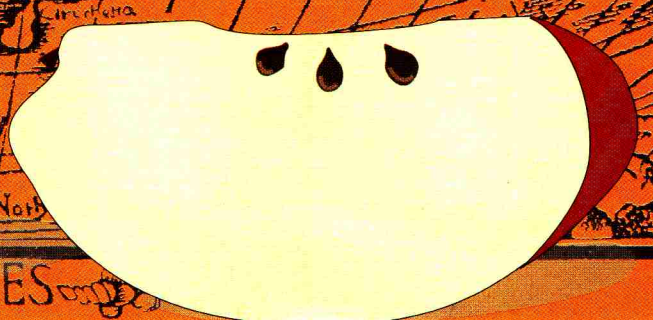


SEPTENTRIO

VERALS IVXTA PTOLOMEI COSMGRAPHI T  
ALIODOVE LVSTRATIONES A PETRO APIAN  
ANDO M.DXX

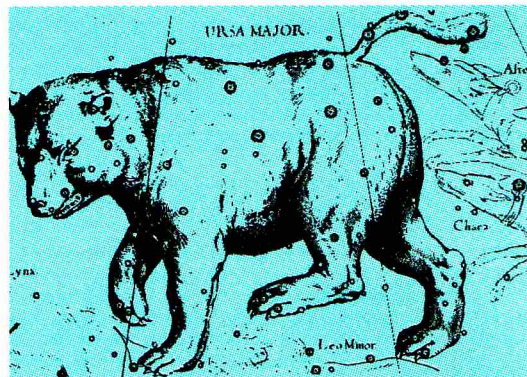
# Geologia

ISSN 1503-1033, 15 TEB 14 1592  
CENA 27 L 50 GR  
PLISSNET 2005 NR 4 (275) 1997  
POPULARNY MIESIENNIK MATEMATYCZNO-ASTRONOMICZNY



MERIDIES





## SPIS TREŚCI NUMERU 4(275)

Jak rozpoznajemy liczby  
pierwsze?

*Wojciech Guzicki*

Patrz w niebo

Jak kończy się żywot  
pozytonu?

*Piotr Beliczynski  
i Eryk Kopczyński*

Zadania

Mała Delta

Krótką historią dowodu  
pewnego ciekawego  
twierdzenia

*Michał Stukow*

Potęga

Kąć olimpijski

Klub 44

List do Redakcji *Delty*

Dlaczego w górach jest  
zimniej?

Epsilon

**W następnym numerze:**

Wzór Eulera i okolice

Okładkę i ilustracje wykonał  
*Krzysztof BIESAGA*

Wybór artykułów z *Delty*

ukazuje się w języku angielskim

w sieci Internet pod adresem

<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

Wydawca:

Uniwersytet Warszawski

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,

wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.

Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula

Bogdan Cichocki

– wiceprzewodniczący

Krzysztof Ciesielski

Jan A. Gaj

Piotr Goldstein

Tomasz Hofmokl

Andrzej Hrynkiwicz

Wiesław A. Kamiński

Marta Kicińska-Habior

Krzysztof Maślanka

Andrzej Mąkowski

Zdzisław Pogoda

Feliks Przytycki

Michał Różyczka

Konrad Rudnicki

Zbigniew Semadeni

Grzegorz Sitarski

Andrzej Woszczyk

Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol

Krzysztof Biesaga

Wojciech Kopczyński – z-ca red. nac.

Krystyna Kordos – sekr. red.

Marek Kordos – red. nac.

Tomasz Kwast

Anna Ludwicka

Anna Rudnik

Paweł Strzelecki

Joanna Udalska

Piotr Zalewski

Adres Redakcji:

ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa

tel. 43-02-41(-2) wewn. 21

PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano

w Drukarni Naukowo-Technicznej

w Warszawie, ul. Mińska 65

Skład systemem  $\TeX$  wykonała Redakcja.

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres

prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena  
jednego numeru w 1997 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie  
okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)

cena numeru w 1997 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą  
odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje  
dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na III kwartał 1997 r. wynosi 7 zł 50 gr.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe

„Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa  
egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się  
pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej.  
Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A.  
XIII Oddział Warszawa 11101053-16551-2700-1-67 lub w kasach Oddziału Warszawa,  
ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>.  
Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem  
zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.

5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę
5 XII	20 XI na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II na II kwartał,
5 VI	20 V na III kwartał,
5 IX	20 VIII na IV kwartał.

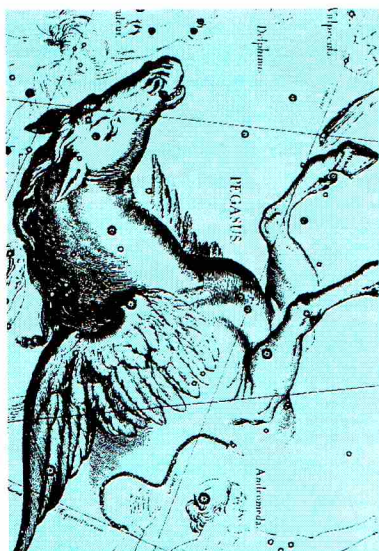
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą,  
realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem  
otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A.  
Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71  
wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także  
tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

**Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr**

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.





## Jak rozpoznajemy liczby pierwsze?

Wojciech GUZICKI

Jak stwierdzić, czy dana liczba naturalna  $n$  jest liczbą pierwszą? Najprostszy algorytm polega na dzieleniu liczby  $n$  przez wszystkie liczby mniejsze od niej. Łatwo zauważymy, że wystarczy dzielić przez liczby nie większe niż  $\sqrt{n}$ , potem zauważymy, że nie trzeba dzielić przez liczby parzyste itp. Oczywiście, najkorzystniej byłoby dzielić tylko przez liczby pierwsze mniejsze od  $\sqrt{n}$ , ale jak z kolei je rozpoznać? Jednak chwila zastanowienia pokaże, że nawet najlepsze modyfikacje tego algorytmu będą całkowicie nieprzydatne w praktyce, gdy mamy do czynienia z bardzo dużą liczbą pierwszą  $n$ . Jeśli bowiem liczba  $n$  ma np. 200 cyfr dziesiętnych, to liczb pierwszych mniejszych od niej jest tak wiele, że w ciągu całego naszego życia nie zdążymy sprawdzić, czy  $n$  dzieli się przez nie wszystkie, nawet jeśli użyjemy do tego najlepszych znanych nam komputerów.

Czy jednak można stwierdzić, że liczba  $n$  jest pierwsza, inaczej niż wykazując, że nie dzieli się przez żadną liczbę mniejszą od niej? Zanim odpowiemy na to pytanie, zastanowimy się nad pytaniem „odwrotnym” do niego: jak stwierdzić, że liczba *nie jest* pierwsza? Oczywiście, najprościej wskazać dzielnik takiej liczby. Na przykład, wykazujemy, że liczba  $n = 245432656233769542083107$  jest złożona, wskazując jej rozkład na czynniki:

$$n = 245432656233769542083107 = 563389748759 \cdot 435635644373.$$

Sprawdzenie, że tak jest naprawdę, jest kwestią chwili dla niedużego komputera. Widzimy więc, jak można łatwo przekonać kogoś, że pewna liczba jest *złożona*. Wystarczy pokazać mu rozkład tej liczby na czynniki. Zupełnie inną kwestią jest sposób znalezienia tego rozkładu i tym problemem nie będziemy się tu zajmować. Przypomnę tylko, że dotychczas nie znamy dostatecznie szybkiego algorytmu, za pomocą którego moglibyśmy rozkładać na czynniki liczby mające już około 150 cyfr dziesiętnych.

Czy wskazanie rozkładu na czynniki jest jedyną metodą wykazania, że liczba jest złożona? Okazuje się, że nie. Możemy bowiem skorzystać z tzw. małego twierdzenia Fermata:

**Twierdzenie.** Jeśli liczba  $p$  jest pierwsza i liczba  $a$  nie dzieli się przez  $p$ , to  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

Twierdzenie to wynika natychmiast z twierdzenia Eulera, wspomnianego w poprzednim artykule. Weźmy teraz przykład. Liczba  $n = 481$  jest złożona. Możemy się o tym przekonać, znajdując jej czynniki pierwsze:  $481 = 13 \cdot 37$ . Możemy jednak skorzystać z małego twierdzenia Fermata. Weźmy liczbę  $a = 2$ . Oczywiście,  $a$  nie dzieli się przez  $n$ . Gdyby liczba  $n$  była liczbą pierwszą, to musiałyby być spełniona kongruencja  $2^{480} \equiv 1 \pmod{481}$ . Wiemy, w jaki sposób można dość szybko obliczać wysokie potęgi modulo  $n$ . Jeśli obliczymy (za pomocą komputera) potęgę  $2^{480}$  modulo 481, to przekonamy się, że  $2^{480} \equiv 248 \pmod{481}$ . A zatem liczba 481 *nie jest pierwsza*.

