = 3 = a_1$, zatem równość $w_n = a_n$ zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych n .

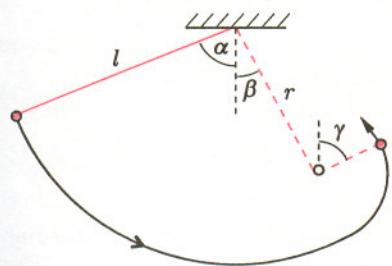


Tym razem wyjątkowo zamieszczamy tylko jedno zadanie.

241. Sześć jednakowych prętów połączono przegubowo tworząc szkielet czworościanu, który postawiono na gładkiej poziomej płycie. O ile przesunie się górny wierzchołek czworościanu pod wpływem siły F skierowanej w dół (rys. 1), jeśli stała sprężystości (stosunek siły do wydłużenia lub skrócenia) jest dla każdego z prętów równa k ? Pominąć siłę ciężkości i założyć, że deformacja czworościanu jest niewielka.



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1997

Przypominamy treść zadań:

233. Jeden koniec nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l jest unieruchomiony, a do drugiego przymocowano punktowe ciało, odchyłono od pionu o kąt $\alpha < 90^\circ$ i puszczono. W odległości r od punktu zawieszenia, pod kątem β do pionu (rys. 2) znajduje się sztywna i cienka poprzeczka, tak że gdy nic się o nią oparła, ciało poruszało się dalej na nici skróconej. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby po wzniesieniu się do góry ciało spadając uderzyło w poprzeczkę?

234. a) Do jednego końca metalowego pręta przyczepiono kuleczkę wosku, a drugi koniec umieszczono w płomieniu palnika. Kuleczka spadła po czasie t . Po jakim czasie spadłaby ta kuleczka, gdyby pręt był dwukrotnie dłuższy?
b) i c) Kuleczkę wosku przyczepiono w wierzchołku metalowego wycinka kuli (b) lub na osi wycinka walca (c) i zewnętrzną powierzchnię bryły objęto płomieniem palnika. Po jakim czasie spadłaby ta kuleczka, gdyby promień bryły był dwukrotnie większy?

233. Gdy w czasie wznoszenia się ciała ponad poprzeczkę nic zwiotczeje, dalszy ruch będzie się odbywać wyłącznie pod wpływem siły ciężkości, tzn. po paraboli. Oznaczmy przez γ kąt, jaki tworzy z pionem swobodna część nici w chwili jej zwiotczenia, a przez v – prędkość ciała w tej chwili. Z bilansu energii otrzymujemy

$$(1) \quad g(-l \cos \alpha + r \cos \beta - (l - r) \cos \gamma) = \frac{1}{2}v^2,$$

natomiast warunek zwiotczenia nici (zerowania siły napinającej) wynika z przyrównania siły odśrodkowej do odpowiedniej składowej siły ciężkości

$$(2) \quad \frac{v^2}{l - r} = g \cos \gamma.$$

Z równań (1) i (2) możemy wyznaczyć γ oraz v :

$$(3) \quad \cos \gamma = \frac{2(r \cos \beta - l \cos \alpha)}{3(l - r)}, \quad v^2 = \frac{2}{3}g(r \cos \beta - l \cos \alpha).$$

Analizując teraz rzut ukośny pod kątem γ do poziomu stwierdzamy, że składowe poziome i pionowe przesunięcia powinny spełniać warunki

$$vt \cos \gamma = (l - r) \sin \gamma, \\ vt \sin \gamma - gt^2/2 = -(l - r) \cos \gamma.$$

Z tych równań należy wyeliminować czas t lotu po paraboli, a następnie podstawić wzory (3). Po przekształceniach otrzymujemy

$$r \cos \beta - l \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}(l - r).$$

(Zadanie pochodzi z Olimpiady Fizycznej w Singapurze, 1995 r.)

234. Skorzystamy z analizy wymiarowej. Przypomnijmy, że współczynnik przewodnictwa cieplnego λ jest zdefiniowany wzorem

$$\frac{dQ}{dt} = \lambda S \frac{dT}{dx},$$

gdzie lewa strona przedstawia ilość ciepła przepływającego w jednostce czasu przez powierzchnię S , a iloraz dT/dx jest gradientem temperatury. Zatem wymiarem λ jest $W/(m \cdot K)$. Szukany czas t może zależeć jeszcze od ciepła właściwego c , którego wymiarem jest $J/(kg \cdot K)$, od gęstości materiału pręta ρ (ponieważ ciepło właściwe definiuje się na jednostkę masy, zamiast – jak w tym przypadku byłoby naturalne – na jednostkę objętości), od różnicy temperatur płomienia i początkowej ΔT_p , od różnicy temperatur topnienia wosku i początkowej ΔT_t i od długości pręta (w przypadku a) lub od promienia kuli lub walca (przypadki b i c; oznaczmy ten parametr wspólnym symbolem l). Nie odgrywa natomiast roli pole przekroju pręta, gdyż np. pręt o podwojonym polu przekroju można przedstawić jako dwa pręty złożone równolegle, przy czym przepływ ciepła w jednym z nich nie wpływa na drugi (podobnie nie odgrywa roli kątowa wielkość wycinków ani wysokość walca). Zgodność wymiarów w zależności

