

Temat tego numeru to

## wzór Eulera

Piszemy o malowaniu, czesaniu, zginaniu i innych rzeczach, o których dało się uzyskać wiele informacji za pomocą tego wzoru.

Samego wzoru jednak nie dowodzimy – jeśli ktoś nie wie, jak to zrobić niech zajrzy np. do *Delty* 5 z 1996 roku.

## SPIS TREŚCI NUMERU 5(276)

Artykuły o wzorze Eulera:

O możliwych formach naszej przestrzeni

str. 1

Malowanie map

str. 4

Wzór Eulera jako równanie

str. 7

Mała Delta –  
o spłaszczalności

str. 8

Charakterystyka Eulera, czyli  
jak się uczesać

str.10

Wielościanny sztywne, ruchome  
i te trzecie

str.14

Teksty przygotowali:

Piotr Hajłasz, Marek Kordos,  
Zbigniew Marciniak  
i Paweł Strzelecki

Ponadto w numerze:

Zadania

str. 6

Klub 44

str.12

Patrz w niebo

str.16

Epsilon

str.17

**W następnym numerze:**

Chemia topologiczna

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski

ukazuje się w języku angielskim

w sieci Internet pod adresem

<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula

Bogdan Cichoński

– wiceprzewodniczący

Krzysztof Ciesielski

Jan A. Gaj

Piotr Goldstein

Tomasz Hofmokl

Andrzej Hryniewicz

Wiesław A. Kamiński

Marta Kicińska-Habior

Krzysztof Maślanka

Andrzej Mąkowski

Zdzisław Pogoda

Feliks Przytycki

Michał Różyczka

Konrad Rudnicki

Zbigniew Semadeni

Grzegorz Sitarski

Andrzej Woszczyk

Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol

Krzysztof Biesaga

Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.

Krzysztof Kordos – sekr. red.

Marek Kordos – red. nac.

Tomasz Kwast

Anna Ludwicka

Anna Rudnik

Paweł Strzelecki

Joanna Udalska

Piotr Zalewski

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa

tel. 43-02-41(-2) wewn. 21

PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano

w Drukarni Naukowo-Technicznej

w Warszawie, ul. Mińska 65

Skład systemem TeX wykonała Redakcja.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres

prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1997 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)

cena numeru w 1997 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 1997 r. wynosi 7 zł 50 gr.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe

„Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.

5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę	
5 XII	20 XI	na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II	na II kwartał,
5 VI	20 V	na III kwartał,
5 IX	20 VIII	na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

**Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr**

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.



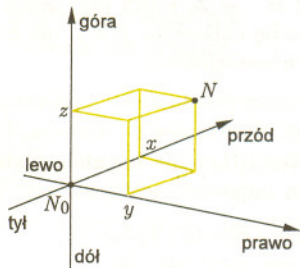
# O możliwych formach naszej przestrzeni

Jak wygląda przestrzeń, w której żyjemy?

Tak sformułowane pytanie pojawia się w czasopismach dość często, a odpowiedzi udziela zwykle architekt, ekolog lub geograf. Co w tej sprawie ma do powiedzenia matematyk?

Można go, na przykład, zapytać o własności geometryczne otaczającej nas przestrzeni. Naturalnie, interesuje nas *sama* przestrzeń, a nie przedmioty, które ją wypełniają. Dlatego, dla uproszczenia, nie będziemy się zajmować wypełniającymi ją obiektami.

Wyobraźmy więc sobie, że stoimy na środku ogromnego, pustego i mrocznego hangaru. Jakie geometryczne cechy przestrzeni zdołamy zauważyć? Wydaje się, że jedyną sensowną obserwacją będzie to, że możemy się w niej swobodnie przemieszczać. Gdy skupimy uwagę na jednym punkcie (np. na czubku nosa  $N$ ), to jesteśmy w stanie przesunąć go w dowolnym kierunku na praktycznie dowolną odległość. Przy tym, choć mamy do wyboru nieskończenie wiele kierunków, to każde przesunięcie punktu  $N$  może być zrealizowane przez kolejne wykonanie przesunięć w trzech (tylko!) „podstawowych” kierunkach: przód–tył, prawo–lewo i góra–dół. Jeśli chodzi o odległości, to wygodnie jest umówić się, że przesunięcie o 10 metrów do tyłu jest tym samym co przesunięcie o  $-10$  metrów do przodu (i podobnie dla dwóch pozostałych wyróżnionych kierunków). Wtedy ruch w każdym z podstawowych kierunków można opisać jedną liczbą rzeczywistą, a podanie trzech liczb  $(x, y, z)$  wystarczy, by zadać jednoznacznie dowolne przesunięcie.



Ustalmy dowolnie jeden z punktów  $N_0$  naszej przestrzeni. Położenie każdego innego punktu  $N$  możemy teraz wyrazić poprzez wskazanie trójki liczb rzeczywistych, opisującej ruch nasuwający  $N_0$  na  $N$ . Zabieg ten pozwala utożsamić naszą przestrzeń ze zbiorem  $\mathbb{R}^3$  wszystkich trójek liczb rzeczywistych.

Rys. 1

Mamy więc do dyspozycji ładny model arytmetyczny naszej przestrzeni. Jej punktom odpowiadają trójki liczb; odległość punktów  $N_1 = (x_1, y_1, z_1)$  i  $N_2 = (x_2, y_2, z_2)$  możemy obliczyć, używając wzoru Pitagorasa:

$$d(N_1, N_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Traktowanie punktu jak trójki liczb pozwala opisywać (nawet skomplikowane) podzbiory naszej przestrzeni za pomocą równań lub nierówności, poddawać je łatwo najróżniejszym przekształceniom, itp.

Powyższy model przestrzeni ma jeszcze jedną zaletę: łatwo go przenieść „na inne wymiary”. Istotnie, nic nie stoi na przeszkodzie, by zamiast trójek rozpatrywać  $n$ -tki liczb rzeczywistych  $(x_1, \dots, x_n)$  i mierzyć odległość między nimi wzorem, będącym oczywistym uogólnieniem wzoru Pitagorasa. Powstaje w ten sposób  $n$ -wymiarowa przestrzeń kartezjańska  $\mathbb{R}^n$ , będąca prostym modelem dla zjawisk, opisywanych przez  $n$  niezależnych parametrów.

Czy istotnie wynika stąd, że żyjemy w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej  $\mathbb{R}^3$ ? Zwróćmy uwagę na to, że nasz opis powstał wewnątrz hangaru, tj. z obserwacji tylko niewielkiego fragmentu przestrzeni.

Niewykluczone więc, że popełniliśmy błąd, pochopnie uogólniając wyniki lokalnych badań na całą przestrzeń.

Łatwo sobie wyobrazić taki błąd w sytuacji dwuwymiarowej: sfera o wielkim promieniu istotnie wygląda z bliska jak kawałek płaszczyzny, choć wcale nią nie jest. Dlatego pogląd, że Ziemia jest płaska, miał kiedyś wielu zagorzałych zwolenników.

Co zatem wiemy na pewno? Punkt  $N_0$  ma otoczenie, które wygląda jak kawałek  $\mathbb{R}^3$ . Nie ma też powodu wierzyć, że żyjemy w części przestrzeni, która jest w jakikolwiek sposób wyróżniona. Dlatego zapewne każdy punkt  $N$  będzie miał podobne otoczenie.

Prowadzi to do pojęcia *rozmaitości*. Rozmaitością  $n$ -wymiarową nazywamy przestrzeń, w której każdy punkt ma otoczenie wyglądające tak, jak kawałek przestrzeni kartezjańskiej  $\mathbb{R}^n$ . Tak więc, żyjemy na pewnej rozmaitości trójwymiarowej. Ale na jakiej?

Uzyskanie odpowiedzi na to ostatnie pytanie wymaga eksperymentów fizycznych. Jest tu jednak także zadanie dla matematyka. Powinien on mianowicie przedstawić listę możliwych światów, wraz z opisem ich geometrycznych własności. Wtedy fizyk będzie mógł, po wykonaniu odpowiednich doświadczeń, rozstrzygnąć, który z zaproponowanych modeli odpowiada rzeczywistości.

Zadanie polega więc na stworzeniu pełnej listy rozmaitości trójwymiarowych.

Jak się do tego zabrać w sytuacji, gdy nie jest wcale oczywiste, że w ogóle istnieją rozmaitości wymiaru trzy, różne od samej przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ ? Jeśli mamy szukać całkiem nowej rozmaitości, to powinna się ona jakoś „zagiąć”, ale trudno sobie wyobrazić, jak to się ma zdarzyć.

Przyczyną tych trudności jest nasze przyzwyczajenie do umiejscawiania wszystkiego w pobliskiej okolicy, tj. właśnie w  $\mathbb{R}^3$ . Musimy się zatem nauczyć myśleć o przestrzeniach inaczej.

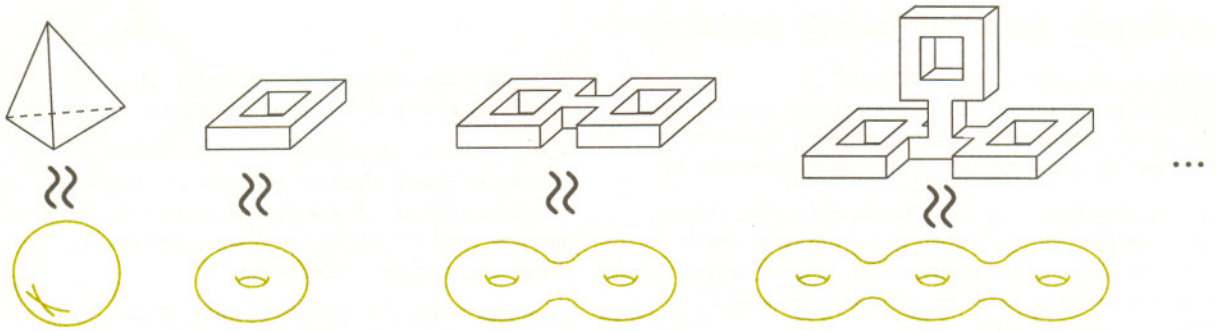
Możemy sobie, na przykład, wyobrazić, że podzieliliśmy całą przestrzeń na niewielkie, wielościenne bryły, ściśle ją wypełniające. Zamiast starać się „zobaczyć” całą przestrzeń naraz, możemy o niej myśleć jak o kolekcji brył posklejanych między sobą parami ścian. Oczywiście, sklejając je należy tak, by każdy punkt na spojeniach miał otoczenie postaci  $\mathbb{R}^3$ .

Bryłami tymi mogą być, na przykład, czworościany. Mówimy wówczas, że przeprowadziliśmy *triangulację* przestrzeni. Twierdzenie Moise’a z 1952 roku mówi, że każda rozmaitość wymiaru trzy ma triangulację.

Odpowiednikiem powyższych rozważań w dwóch wymiarach byłoby budowanie z trójkątnych klocków powierzchni, które w okolicy każdego punktu wyglądają jak kawałek płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$ . Nietrudno w ten sposób wyprodukować nieskończoną serię precli (rys. 2 na następnej stronie) z rosnącą liczbą dziur.

Precle są powierzchniami *zwartymi* i *spójnymi*. Zwartość oznacza, że skleiliśmy je ze skończenie wielu trójkątów. Spójność – że są w jednym kawałku, czyli że każde dwa trójkąty triangulacji można połączyć łańcuchem trójkątów, kolejno do siebie przylegających jednym bokiem.



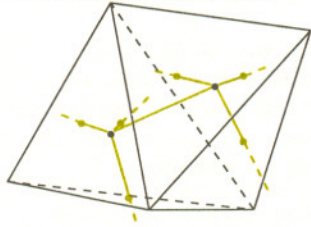


Rys. 2. To wszystko precle: bez dziur (sfera), z jedną dziurą (torus), z dwiema i z trzema.

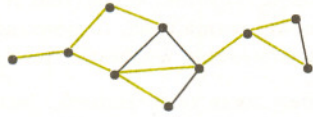
Wróćmy do wymiaru trzy. Jak można ulepić z czworościanów zwartą i spójną rozmaitość trójwymiarową? Oczywiście, sednem problemu jest opis sklejeń. Możemy to zrobić dość łatwo za pomocą prostego wybiegu.

Załóżmy na chwilę, że otrzymaliśmy w prezencie taką rozmaitość z triangulacją. Możemy z nią związać pewien układ punktów i łączących je odcinków, czyli *graf dualny*. Postępujemy tak: w środku każdego czworościanu wybieramy jeden punkt. Dwa spośród nich łączymy odcinkiem wtedy i tylko wtedy, gdy otaczające je czworościany mają wspólną ścianę (rys. 3).

Łatwo udowodnić przez indukcję, że w każdym skończonym i spójnym grafie można wybrać *drzewo maksymalne*, tj. podgraf (rys. 4), który zawiera wszystkie wierzchołki i nie zawiera żadnej pętli.



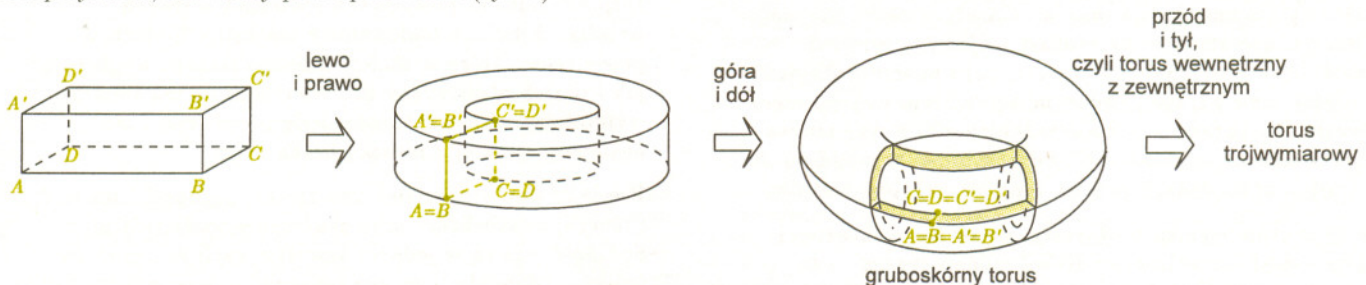
Rys. 3



Rys. 4

Rozsypmy teraz naszą rozmaitość na pojedyncze czworościenne klocki i zlepmy je z powrotem, ale tylko wzdłuż tych ścian, które odpowiadają krawędziom grafu dualnego, należącym do ustalonego maksymalnego drzewa. To, co powstanie, będzie wielościanem o trójkątnych ścianach, bez trudu mieszczącym się w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ . Zauważmy, że zawiera on wszystkie klocki, z których zbudowana była wyjściowa rozmaitość. Aby ją odtworzyć, należy po prostu dokończyć proces sklejanania. Polega to na odpowiednim posklejaniu parami trójkątnych ścian naszej bryły. Udowodniliśmy zatem, że każdą zwartą i spójną rozmaitość trójwymiarową można otrzymać z pewnego wielościanu, przez odpowiednie identyfikacje par jego ścian.