W tym przykładzie liczba  $n$  jest mała i trudności obliczeniowe związane z obliczeniem wysokiej potęgi liczby 2 modulo 481 nie przekonają nikogo o opłacalności tej metody. Dużo prościej byłoby spróbować podzielić  $n$  przez kilka początkowych liczb naturalnych. Jednak jeśli liczba  $n$  ma kilkaset cyfr i dzielenie nie może dać rezultatu wystarczająco szybko, podnoszenie do potęgi zaczyna się opłacać. Powstaje tylko pytanie, czy ta metoda zawsze jest skuteczna, tzn. czy zawsze możemy wykazać w ten sposób, że liczba  $n$  jest złożona.

Wybermy inną podstawę  $a$ , np.  $a = 11$ . Wtedy okaże się, że  $11^{480} \equiv 1 \pmod{481}$ . Liczba 481 jest złożona, a mimo to teza małego twierdzenia Fermata zachodzi. Pokazuje to, że ta metoda jest jednak zawodna. Mogą istnieć podstawy  $a$ , dla których  $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$  i podstawy  $a$ , dla których  $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$ .







**Rozwiązanie zadania F 449.** Oznaczmy przez  $\vec{p}$  i  $\vec{p}'_\gamma$  pędy cząstki i fotonu przed rozpraszaniem, a przez  $\vec{p}'$  i  $\vec{p}'_\gamma$  po rozproszeniu. Analogicznie  $E$ ,  $E_\gamma$ ,  $E'$  i  $E'_\gamma$  to energie cząstki i fotonu odpowiednio przed i po rozproszeniu. Dla prostoty rachunków wybierzmy układ jednostek, w którym  $c = \hbar = 1$ . Niech  $\theta$  oznacza kąt rozpraszania fotonu. Zasada zachowania pędu ma postać:

$$\vec{p} + \vec{p}'_\gamma = \vec{p}' + \vec{p}'_\gamma,$$

a zasada zachowania energii:

$$E + E_\gamma = E' + E'_\gamma.$$

Związki między energią i pędem mają postać  $E_\gamma = p_\gamma$  dla fotonu, oraz  $E^2 = p^2 + m^2$  dla cząstki obdarzonej masą (analogicznie po rozproszeniu). Podnosząc do kwadratu obie strony równania wyrażającego zasadę zachowania pędu otrzymujemy

$$p'^2 = p^2 + E_\gamma^2 + E_\gamma'^2 - 2pE_\gamma + 2E'_\gamma(p - E_\gamma) \cos \theta.$$

Korzystając z zasady zachowania energii eliminujemy  $p'$  i  $E'$ . Otrzymujemy w ten sposób

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma(E + p)}{E + E_\gamma + (p - E_\gamma) \cos \theta}.$$

Ponieważ  $p > E_\gamma$ , energia rozproszonego fotonu jest maksymalna dla  $\theta = \pi$ .

Posługując się przybliżeniem

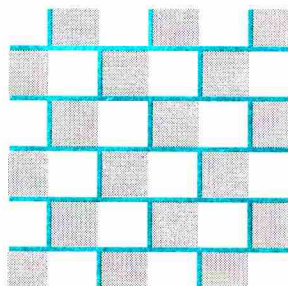
$p = \sqrt{E^2 - m^2} \simeq E - \frac{m^2}{2E}$  (poprawnym dla dużych energii cząstki) i pamiętając, że początkowa energia fotonu jest dużo mniejsza od masy cząstki, a ta jest z kolei dużo mniejsza od początkowej energii cząstki, możemy to wyrażenie przybliżyć przez

$$E'_\gamma = \frac{E}{1 + \frac{m^2}{4E\omega}}.$$

Podstawiając dane liczbowe otrzymujemy wartość rzędu  $10^{19}$  eV.



**Rozwiązanie zadania M 805.** Nie. Podzielmy szachownicę na „kostki domina” o rozmiarach  $2 \times 1$  (tak, jak pokazuje to rysunek).



Wystarczy, aby drugi gracz po każdym ruchu gracza rozpoczynającego wstawiał swój znak do tego samego „domina”, co przeciwnik – uniemożliwi to zwycięstwo rozpoczynającemu rozgrywkę, bo w każdym kwadracie  $2 \times 2$  znajduje się jakieś domino.

Jeśli liczba  $n$  jest złożona, liczba  $a$  jest względnie pierwsza z  $n$  oraz zachodzi kongruencja  $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ , to liczbę  $n$  nazywamy liczbą pseudopierwszą przy podstawie  $a$ . Liczby pseudopierwsze przy podstawie 2 dawniej nazywano po prostu liczbami pseudopierwszymi. Najmniejszą taką liczbą jest 341. Można udowodnić, że jest tych liczb nieskończenie wiele. Naturalnym pytaniem jest, czy dla każdej liczby złożonej  $n$  istnieje taka względnie pierwsza z nią podstawa  $a$ , że liczba  $n$  nie jest pseudopierwsza przy podstawie  $a$ . Gdyby tak było, to mielibyśmy nadzieję na sprawdzenie, czy liczba  $n$  jest pierwsza. Test mógłby wyglądać następująco: wybieramy liczbę  $a$  mniejszą od  $n$  i sprawdzamy, czy jest ona względnie pierwsza z  $n$ ; jeśli znajdziemy wspólny dzielnik, to wiemy na pewno, że liczba  $n$  jest złożona, w przeciwnym przypadku podnosimy  $a$  do potęgi  $n - 1$  modulo  $n$  – jeśli otrzymamy wynik różny od 1, to wiemy, że liczba  $n$  jest złożona, jeśli otrzymamy 1, to szukamy następnej podstawy  $a$ . Skuteczność tego testu będzie zależała przede wszystkim od tego, czy dla liczby  $n$  istnieje podstawa  $a$ , przy której liczba  $n$  nie jest pseudopierwsza, a następnie od tego, czy taką podstawę będziemy umieli znaleźć.

Okazuje się jednak, że istnieją liczby złożone  $n$  będące liczbami pseudopierwszymi przy każdej podstawie  $a$  względnie pierwszej z  $n$ . Przykładem takiej liczby jest 561. Można dość łatwo wykazać (np. za pomocą odpowiedniego programu komputerowego), że jeśli liczby  $a$  i 561 są względnie pierwsze, to  $a^{560} \equiv 1 \pmod{561}$ . Takie liczby nazywamy liczbami Carmichaela (czytamy „Karmajkla”). Istnienie liczb Carmichaela niweczy nasze nadzieje na prosty test sprawdzający, czy liczba jest złożona i korzystający wyłącznie z małego twierdzenia Fermata. Okazuje się jednak, że ten test można poprawić.

Przypuśćmy, że liczba  $p$  jest pierwsza i wiemy, że liczba  $x^2$  daje resztę 1 przy dzieleniu przez  $p$ . Jaką resztę przy dzieleniu przez  $p$  daje sama liczba  $x$ ? Jest to bardzo proste zadanie. Z założenia wiemy, że liczba  $p$  jest dzielnikiem liczby  $x^2 - 1$ , czyli liczby  $(x - 1)(x + 1)$ . Następnie korzystamy z twierdzenia mówiącego, że jeśli liczba pierwsza dzieli iloczyn dwóch liczb, to musi dzielić którąś z tych liczb. A więc albo liczba  $x - 1$  dzieli się przez  $p$ , albo liczba  $x + 1$  dzieli się przez  $p$ . W pierwszym przypadku  $x \equiv 1 \pmod{p}$ , w drugim  $x \equiv -1 \pmod{p}$ .