$$t = f(\lambda, c, \rho, \Delta T_p, \Delta T_t, l)$$

zapewni tylko funkcja f postaci

$$f = c \rho l^2 / \lambda \cdot f_1(\Delta T_p / \Delta T_t).$$

Podwojenie wartości parametru l spowoduje zatem we wszystkich przypadkach czterokrotne wydłużenie czasu do chwili spadku kuleczki.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 227 (WT=3,04), 228 (WT=2,56)
z numeru 11/1996

Przemysław Gworys – Częstochowa 43,67
Andrzej Idzik – Bolesławiec 38,72



Rozwiązanie zadania F 453. Z zasady zachowania energii prędkość kulek przed zderzeniem wynosi $v = \sqrt{2gr}$. Zmiana pędu jest związana ze średnią siłą F wzorem $\Delta p = F \cdot \Delta t$. Stąd

$$F = m \frac{\sqrt{2gr}}{\Delta t} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \frac{\sqrt{2gr}}{\Delta t},$$

co po podstawieniu wartości daje 3,4 kN (350 kg).



Rozwiązanie zadania F 454. Niestety, zmniejszenie nacisku na podłoże poprzez równomierne (bez zmiany tempa) zonglowanie nie jest możliwe. W takim przypadku rzut środka ciężkości układu n pocisków o masie m każdy na kierunku pionowy oscyluje wokół stałej średniej wysokości. Zmiana składowej pionowej pędu tego układu w całym cyklu jest więc równa zeru

$$\Delta p = \int_{\text{cykl}} (F(t) - n \cdot m \cdot g) dt = 0,$$

gdzie $F(t)$ jest zależną od czasu siłą, z jaką kanonier działa na pociski. Widać stąd, że średnia siła

$$\langle F \rangle = n \cdot m \cdot g$$

jest równa co do wartości ciężarowi układu pocisków. Tak więc średni dodatkowy nacisk związany z pociskami jest równy ich ciężarowi. Minimalną wartość maksymalną tego nacisku otrzymamy w przypadku działania stałą siłą $F(t) = n \cdot m \cdot g$. (Ciekawym ćwiczeniem może być przekonanie się, że wtedy amplituda oscylacji wokół stałej wysokości jest zerowa.)

Ale może zmiana tempa może pomóc? Tak, może, o ile będzie to powodować przyspieszone opadanie środka ciężkości. Jest to jednak metoda co najwyżej tak skuteczna jak kucanie, tylko trochę bardziej ambitna, czyli wojsko – wojskiem, a grawitacja – grawitacją.



Rozwiązanie zadania M 811. Na mocy poprzedniego zadania

$$P(X_n \geq 1) \leq EX_n = (2p)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ będzie $X_n \geq 1$, nie przekracza – dla dowolnej liczby naturalnej k – wartości $(2p)^k$. Jest to więc prawdopodobieństwo zerowe, co oznacza, że bakterie z prawdopodobieństwem 1 wyginą po upływie pewnego czasu.

Niech $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $X = (0, a)$ lub $X = (0, +\infty)$, będzie funkcją różniczkowalną w przedziale X . Prawdziwe jest wówczas następujące

Twierdzenie. *Jeżeli funkcja f ma w przedziale $(0, a)$ pochodną malejącą, to dla każdej trójki takich liczb α, x_1, x_2 , że $\alpha > 0$ i $0 < x_1 < x_2 < a - \alpha$, zachodzi nierówność*

$$f(\alpha + x_2) - f(x_2) \leq f(\alpha + x_1) - f(x_1).$$

Dowód. Ponieważ f' maleje, więc pochodna funkcji F określonej wzorem $F(x) = f(\alpha + x) - f(x)$ przyjmuje w przedziale $(0, a - \alpha)$ wartości ujemne. Zatem F maleje w przedziale $(0, a - \alpha)$, a stąd wynika nierówność z tezy twierdzenia. ■

Wniosek 1. *Jeśli pochodna funkcji f maleje w przedziale X oraz $f(0) \geq 0$, to dla każdych x_1, x_2 , takich, że $x_1 + x_2 \in X$, spełniona jest nierówność $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$.*