Dla przykładu, rozważmy prostopadłościan (rys. 5)



Rys. 5. Rysunek niemożliwy: sklejamy kolejno pary przeciwległych ścian prostopadłościanu uzyskując torus trójwymiarowy.

$ABCD A' B' C' D'$ . Gdy pozlepiamy przeciwległe pary ścian, otrzymamy rozmaitość, zwaną *torusem trójwymiarowym*. Rozmaitość ta jest, oczywiście, czymś innym niż  $\mathbb{R}^3$ , bo ona jest zwarta, a  $\mathbb{R}^3$  – nie.

Zmieniając wielościan i sposoby identyfikacji par jego ścian, możemy otrzymać jeszcze inne przykłady rozmaitości trójwymiarowych. Wiemy już, że w ten sposób zbudujemy wszystkie rozmaitości zwarte i spójne. Ale ile ich naprawdę jest? Powiedzmy, że daliśmy dwóm osobom po wielościanie i poprosiliśmy je o wskazanie takich zlepień par ścian, by z każdego z nich powstała rozmaitość. Załóżmy, co więcej, że zadanie zostało wykonane. Jak przekonać się o tym, że otrzymane rozmaitości są istotnie różne?

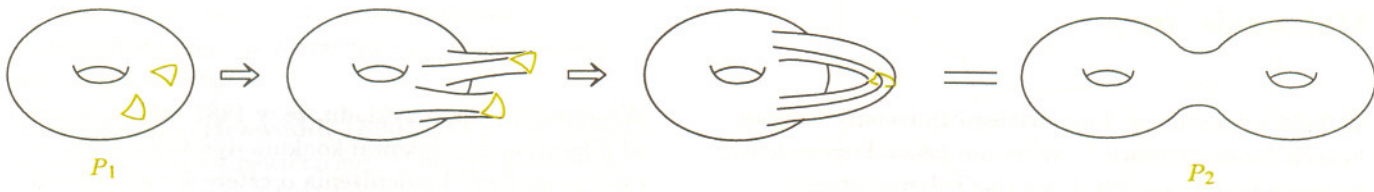
Problemy *rozróżniania* rozwiązuje się w matematyce zwykle przez wskazanie odpowiedniego *niezmiennika*. Niech  $TM^n$  oznacza zbiór wszystkich rozmaitości wymiaru  $n$  z triangulacją. Aby rozróżnić dwie rozmaitości  $M_1, M_2$ , wystarczy znaleźć funkcję  $f : TM^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , która przypisuje każdej rozmaitości  $X$  pewną liczbę całkowitą  $f(X)$ , tak że – jeśli  $X, Y$  są takie same (*homeomorficzne*),  
to  $f(X) = f(Y)$ ,  
–  $f(M_1) \neq f(M_2)$ .

Powyzsza uwaga jest, oczywiście, całkowicie banalna. Cała sztuka polega na konstruowaniu odpowiednich funkcji  $f$ .

Nauczmy się najpierw rozróżniać (zwarte i spójne) rozmaitości wymiaru dwa. Ograniczymy się, dla uproszczenia, do powierzchni *dwustronnych*, tzn. takich, które nie zawierają w sobie *wstęgi Möbiusa*.

Kopiując rozumowanie z przypadku trójwymiarowego, Czytelnicy zechcą sami przekonać się o tym, że każda taka powierzchnia może być otrzymana z pewnego wielokąta, przez odpowiednie zlepianie par jego boków. Niezbyt skomplikowane manipulacje tym wielokątem pozwalają dalej udowodnić, że każda powierzchnia dwustronna jest precle z  $g$  dziurami, gdzie  $g \geq 0$ . Aby mieć pełną klasyfikację takich powierzchni, powinniśmy jeszcze wykazać, że precle  $P_g$  są różne dla różnych liczb  $g$ .





Rys. 6. Od  $g = 1$  do  $g = 2$ .

Rozpocznijmy od  $P_0$ , czyli sfery dwuwymiarowej. Sferę podzieloną na trójkąty możemy sobie wyobrazić jako brzeg wypukłego wielościanu o trójkątnych ścianach. Jeśli  $W$ ,  $K$  i  $S$  oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian triangulacji, to słynny *wzór Eulera* mówi, że zawsze  $W - K + S = 2$ , niezależnie od podziału sfery.

Rozważmy zatem funkcję  $\chi : TM^2 \rightarrow \mathbf{Z}$  o wartościach całkowitych, daną wzorem  $\chi(X) = W - K + S$ . Podobnie jak dla sfery, można udowodnić, że liczba  $\chi(X)$  nie zależy od wyboru triangulacji powierzchni  $X$ , tzn.  $\chi$  jest niezmiennikiem. Nazywamy ją *charakterystyką Eulera–Poincarégo* rozmaitości  $X$ . Wystarczy zatem obliczyć  $\chi(P_g)$  dla  $g \geq 0$ . Jeśli okaże się, że liczby  $\chi(P_g)$  są różne dla różnych  $g$ , to będzie to dowód, że powierzchnie  $P_g$  są parami topologicznie różne.

Już wiemy, że  $\chi(P_0) = 2$ . Zauważmy, że precel  $P_{g+1}$  można otrzymać z precla  $P_g$  przez wykonanie kolejno następujących dwóch operacji (rys. 6):

- wycięcie dwóch rozłącznych, otwartych (bez brzegu) trójkątów triangulacji,
- zlepienie ich brzegów.

Zauważmy, że tak otrzymany precel  $P_{g+1}$  ma o 2 trójkąty, 3 krawędzie i 3 wierzchołki mniej niż precel  $P_g$ , od którego zaczynaliśmy. Jeśli  $\chi(P_g) = W - K + S$ , to  $\chi(P_{g+1}) = (W - 3) - (K - 3) + (S - 2) = \chi(P_g) - 2$ . Łatwy dowód indukcyjny daje wzór  $\chi(P_g) = 2 - 2g$ .

Spróbujmy przenieść powyższe doświadczenia na przypadek trójwymiarowy. Jeśli triangulacja rozmaitości  $X$  składa się z  $B$  czworościanów, które mają razem  $W$  wierzchołków,  $K$  krawędzi i  $S$  ścian (ściany wspólne liczymy raz!), to możemy rozważyć liczbę  $\chi(X) = W - K + S - B$ .

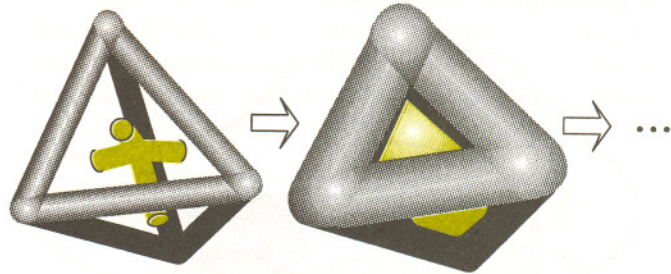
Początek jest obiecujący: można udowodnić, że liczba  $\chi(X)$  także w tym przypadku nie zależy od triangulacji  $X$ . Czeką nas jednak przykra niespodzianka: funkcja  $\chi$  tym razem nie spełni naszych oczekiwań. Ma bowiem miejsce następujące twierdzenie: dla dowolnej zwartej rozmaitości trójwymiarowej  $X$  zachodzi  $\chi(X) = 0$ .

Twierdzenie to ma prosty, lecz pomysłowy dowód. Jeszcze raz przydadzą się nam precle. Zauważmy, że każdy z nich, rozważany jako podzbiór  $\mathbf{R}^3$ , ogranicza pewną trójwymiarową figurę, którą będziemy nazywać *pełnym preblem* i oznaczać  $Q_g$ . Na przykład,  $Q_0$  jest zwykłą kulą.

Jaka jest charakterystyka Eulera–Poincarégo zbioru  $Q_g$ ? Dla kuli  $Q_0$  mamy naturalną triangulację jednym czworościanem, czyli  $W = 4$ ,  $K = 6$ ,  $S = 4$ ,  $B = 1$ , a stąd  $\chi(Q_0) = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$ . Dla następnych pełnych precli obliczamy indukcyjnie, podobnie jak dla pustych, że  $\chi(Q_g) = 1 - g$ .

Teraz zauważmy, że każda zwarta i spójna rozmaitość  $X$  wymiaru trzy może być przedstawiona jako suma dwóch jednakowych pełnych precli  $Q_g$ , przecinających się wzdłuż wspólnego brzegu  $P_g$ . Pierwszy z precli  $Q_g$  otrzymamy pogrubiając nieco wszystkie krawędzie pewnej triangulacji  $X$ . Zauważenie, że to, co zostało z  $X$ , jest także pełnym preblem, wymaga nieco spostrzegawczości. Odwołajmy się raz jeszcze do grafu dualnego, odpowiadającego danej triangulacji. Jego pogrubienie jest, oczywiście, pełnym preblem.

W ten sposób umieściliśmy w  $X$  dwa rozłączne pełne precle. Wyobraźmy teraz sobie, że je powoli nadmuchujemy i obserwujemy, co się dzieje w jednym z czworościanów triangulacji. Łatwo zauważyć, że po pewnym czasie oba precle zetkną się brzegami, szczelnie wypełniając  $X$ . Ponieważ oba precle mają wspólny, a więc taki sam, brzeg, to oba są tej samej postaci  $Q_g$ . Tak otrzymany rozkład  $X$  znany jest pod nazwą *rozkladu Heegaarda* rozmaitości.



Rys. 7

Rozkład ten pomoże nam obliczyć charakterystykę  $X$ . Zauważmy, że jeśli wielościan  $X$  jest przedstawiony jako suma swoich dwóch podwielościanów  $M$  i  $L$ , to  $\chi(X) = \chi(M) + \chi(L) - \chi(M \cap L)$ . Gdyby  $\chi(X)$  oznaczało po prostu liczbę wierzchołków (krawędzi, ścian, itd.), to powyższy wzór byłby oczywisty. Wystarczy teraz zauważyć, że wzór, który chcemy uzasadnić, jest naprzemienną sumą takich oczywistych wzorów.

Zastosujmy ten wzór do rozkladu Heegaarda  $X = M \cup L$ , gdzie  $M = L = Q_g$ ,  $M \cap L = P_g$ . Mamy  $\chi(X) = \chi(M) + \chi(L) - \chi(M \cap L) = 2\chi(Q_g) - \chi(P_g) = 2(1 - g) - (2 - 2g) = 0$ , co należało wykazać.

Reasumując: charakterystyka Eulera–Poincarégo jest bezużyteczna, gdy chcemy rozróżnić rozmaitości trójwymiarowe. Należy szukać innych, skuteczniejszych niezmienników. A może Czytelnicy mają jakieś pomysły?

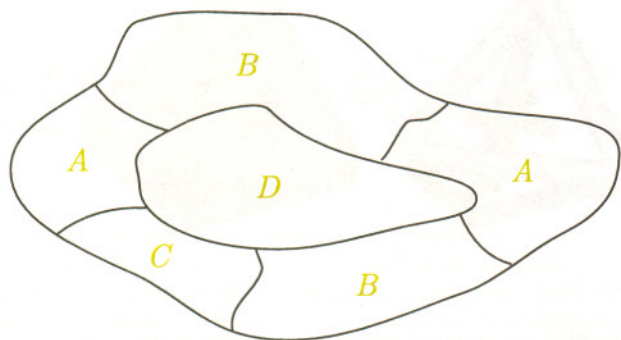
W chwili pisania tego artykułu problem klasyfikacji rozmaitości trójwymiarowych, czyli opisu możliwych form naszej przestrzeni, był otwarty.



## Malowanie map

W 1852 roku student londyńskiego University College, Francis Guthrie, powiedział swemu bratu Frederickowi, że jego zdaniem można, używając jedynie czterech barw, pomalować państwa na dowolnej mapie tak, by każde dwa sąsiednie (tzn. mające wspólny odcinek granicy) miały różne kolory. Francis zauważył bowiem, że cztery kolory wystarczają, gdy chcemy pokolorować hrabstwa na mapie Anglii. Skoro tak, to dlaczego nie miałyby wystarczyć w dowolnym przypadku, tzn. dla jakiegokolwiek mapy na kartce papieru (czyli na płaszczyźnie) lub na globusie (czyli na sferze)? Gwoli ścisłości przyjmijmy, że granice każdego państwa tworzą jedną krzywą zamkniętą (tego warunku nie spełnia np. RPA).

Frederick Guthrie zwrócił się z powyższym problemem do jednego ze swych wykładowców, Augustusa De Morgana. De Morgan udowodnił, że nie ma takiej (płaskiej) mapy, na której znalazłoby się pięć państw parami sąsiednich. Nie jest to jeszcze, niestety, dowód faktu, że nie ma takiej mapy, do której pomalowania trzeba użyć przynajmniej pięciu barw (patrz rys. 1) – i nie wiadomo, czy De Morgan był tego świadom, gdy 23 października 1852 roku pisał list do Hamiltona, wspominając o całej sprawie.



Rys. 1. Na mapie powyżej nie ma czwórki państw parami sąsiednich; mimo to do jej pomalowania trzeba koniecznie użyć czterech barw.

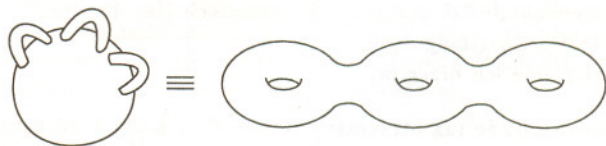
Problem czterech barw stał się na dobre sławny – jak się okazało, na przeciąg z grubsza stu lat – w czerwcu 1878 roku, kiedy to Arthur Cayley opowiedział o nim na posiedzeniu Londyńskiego Towarzystwa Matematycznego (stwierdzając, że sam nie zna rozwiązania). Niedługo potem „dowody” twierdzenia o czterech barwach opublikowali Arthur Bray Kempe, adwokat z zawodu (1879) oraz Peter Guthrie Tait (1880). Obie prace powitano przychylnie i z żywym zainteresowaniem (Kempe został nawet w dowód uznania członkiem Royal Society).