Okazuje się, że ta prosta obserwacja bardzo wiele wnosi do sprawdzania, czy liczba jest złożona. Popatrzmy na przykład. Wiemy już, że  $11^{480} \equiv 1 \pmod{481}$ . Ale  $11^{480} = (11^{240})^2$ . Niech więc  $x = 11^{240}$ . Wtedy  $x^2 \equiv 1 \pmod{481}$ . Gdyby liczba 481 była pierwsza, to liczba  $x$  musiałaby przystawać do 1 lub do  $-1$  modulo 481. Sprawdźmy to. Okazuje się, że  $11^{240} \equiv 1 \pmod{481}$ . Jest więc tak, jak być powinno. Ale to nie koniec. Liczba 240 jest parzysta:  $240 = 2 \cdot 120$ , a więc  $11^{240}$  też jest kwadratem, mianowicie  $11^{240} = (11^{120})^2$ . Możemy powtórzyć nasze rozumowanie. Okazuje się, że znów  $11^{120} \equiv 1 \pmod{481}$ . Ale liczba 120 też jest parzysta, więc możemy to rozumowanie jeszcze raz powtórzyć. Niestety, znów okaże się, że  $11^{60} \equiv 1 \pmod{481}$ . Ale następnym razem już się uda:  $11^{30} \equiv 38 \pmod{481}$ . Nie otrzymaliśmy w wyniku ani liczby 1, ani liczby  $-1$ , a więc 481 jest liczbą złożoną.

Ten sposób postępowania, nazywany testem Millera–Rabina od nazwisk autorów, wygląda następująco. Mamy daną liczbę  $n$  i chcemy sprawdzić, czy jest ona złożona. Wybieramy podstawę  $a$  i sprawdzamy, czy liczby  $a$  i  $n$  są względnie pierwsze. Za pomocą algorytmu Euklidesa możemy to zrobić bardzo szybko. Jeśli znajdziemy wspólny dzielnik większy od 1, to liczba  $n$  na pewno jest złożona i mamy nawet jej rozkład na czynniki. Przypuśćmy więc, że liczby  $a$  i  $n$  są względnie pierwsze. Teraz podnosimy  $a$  do potęgi modulo  $n$ . Najpierw wybieramy wykładnik  $k = n - 1$  i sprawdzamy, czy  $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ . Jeśli nie, to wiemy na pewno, że liczba  $n$  jest złożona. Jeśli tak, to patrzymy na wykładnik  $k$ . Jeśli jest on parzysty (na początku na pewno tak będzie, bo liczba  $n - 1$  jest parzysta), to zamiast  $k$  bierzemy liczbę  $\frac{k}{2}$  i rozumowanie powtarzamy. Z tym tylko, że teraz dopuszczalnymi resztami są 1 i  $-1$ . Jeśli więc





### Rozwiązanie zadania F 450.

Rozważmy najpierw sytuację, w której drgania są prostopadłe do płaszczyzny pajęczyny. Nitka wprawiona w drgania przez muchę wprawia w drgania punkt  $C$ , który z kolei wywołuje drgania wszystkich nitek, włącznie z tą, na której znajduje się mucha (fala odbita). Niech  $A$  oznacza amplitudę drgań nici wywołanych ruchami muchy, energia tych drgań jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy. Gdy drgania odbywają się prostopadłe do płaszczyzny pajęczyny, dzieli się ona po równo między wszystkie nici, a więc amplituda drgań każdej z nich jest taka sama i równa

$$\frac{A}{\sqrt{8}}.$$

W przypadku (b), gdy drgania zachodzą w płaszczyźnie pajęczyny, drgający punkt  $C$  nie pobudzi do drgań nici 1 (bo  $C$  porusza się właśnie wzdłuż niej); amplituda drgań nici 3 będzie taka sama jak nici, na której szamocze się mucha, a amplituda nici 2 będzie  $\cos 45^\circ$  razy taka. Z zasady zachowania energii otrzymujemy:

$$A^2 = 2A_3^2 + 4A_2^2 = 2A_3 + 4 \cdot \frac{1}{2}A_3^2 = 4A_3^2.$$

Wynika stąd, że

$$A_3 = \frac{1}{2}A, \quad A_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}A.$$

W realnym życiu pająka (a przede wszystkim muchy) sytuacja jest bardziej skomplikowana, przede wszystkim z powodu bardziej złożonej geometrii pajęczyny. Poprzeczne nici powodują, między innymi, że drgania w płaszczyźnie sieci będą się jednak przenosić także i na nie 1.



**Rozwiązanie zadania M 804.** Skoczek stojący na białym polu atakuje tylko pola czarne. Podobnie, skoczek stojący na polu czarnym atakuje tylko pola białe. Albo co najmniej 1000 skoczków stoi na polach białych, albo co najmniej 1000 skoczków stoi na polach czarnych (zasada szufladkowa Dirichleta). Ponieważ skoczki stojące na polach tego samego koloru nie mogą się atakować, więc teza zadania jest prawdziwa.

$a^k \equiv 1 \pmod{n}$ , to jest tak, jak być powinno i jeśli wykładnik  $k$  jest liczbą parzystą, to znów zastępujemy go dwa razy mniejszym. Jeśli jest liczbą nieparzystą, to kończymy test. Podobnie, jeśli  $a^k \equiv -1 \pmod{n}$ , to test kończymy, gdyż nic nie wiemy o liczbie  $x$ , gdy  $x^2$  daje resztę  $-1$  (dokładniej  $n-1$ ) przy dzieleniu przez liczbę pierwszą  $n$ . Wreszcie, jeśli  $a^k \not\equiv \pm 1 \pmod{n}$ , to test również kończymy, wiedząc jednak tym razem, że liczba  $n$  jest złożona. Możliwe są więc trzy sposoby zakończenia testu:

- Po kolejnych dzieleniach wykładnika  $k$  dojdziemy do sytuacji, gdy jest on liczbą nieparzystą i  $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ . Wtedy nie rozstrzygnęliśmy, czy liczba  $n$  jest złożona.
- Po kolejnych dzieleniach wykładnika  $k$  dojdziemy do sytuacji, gdy  $a^k \equiv -1 \pmod{n}$ . Wtedy również nie rozstrzygnęliśmy, czy liczba  $n$  jest złożona.
- Po kolejnych dzieleniach wykładnika  $k$  dojdziemy do sytuacji, gdy  $a^k \not\equiv \pm 1 \pmod{n}$ . Wtedy wiemy na pewno, że liczba  $n$  jest złożona.

Popatrzmy na przykłady różnych zakończeń testu.

- Niech  $a = 100$ . Wtedy

$$a^{480} \equiv a^{240} \equiv a^{120} \equiv a^{60} \equiv a^{30} \equiv a^{15} \equiv 1 \pmod{481}.$$

- Niech  $a = 36$ . Wtedy

$$a^{480} \equiv a^{240} \equiv a^{120} \equiv a^{60} \equiv a^{30} \equiv 1 \pmod{481}$$

oraz

$$a^{15} \equiv -1 \pmod{481}.$$

Podobnie dla  $a = 6$  mamy

$$a^{480} \equiv a^{240} \equiv a^{120} \equiv a^{60} \equiv 1 \pmod{481}$$

oraz

$$a^{30} \equiv -1 \pmod{481}.$$

- Ten przypadek widzieliśmy wyżej. Inny przykład mamy dla  $a = 27$ :

$$a^{480} \equiv a^{240} \equiv a^{120} \equiv a^{60} \equiv a^{30} \equiv 1 \pmod{481}$$

oraz

$$a^{15} \equiv 443 \pmod{481}.$$

Ta metoda jest bardziej skomplikowana, niż zastosowanie tylko małego twierdzenia Fermata. Czy jest bardziej skuteczna? Okazuje się, że tak. Nie ma bowiem odpowiedników liczb Carmichaela. Jeśli liczba  $n$  jest złożona, to istnieje podstawa  $a$ , dla której test zakończy się tak jak w punkcie 3 powyżej, a więc będziemy wiedzieli na pewno, że liczba  $n$  jest złożona. Ale jak tę podstawę znaleźć? Pewnej metody nie znamy. Wiemy jednak, że takich podstaw jest dużo. Udowodniono, że co najmniej  $\frac{3}{4}$  wszystkich liczb mniejszych od  $n$  to takie liczby  $a$ , dla których test zakończy się przypadkiem 3. Tych liczb szukamy losowo. Losujemy jakąkolwiek liczbę  $a$  mniejszą od  $n$  i przeprowadzamy test. Jeśli zakończy się on przypadkiem 3, to znamy odpowiedź: liczba  $n$  jest złożona. Jeśli test zakończy się przypadkiem 1 lub 2, to losujemy następną liczbę  $a$ . Powtarzamy ten test np. 50 razy. Jeśli za którymś razem dowiemy się, że liczba  $n$  jest złożona, to oczywiście testu już nie będziemy musieli powtarzać. Jeśli jednak 50 razy uzyskamy przypadek 1 lub 2, to będziemy mieli dwie możliwości. Albo liczba  $n$  jest pierwsza, albo mieliśmy niezwykle mało szczęścia w losowaniach podstaw  $a$ . Aż 50 razy z rzędu wylosowaliśmy liczbę ze stosunkowo małego zbioru „złych” liczb. Prawdopodobieństwo takiego nieszczęśliwego losowania jest bardzo małe: wynosi zaledwie  $\frac{1}{2^{100}}$ . Jest ono tak małe, że w praktyce możemy przyjąć, iż testowana liczba jest liczbą pierwszą.