Dowód. Ponieważ f' maleje w przedziale X , więc f jest wklęsła w tym przedziale. Stąd, wobec tego, że $f(0) \geq 0$, otrzymujemy

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) \geq \frac{f(x) + f(0)}{2} \geq \frac{f(x)}{2}.$$

Dla $x_1 = x_2$ jest to nierówność z tezy wniosku. Jeśli zaś np. $x_1 < x_2$, to stosując twierdzenie dla $\alpha = x_1$ dostajemy

$$f(x_1 + x_2) - f(x_2) \leq f(x_1 + x_1) - f(x_1) \leq 2f(x_1) - f(x_1) = f(x_1).$$

Stąd, oczywiście, $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$. ■

Wniosek 2. *Jeśli pochodna funkcji f maleje w przedziale X oraz $f(0) \geq 0$, to dla każdego układu liczb $a_i, b_i \in X$ ($i = 1, 2, \dots, n$) spełniających dla dowolnego i nierówności $a_i < b_i \leq a_{i+1}$, zachodzi nierówność*

$$\sum_{i=1}^n (f(b_i) - f(a_i)) \leq f\left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)\right).$$

Dowód. Z poprzedniego wniosku wynika, że $f(b_1) - f(a_1) \leq f(b_1 - a_1)$, natomiast bezpośrednio z twierdzenia mamy

$$f(b_k) - f(a_k) \leq f\left((b_k - a_k) + \sum_{i=1}^{k-1} (b_i - a_i)\right) - f\left(\sum_{i=1}^{k-1} (b_i - a_i)\right), \quad k = 2, \dots, n.$$

Wystarczy teraz dodać wszystkie te nierówności stronami. ■

Ostatni wniosek pozwala udowodnić szereg ciekawych nierówności. Poniżej proponujemy kilka przykładów do samodzielnego rozpatrzenia (proszę sprawdzić, czy spełnione są wszystkie założenia).

– Dla $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq \frac{\pi}{2}$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^n (\sin b_i - \sin a_i) \leq \sin\left(\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)\right).$$

– Dla dodatnich $a_i < b_i \leq a_{i+1}$ mamy

$$\prod_{i=1}^n \frac{1 + b_i}{1 + a_i} \leq 1 + \sum_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

(Wskazówka: wziąć $f(x) = \ln(1 + x)$ dla $x \geq 0$.)

Inne przykłady dostaniemy biorąc funkcje $\arctg x$, $\sqrt[n]{x}$ czy $x/(1 + x)$.

Za najwybitniejszego polskiego matematyka przełomu XIX i XX wieku uważany jest **Stanisław Zaremba**.

Zaremba był pierwszym Polakiem, którego matematyczne osiągnięcia autentycznie liczyły się na świecie. Gdy jednak dziś mówi się o początkach wielkiej polskiej matematyki w XX wieku, wymienia się w zasadzie wyłącznie Szkołę Lwowską i Szkołę Warszawską. Absolutnie nic nie ujmując z ogromnych zasług tych dwóch ośrodków dla rozwoju matematyki polskiej, nie wolno zapominać, że tak naprawdę polska matematyka „światowej klasy” zaczęła się od Zaremby.

Zaremba (1863–1942) otrzymał w 1886 roku dyplom inżyniera, po czym wyjechał na studia matematyczne do Paryża. Tam w roku 1889 zrobił doktorat na Sorbonie; w swojej pracy doktorskiej rozwiązał w pełni problem, który czekał na rozwiązanie ponad 30 lat, a był atakowany m.in. przez Riemanna. Publikował w czołowych pismach matematycznych we Francji. Mógł tam zrobić wielką karierę; uznał jednak, że Polsce potrzebny jest kontakt ze światową matematyką i w roku 1900 objął katedrę na Uniwersytecie Jagiellońskim. Rozwinął tu niezwykle aktywną działalność naukową, organizacyjną, dydaktyczną; dzięki niemu w Krakowie młodzi ludzie dowiedzieli się o wielu zagadnieniach i problemach, przeprowadzono wiele świetnych doktoratów i habilitacji. Nie można zapominać, że w Krakowie z wieloma ówczesnymi problemami matematycznymi zetknął się młody Stefan Banach, który przecież tu właśnie został „odkryty” przez Steinhaus. Tu zrobił doktorat Sierpiński. Tu powstało Polskie Towarzystwo Matematyczne, którego Zaremba był współzałożycielem i pierwszym prezesem. Rozmaite wyniki Zaremby do dziś są cytowane przez znakomitych matematyków.