W Anglii lat osiemdziesiątych XIX wieku panowała powszechna wiara, że problem czterech barw został rozwiązany i można co najwyżej uprościć dowód.

Wspomnijmy dla przykładu, że w 1887 roku *Journal of Education* opublikował konkurs dyrektora Clifton College na dowód twierdzenia o czterech barwach, nie dłuższy niż trzydzieści linii rękopisu. Wśród wielu innych osób, z własnym „dowodem” pofatygował się nawet biskup Londynu i późniejszy arcybiskup Canterbury, Frederick Temple, który ponoć na nudnych oficjalnych spotkaniach był obecny jedynie ciałem.

Gdy zatem w roku 1890 Percy John Heawood znalazł istotny błąd w rozumowaniu Kempego, to pisał o tym w tonie niemal przeproszającym. Krótka, sześciostronicowa praca Heawooda w *Quarterly Journal of Mathematics* zawiera kontrprzykład obalający dowód Kempego, dowód faktu, że dowolną mapę można pomalować co najwyżej pięcioma barwami, i jeszcze jeden zadziwiający rezultat, o którym opowiemy dokładniej.

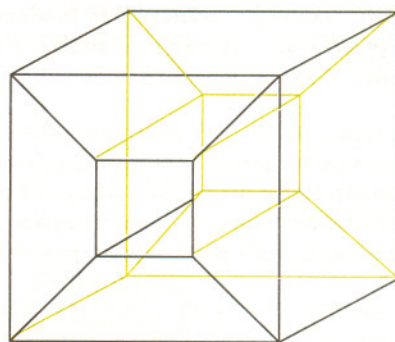
Rozważmy mapy położone na powierzchni  $P_g$  (rys. 2) powstającej przez doklejenie do sfery  $g$  „rączek”. Można równoważnie powiedzieć, że  $P_g$  to powierzchnia obwarzanka, w którym piekarz zrobił  $g$  dziur.



Rys. 2. Powierzchnia  $P_g$  dla  $g = 3$ .

Liczba  $g$  nazywa się fachowo genusem powierzchni  $P_g$ . (Więcej na temat dwuwymiarowych powierzchni można przeczytać np. w *Delcie* 6/1995.) Gdyby model powierzchni  $P_g$  zrobić z kartonu, klejąc odpowiedni wielościan (dla  $g = 1$  może to być np. wydrążony sześcián z rys. 3), to okazałoby się, że liczba  $K$  krawędzi tego wielościanu, liczba  $W$  jego wierzchołków i liczba  $S$  jego ścian spełniają zawsze zależność

$$(1) \quad W - K + S = E = 2 - 2g .$$



Rys. 3. Wydrążony sześcián;  $W = S = 16$ ,  $K = 32$ .



Liczba  $E = 2 - 2g$  to tzw. charakterystyka Eulera–Poincarégo powierzchni  $P_g$ . Jak się okazuje, zachodzi następujące

**Twierdzenie (Heawood, 1890).** Dla  $g \geq 1$  dowolną mapę położoną na powierzchni  $P_g$  można pomalować używając co najwyżej  $h(g)$  barw, gdzie

$$h(g) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24E}}{2} \right\rceil.$$

W dowodzie wykorzystamy prosty

**Lemat.** Jeśli  $g \geq 1$ , a liczba państw na mapie  $M$  położonej na  $P_g$  jest większa od liczby  $h(g)$ , to istnieje wśród nich państwo graniczące z co najwyżej  $h(g) - 1$  innymi.

**Dowód Lematu.** Uznajmy, że mapa  $M$  położona na powierzchni  $P_g$  to zdeformowany wielościenny model powierzchni  $P_g$ . Zatem liczba państw  $S$ , liczba  $K$  granic między sąsiadami i liczba  $W$  „wierzchołków” (czyli punktów, gdzie zbiega się kilka różnych granic) spełniają wzór Eulera (1).

Ponieważ (tak samo, jak dla każdego wielościannu!) mamy  $3W \leq 2K$ , więc z (1) wynika, że  $2K \leq 6(S - E)$ . Niech  $\alpha$  oznacza średnią liczbę sąsiadów państwa na mapie  $M$ ; wtedy  $\alpha S = 2K$  (bowiem mnożąc liczbę państw przez średnią liczbę sąsiadów liczymy dwukrotnie każdą granicę między dwoma państwami). Wynika stąd, że  $\alpha S \leq 6(S - E)$ , czyli

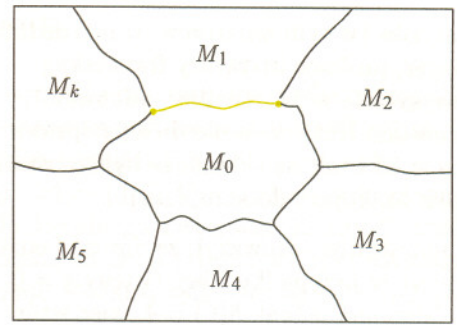
$$(2) \quad \alpha \leq 6 \left( 1 - \frac{E}{S} \right).$$

Rozważmy trójmian kwadratowy  $\phi(x) = x^2 - 7x + 6E$ . Ponieważ  $E = 2 - 2g \leq 0$ , więc ma on dwa rzeczywiste pierwiastki  $x_1, x_2$ , przy czym  $x_1 > 0$ . Posługując się szkolnym wzorem na pierwiastki trójmianu sprawdzamy, że część całkowita  $x_1$  to właśnie dziwna liczba  $h(g)$  pojawiająca się w twierdzeniu Heawooda. Warunek  $\phi(x_1) = 0$  zapiszmy w postaci

$$(3) \quad x_1 - 1 = 6 \left( 1 - \frac{E}{x_1} \right).$$

Z założenia  $S > h(g) = [x_1]$ , zatem  $S > x_1$  ( $S$  jest liczbą naturalną!), a ponieważ  $E \leq 0$ , więc mamy  $-E/S \leq -E/x_1$ . Z warunków (2) i (3) otrzymujemy teraz nierówność  $x_1 - 1 \geq \alpha$ , a stąd  $[x_1] - 1 = h(g) - 1 \geq [\alpha]$ . Jednakże na mapie  $M$  istnieje, oczywiście, państwo mające co najwyżej  $[\alpha]$  sąsiadów – to spostrzeżenie kończy dowód lematu. ■

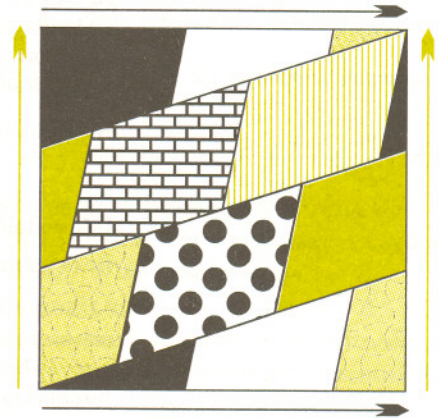
Dowód twierdzenia prowadzimy przez indukcję względem liczby państw  $S$ . Teza jest oczywista dla  $S \leq h(g)$  – można po prostu każde państwo pomalować innym kolorem. Załóżmy więc, że twierdzenie zachodzi dla pewnego  $S \geq h(g)$  i rozpatrzmy mapę  $M$ , na której jest  $S + 1$  państw. Z Lematu wynika, że istnieje wśród nich państwo  $M_0$ , które ma najwyżej  $h(g) - 1$  sąsiadów (rys. 4).



Rys. 4. Fragment mapy  $M$ ;  $k \leq h(g) - 1$ .

Połączmy na chwilę  $M_0$  z jednym z jego sąsiadów, np.  $M_1$ , tzn. zapomnijmy o istnieniu jednej granicy (zaznaczonej kolorem na rys. 4) na wyjściowej mapie  $M$ . Nową mapę, złożoną z  $S$  państw, dzięki założeniu indukcyjnemu można pomalować co najwyżej  $h(g)$  barwami. Jednak do kolorowania sąsiadów państwa  $M_0$  użyliśmy w najgorszym razie  $h(g) - 1$  barw – możemy teraz przypomnieć sobie o granicy między państwami  $M_0$  i  $M_1$  i pokolorować  $M_0$  tą spośród  $h(g)$  barw, która nie została użyta do kolorowania żadnego państwa sąsiedniego. ■

Co ciekawe, okazuje się, że oszacowania Heawooda nie da się już poprawić: dla każdego  $g \geq 1$  można wskazać taką mapę na powierzchni  $P_g$ , do której pomalowania nie wystarczy  $h(g) - 1$  barw. Np. dla torusa mamy  $g = 1$ ,  $h(1) = 7$ , a na rysunku 5 pokazana jest mapa na torusie z siedmioma państwami – jak widać, każde dwa są sąsiednie, więc do pomalowania trzeba istotnie użyć siedmiu barw.



Rys. 5. Mapa na torusie z siedmioma parami sąsiadującymi państwami (widok na pasku papieru, z którego skleamy torus zgodnie z narysowanymi strzałkami). Realistyczny (w trójwymiarowej przestrzeni) rysunek pomalowanego siedmioma barwami torusa jest na okładce.

Powyższy przykład pochodzi od Heawooda, który stwierdził nonszalancko, że podobne można znaleźć dla wszystkich genusów  $g$ . Zaopatrzenie akurat tego twierdzenia w dowód okazało się nieporównanie trudniejsze: o tym, że Heawood istotnie miał rację, wiadomo było dopiero w końcu lat 60. XX wieku, dzięki zbiorowym długoletnim wysiłkom wielu



matematyków (w tym amatorów: w lutym 1968 roku Jean Mayer, profesor literatury francuskiej na Uniwersytecie w Montpellier, udowodnił, że oszacowania Heawooda nie da się poprawić dla genusu  $g = 59$  i tak się składa, że był to ostatni przypadek brakujący do kompletu).

Każdy niewątpliwie zauważył, że dowód Lematu załamuje się w przypadku sfery (wtedy  $g = 0$ ,  $E = 2$ ). Niemniej jednak  $h(0) = 4$ , więc wzór Heawooda podaje odpowiednią liczbę barw także w przypadku sfery! Można tak mówić bez obawy, bowiem twierdzenie o czterech barwach udowodnili ostatecznie w 1976 roku (po sześcioletniej współpracy) Kenneth Appel i Wolfgang Haken. Ich dowodu nie może w rozsądnym czasie sprawdzić „ręcznie” żaden śmiertelnik: nie dość, że jego ostateczna wersja zajmuje ponad sto stron tekstu i czterysta mikrofilmów z rysunkami, to do sprawdzenia kilku tysięcy różnych przypadków Haken i Appel użyli

programu komputerowego, który na dużej maszynie działał kilkaset godzin. A swoją drogą, to zadziwiające, że twierdzenie o kolorowaniu map jest tak proste w dowodzie dla torusa i tak zawile dla sfery.

Miłośnicy wzoru Eulera mogą spróbować samodzielnie wymyślić (niełatwo i prosty!) dowód faktu, że każdą mapę na płaszczyźnie lub sferze można pomalować co najwyżej sześcioma barwami. Na początek należy zauważyć, że bez zmniejszenia ogólności można przyjąć, iż w jednym punkcie mapy zawsze zbiegają się najwyżej trzy różne granice.

Znaczenie wyniku Appela i Hakena jest dwójakie. Po pierwsze, rozwiązali oni sławny problem, który przez ponad sto lat był otwarty. Po drugie, ich praca zmusza matematyków do ponownego rozważenia pytań *Co to jest dowód?* i *Czy każdy dowód można zrozumieć i sprawdzić?*. A kartografowie najwyraźniej i tak się twierdzeniem o czterech barwach nie przejmują: w nowej sześciotomowej encyklopedii PWN województwa na mapach Polski z różnych lat kolorowane są zawsze przynajmniej pięcioma barwami...



## Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

**M 807.** Czy dwa równoległociąny (niekoniecznie przystające) mogą mieć tę własność, że każda ściana jednego z nich ma z każdą ścianą drugiego pewien punkt wspólny (nie leżący na żadnej z krawędzi obu równoległociąnow)?

Rozwiązanie na str. 9

**M 808.** Niech

$$a_n = \sin \frac{\pi}{2^n} \sin \frac{2\pi}{2^n} \sin \frac{3\pi}{2^n} \dots \sin \frac{(2^n - 1)\pi}{2^n}.$$

Udowodnić, że granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{2^{-n}}$  istnieje i obliczyć jej wartość.

Rozwiązanie na str. 9

**M 809.** Czy każdej dodatniej liczbie rzeczywistej  $\alpha$  można przyporządkować nieskończony podzbiór  $A_\alpha$  zbioru liczb naturalnych w taki sposób, by dla dowolnych  $\alpha \neq \beta$  zbiór  $A_\alpha \cap A_\beta$  był skończony?

Rozwiązanie na str. 11

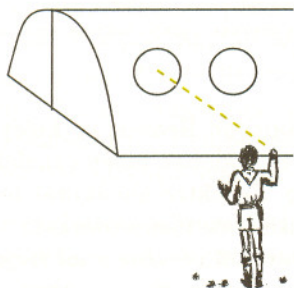
Redaguje Piotr ZALEWSKI

**F 451.** Harcerz rzuca z całej siły szyszkami do otwartego, okrągłego okienka namiotu-hangaru z odległości kilku metrów. Średnio co druga szyszka wpada do środka. Co która szyszka (średnio) omijałaby cel, gdyby chłopiec podszedł dwa razy bliżej, jeżeli przyjąć, że harcerz celuje w środek okienka, zamierzony kierunek rzutu jest prostopadły do płaszczyzny okienka, a rozrzut kątowy wokół tego kierunku w dowolnej płaszczyźnie go zawierającej podlega rozkładowi normalnemu.

Rozwiązanie na str. 12

**F 452.** Jednorodny sztywny pręt o masie  $m$  jest podparty na dwóch końcach. Obliczyć siłę reakcji podpory w momencie usunięcia drugiego punktu podparcia. Tarcie i grubość pręta zaniedbać.

Rozwiązanie na str. 8





## Wzór Eulera jako równanie

Równanie diofantyczne to równanie algebraiczne rozwiązywane wśród liczb całkowitych, względnie w jakimś ich ustalonym podzbiorniku; nazwa pochodzi od imienia Diofantosa, greckiego matematyka z III wieku.