Taki test nazywamy probabilistycznym. Z dowolnie dużym prawdopodobieństwem możemy „przekonać się”, że liczba  $n$  jest pierwsza.





### Rozwiązanie zadania M 806.

Na mocy nierówności Bernoulliego  $((1+x)^n \geq 1+nx$  dla  $x > -1$  i dla naturalnych  $n$ ) mamy

$$\left(1 + \frac{m}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{m}{n} = m + 1,$$

więc

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} \geq \frac{n}{m+n}.$$

Podobnie,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \geq \frac{m}{m+n}.$$

Dodając obie nierówności stronami, otrzymujemy stąd

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} \geq \frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = 1.$$

Jednak całkowitej pewności nie mamy. Chcielibyśmy mieć również testy dające pewność wyniku: albo liczba  $n$  jest pierwsza, albo jest złożona. Takie testy istnieją, choć są znacznie wolniejsze od testu opisanego wyżej. Za pomocą testu Millera–Rabina możemy na małym komputerze szybko testować liczby nawet kilkusetcyfrowe. Najprostsze znane testy deterministyczne (tzn. dające odpowiedź pewną) wymagają znacznie większych komputerów i działają znacznie wolniej.

Na zakończenie wspomnę jeszcze, że z pewnej nie udowodnionej dotychczas hipotezy, tzw. uogólnionej hipotezy Riemanna, wynika, że jeśli liczba  $n$  jest złożona, to istnieje podstawa  $a < 70(\log_2 n)^2$ , dla której test Millera kończy się przypadkiem 3. A więc wtedy mamy pewność, że liczba  $n$  jest złożona. Wystarczy w tym celu przebadać nie więcej niż  $70(\log_2 n)^2$  podstaw. Jeśli liczba  $n$  ma około 100 cyfr dziesiętnych, to wystarczy zbadać około 8 milionów podstaw, a to można zrobić za pomocą stosunkowo niedużego komputera.

## Patrz w niebo

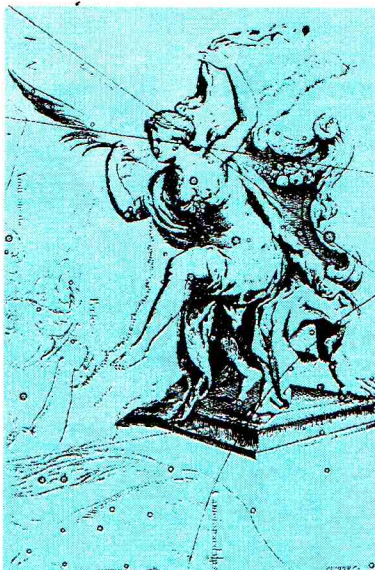
Jowisz jest nągminnie cytowanym przykładem obiektu w Układzie Słonecznym, który znacznie więcej wyświeca energii, niż otrzymuje jej od Słońca. Obecnie wszyscy badacze zgodnie twierdzą, że ten nadmiar energii Jowisza pochodzi z bardzo powolnego kurczenia się całego globu (lub jego pewnych części), czyli nieznacznego osiadania „pod własnym ciężarem”, choć różnią się co do szczegółów tego procesu.

Do niedawna wydawało się, że w Układzie Słonecznym jest jeszcze jeden glob zachowujący się do pewnego stopnia analogicznie, mianowicie satelita Jowisza, Io. Jego energiczny wulkanizm wywołany jest tym, że zmiany odległości od Jowisza powodują zmienne działanie pływowe planety, a to pociąga za sobą ustawiczne wyginanie skorupy satelity, a więc jego grzanie. Otóż pomiary promieniowania podczerwonego (wykonane już dawno przez Voyagery i kontynuowane do dziś) wykazały, że glob satelity jest średnio gorętszy, niż wynikałoby to z pływowego działania Jowisza. Nietrudno domyślić się, że wyjaśnienie tego faktu nastąpiło w wyniku uwzględnienia wpływu promieniowania słonecznego na warunki panujące na Io. Wpływ ten okazał się jednak nie tak oczywisty, jak się z początku zdawało.

Przede wszystkim stwierdzono, że większość termicznego promieniowania Io pochodzi wcale nie z zapadłisk wypełnionych płynną lub krzepnącą magmą o temperaturze od 600 K wzwyż. Najwięcej podczerwieni emitują wielkie, obejmujące tysiące kilometrów kwadratowych obszary niezbyt gorące, bo o temperaturze około 300 K, a więc o około 100 K wyższej, niż ma średnio grunt na dziennej stronie Io. Nawiasem mówiąc, obszarem tym nie odpowiadają żadne widoczne na powierzchni obiekty. Całkowita emisja podczerwieni przez satelitę gwałtownie spada, gdy wchodzi on w cień Jowisza, musi więc za nią odpowiadać w dużym stopniu Słońce, a zmiany temperatury mogłyby tłumaczyć fakt, że widocznie powierzchnia Io pokryta jest warstwą pyłu o małej pojemności cieplnej. Jednak te wielkie ciepłe obszary pozostają ciepłe po wejściu satelity w cień Jowisza, ich energia musi więc pochodzić z głębi globu i hipoteza pyłu jest nie do obronienia.

Zasugerowano wreszcie, że za gwałtowne skoki emisji podczerwieni mogą być odpowiedzialne wspomniane już rozlewiska lawy. Choć są już gorące, to jednak jako czarne absorbują niemal całe padające na nie promieniowanie słoneczne. Stają się przez to gorętsze i przyczyniają się w ten sposób do zwiększenia emisji podczerwieni Io, a w cieniu Jowisza mogą szybko wystygnać do poprzedniej temperatury. Problem był więc w zasadzie banalny – przeoczono absorpcję promieniowania słonecznego w samych rozlewiskach lawy. Ich powierzchnia jest w sumie niewielka, lecz przy dokładności współczesnych technik pomiarowych niezgodność obserwacji z teorią domagała się wyjaśnienia.

Tomasz KWAST





W cyklu prac uczniowskich przedstawiamy pracę wykonaną przez dwóch uczniów II klasy XIV Liceum Ogólnokształcącego im. St. Staszica w Warszawie w ramach warsztatów Krajowego Funduszu na Rzecz Dzieci zorganizowanych przez Wydział Fizyki UW.

## Jak kończy się żywot pozytonu?

Piotr BELICZYŃSKI i Eryk KOPCZYŃSKI

### I. Wprowadzenie

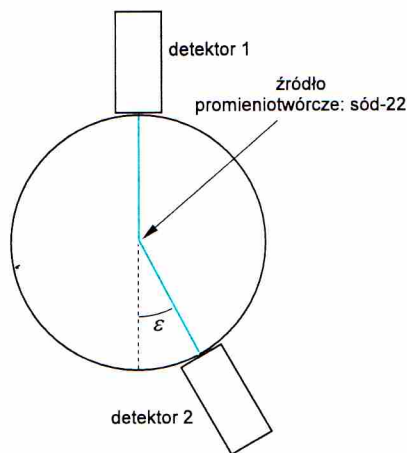
Przedmiotem naszych poszukiwań było pewne scharakteryzowanie momentu anihilacji pozytonu z elektronem, a dokładniej: stwierdzenie, czy anihilacja następuje w spoczynku, czy też nie.

Za emiter pozytonów służył nam izotop sodu-22 o okresie półtrwania 2,602 lat. W wyniku rozpadu powstaje wzbudzony izotop neonu-22, pozyton o energii 0,545 MeV oraz neutrino elektronowe. Neon-22 przechodzi do stanu podstawowego przez wyemitowanie fotonu o energii 1,274 MeV.