Zainteresowało mnie ostatnio, przed jaką komisją Zaremba zdawał egzamin doktorski. I ciekawe – w wielu pozycjach o polskich matematykach jest zawartych wiele informacji, także i o Zarembie, ale tych danych akurat nigdzie nie udało mi się znaleźć! Na szczęście w Archiwum UJ pieczołowicie przechowywane są rozmaite stare dokumenty; łatwiej znaleźć różne fakty dotyczące studenta z początków tego stulecia (łącznie z tym, na czyje wykłady uczęszczał), niż studenta sprzed 30 lat. Jest tam też wiele dokumentów związanych z Zarembą, m.in. kilka jego własnoręcznie pisanych życiorysów. W jednym z nich udało mi się odnaleźć poszukiwaną przeze mnie informację.

Zaremba pisze: *Dnia 30-go listopada 1889 uzyskałem w Sorbonnie przed komisją egzaminacyjną złożoną z profesorów Darboux, jako prezesa oraz Picarda i Poincarégo jako egzaminatorów dyplom „Docteur ès Sciences Mathématiques”...*

K.C.

W gablotce Koła Matematyków Studentów UJ ukazywała się w roku 1975 powieść kryminalna w odcinkach **Zbrodnia nilpotenta** autorstwa Leszka Michalika. Oto fragmenty.

... Dionizy z przyjemnością homeomorficznie zanurzał wargi w zimnej, aczkolwiek nieco mętnej cieczy. Po chwili jednak twarz skurczyła mu się lokalnie na wspomnienie czekających go w stołówce studenckiej nigdziegęstych quasi-sznychli. – Coraz trudniej zdobyć niezdegenerowane formy posilków – pomyślał i ciało jego przybrało wyraźne torsyjny charakter. W końcu jednak odrzucił trywialnie działającą grupę myśli, przeprowadził restrykcję pojęć do ideału i odświeżony spojrzął z ufnością na gwiaździste przeliczalne niebo, kompaktyfikujące się w oddali. Następnie zbliżył się do nabytej niedawno czarnej, kudłatej różnaitości różniczkowalnej wymiaru 3, wziął delikatnie na ręce, popieścił i uczesał. Po chwili pobawił się z nią trochę w zadawanie stycznych w punkcie, przerwał dla żartu różnaitością topologiczną, a gdy Ksina (tak nazwał swą różnaitość Dionizy) poczęła dyfeomorficznie wgrzyzać mu się w krawat – zaprzestał zabawy, położył pod ścianą najbliższego sympleksu i wreszcie przekroił pokój polem wektorowym, zostawiając Ksinie nieco przestrzeni przeliczalnie parawartej. (...)

Było zupełnie cicho.

Nagle drzwi od mieszkania Dionizego gwałtownie otworzyły się i do pokoju wpadł ociekający krwią trup.

Trup nie żył. Zaskoczony niemile Dionizy zdążył jedynie stwierdzić, że zwłoki spełniały aksjomat Lindelöfa, po czym nagle uderzenie w tylną część czaszki pozbawiło go przytomności. (...)

Dionizy z wysiłkiem uniósł ciało, usiłując przypomnieć sobie wydarzenia sprzed kilku godzin. Powiódł uzwarconymi oczami po mieszkaniu – gdy wtem wzrok jego padł na stożkowate ciało trupa, ciemne od zakrzepłej krwi. Z dozą melancholii pomyślał o tym, czym mogło być jeszcze życie dla trupa żywego, dla trupa z dokładnością do izomorfizmu. Po chwili jednak zdał sobie sprawę z grozy sytuacji, w jakiej się znalazł. Pokój należało przede wszystkim posprzątać, a później zastanowić się, co zrobić z trupem. Dionizy wziął stojącą koło wieszaka miotłę z nalepką „KNASTER-KURATOWSKI COOPERATION” i ekwimorficznie zamiótł podłogę. Tymczasem w trupie zaczęły już się zagnieżdżać pasożyty przeliczalności. Dionizy wziął więc z półki centralizator i spryskał zwłoki. Tymczasem Ksina zaczęła skomleć. Rzucił jej więc kostkę Cantora do pogryzienia, a sam usiadł w fotelu. (...)

Tymczasem trup dalej nie żył. Dionizy próbował wprowadzić do niego choćby najślabszą topologię – nie dało się. Próby metryzowalności też zawiodły. Trup był lokalnie otwarty, tak więc nawet twierdzenie o zanurzaniu niewygodnego ciała w przestrzeni domkniętej nie mogło tutaj dać efektu. Poza tym sprawa najwidoczniej pachniała kryminałem. W dodatku Dionizy z przerażeniem stwierdził, iż na mocy pewnika wyboru zostanie z pewnością zaliczony do grupy najbardziej podejrzanych. Sytuacja wydawała się beznadziejna. ...