Wzór  $W - K + S = 2$  można potraktować jako równanie diofantyczne rozwiązywane dla  $W \geq 4, S \geq 4$ . Nie każdemu rozwiązaniu (czyli trójce  $(W, K, S)$ ) odpowiada jakiś wielościan wypukły mający akurat tyle wierzchołków, krawędzi i ścian – np. trójce  $(4, 7, 5)$  nie odpowiada żaden wielościan – choć są rozwiązania dla dowolnego ustalonego  $W$  czy  $S$ , a także dla  $K = 6$  i  $K \geq 8$ . Nie podamy tu ogólnie, po czym poznać, którym rozwiązaniom odpowiadają wielościany, a którym nie. Podamy tylko pewne wyniki dotyczące bardziej regularnych wielościanów.

Aby uzyskać wielościan platoński – w każdym wierzchołku zbiega się tyle samo (powiedzmy  $p$ ) jednakowych (powiedzmy  $q$ -kątnych), foremnych ścian – wystarczy zauważyć, że  $pW = 2K = qS$  oraz zarówno  $p$ , jak i  $q$  nie przekraczają 5. Po wyeliminowaniu ze wzoru Eulera  $W$  i  $S$  otrzymujemy

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K},$$

które to równanie ma pięć rozwiązań i każdemu odpowiada żądany wielościan.

Aby uzyskać wielościan archimedesowy – każdy wierzchołek jest takim samym cyklem foremnych ścian – trzeba się pomęczyć nieco dłużej, ale w istocie postępuje się nawet jeszcze prościej. Jeśli w wierzchołku spotyka się  $s_i$  ścian  $l_i$ -kątnych ( $i = 1, \dots, n$ ) – uwaga! lekceważymy sobie ich porządek cykliczny – mamy

$$W \cdot \sum_{i=1}^n s_i = 2K \quad \text{oraz} \quad W \cdot \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{l_i} = S,$$

co po wyeliminowaniu  $K$  i  $S$  daje

$$\left(2 - \sum_{i=1}^n s_i \cdot \left(1 - \frac{2}{l_i}\right)\right) \cdot W = 4.$$

Z pełną lekkomyślnością zajmujemy się tylko tym, by znaki się zgadzały, co prowadzi do wymagania, by dodatnia była zawartość nawiasu, czyli

$$\sum_{i=1}^n s_i \cdot \left(1 - \frac{2}{l_i}\right) < 2.$$

Bez większego trudu stwierdzamy, że musi być  $n < 4$  i w efekcie rozwiązujemy dwie nierówności diofantyczne:

$$s_1 + s_2 - 2\left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_2}\right) < 2 \quad \text{i} \quad s_1 + s_2 + s_3 - 2\left(\frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_2} + \frac{s_3}{l_3}\right) < 2.$$

Z geometrii wiemy, że w każdym z przypadków suma  $s_i$  jest równa 3, 4 lub 5. Mamy więc do rozwiązania 6 nierówności. Aby i tym razem każdemu rozwiązaniu odpowiadał wielościan, należy tylko pamiętać, że *gdy  $l_1$  jest liczbą nieparzystą, to albo  $s_1 > 2$ , albo  $s_2 > 1$ , albo  $s_3 > 1$* , co pozostawiamy do uzasadnienia Czytelnikowi. Rozwiązań nierówności jest 13 plus dwie nieskończone serie. I istnieje trzynaście wielościanów archimedesowych (jeden nawet w dwóch postaciach) oraz archimedesowe graniastosłupy (dwa  $n$ -kąty foremne połączone paskiem kwadratów) i antygraniastosłupy (dwa  $n$ -kąty foremne połączone paskiem trójkątów równobocznych).

Jest jednak sytuacja, gdzie takie postępowanie staje się niestety nieefektywne. Mianowicie, gdy poszukujemy wielościanów wypukłych o ścianach będących trójkątami równobocznymi.

Oznaczając przez  $w_i$  liczbę wierzchołków, w których zbiega się  $i$  ścian, mamy

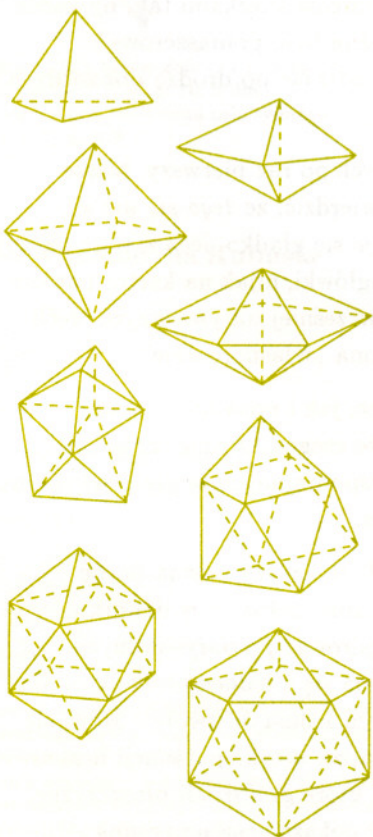
$$3w_3 + 4w_4 + 5w_5 = 2K = 3S \quad \text{oraz} \quad W = w_3 + w_4 + w_5,$$

co, po wyeliminowaniu ze wzoru Eulera  $W, K$  i  $S$ , daje

$$3w_3 + 2w_4 + w_5 = 12.$$

Równanie to ma jednak 19 rozwiązań, choć odpowiednich wielościanów istnieje tylko 8. Wcale nie jest łatwo wykazać, że akurat tak jest: fakt ten nazywa się **twierdzeniem Freudenthala–van der Waerdena**.

Tu (i dalej) byłoby przemilo ze strony Czytelnika, gdyby zechciał sprawdzić nasze gołosłowne deklaracje. Gotowych rozwiązań można szukać np. w *Delcie* 4/1984 lub w czasopiśmie *Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie* nr 7.



Oto rysunki wszystkich wielościanów wypukłych mających ściany będące trójkątami równobocznymi; mają one kolejno cztery, sześć, osiem, dziesięć, dwanaście, czternaście, szesnaście i dwadzieścia ścian.

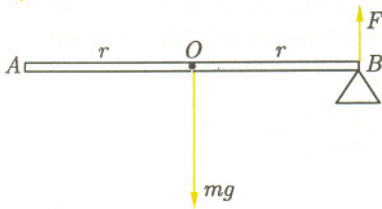
A oto rozwiązania  $(w_3, w_4, w_5)$  odpowiedniego równania:  $(4, 0, 0)$   $(3, 1, 1)$   $(3, 0, 3)$   $(2, 3, 0)$   $(2, 2, 2)$   $(2, 1, 4)$   $(2, 0, 6)$   $(1, 4, 1)$   $(1, 3, 3)$   $(1, 2, 5)$   $(1, 1, 7)$   $(1, 0, 9)$   $(0, 6, 0)$   $(0, 5, 2)$   $(0, 4, 4)$   $(0, 3, 6)$   $(0, 2, 8)$   $(0, 1, 10)$   $(0, 0, 12)$ .





### Rozwiązanie zadania F 452.

W momencie usunięcia podparcia w punkcie  $A$  na pręt działają: siła ciężkości  $mg$  zaczepiona w środku ciężkości  $O$  i siła reakcji  $F$  zaczepiona w punkcie  $B$ .



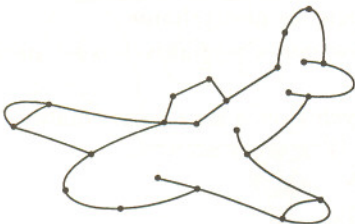
Możemy wypisać następujące równania Newtona w inercjalnym układzie odniesienia związanym z punktem  $B$ . Dla ruchu postępowego środka ciężkości

$$ma = mg - F,$$

oraz dla ruchu obrotowego wokół punktu podparcia  $B$

$$I \cdot a/r = mg \cdot r,$$

gdzie  $I = 4/3mr^2$  jest momentem bezwładności pręta o długości  $2r$  względem jego końca. Po prostym rachunku otrzymujemy  $F = mg/4$ .



Rys. 1. Dla grafu u góry (domek) mamy  $S = 4$ ,  $W = 12$ ,  $K = 14$ ; dla grafu u dołu (samolot) mamy  $S = 6$ ,  $W = 23$ ,  $K = 27$ .

## Domki i studnie

Zacznijmy od przypomnienia dwóch starych jak świat łamigłówek. W pierwszej z nich mowa jest o trzech studniach i trzech domkach; chodzi o to, by każdy domek połączyć drogą z każdą studnią spełniając jednocześnie kaprys właścicieli: mianowicie, różne drogi nie mogą się przecinać.

W drugiej łamigłówce nie ma studni, a domków jest za to pięć. Tym razem rozwiązujący ma wymyślić sposób połączenia domków ścieżkami tak, by każde dwa były połączone bezpośrednio (tzn. żeby można było pomaszzerować z każdego domku do dowolnego innego, nie odwiedzając po drodze pozostałych). Jak poprzednio, ścieżki nie mogą się przecinać.

Nieomal każdy, kto słyszy jedną z tych łamigłówek po raz pierwszy, bierze kartkę papieru i ołówek, by po kilku próbach stwierdzić, że *tego się nie da narysować*. Rzeczywiście, z początku drogi rysuje się gładko, lecz zawsze okazuje się, że ostatniej, brakującej do rozwiązania łamigłówki, nijak na kartce papieru umieścić nie można, o ile nie chcemy przecinać wcześniej narysowanych. Jeśli ktoś nigdy jeszcze nie próbował, niech się przekona „własnoręcznie”.

No dobrze, ale przecież – zarówno w matematyce, jak i poza nią – seria niepowodzeń to wcale jeszcze nie dowód na to, że czegoś istotnie zrobić nie można. Ścisłe uzasadnienie faktu, że żadna ze wspomnianych łamigłówek nie ma rozwiązania, podamy wykorzystując wzór Eulera.

Przypuśćmy, że na płaszczyźnie mamy tzw. *graf*, to znaczy pewną liczbę kropek połączonych nie przecinającymi się kreskami. Załóżmy w dodatku, że z każdej kropki do każdej innej można przewędrować po narysowanych kreskach (intuicyjnie znaczy to tyle, że graf składa się z jednego tylko kawałka, a nie, na przykład, z dwóch czy trzech położonych z dala od siebie). Mówi się wówczas, że graf jest *spójny*. Wzór Eulera orzeka, że w takiej sytuacji liczba kropek  $W$ , liczba kresek  $K$  i liczba  $S$  części, na które graf dzieli płaszczyznę, spełniają zależność  $W - K + S = 2$ . Przykłady pokazane są na rysunku 1, a jeśli komuś nie chce się czytać (niezbyt trudnego) dowodu, który można znaleźć np. w *Delcie* 5/1996, to niech przynajmniej narysuje na kartce papieru kilka innych grafów spójnych i sprawdzi dla nich zależność między liczbami  $W$ ,  $K$  i  $S$ .

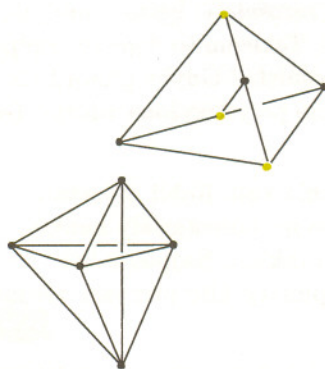
W pierwszym zadaniu mamy  $W = 3 + 3 = 6$ ,  $K = 3 \cdot 3 = 9$  (bo każdy domek ma być połączony z każdą studnią). Ze wzoru Eulera wynika więc, że powinno być  $S = 5$ . Gdyby udało się nam zrobić rysunek rozwiązujący łamigłówkę, to każda z tych pięciu części płaszczyzny byłaby ograniczona przynajmniej czterema kreskami. (Dwie lub trzy kreski to jeszcze za mało, bo w pierwszym



przypadku musielibyśmy mieć dwie różne drogi z pewnego domku do pewnej studni, a w drugim – dwie studnie lub dwa domki połączone bezpośrednią drogą; żadnej z tych możliwości warunki zadania nie przewidują.) Skoro tak, to wszystkich kresek jest przynajmniej  $(5 \cdot 4) : 2 = 10$  (dzielimy przez 2, bo każda kreska jest wspólna dla dwóch części płaszczyzny), czyli za dużo! Ta sprzeczność dowodzi, że zadania o studniach i domkach istotnie rozwiązać się nie da.

W drugim zadaniu mamy  $W = 5$  oraz  $K = (5 \cdot 4) : 2 = 10$  (bo każdy z pięciu domków ma być połączony z każdym z czterech pozostałych i żadnej kreski-ścieżki nie chcemy liczyć dwa razy). Powinno więc być  $S = 2 + K - W = 7$ . Jeśliby się udało narysować odpowiedni graf, to każda z tych siedmiu części miałaby brzeg złożony tym razem z trzech kresek (wynika to z faktu, że każde dwa domki są połączone ścieżką). Licząc, jak poprzednio, kreski na nowo, otrzymujemy  $K = (7 \cdot 3) : 2 = 10\frac{1}{2}$ , a to jest sprzeczność.

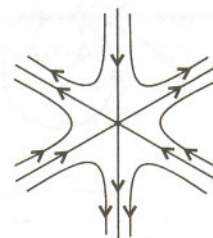
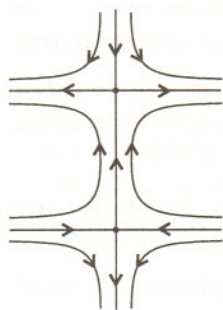
Zamiast przypominać łamigłówki dobrze znane, powie może ktoś z Czytelników, lepiej byłoby dać w prezencie najmłodszemu miłośnikom *Delty* nową łamigłówkę tego rodzaju, żeby znowu mogli zabłysnąć na najbliższych imieninach Cioci czy też kółku matematycznym (niepotrzebne skreślić). Okazuje się, że istotnie nowej łamigłówki polegającej na zmuszaniu kogoś do rysowania płaskiego grafu, którego się narysować nie da, wymyślić nie można. Nie wynika to wcale z lenistwa redakcji (którego staramy się Czytelnikom nie pokazywać), lecz z twierdzenia, które Kazimierz Kuratowski udowodnił w 1930 roku: *każdy graf niespłaszczalny zawiera jeden z dwóch fragmentów pokazanych na rysunku 2. Nie trzeba wiele sprytu, by na tym rysunku zauważyć opisane wyżej studnie i domki.*



Rys. 2. Dla sześciokąta z przekątną mamy  $W = 5$ ,  $K = 10$ , a dla czworościanu z dodaną osią symetrii  $W = 6$ ,  $K = 9$ .