Nietrudno udowodnić, że gdy anihilacja następuje w spoczynku, to fotony anihilacyjne mają równe energie i kąt rozlotu wynosi 180 stopni. W pracy usiłujemy zmierzyć ten kąt i dowodzimy, że anihilacja musiała nastąpić w spoczynku.

### II. Układ doświadczalny

Pomiary wykonywaliśmy w układzie przedstawionym na rysunku 1.



Rys. 1. Układ doświadczalny.

Impulsy elektryczne detektora scyntylacyjnego były analizowane przez system zbierania danych sprzężony z komputerem PC. System zbierania danych (akwizycji danych) był obsługiwany przez program „SMAN”. Program ten może przyjmować i analizować do kilkudziesięciu parametrów pomiarowych pochodzących z rejestracji „zdarzenia” (w naszym pomiarze były to cztery parametry: dwie energie i dwa czasy). Jeśli w czasie 4 ns lub krótszym po zarejestrowaniu fotonu przez jeden z detektorów, zarejestrowano również drugi foton

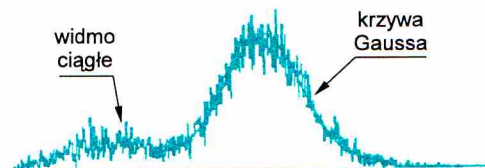
w drugim detektorze, prawdopodobnie były to zdarzenia koincydentalne. Oczywiście, nastęcza to pewne kłopoty techniczne: nie można w bezpośredni sposób zmierzyć odstępu czasowego zdarzeń, jeśli dopiero po zaistnieniu drugiego wiemy, iż trzeba odstępek ten zmierzyć. W tym celu pierwszy sygnał rejestracji puszczany jest pętlą, w której krąży przez 4 ns, oczekując na ewentualny drugi sygnał.

Detektor scyntylacyjny jest to urządzenie wykrywające fotony gamma, które oddziałują z elektronami w sieci krystalicznej soli, w naszym przypadku NaI, w tzw. scyntylatorze umieszczonym na czole detektora. Za pomocą fotopowielacza wytwarzany jest rejestrowalny prąd, proporcjonalny do pierwotnej energii wybitego elektronu.

### III. Technika

Metoda naszej pracy polegała na analizie rozkładów pewnych parametrów elektronów wybitych przez fotony. Nie rozważaliśmy więc widma fotonów, których np. energii nie mogliśmy pomierzyć bezpośrednio, lecz widma energetyczne i czasowe elektronów.

Skoncentrujmy uwagę na tzw. widmach energetycznych, czyli wykresach przedstawiających zależność między energią a liczbą elektronów zarejestrowanych z właśnie taką energią. Jeśli rozpoczniemy pomiary w układzie bez źródła promieniotwórczego, nie można zauważyć żadnych regularności, liczba zliczeń jest znikoma. Jeśli wstawimy teraz próbkę, na widmach energetycznych (rys. 2) elektronów wybitych przez fotony można zobaczyć krzywą zbliżoną do krzywej Gaussa.



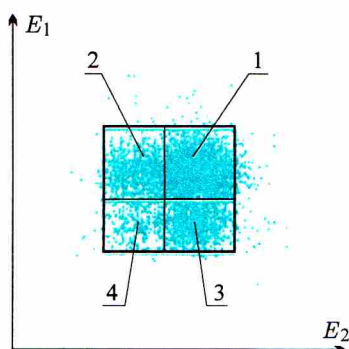
Rys. 2. Widmo energetyczne.

Jak powszechnie wiadomo, niedoskonałość naszych przyrządów nie pozwala nam zarejestrować widma w postaci jednej linii o nieskończonej małej szerokości. Zamiast tego w widmie pojawia się krzywa Gaussa. Tylko w przypadku efektu fotoelektrycznego energia unoszona przez elektron jest dla wszystkich zdarzeń taka sama, co pozwala nam przypuszczać, że otrzymany kształt powstaje na skutek tego właśnie zjawiska.



Rozpraszanie Comptonowskie, drugi sposób oddziaływania fotonów z elektronami, powoduje natomiast nadanie elektronom energii z przedziału o szerokości znacznie większej od charakterystycznego rozmycia linii odpowiadającej efektowi fotoelektrycznemu.

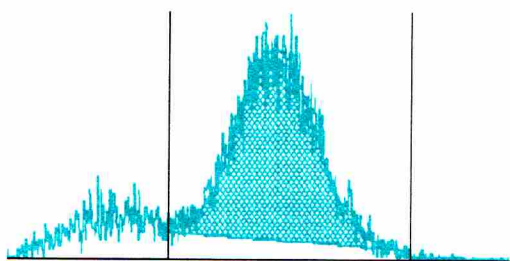
Każdy punkt wykresu z rysunku 3 symbolizuje zdarzenie, a jego współrzędne opisują energię zarejestrowaną w detektorach 1 i 2.



Rys. 3.

Na wykresie możemy wyróżnić cztery obszary, oznaczone numerami 1, 2, 3, 4. Ponieważ największa energia przekazywana jest elektronowi scyntylatora w efekcie fotoelektrycznym, widzimy, że obszar 1 stanowi rodzinę par zdarzeń typu fotoelektrycznego. Analogicznie struktury 2 i 3 to obszary zdarzeń fotoelektryczno-Comptonowskich, a 4 – Comptonowsko-Comptonowskich.

Obszar 1 jest przedmiotem naszych zainteresowań, dlatego należałoby odrzucić zdarzenia spoza tego obszaru. Najłatwiej jest to zrobić ustalając przedziały, w których musiałyby się znaleźć energie i czasy zdarzeń. W przypadku, gdy energie lub czasy są poza tymi przedziałami, zdarzenia nie uwzględniamy. Jeśli ustalimy przedział energii na osi  $E_1$ , punkty ze stref 3 i 4 zostaną odrzucone. Należy jeszcze usunąć zdarzenia ze strefy 2 poprzez ustalenie przedziału na osi  $E_2$ . Możemy uznać liczbę pozostawionych zdarzeń za miarodajną informację o częstotliwości koincydencji.



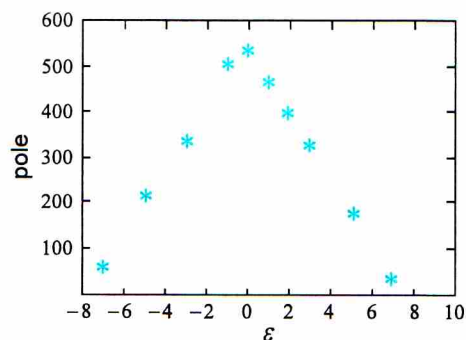
Rys. 4. Pole zaznaczonej powierzchni jest miarą liczby zdarzeń.

Rozważmy dwie metody liczenia liczby zdarzeń. Można obliczyć całkę między podanymi wartościami energii,

co jednak może wzbudzać kontrowersje z powodu dużych zmian otrzymanych wartości w zależności od metod wyznaczania granic. Innym sposobem jest liczenie wartości zwanej dalej polem (patrz rys. 4).

#### IV. Wyniki pomiarów

Na podstawie danych doświadczalnych sporządziliśmy wykresy zależności całki i pola od kąta  $\varepsilon$  (rys. 5). Można wyliczyć środek ciężkości krzywych i przyjmując go za maksimum wykresu. Wyznaczyliśmy ten kąt jako  $0,13$ . Sądymy, że błąd pomiaru znacznie przewyższa tę wartość.



Rys. 5.

Parametry układu doświadczalnego są takie, że kąt, pod jakim widzimy detektor ze środka układu doświadczalnego, wynosi 10 stopni. Gdy zwiększamy kąt, liczba zliczeń powinna maleć aż do 10 stopni, gdzie zliczenia powinny w ogóle zniknąć. Doskonale zgadza się to z danymi doświadczalnymi.

#### V. Interpretacja fizyczna – co przypuszczalnie się stało

Na podstawie zasady zachowania pędu i znajomości własności pozytonu możemy pokusić się o przypuszczenia co do przebiegu anihilacji.

Pozyton opuszcza jądro z energią 0,545 MeV. Ponieważ jednak oddziałują na niego pola elektryczne elektronów, powoduje ruch tychże cząstek („pociąga” je za sobą). Oddaje w ten sposób swoją energię kinetyczną i zmniejsza prędkość. W pewnym momencie (kiedy jego energia kinetyczna spada poniżej 6,8 eV) trafia na elektron, z którym może utworzyć pozytonium, czyli stan związany elektron-pozyton. Poprzez schodzenie na coraz niższe poziomy energetyczne (towarzyszy mu emisja fotonów o energii  $\sim 1$  eV) traci energię, aż dochodzi do anihilacji. Pozyton nie ma już energii kinetycznej, więc fotony powstałe przy anihilacji mają równe energie i kąt rozlotu 180 stopni.