## Rozwiązanie dla Kubusia

Wytnijmy fragment torusa zawierający dwa punkty osobliwe:



Zmieniając zaczesanie możemy te dwa punkty osobliwe zdeformować do jednego (o indeksie  $-2$ ).



**Rozwiązanie zadania M 808.** Skorzystamy ze wzorów  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  oraz  $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ . Ponieważ

$$\begin{aligned} a_n &= \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin\left(2 \cdot \frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) = \prod_{k=1}^{2^n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{k\pi}{2^{n+1}} = \\ &= 2^{2^n-1} \cdot \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin \frac{k\pi}{2^{n+1}} \cdot 1 \cdot \prod_{k=1}^{2^n-1} \cos \frac{k\pi}{2^{n+1}} = \\ &= 2^{2^n-1} \prod_{k=1}^{2^n-1} \sin \frac{k\pi}{2^{n+1}} \cdot \sin \frac{2^n\pi}{2^{n+1}} \cdot \prod_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}-1} \sin \frac{k\pi}{2^{n+1}} = \\ &= 2^{2^n-1} a_{n+1}, \end{aligned}$$

więc  $a_n \cdot 2^{2^n-n} = a_{n+1} \cdot 2^{2^{n+1}-(n+1)}$  dla każdej liczby naturalnej  $n$ . Zatem ciąg  $b_n = a_n \cdot 2^{2^n-n}$  jest stały i dlatego

$$a_n = 2^{n-2^n} \cdot a_1 \cdot 2^{1-2^1} = 2^{n-2^n-1}.$$

Stąd  $(a_n)^{2^{-n}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{(n-1)/2^n}$ , toteż szukana granica istnieje i jest równa  $\frac{1}{2}$ .

**Uwaga.** W podobny sposób dowodzi się, że  $\int_0^\pi \ln \sin x \, dx = -\pi \ln 2$ .



**Rozwiązanie zadania M 807.** Przypuśćmy, że dwa równoległosciany o szukanej własności istnieją. Wtedy każda ze ścian pierwszego z nich dawałaby w przecięciu z każdą ze ścian drugiego z nich odcinek. Część wspólna  $M$  obu równoległoscianów jest wielościanem wypukłym (bo jest przecięciem dwóch wielościanów wypukłych) o dwunastu ścianach (leżących w płaszczyznach ścian obu równoległoscianów). Liczba  $K$  krawędzi wielościanu  $M$ , na mocy poczynionej wyżej obserwacji, spełnia warunek  $K \geq 6 \cdot 6 = 36$ . Ze wzoru Eulera otrzymujemy liczbę wierzchołków

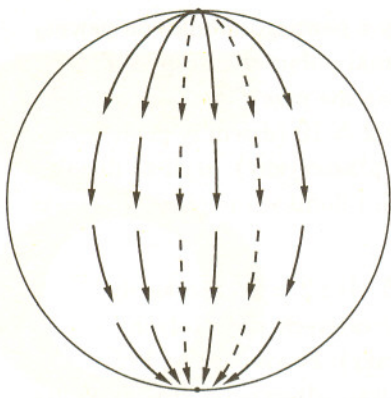
$$W = 2 + K - S = K - 10 = \frac{2}{3}K + \frac{1}{3}(K - 30) > \frac{2}{3}K.$$

Jednakże prowadzi to do sprzeczności, bo każda krawędź ma za końce dwa wierzchołki, a w każdym wierzchołku schodzą się co najmniej trzy krawędzie, czyli  $3W \leq 2K$ . Sytuacja, o którą pytaliśmy w zadaniu, nie może więc zachodzić.

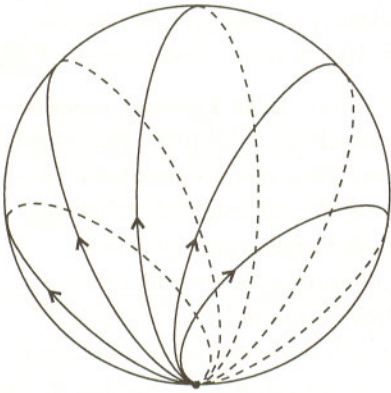
A co będzie, jeśli zażądamy jedynie, by każda ściana pierwszego równoległoscianu miała z każdą ścianą drugiego punkt wspólny (być może leżący na krawędzi jednego z równoległoscianów)? Kwestię tę pozostawiamy do rozstrzygnięcia Wnikliwym Czytelnikom ufnie prosząc o nadsyłanie rozwiązań, bo zagadnienie wielce nas nurtuje.



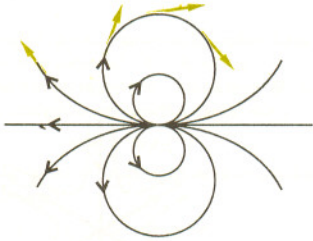
## Charakterystyka Eulera, czyli jak się uczesać



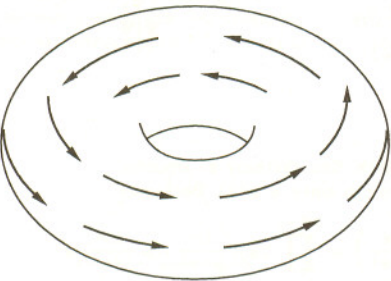
Rys. 1



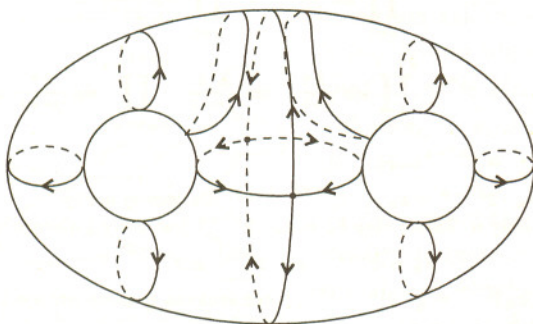
Rys. 2



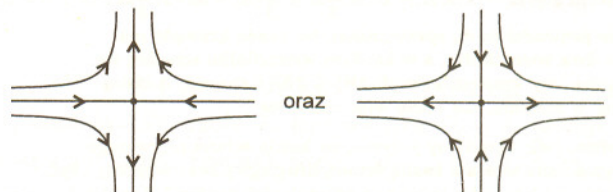
Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Mały Kubuś był zawsze przesadnie pedantyczny. Wszystkie książki musiały być równo ułożone, zeszyty i długopisy również. Nawet klocki porzucane na podłodze czym prędzej układał w rzędkie. Był jednak jeden problem, z którym nie potrafił sobie poradzić. Miał równo przystrzyżone, krótkie, proste włosy i ilekroć starał się je uczesać, na czubku głowy pozostawał punkt, z którego włosy rozchodziły się w każdym kierunku. Wymyślił co prawda, że gdyby czesać się do tyłu, to problem by znikł, ale czesać się do tyłu po prostu nie chciał. Problem nurtował go na tyle, że zaczął na jego temat fantazjować.

Mam wujka – myślał Kubuś – ten to dopiero jest zarośnięty: gęsta czupryna, wąsy, broda, całe policzki, no i te krzaczaste brwi. Takim to dopiero trudno jest się uczesać. A gdyby tak cała głowa była porośnięta? Gdyby głowa była kulą, na której rosłyby gęste, proste, krótkie, równo przystrzyżone włosy? Teraz nawet czesanie do tyłu nic by nie dało!

Z wypiekami na twarzy Kubuś zabrał się do czesania kuli. Robił mnóstwo rysunków (włoski rysował ołówkiem na piłce) i zawsze pozostawały punkty, z których włosy rozchodziły się we wszystkich kierunkach. Najpierw był przekonany, że muszą być co najmniej dwa takie punkty. Oto pierwszy rysunek Kubusia – rysunek 1.

Z jednego punktu na sferze włoski wychodzą, a w drugim punkcie się schodzą. Po pewnym czasie Kubuś odkrył, ku swojemu zdziwieniu, że można tak zaczesać kulę, aby był tylko jeden punkt *osobliwy* (tak Kubuś nazwał punkty, w których włoski nie układały się w jednym kierunku). Oto drugi rysunek Kubusia – rysunek 2.

Włoski układają się wzdłuż narysowanych linii. Na oddzielnej kartce narysował, co się dzieje w pobliżu punktu osobliwego (rys. 3).

Włoski są tak ułożone, że są styczne do narysowanych linii i układają się w kierunku narysowanych strzałek. Dla większej przejrzystości Kubuś zaznaczył na rysunku cztery włoski na kolorowo.

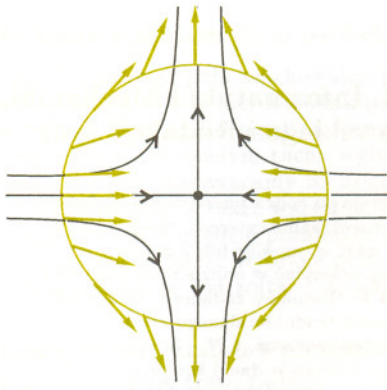
Tak – pomyślał – udało mi się wprawdzie zastąpić dwa punkty osobliwe jednym, ale za to jest on tak jakby dwa razy bardziej skomplikowany.

Zapomniawszy, co było jego pierwotnym problemem, zaczął fantazjować dalej. Czy można zaczesać torus? Tak, i to bez żadnych punktów osobliwych! Rozwiązanie znalazł bez większych problemów i przedstawił je na kolejnym rysunku (rys. 4).

Torusa z dwiema dziurami (rys. 5) nie udało mu się już zaczesać bez powstawania punktów osobliwych.

Jak poprzednio, dla większej wyrazistości, punkty osobliwe na torusie z dwiema dziurami Kubuś przedstawił na dodatkowym rysunku (rys. 6.).





Rys. 7

Tutaj, podobnie jak w przypadku kuli, mamy dwa punkty osobliwe, lecz są one „innego typu” niż te na kuli.

Coraz to nowsze pytania nurtowały Kubusia. Jak rozróżnić „typy” punktów osobliwych? Co to znaczy, że jeden punkt osobliwy jest „bardziej skomplikowany” niż inny? Jaki jest związek między liczbą dziur w torusie, liczbą punktów osobliwych i tym, jak bardzo są one skomplikowane? Wszystko to wydawało mu się bardzo trudne, był jednak przekonany, że jakiś związek istnieje, a dokładniej, że istnieje zależność dająca się wyrazić prostym wzorem. Aby móc taką zależność znaleźć, trzeba najpierw wyrazić liczbowo, na ile dany punkt osobliwy jest skomplikowany – rozumował Kubuś. Po dłuższym zastanowieniu doszedł do wniosku, że da się to wyrazić poprzez *indeks punktu osobliwego*, który zdefiniował w sposób następujący.

Narysujmy bardzo mały okrąg o środku w punkcie osobliwym. Na tym okręgu są jakoś położone włoski (na rys. 7 włoski są kolorowe).

Gdy poruszamy się po okręgu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to włoski wyrastające z okręgu zmieniają swój kierunek obracając się. Gdy obejdziemy okrąg dookoła w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to włoski leżące na okręgu wykonają pewną liczbę pełnych obrotów. Kubuś zdefiniował *indeks punktu osobliwego* jako ową liczbę obrotów wykonanych przez włoski, przy czym bierzemy ją ze znakiem +, gdy włoski obróciły się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i ze znakiem –, gdy obróciły się w kierunku zgodnym ze wskazówkami. Wszystko to jest dosyć skomplikowane; aby lepiej zrozumieć, o co w tej definicji chodzi, popatrzymy na przykłady. Każdy z punktów osobliwych z rysunku 1 ma indeks równy 1. Punkt osobliwy z rysunku 3 ma indeks 2. Każdy z punktów osobliwych z rysunku 6 ma indeks –1.

Następnie Kubuś empirycznie sprawdził, że suma indeksów punktów osobliwych nie zależy od sposobu zaczesania! I tak, na przykład, na rysunku 1 mamy dwa punkty osobliwe o indeksie 1, co daje w sumie 2, a na rysunku 2 mamy jeden punkt osobliwy o indeksie 2. Na rysunku 5 mamy dwa punkty osobliwe, każdy o indeksie –1. Można jednak zaczesać torus z dwiema dziurami tak, aby był tylko jeden punkt osobliwy – o indeksie –2 (jak to zrobić? rozwiązanie jest gdzieś w tym numerze *Delty*). Kubuś sprawdził wiele innych przykładów i zawsze okazywało się, że suma indeksów punktów osobliwych nie zależy od sposobu zaczesania. Minęło parę lat.

Ciekawe, ile wynosi suma indeksów punktów osobliwych – zastanawiał się Kuba podczas lektury bieżącego numeru *Delty*. Znalazł w nim wzór Eulera i ku swojemu zaskoczeniu odkrył, że

*suma indeksów punktów osobliwych na torusie z n dziurami jest stała, niezależna od sposobu zaczesania i jest równa charakterystyce Eulera torusa z n dziurami.*

Oczywiście, sfera to torus z 0 dziurami, czyli – mówiąc po ludzku – bez dziur.

Czy umiesz zaczesać torus z  $n$  dziurami? A czy umiesz go zaczesać w taki sposób, aby był tylko jeden punkt osobliwy? Jeśli udało Ci się go zaczesać, to oblicz, jaka jest suma indeksów punktów osobliwych i sprawdź, że jest ona równa charakterystyce Eulera torusa z  $n$  dziurami.

Mimo że odkrył ten wzór, nie potrafił go udowodnić. Z czasem dowiedział się, że jest to tak zwany wzór Hopfa–Poincarégo. Oczywiście, matematycznie precyzyjne sformułowanie wymaga rozwinięcia dosyć trudnego aparatu pojęciowego, ale to już temat na głębsze dyskusje. Dlatego też, chcąc dogłębnie zrozumieć twierdzenie Hopfa–Poincarégo, Kuba zaczął studiować matematykę na uniwersytecie. Tam też dowiedział się, że Hopf uogólnił ten wzór na wielowymiarowe powierzchnie. Czy też chcesz się dowiedzieć, jak się formułuje to uogólnienie? Pójdźcie śladem Kuby...

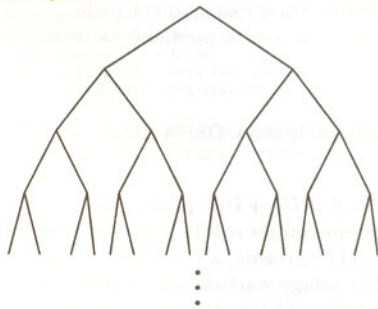


**Rozwiązanie zadania M 809.** Tak. Niech  $(p_n)$  będzie ciągiem kolejnych liczb pierwszych, tzn.  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$  itd. Liczbie dodatniej  $\alpha$  przyporządkujemy zbiór

$$A_\alpha = \{p_1^{[\alpha]}, p_2^{[2\alpha]}, p_3^{[3\alpha]}, \dots\},$$

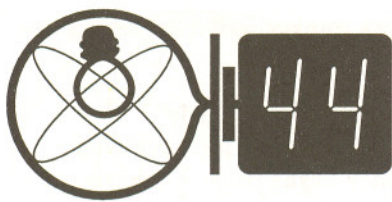
gdzie  $[x]$  oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą  $x$ . Dla dowolnych  $\beta > \alpha > 0$  każdy element wspólny zbiorów  $A_\alpha$  i  $A_\beta$  musi być postaci  $p_n^{[n\alpha]} = p_n^{[n\beta]}$ , więc  $n\alpha \geq [n\alpha] = [n\beta] \geq n\beta - 1$ , skąd  $n \leq 1/(\beta - \alpha)$ . Zatem zbiory  $A_\alpha$  i  $A_\beta$  mają co najwyżej  $[1/(\beta - \alpha)]$ , a więc skończenie wiele, elementów wspólnych.

**Uwaga.** Zadanie wyboru ze zbioru przeliczalnego continuum podzbiorów o skończonych przecięciach jest już dość stare i ma wiele pięknych rozwiązań. Pan Marek Pycia podał taką konstrukcję: każdej liczbie rzeczywistej  $\alpha$  przyporządkowujemy podzbiór zbioru liczb wymiernych, którego elementami są wyrazy pewnego ciągu liczb wymiernych zbieżnego do  $\alpha$ . Ponieważ ciągi o różnych granicach mogą mieć co najwyżej skończoną liczbę wspólnych wyrazów, więc warunki zadania są spełnione. Pan Krzysztof Woźniakowski wskazał inne rozwiązanie:



elementami zbioru przeliczalnego są węzły tego drzewa, a szukanymi podziorami wszystkie drogi w dół.





# Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

Czołówka ligi zadaniowej

### Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 225 ( $WT=2,89$ ), 226 ( $WT=3,23$ )  
z numeru 10/1996

Aleksander Surma	- Myszków	44,20
Przemysław Gwoździński	- Częstochowa	43,67
Andrzej Idzik	- Bolesławiec	34,14
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	31,28
Andrzej Nowogrodzki	- Chocianów	12,49

Zdobywając 44 punkty po raz trzeci  
pan Surma zostaje czwartym  
Weteranem **Klubu 44 F**.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 1997

## Zadania z fizyki nr 239, 240

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**239.** Na nici o długości 40 cm (długość w stanie nie napiętym) wisi ciężarek o masie 2 kg, do którego od dołu przywiązany jest luźny odcinek takiej samej nici o długości 30 cm. Z jaką prędkością powinien się przesuwać w dół ruchem jednostajnym dolny koniec tego odcinka (rys. 1), aby w następstwie jego napięcia a) zerwaniu uległ tylko dolny odcinek nici, b) zerwaniu uległy oba odcinki (gdy ciężarek znajdował się ponad końcem poruszającym się jednostajnie)?

Wytrzymałość nici wynosi 50 N, a maksymalna rozciągliwość – 8%, przy czym zakładamy, że wydłużenie jest proporcjonalne do siły napinającej aż do chwili zerwania.

**240.** Wysyłający światło punkt porusza się z prędkością  $v_1$  i przecina oś optyczną soczewki pod kątem  $\alpha_1$ , a w tym momencie obraz tego punktu przecina oś pod kątem  $\alpha_2$ . Z jaką prędkością  $v_2$  porusza się obraz?

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1997

Przypominamy treść zadań:

**231.** Jacek siedzi na lekkiej huśtawce w odległości 2 m od punktu podparcia, a Marek zeskakuje z pewnej wysokości na drugie ramię huśtawki. W jakiej odległości od punktu podparcia powinien zeskoczyć, aby Jacek wzbil się jak najwyżej? Marek waży trzy razy więcej od Jacka, a huśtawka jest doskonale sprężysta.

**232.** Na rysunku 2 przedstawiona jest charakterystyka diody tunelowej w kierunku przewodzenia. Diodę tę włączono w obwód zawierający źródło napięcia  $\mathcal{E}$  i cewkę o indukcyjności  $L$ , przy czym wartość napięcia  $\mathcal{E}$  leży w opadającym obszarze charakterystyki (została zaznaczona na rys. 2). Opisać jakościowo procesy zachodzące w obwodzie po zamknięciu klucza.

**231.** Jacek osiągnie maksymalną wysokość wtedy, gdy Marek się zatrzyma, a energia kinetyczna będzie zachowana, tzn.

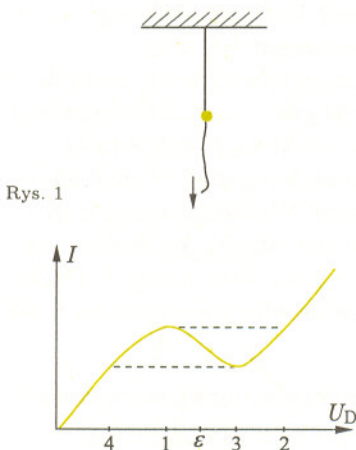
$$\frac{1}{2} m_J v_J^2 = \frac{1}{2} m_M v_M^2.$$

Ponadto podczas uderzenia Marka w huśtawkę wielkością zachowaną jest moment pędu chłopców względem punktu podparcia (ze względu na krótki czas można pominąć na tym etapie rolę siły ciężkości). Stąd wynika drugie równanie

$$m_J v_J r_J = m_M v_M r_M,$$

gdzie  $r_J$  i  $r_M$  oznaczają odległości Jacka i Marka od punktu podparcia. Obliczamy  $r_M = r_J \sqrt{m_J/m_M} = 2/\sqrt{3} \text{ m} = 1,15 \text{ m}$ .

**232.** Napięcie źródła  $\mathcal{E}$  jest sumą napięć na cewce i diodzie:  $\mathcal{E} = U_L + U_D$ , przy czym  $U_L = L(dI/dt)$ . Początkowo  $I$  oraz  $U_D$  są małe, więc natężenie prądu rośnie w przybliżeniu liniowo. W miarę zbliżania się do maksimum charakterystyki  $U_D$  rośnie, a  $U_L$  maleje, czyli  $I$  narasta wolniej, jednak  $dI/dt$  nie maleje do zera. Gdy  $U_D$  osiąga wartość odpowiadającą maksimum charakterystyki (punkt 1), prąd nie może nadal rosnąć i jedynym rozwiązaniem jest przeskok na prawą stronę charakterystyki – do punktu 2. Teraz  $U_D > \mathcal{E}$ , więc  $dI/dt < 0$  i następuje stopniowe przejście do punktu 3 charakterystyki, a dalej – podobnie jak poprzednio – wnioskujemy, że tylko przeskok do punktu 4 zapewnia niesprężystość równań. Cykl 1-2-3-4 się powtarza.



Rys. 1

Rys. 2

### Rozwiązanie zadania F 451.

Wybierając parę prostopadłych płaszczyzn, których częścią wspólną jest zamierzony kierunek rzutu i oznaczając kąty rozrzutu leżące na tych płaszczyznach przez  $\alpha$  i  $\beta$  możemy zapisać, że prawdopodobieństwo trafienia wynosi

$$P(R) = \int_{\text{okienko}} \frac{d\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}} \frac{d\beta}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}},$$

gdzie zależność od odległości od okienka  $R$  jest ukryta w zależności granic całkowania od  $R$ . Przechodząc w płaszczyźnie okienka o promieniu  $r \ll R$  do współrzędnych biegunowych  $\rho, \phi$  otrzymujemy ( $\alpha = \rho/R \cos \phi, \beta = \rho/R \sin \phi, d\alpha d\beta = \rho/R d\rho d\phi$ )

$$P(R) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^r \frac{\rho d\rho}{R^2 \sigma^2} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2 R^2}} = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2 R^2}}.$$

Prawdopodobieństwo chybiaenia wynosi  $Q(R) = 1 - P(R)$ . W takim razie jeżeli  $Q(R) = 1/2$ , to

$$Q(R/2) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2} \left(\frac{R}{2}\right)^2} = Q(R)^4 = \frac{1}{16}.$$

Czyli po podejściu dwa razy bliżej harcerz będzie chybiał średnio co 16 rzut.



**341.** Na każdym polu szachownicy prostokątnej o wymiarach  $m \times n$  leży kartonik pomalowany z jednej strony na żółto, a z drugiej na niebiesko. Wykonujemy serię ruchów. W każdym ruchu wybieramy jedno pole, po czym przewracamy na drugą stronę leżący na nim kartonik, a także wszystkie inne kartoniki znajdujące się w rzędzie poziomym i w rzędzie pionowym przechodzącym przez wybrane pole. W chwili początkowej cała szachownica jest żółta. Udowodnić, że stosując opisaną

procedurę można doprowadzić do tego, by cała szachownica stała się niebieska oraz obliczyć minimalną liczbę ruchów, która jest do tego konieczna.

**342.** Wielościan wypukły  $W$  nie zawiera żadnego czworościanu o objętości 1. Dowieść, że wielościan  $W$  jest zawarty w pewnym czworościanie o objętości mniejszej niż 8.

Zadanie **342** zaproponował pan Wojciech Martys ze Stalowej Woli.

**Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1997**

Przypominamy treść zadań:

**333.** Zbiorem „klubowym” będziemy nazywali 44-elementowy zbiór  $K$  liczb całkowitych mający następującą własność: suma liczb w każdym niepustym podzbiore zbioru  $K$  jest niepodzielna przez 45. Ile jest zbiorów klubowych zawartych w zbiorze  $\{1, 2, 3, \dots, 1997\}$ ?

**333.** Weźmy zbiór klubowy  $K$ , ustawmy jego elementy w ciąg  $x_1, \dots, x_{44}$  i przyjmijmy oznaczenie:  $s_k = x_1 + \dots + x_k$  dla  $k = 1, \dots, 44$ . Z określenia zbioru klubowego wynika, że liczby  $s_k$  są niepodzielne przez 45 oraz że jeśli  $1 \leq k < m \leq 44$ , to różnica  $s_m - s_k$  nie dzieli się przez 45. Zatem ciąg  $((s_k \bmod 45): k = 1, \dots, 44)$  jest permutacją zbioru  $\{1, \dots, 44\}$ .

Zamieniamy teraz elementy  $x_1$  i  $x_2$  miejscami; to znaczy, ustawiamy elementy zbioru  $K$  w ciąg  $x'_1, \dots, x'_{44}$ , gdzie  $x'_1 = x_2, x'_2 = x_1, x'_j = x_j$  dla  $j > 2$ , i tworzymy sumy  $s'_k = x'_1 + \dots + x'_k$ . Także i ciąg  $((s'_k \bmod 45): k = 1, \dots, 44)$  jest permutacją zbioru  $\{1, \dots, 44\}$ . A ponieważ  $s_1 = x_1, s'_1 = x_2$  oraz  $s_k = s'_k$  dla  $k \geq 2$ , wnosimy stąd, że  $x_1 \equiv x_2 \pmod{45}$ .

Ustawienie zbioru  $K$  w ciąg było dowolne;  $x_1, x_2$  mogły być dowolnymi elementami  $K$ . Zatem wszystkie liczby w zbiorze  $K$  dają przy dzieleniu przez 45 jednakową resztę  $r$ . Ta reszta jest względnie pierwsza z 45; w przeciwnym razie dałoby się ze zbioru  $K$  wybrać podzbiór o sumie elementów podzielnej przez 45.

**334.** Dla każdej liczby naturalnej  $n$  szereg  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+k} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$  jest zbieżny. Oznaczmy jego sumę przez  $S_n$ . Dowieść, że istnieje skończona granica  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

Na odwrót, każdy zbiór  $K$  złożony z 44 liczb  $x_1 \equiv \dots \equiv x_{44} \pmod{45}$ , względnie pierwszych z 45, spełnia warunek definiujący zbiory klubowe.

Wśród liczb od 1 do 44 są dwadzieścia cztery liczby  $r_1, \dots, r_{24}$  względnie pierwsze z 45 (nie będziemy ich tu wypisywać – łatwo sprawdzić, że tak jest). Niech

$$M_i = \{x \in \{1, 2, 3, \dots, 1997\} : x \equiv r_i \pmod{45}\}.$$

Każdy 44-elementowy podzbiór któregośkolwiek ze zbiorów  $M_i$  jest zbiorem klubowym, i są to już wszystkie zbiory klubowe, jakich szukamy. Pozostaje je policzyć.

Zbiór  $M_i$  ma 45 elementów, gdy  $r_i \leq 17$ , natomiast 44 elementy, gdy  $r_i > 17$ . Wśród reszt  $r_i$  jest dziesięć liczb  $\leq 17$  oraz czternaście liczb  $> 17$ . Zatem z każdego zbioru  $M_i$  pierwszego typu można wybrać zbiór klubowy  $K$  na 45 sposobów, podczas gdy w każdym zbiorze  $M_i$  drugiego typu jedynym podzbiorem klubowym jest cały zbiór  $M_i$ . Stąd wynik: liczba rozpatrywanych zbiorów klubowych wynosi  $10 \cdot 45 + 14 \cdot 1$ , czyli 464.