## VI. Źródła błędów

Błędy towarzyszyły nam przy każdym pomiarze. Możemy je podzielić na kilka grup:

- zakłócenia pochodzące od naturalnych źródeł promieniotwórczych,
- niedokładność pomiaru kąta między detektorami,
- niedokładność pomiaru energii przez detektory,
- niedokładność pomiaru przez komputer czasu między zdarzeniami,
- niedokładność wyznaczenia przedziałów energii i czasu,
- inne błędy.

Pomimo takiej liczby błędów wyniki nasze możemy uznać za wiarygodne. Pozwoliły nam one odpowiedzieć na postawione na początku pytanie.

## VII. Zakończenie

Jak wiadomo, antycząstki mogą anihilować z cząstkami powszechnie nam znanymi – elektronami, protonami, neutronami itp. Okazuje się jednak, że antycząstki nie anihilują natychmiast z cząstkami, lecz mogą przez pewien czas istnieć w ośrodku materialnym.

Zjawisko anihilacji już znalazło szerokie zastosowanie w różnych dziedzinach życia, szczególnie w medycynie, gdy trzeba ustalić drogę przejścia podanych substancji przez organizm. Z uwagi na charakterystyczne parametry fotonów anihilacyjnych możliwe jest precyzyjne umiejscowienie tych substancji.

## VIII. Podziękowania

Chcielibyśmy przede wszystkim podziękować panu dr. hab. Zygmuntovi Szeffińskiemu za jego pomoc w zrozumieniu zagadnienia, przeprowadzeniu pomiarów i ich interpretacji. Pragniemy również gorąco podziękować naszym kolegom z grupy, w której prowadziliśmy eksperyment, Piotrowi Miłosiowi i Piotrowi Sozańskiemu. Dziękujemy panu profesorowi Bogdanowi Cichockiemu za zorganizowanie warsztatów i nadzór nad nimi, a także panu Ryszardowi Rakowskiemu, dzięki któremu warsztaty w ogóle się odbyły.

## IX. Literatura

- [1] E. Skrzypczak, Z. Szeffiński, *Wstęp do fizyki jądra atomowego i cząstek elementarnych*, PWN 1995.  
[2] W. Mizerski, W. Nowaczek, *Tablice fizyczno-astronomiczne*, Wyd. Adamantan 1995.



## Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

**M 804.** Na nieskończonej szachownicy ustawionych jest 1999 skoczków szachowych. Udowodnij, że można spośród nich wybrać 1000 takich, że żadne dwa z nich się nie atakują.

Rozwiązanie na str. 3

**M 805 (zawody Baltic Way 1996).** Dwie osoby grają w „kółko i krzyżyk” na nieskończonej szachownicy. Wygrywa gracz, który pierwszy utworzy ze swoich znaków kwadrat  $2 \times 2$ . Czy istnieje strategia zapewniająca zwycięstwo graczowi rozpoczynającemu rozgrywkę?

Rozwiązanie na str. 2

**M 806.** Udowodnić, że

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[m]{m+1}} \geq 1$$

dla dowolnych liczb naturalnych  $m$  i  $n$ .

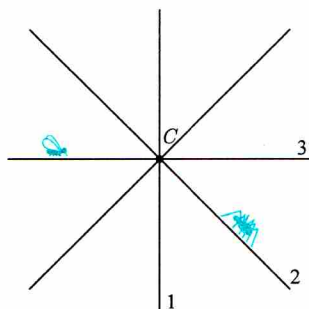
Rozwiązanie na str. 4

Redaguje Krzysztof REJMER

**F 449.** Rozpraszanie fotonu na naładowanej cząstce poruszającej się z prędkością bliską prędkości światła nazywane jest odwrotnym rozpraszaniem Comptona. Rozważmy następujący problem: cząstka o masie  $m$  i energii  $E$  ( $E \gg mc^2$ ) zderza się czołowo z fotonem o takiej częstocie kołowej  $\omega$ , że  $\hbar\omega \ll mc^2$ . Jaka jest maksymalna energia rozproszonego fotonu? Ile wynosi ta energia w przypadku fotonu promieniowania reliktoowego o temperaturze około 3 K i protonu promieniowania kosmicznego o energii rzędu  $10^{20}$  eV? Podana temperatura 3 K odpowiada energii  $k_B T \simeq 2,6 \cdot 10^{-4}$  eV. Masa protonu (wyrażona w eV) wynosi  $m = 0,918 \cdot 10^9$  eV. Rozwiązanie na str. 2

**F 450.** Rysunek przedstawia bardzo uproszczony model sieci pajęczej. Mucha, która się przykleiła do jednej z nitek, wprawia ją w drgania, które z dobrym przybliżeniem można uważać za prostopadłe. Na której z nitek, zaznaczonych na rysunku, pajęk odebrałby najsilniejszy sygnał, jeśli drgania a) są prostopadłe do płaszczyzny pajęczyny, b) są zawarte w tej płaszczyźnie?

Rozwiązanie na str. 3





# 8

# mała delta



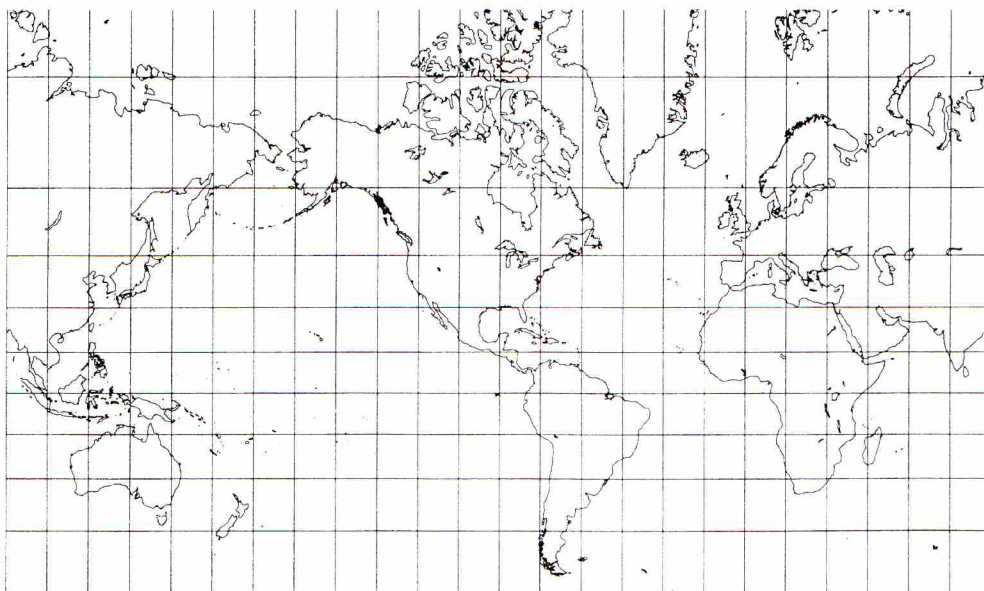
Rys. 1. Ziemia sfotografowana z kosmosu.

## Globus Warszawy

Tradycyjnie ważnym obiektem na lekcjach geografii jest globus, czyli wykonana na powierzchni kuli mapa Ziemi. Kształt globusa Ziemi nikogo nie dziwi, wiemy bowiem, że Ziemia ma właśnie taki kształt – mówi się nawet: kula ziemiska.

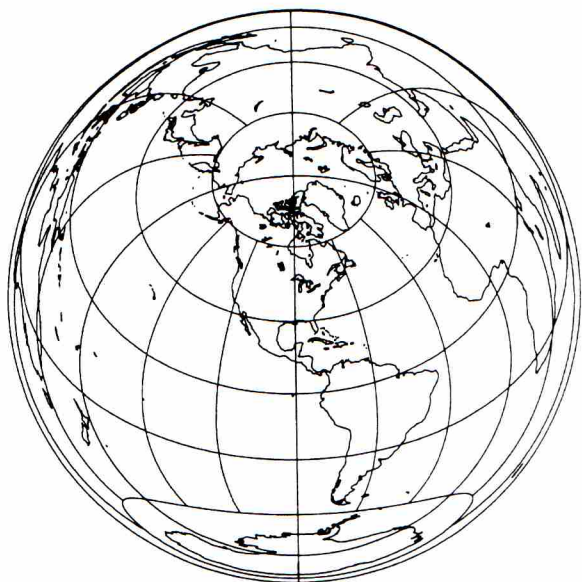
Natomiast nazwa „globus Warszawy” może się trafić tylko w żartach – każdy przecież wie, że Warszawa nie ma kształtu kuli: wygląda ona w dużym (np. mieszczącym się na stole) zmniejszeniu jak prawie całkiem płaski placek.