**334.** Ustalmy liczbę naturalną  $n \geq 1$  i przyjmijmy  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+k}}{n+k}$  (szereg zbieżny dla  $-1 < x < 1$ ); wówczas

$$(1) \quad S_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n f\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Ponieważ  $f(0) = 0$  oraz  $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{n+k-1} = \frac{x^{n-1}}{1-x}$ , zatem dla każdej liczby  $w \in (-1; 1)$

mamy  $f(w) = \int_0^w \frac{x^{n-1}}{1-x} dx$ . Całkowanie przez części, a następnie przez podstawienie  $y = \frac{x}{n(1-x)}$ , daje wynik:

$$f(w) = \frac{w^n}{n(1-w)} - \int_0^w \frac{x^n dx}{n(1-x)^2} = \frac{w^n}{n(1-w)} - \int_0^v \left(\frac{ny}{ny+1}\right)^n dy,$$

gdzie  $v = \frac{w}{n(1-w)}$ . W otrzymanym wzorze kładziemy  $w = \frac{n}{n+1}$  (wtedy  $v = 1$ ):

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} - \int_0^1 \left(\frac{ny}{ny+1}\right)^n dy.$$

Stąd wobec równości (1):

$$(2) \quad S_n = \frac{n+1}{n} - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \int_0^1 \left(\frac{ny}{ny+1}\right)^n dy.$$

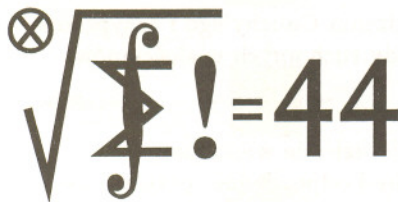
Ciąg funkcji  $g_n(y) = (ny)^n (ny+1)^{-n}$  jest w przedziale  $(0; 1)$  zbieżny monotonicznie do funkcji

$$h(y) = \begin{cases} e^{-1/y} & \text{dla } y > 0, \\ 0 & \text{dla } y = 0, \end{cases}$$

a wartości wszystkich tych funkcji są wspólnie ograniczone przez 1. Równość (2) daje więc w granicy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - e \cdot \int_0^1 h(y) dy$$

(wartość całki skończona). Dowodzi to zbieżności ciągu  $(S_n)$ .



Czołówka ligi zadaniowej  
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 325 (WT=2,56), 326 (WT=1,58),  
z numeru 9/1996

- Lesław Skrzypek - Rzeszów 46,12
- Krzysztof Zapisek - Warszawa 40,70
- Piotr Żmijewski - Łódź 39,15
- Bartłomiej Dyda - Wrocław 36,33
- Jarosław Łazuka - Warszawa 33,94

Weteran Lesław Skrzypek, autor licznych  
zadań ligowych, kończy czwartą rundę.  
Gratulacje!



## Wielościany sztywne, ruchome i te trzecie

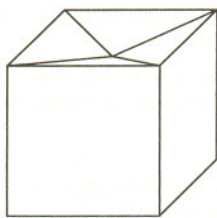
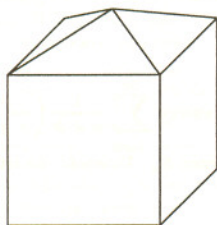
Na początek spójrzmy nieco inaczej na pierwszą cechę przystawania trójkątów. Zdanie

jeśli  $AB \equiv A'B'$ ,  $BC \equiv B'C'$  i  $CA \equiv C'A'$ , to  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

wyraża następujący fakt

jeśli istnieje izometria  $\varphi_1$  nakładająca  $AB$  na  $A'B'$ , izometria  $\varphi_2$  nakładająca  $BC$  na  $B'C'$  i izometria  $\varphi_3$  nakładająca  $CA$  na  $C'A'$ , to istnieje jedna izometria  $\varphi$  nakładająca równocześnie wszystkie te odcinki.

Izometria: przekształcenie nie zmieniające odległości.



Rys. 1. Sześcian, w którym jedna ściana zastąpiona została piramidką na zewnątrz, i drugi, gdzie piramidka jest do wewnątrz.

Wielokąt ( $n$ -kąt) nazywamy **sztywnym**, gdy spełnia warunek jeśli istnieją izometrie  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  nakładające odpowiednio poszczególne boki danego wielokąta na boki jakiegoś innego wielokąta, to istnieje jedna izometria  $\varphi$ , która nakłada je jednocześnie.

Z łatwością stwierdzamy, że spośród wielokątów sztywne są jedynie trójkąty. Sztywność wielościanów definiujemy w analogiczny sposób, jako możliwość zastąpienia izometrii nakładających poszczególne ściany przez jedną izometrię. Rysunek 1 pokazuje przykład wielościanu, który nie jest sztywny. Bez większych kłopotów stwierdzamy, że czworościan foremny jest sztywny, podobnie sześciątka czy ośmiościan foremny, ale dwudziestościan foremny już nie.

Wśród wielokątów czy wielościanów niesztywnych wyróżnić można wielokąty (wielościany) **ruchome**. Oznacza to, że nie tylko istnieją nie przystające wielokąty (wielościany) o przystających bokach (ścianach), lecz istnieje także ciągłe przejście pomiędzy nimi, które na każdym etapie zachowuje przystawanie ścian. Z łatwością stwierdzamy, że każdy niesztywny wielokąt jest ruchomy. Z pewnością też możemy stwierdzić, iż istnieją wielościany niesztywne, które nie są ruchome – taki jest np. wielościan z rysunku 1.

A oto jak wygląda problem sztywności i ruchomości wielościanów:

- wielościany wypukłe są sztywne (Augustin Louis Cauchy, 1813);
- istnieją wielościany ruchome (Robert Connelly, 1977).

Precyzując wynik Cauchy'ego: wypukły ma być zarówno wielościan, jak i jego obraz (por. rys. 1).

W tym tekście przedstawię szkic dowodu twierdzenia Cauchy'ego i przypomnę (publikowane już w *Delcie*: 7 i 8/1987) przykłady ruchomych wielościanów.

### Twierdzenie Cauchy'ego

Krok pierwszy dowodu polega na tym, aby stwierdzić, że wielościany wypukłe, mające odpowiednio przystające ściany i odpowiednio przystające kąty dwuścienne, są przystające. Nie jest to trudne do uzasadnienia, więc szczegóły pozostawię Czytelnikom; polega to uzasadnienie na wybraniu pewnej ściany i doklejaniu kolejno ścian następnych – wypukłość i znajomość kątów dwuściennych powodują, że jest to jednoznaczne. Dla zakończenia dowodu należy zatem wykazać, że te kąty dwuścienne muszą być równe.

Zajmiemy się w tym celu wielokątami sferycznymi: leżą one na sferze, ich boki to łuki okręgów wielkich, czyli leżących w płaszczyznach przechodzących przez środek sfery, ich kąty to kąty dwuścienne między tymi płaszczyznami. Potrzebne nam będą dwa spostrzeżenia o tych wielokątach.

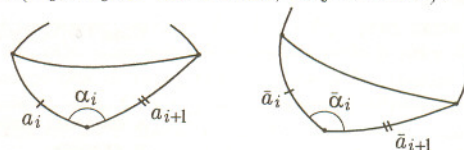
Przyjmijmy oznaczenia: w  $n$ -kącie bok  $X_i X_{i+1}$  ma długość  $a_i$  (dla  $i = 1, \dots, (n-1)$ ); bok  $X_n X_1$  ma długość  $a_n$ , kąt przy  $i$ -tym wierzchołku ma rozwartość  $\alpha_i$ .

#### Spostrzeżenie 1

Jeśli dwa wypukłe  $n$ -kąty sferyczne spełniają warunki  $a_i = \bar{a}_i$  dla  $i = 1, \dots, (n-1)$  i  $\alpha_i \leq \bar{\alpha}_i$  dla  $i = 2, \dots, (n-1)$ , to  $a_n \leq \bar{a}_n$ , przy czym gdy chociaż jedna z nierówności między kątami jest ostra, ostra jest też nierówność między bokami.

Dowodzi się tego indukcyjnie.

1° Dla  $n = 3$  dowód jest taki sam, jak dla płaskiego trójkąta (a jaki jest ten dowód, Czytelniku?).



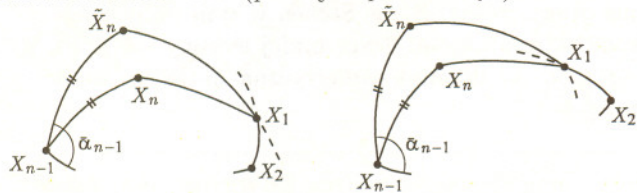
Rys. 2

2° Gdy chociaż w jednym przypadku mamy równość kątów, to odcinamy od obu wielokątów równy róg (rys. 2), co kończy krok indukcyjny.



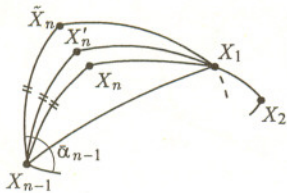
3° W pozostałym przypadku będziemy powiększali kąt przy wierzchołku  $X_{n-1}$  do rozwartości  $\bar{\alpha}_{n-1}$ .

3.1. Gdy powiększenie nie zepsuje wypukłości wielokąta (rys. 3), to krok indukcyjny polega na zastosowaniu 1° i 2° (proszę to przećwiczyć).



Rys. 3. Z lewej sytuacja korzystna, z prawej niekorzystna.

3.2. Gdyby otrzymany wielokąt miał być niewypukły, postępujemy inaczej – obracamy bok  $X_{n-1}X_n$  wokół  $X_{n-1}$  dopóty, dopóki wielokąt jest wypukły (rys. 4). Na mocy założenia indukcyjnego dla  $(n-1)$ -kątów  $X_2, \dots, X_{n-1}, X'_n$  i  $\bar{X}_2, \dots, \bar{X}_{n-1}, \bar{X}'_n$  mamy  $X_2X'_n \leq \bar{X}_2\bar{X}_n$ .



Rys. 4. Sytuacja, gdy  $\angle X_{n-2}X_{n-1}X'_n < \bar{\alpha}_n$ , a punkty  $X_2, X_1, X'_n$  leżą na jednym łuku.

Podobnie, dla trójkątów  $X_1, X_{n-1}, X_n$  i  $X_1, X_{n-1}, X'_n$  mamy  $X_1X_n \leq X_1X'_n$ . Łącznie daje to

$$a_n = X_1X_n \leq X_1X'_n = X_2X'_n - X_1X_2 \leq \bar{X}_2\bar{X}_n - \bar{X}_1\bar{X}_2 \leq \bar{X}_1\bar{X}_n = \bar{a}_n,$$

co kończy dowód spostrzeżenia 1.

Następne spostrzeżenie też poprzedzimy określeniem: dla dwóch  $n$ -kątów sferycznych  $S$  i  $\bar{S}$  funkcja  $\lambda$  przyporządkowuje  $i$  liczbę  $+1$ , gdy  $\alpha_i < \bar{\alpha}_i$ , liczbę  $0$ , gdy  $\alpha_i = \bar{\alpha}_i$ ; i liczbę  $-1$ , gdy  $\alpha_i > \bar{\alpha}_i$ . Zmianą znaku nazywamy sytuację, gdy  $\lambda(i) \cdot \lambda(i+1) = -1$  (także gdy  $\lambda(n) \cdot \lambda(1) = -1$ ).

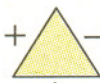
### Spostrzeżenie 2 (lemat Cauchy'ego)

Dla dowolnych  $S$  i  $\bar{S}$ , takich, że  $a_i = \bar{a}_i$ , dla  $i = 1, \dots, n$ , albo nie ma zmian znaku, albo są przynajmniej 4.

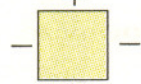
Ponieważ liczba zmian znaku jest parzysta, więc należy wyeliminować 2. Przypuśćmy więc, że dla  $S$  i  $\bar{S}$  liczba zmian znaku jest właśnie dwa. Niech wierzchołki  $X_i$  i  $X_j$  oddzielają tę część wielokąta, gdzie  $\lambda(k) \leq 0$ , od części, gdzie  $\lambda(k) \geq 0$ . Oznaczmy te części odpowiednio przez  $P_1$  i  $P_2$ . Stosując spostrzeżenie 1 do  $P_1$  i  $\bar{P}_1$  otrzymujemy  $X_iX_j < \bar{X}_i\bar{X}_j$ , stosując zaś do  $P_2$  i  $\bar{P}_2$  otrzymujemy  $X_iX_j > \bar{X}_i\bar{X}_j$  – sprzeczność.

dla  $i$ -kąta liczba zmian znaku nie przekracza

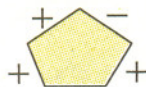
2 dla  $i=3$



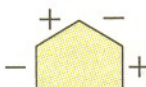
4 dla  $i=4$



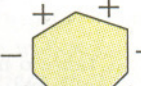
4 dla  $i=5$



6 dla  $i=6$



6 dla  $i=7$



ogólnie  $2E\left(\frac{i}{2}\right)$ .

Powracamy do dowodu twierdzenia Cauchy'ego. Rozpatrzmy funkcję  $\psi$  przeprowadzającą wielościan  $V$  na wielościan  $\bar{V}$  w ten sposób, że każda ściana przechodzi na ścianę przystającą. Mamy wykazać, że  $\psi$  zachowuje kąty dwusienne.

Weźmy pod uwagę małą sferę o środku w pewnym wierzchołku wielościanu (małą = otaczającą tylko jeden wierzchołek). Przecięcie wielościanu z tą sferą to wypukły wielokąt sferyczny. Tak robimy w każdym wierzchołku. Mamy więc (dzięki funkcji  $\psi$ ) w odpowiednich wierzchołkach wielościanów  $V$  i  $\bar{V}$  wypukłe wielokąty sferyczne o odpowiednio równych bokach. Pozwala to przenieść na wielościany oba poczynione spostrzeżenia.

Ponieważ kąty otrzymanego na danej sferze wielokąta sferycznego to kąty dwusienne wielościanu, więc możemy przenieść funkcję  $\lambda$  na krawędzie wielościanu  $V$  definiując (ciągle na ustalonej sferze) dla krawędzi  $k$  funkcję  $\mu(k) = \varepsilon$ , gdy w odpowiadającym jej wierzchołku  $X_i$  odpowiedniego wielokąta sferycznego mamy  $\lambda(i) = \varepsilon$  (gdzie  $\varepsilon = -1, 0, +1$ ). Następnie dwie krawędzie nazywamy sąsiednimi, gdy należą do jednej ściany i mają wspólny koniec. Dla krawędzi sąsiednich  $k$  i  $l$  określamy funkcję  $\nu(k, l) := \mu(k) \cdot \mu(l)$ . W tej terminologii mamy wykazać, że  $\nu$  ma być tożsamościowo równa 0.

Rozpatrzę tu przypadek, gdy żadna z wartości funkcji  $\mu$  nie jest równa zeru (zostawiając Czytelnikom problem, jak pozbyć się – coś dorysować, coś zaniedbać – niepotrzebnych krawędzi: tych, dla których  $\mu$  jest równe 0). Z lematu Cauchy'ego wiemy, że liczba zmian znaku w każdym wielokącie sferycznym jest co najmniej 4 – w całym wielościanie ich liczba  $N$  jest co najmniej równa  $4W$  (gdzie  $W$  to liczba wierzchołków wielościanu). Z drugiej strony, gdy oznaczymy przez  $S_i$  liczbę  $i$ -kątnych ścian wielościanu, mamy  $N \leq 2S_3 + 4S_4 + 4S_5 + 6S_6 + 6S_7 + \dots$  (patrz schematy na marginesie).

Jeśli wziąć pod uwagę, że  $2K = \sum iS_i$ , gdzie  $K$  to liczba krawędzi wielościanu, mamy łącznie

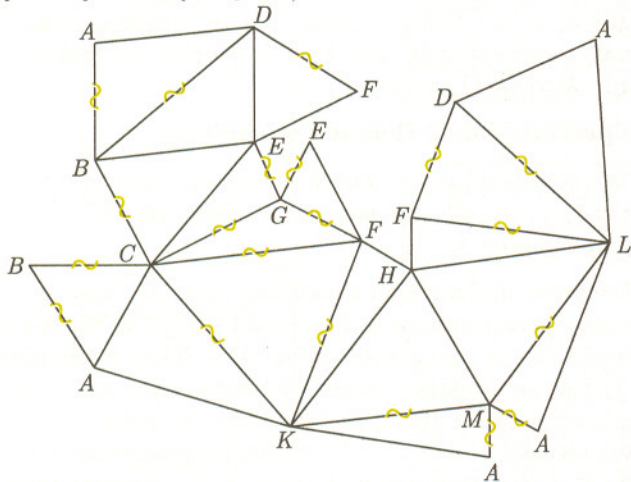
$$4K - 4S = 6S_3 + 8S_4 + 10S_5 + 12S_6 + 14S_7 + \dots - (4S_3 + 4S_4 + 4S_5 + 4S_6 + 4S_7 + \dots) = 2S_3 + 4S_4 + 6S_5 + 8S_6 + 10S_7 + \dots \geq N \geq 4W.$$

Ale to oznacza, iż  $S - K + W \leq 0$ , co jest SPRZECZNE ZE WZOREM EULERA. Koniec.

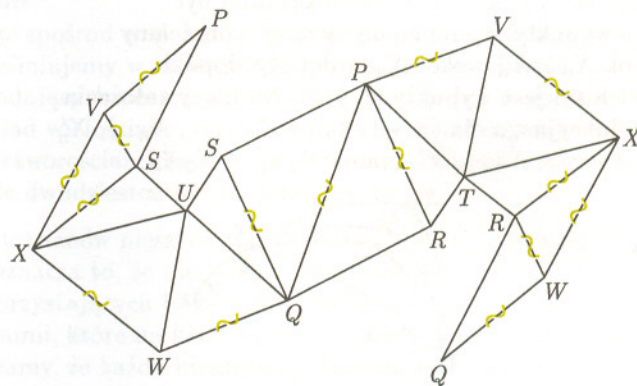


## Przykłady Connelly'ego i Steffena

Robert Connelly szukał odpowiedzi na pytanie, czy założenie wypukłości jest konieczne, by nie istniały ruchome wielościany. Bowiemi przez 150 lat nikt odpowiedzi na to pytanie dać nie umiał, co więcej, intuicje różnych matematyków dawały każdej z możliwości szanse bliskie 50% (matematycy są ambitni i rzadko wstrzymują się od wypowiedzi na pytanie *jak ci się zdaje...*).



Gdy jednak wskazał ruchomy wielościan – ang. *flexor* ( $(W, K, S) = (18, 27, 11)$  – a więc homeomorficzny ze sferą), okazało się, że na następny nie trzeba było już długo czekać. Klaus Steffen w tym samym jeszcze roku wyprodukował flexor mniej złożony –  $(14, 21, 9)$  – mający na dodatek symetryczną siatkę, co widać niżej.



Schematy do zbudowania modeli ruchomych wielościanów. Po empirycznym stwierdzeniu, że wielościan się rusza; należy, rzecz jasna, wykazać, że nie wynika to jedynie z niedoskonałości wykonania (dla modelu Connelly'ego można to znaleźć np. w *Delcie* 8/1987). Z lewej model Connelly'ego, z prawej Steffena; Nie należy rysunków traktować jak siatki, lecz jak instrukcje. Krawędzie przekreślone odpowiadają wypukłym kątom dwuściennym (ostrzem na zewnątrz), pozostałe – wklęsłym.

A oto wymiary w dowolnych jednostkach:

Connelly:  $AB = AC = BC = DE = DF = EF = 9$ ,  $AD = BE = CE = HM = 12$ ,  $AK = AL = FK = FL = HK = HL = KM = LM = 15$ ,  $AM = FH = 4$ ,  $BD = CF = CK = DL = 16$ ,  $CG = 11$ ,  $EG = 5$ ,  $FG = 7$ ;

Steffen:  $PQ = 17$ ,  $PR = QR = PS = QS = TX = UX = VX = WX = 12$ ,  $RT = SU = RW = SV = 5$ ,  $PT = QU = PV = QW = RX = SX = 10$ ,  $TV = UW = 11$ .

## Międzywydziałowe Indywidualne Studia Matematyczno-Przyrodnicze

### (MIS MaP) w Uniwersytecie Warszawskim

#### Rekrutacja w roku 1997

Siedem Wydziałów Uniwersytetu Warszawskiego: Biologii, Chemii, Fizyki, Geografii i Studiów Regionalnych, Geologii, Matematyki, Informatyki i Mechaniki oraz Psychologii prowadzi od 1992 r. Międzywydziałowe Indywidualne Studia Matematyczno-Przyrodnicze (MISMaP).

Egzamin wstępny (pisemny) odbędzie się 20 czerwca 1997 r. i obejmie wybrane dwa spośród pięciu testów z matematyki, fizyki, chemii, biologii i geografii, których zakresy obejmują programy nauczania w klasach o profilach specjalistycznych w liceach ogólnokształcących. Do egzaminu może przystąpić każdy posiadacz świadectwa maturalnego, który do 1 czerwca złoży standardowe dokumenty. Egzamin ma charakter konkursowy; przy kwalifikacji nie będą brane pod uwagę oceny na świadectwie maturalnym. Laureaci wszystkich Olimpiad szczebla centralnego oraz abiturienti z maturą międzynarodową z co najmniej 37 punktami (na 45) zostaną przyjęci bez egzaminu. Finałiści Olimpiad zwolnieni są z egzaminu z odpowiedniego przedmiotu. Przewidujemy przyjęcie łącznie około 100 osób.

Międzywydziałowe Indywidualne Studia są bezpłatnymi studiami dziennymi. Każdy ze studentów pozostaje pod opieką profesora lub adiunkta reprezentującego kierunek najbliższy jego zainteresowaniom. Studenci wraz z opiekunami ustalają własne, indywidualne programy studiów złożone z przedmiotów prowadzonych na wymienionych wyżej wydziałach oraz pewnych przedmiotów uzupełniających.

Wszelkie dodatkowe informacje, także o możliwości studiów na każdym z uczestniczących Wydziałów po zdaniu egzaminu wstępnego na MISMaP, można uzyskać w Sekretariacie MISMaP, ul. Pasteura 7, 02-093 Warszawa, we wtorek w godz. 9–12 oraz w czwartki w godz. 12–15 lub telefonicznie (tel. (0-22) 658-22-52). W Sekretariacie można także nabyć w cenie 9 zł *INFORMATOR MIS MaP*, zawierający m.in. wszystkie pytania testowe z lat 1992–96. Osoby zamieszkałe poza Warszawą mogą zamówić Informator za zaliczeniem pocztowym.

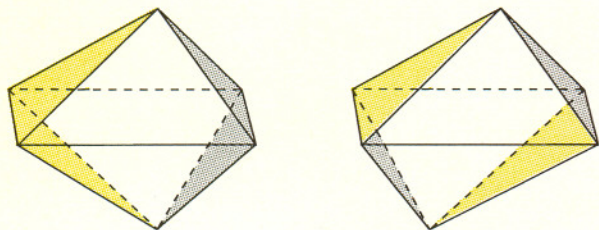
Kierownik Międzywydziałowych Indywidualnych Studiów Matematyczno-Przyrodniczych w Uniwersytecie Warszawskim

prof. dr hab. Andrzej HENNEL



**Znana jest zapewne** wszystkim czytelnikom *EPSILONA* cecha przystawiania trójkątów „bok–bok–bok”. Wszyscy na pewno też wiedzą, że bywają nieprzystające czworokąty o bokach parami równych. Są jednak warunki gwarantujące przystawianie wielokątów wypukłych (np. równości odpowiednich boków i kątów).

Mało znane są natomiast rozwiązania podobnych problemów dla wielościanów. Czy dwa wypukłe wielościany o parami przystających ścianach są przystające? Odpowiedź powinna być podobna do tej w przypadku wielokątów – i mniej więcej taka jest. Dwa czworosciany o parami przystających ścianach są przystające. Po prostu w przestrzeni jest im ciasno, tak samo jak trójkątom na płaszczyźnie. Co się dzieje z wielościanami o większej liczbie ścian? Istnieją dwa ośmiościany, których ściany są parami przystające, ale same ośmiościany przystające nie są. Ściany tych wielościanów to trójkąty: dwa o bokach 3, 3, 2; dwa o bokach 4, 4, 2; cztery o bokach 3, 4, 5. A ośmiościany to takie dwa jak na rysunku.



Istnieją także dwa nie przystające sześciściany ze ścianami parami przystającymi. Konstrukcja ich jest trochę bardziej skomplikowana – więc niech Czytelnicy się sami pobawią. Czytelnikom do rozstrzygnięcia pozostawiamy też problem dla pięciościanów.

Na zakończenie warunek wystarczający na to, by dwa wypukłe wielościany były przystające: *istnieje zachowująca incydencję bijekcja między zbiorami ich ścian, krawędzi i wierzchołków, przy czym odpowiadające ściany są przystające*. Zachowywanie incydencji polega na tym, że jeśli dwie ściany mają wspólną krawędź, to ich obrazy też... i tak dalej. Co ciekawe, o prawdziwości takiego twierdzenia był przekonany już Euklides, ale dowód opublikował dopiero Augustin Louis Cauchy w 1813 roku.

D.C.

Hugo Steinhaus jest autorem słynnego stwierdzenia: **Matematyk robi to lepiej**. I istotnie...

Wiosną ubiegłego roku ujęty został w USA człowiek, który według wszelkich danych jest słynnym *Unabomberem*.

*Unabombera*, który wysyłał w paczkach do amerykańskich polityków, naukowców i biznesmenów bomby, szukano przez 17 lat! Nagroda za pomoc w ujęciu *Unabombera* wynosiła milion dolarów; na ślad wpadł przypadkowo młodszy brat podejrzanego. Zaaresztowanym jest 53-letni Theodore Kaczynski. Matematyk.

Poniższe informacje, zaczerpnięte są głównie z *The New York Times* (dziennika, który – zresztą nie jako jedyny – opublikował na żądanie terrorysty jego 62-stronicowy manifest protestujący przeciwko nowoczesnej technice) i *Zentralblatt für Mathematik* (któremu takowego manifestu terrorysta do publikacji nie nadesłał).

Kaczynski najpierw studiował na słynnym Uniwersytecie Harvarda; ukończył go (z dyplomem z matematyki) w roku 1962, w wieku 20 lat. Na drugą, pięcioletnią część studiów, już stricte matematycznych, udał się do Michigan, gdzie do dziś go pamiętają jako znakomitego studenta. Jeden z jego profesorów, Peter L. Duren, powiedział prasie, że „matematyka wydawała się jedyną rzeczą, która go interesowała”. W roku 1964 Kaczynski otrzymał tzw. master's degree. Kontynuował studia, będąc pod opieką słynnego, zmarłego kilka lat temu matematyka, Allena Shieldsa (znanego m.in. z tego, że przez wiele lat był redaktorem kolumny „Years ago” w *The Mathematical Intelligencer*). Kaczynski praktycznie nie konsultował niczego z profesorami, zazwyczaj przychodził ze starannie zredagowanym tekstem, mówiąc „To zrobiłem”. Jego praca doktorska nosiła tytuł „Funkcje brzegowe”; została uznana za najlepszą pracę doktorską z matematyki na uniwersytecie w Michigan w roku 1967, w związku z czym Kaczynski otrzymał „Summer B. Meyers Prize” w wysokości 100 dolarów USA.

Po uzyskaniu doktoratu Kaczynski zaczął pracę na innym słynnym amerykańskim uniwersytecie, w Berkeley. Był cichy, spokojny, mało towarzyski. Nie brał udziału w licznych wtedy manifestacjach antywojennych. Jego wykłady niezbyt podobały się studentom, którzy skarżyli się m.in. na to, że wykładowca odmawia odpowiedzi na ich pytania. Publikował w renomowanych pismach, m.in. w *Transactions of the American Mathematical Society*. Po dwóch latach pracy w Berkeley nagle zrezygnował z matematyki – przeniósł się do stanu Montana, gdzie zamieszkał w chacie pozbawionej prądu, bieżącej wody i gazu.

W *Zentralblatt für Mathematik* zarejestrowanych jest 7 jego prac; pierwsza opublikowana w roku 1964 w *American Mathematical Monthly*, ostatnia w roku 1969 w *Proceedings of the American Mathematical Society*.

W Kanadzie pracuje obecnie matematyk Tomasz Kaczynski (zbieżność nazwisk przypadkowa). W roku 1996 przebywał on na Uniwersytecie Jagiellońskim. Po ogłoszeniu, w kwietniu 1996, historii *Unabombera*, na wewnętrznej uniwersyteckiej skrzynce na listy podpisanej „Prof. T. Kaczynski” pojawił się dopisek: „Tomasz, nie Theodore”. Również wiosną 1996 w Ameryce do jednego ze współpracowników Tomasza Kaczynskiego zwrócili się przedstawiciele prasy z prośbą o udostępnienie jego prac...

**Od Redakcji *Delty*: Stwierdzamy uroczyście, że nie pochwalamy uprawiania matematyki za pomocą bomb.**

Pogląd ten podziela Redakcja *EPSILONA*.