I można by w kwestii globusa Warszawy na tym poprzestać, gdyby nie dwie sprawy. Pierwsza to ta, że ludziom ten fragment Ziemi, jaki mogli ogarnąć swoimi obserwacjami przez całe tysiąclecia, aż do 1961 roku, jawił się podobnie jak nam Warszawa – jako prawie płaski placek. Od czasu Gagarina widzimy Ziemię w całej okazałości, jak piłkę (rys. 1). Ale trzeba podziwiać tych, którzy już dwa tysiące lat wcześniej stwierdzili, że obserwowane przez nich placki, to kawałki powierzchni ogromnej kuli. I warto zadać sobie pytanie, czy potrafilibyśmy dziś, bez zdjęć z kosmosu udowodnić sobie i innym, że Ziemia jest kulą.



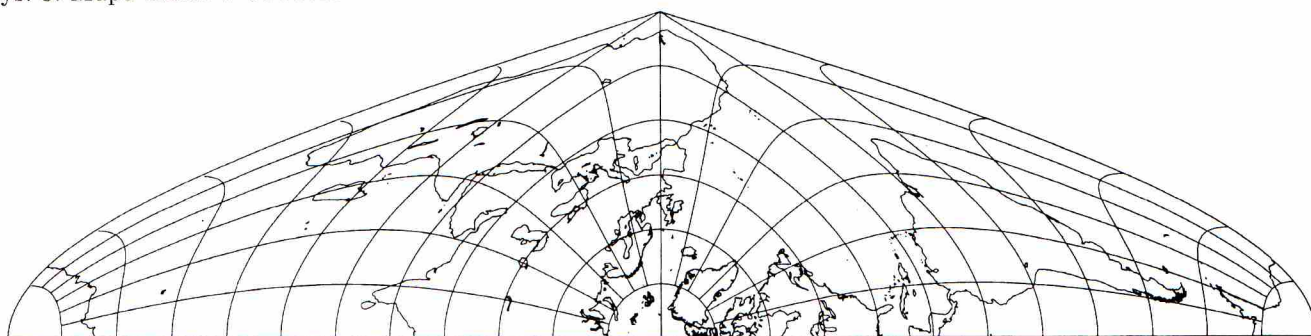
Rys. 2. Mapa Ziemi w odwzorowaniu Merkatora.



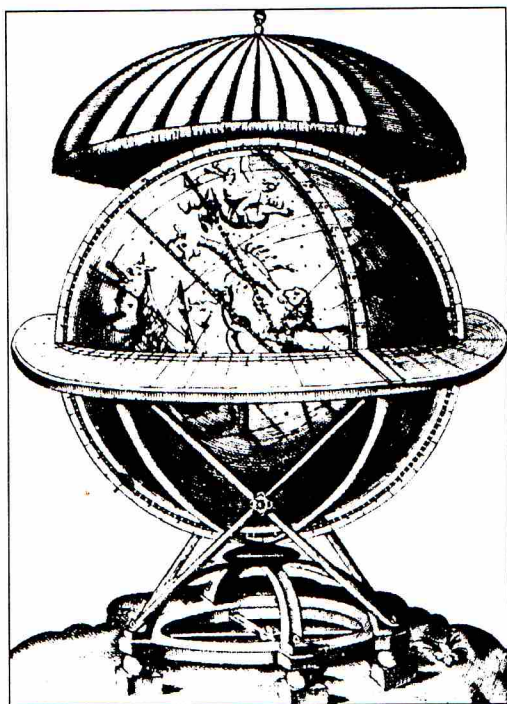


Rys. 3. Mapa Ziemi w odwzorowaniu Lamberta.

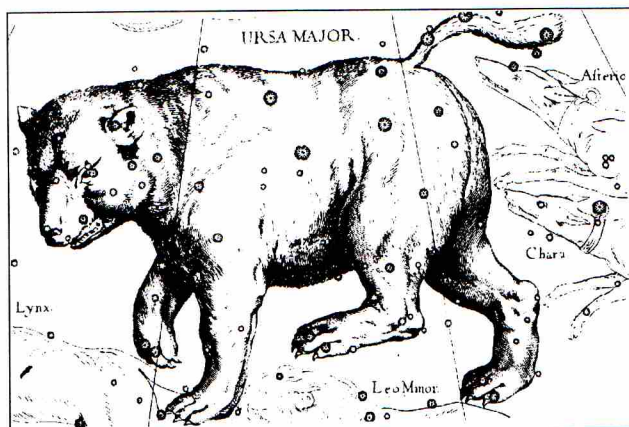
A druga sprawa jest bardziej praktyczna. Na rysunku 2 mamy płaską siatkę prostokątów, czyli coś płaskiego. Ale to przecież jest duży kawałek Ziemi. Taka mapa, zaprojektowana po raz pierwszy przez Merkatora, pokazuje, że coś okrągłego można przedstawić dokładnie na płaskiej mapie. Jest takich map zresztą wiele rodzajów (rys. 3 i 4). Ale wobec tego nie ma nic niemożliwego, by coś płaskiego przedstawić dokładnie na powierzchni kuli. I tu, zdumieni, stwierdzamy, że globus Warszawy można wykonać. Oczywiście, wiemy w jakim celu została wykonana mapa Merkatora i inne mapy kuli ziemskiej – do zrobienia globusa Warszawy brakuje chyba tylko tego właśnie: obmyślenia sytuacji, w której byłby naprawdę przydatny.



Rys. 4. Mapa połowy Ziemi w tzw. odwzorowaniu sinusoidalnym.



Rys. 5. Globus nieba wykonany w 1564 roku.



Rys. 6. Mapa fragmentu globusa Heweliusza.

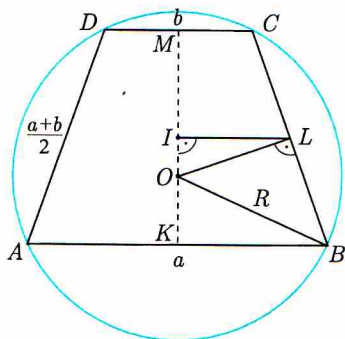
Ale żeby nie ulegać ciasnemu pragmatyzmowi: istnieje obiekt, który nie jest ani płaski, ani kulisty i który ma zarówno swój globus, jak i swoje mapy. Na rysunku 5 widzimy globus nieba, a na rysunku 6 – mapę. I, co jest zdumiewające: i globus i mapa wykonane są z zewnątrz świata – porównajcie narysowane tam gwiazdozbiory i te, które widzicie: są lustrzane.

*Małą Deltę opracował Marek KORDOS*

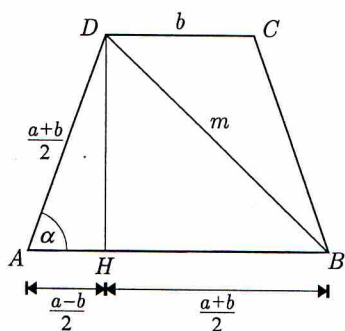


## Krótką historia dowodu pewnego ciekawego twierdzenia

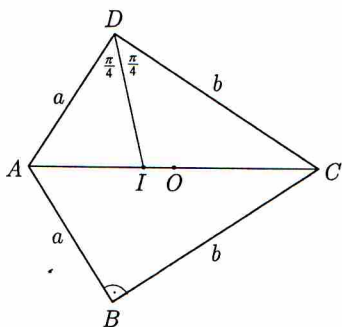
Michał STUKOW



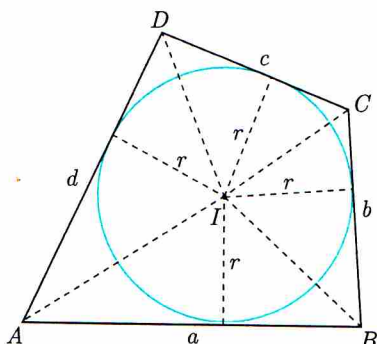
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4 Pole  $S$  dowolnego wielokąta opisanego na okręgu o promieniu  $r$  jest równe iloczynowi połowy obwodu tego wielokąta przez promień okręgu.

W poniższej pracy rozpatrujemy czworokąty, które jednocześnie są wpisane w pewien okrąg i opisane na innym okręgu. W całym tekście  $R$  i  $r$  oznaczają promienie okręgów odpowiednio opisanego i wpisanego,  $O$  i  $I$  – środki tych okręgów,  $w = |OI|$  jest odległością środków,  $S$  to pole czworokąta, a  $p$  – połowa jego obwodu. Naszym celem będzie wyznaczenie  $w$  w zależności od  $R$  i  $r$ , czyli znalezienie wzoru analogicznego do zachodzącego w każdym trójkącie wzoru Eulera:  $w^2 = R^2 - 2Rr$ .

1. Rozpatrzmy na początek prosty przypadek szczególny (patrz rys. 1), gdy czworokąt  $ABCD$  jest trapezem: równoramiennym (bo tylko równoramienny trapez można wpisać w okrąg), o podstawach długości  $a$  i  $b$  ( $a \geq b$ ) i ramionach długości  $\frac{a+b}{2}$  (bo tylko taki trapez równoramienny można opisać na okręgu). Punkty  $K, L, M$  niech będą środkami boków (odpowiednio)  $AB, BC, CD$ . Wówczas środek okręgu wpisanego  $I$  jest środkiem  $KM$ ,  $O$  zaś leży na prostej  $MK$  tak, że  $I \in OM$ . Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$w^2 = |OL|^2 - |IL|^2 = |OB|^2 - |BL|^2 - |IL|^2,$$

a ponieważ  $|BL| = |IL| = (a+b)/4$ , więc

$$w^2 = R^2 - \frac{(a+b)^2}{8}.$$

Wystarczy więc wyznaczyć  $k = (a+b)^2$  w zależności od  $R$  i  $r$ . Przy oznaczeniach z rysunku 2 mamy z twierdzenia sinusów:  $m = 2R \sin \alpha$ . Ponadto,  $m^2 = 4r^2 + \frac{(a+b)^2}{4}$  z twierdzenia Pitagorasa, a  $\sin \alpha = |HD|/|AD| = 4r/(a+b)$ . Rugując z tych trzech równań niewiadome  $m$  oraz  $\sin \alpha$  otrzymamy

$$\frac{k^2}{4} + 4r^2k - 64R^2r^2 = 0.$$

Spójrzmy na to jak na równanie kwadratowe z niewiadomą  $k$  (liczby  $R$  i  $r$  traktujemy jako parametry). Wyznaczywszy  $k$  dostaniemy po łatwych przekształceniach

$$(1) \quad w^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}.$$

2. Jako drugi przypadek szczególny rozpatrzmy deltoid  $ABCD$  o dwóch przeciwległych kątach prostych (patrz rysunek 3). Punkt  $O$  pokrywa się ze środkiem odcinka  $AC$ , punkt  $I$  zaś leży na dwusiecznej  $\angle ADC$ , więc z twierdzenia o dwusiecznej mamy

$$\frac{|AI|}{|IC|} = \frac{|AI|}{2R - |AI|} = \frac{a}{b}.$$

Stąd  $|AI| = 2aR/(a+b)$ , a  $w^2 = (R - |AI|)^2 = R^2 - 4R^2ab/(a+b)^2$ . Pozostaje wyznaczyć  $ab/(a+b)^2$  w zależności od promieni obu okręgów. W tym celu oznaczmy przez  $S$  pole deltoidu równe  $ab$ , natomiast przez  $p = a+b$  połowę jego obwodu. Wówczas  $S = pr$ , a stąd wynika, że

$$\frac{ab}{(a+b)^2} = \frac{r}{p}, \quad 4R^2 = p^2 - 2pr$$

(drugie równanie dostaniemy stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta  $ADC$ ). Jak poprzednio, rozwiązujemy równanie kwadratowe, by wyznaczyć  $p$ , a następnie po nietrudnym rachunku ponownie otrzymujemy wzór (1) – ten sam, który zachodzi dla trapezu równoramiennego.

Ta zgodność wyników dla dwóch różnych przypadków szczególnych pozwala sformułować hipotezę:

wzór (1) zachodzi dla dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu  $R$  i jednocześnie opisanego na okręgu o promieniu  $r$ .



3. Rozpatrzmy teraz przypadek ogólny (patrz rys. 5, który zawiera potrzebne oznaczenia). W dowodzie hipotezy wykorzystamy następujące wzory:

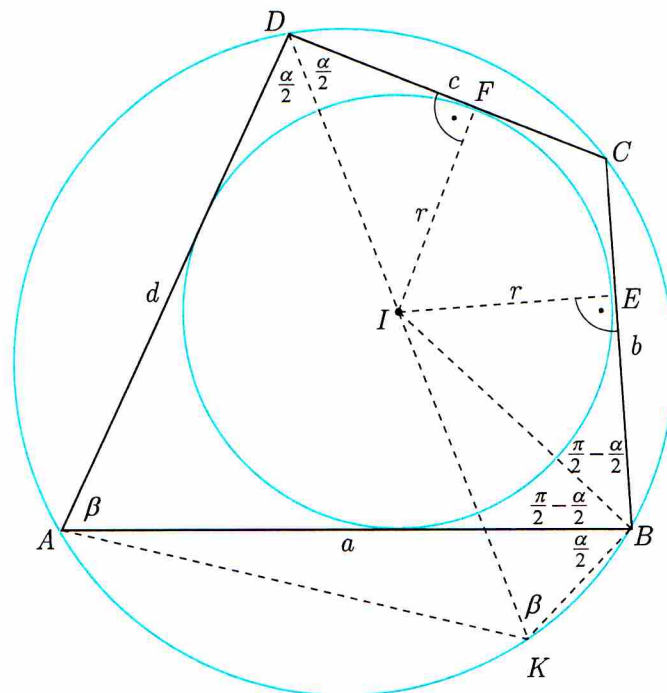
$$(2) \quad S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{abcd},$$

$$(3) \quad S = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}}{4R}.$$

Pierwsza równość w (2) to tzw. wzór Brahmagupty, prawdziwy dla dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg (druga równość bierze się z faktu, że czworokąt jest także opisany na pewnym okręgu). Wzór (3) jest nietrudnym uogólnieniem tożsamości  $S = abc/4R$  prawdziwej dla każdego trójkąta – zachęcamy Czytelnika do samodzielnego przeprowadzenia dowodu.

Zapiszmy wzór (1) w postaci  $R^2 - w^2 = r\sqrt{r^2 + 4R^2} - r^2$ . Z twierdzenia o siecznych okręgu wynika, że lewa strona jest równa  $|ID| \cdot |IK|$ . Wystarczy więc wyznaczyć ten iloczyn w zależności od  $R$  i  $r$ . Oto szkic dowodu. Kąty  $ABK$  i  $ADK$  są równe, a stąd wynika (proszę sprawdzić!), że trójkąt  $KBI$  jest prostokątny. Rozpatrując zależności boków i kątów w trójkątach  $KBI$  i  $EBI$ , dostajemy

$$|IK| = \frac{|IB|}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin \beta \cos \frac{\alpha}{2}}.$$



Rys. 5

Mnożąc obie strony tej równości przez  $|ID| = r/\sin \frac{\alpha}{2}$ , otrzymamy

$$(4) \quad |ID| \cdot |IK| = \frac{2r^2}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{8r^2 R^2}{|AC| \cdot |BD|} = \frac{8r^2 R^2}{ac + bd}.$$

Druga równość wynika z twierdzenia sinusów, a trzecia – z dobrze znanego twierdzenia Ptolemeusza. Oznaczając  $m = ac + bd$  i wykorzystując wzory (2) oraz (3) dostajemy

$$(5) \quad \frac{1}{m} = \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{16R^2 S^2} = \frac{1}{16R^2} \left( \frac{a^2+c^2}{ac} + \frac{b^2+d^2}{bd} \right).$$

Ponieważ  $p = a + c = b + d$ , więc ze wzoru Brahmagupty (2) otrzymujemy równość  $(a+c)^2 = p^2 = S^2/r^2 = abcd/r^2$ . Stąd  $a^2 + c^2 = \frac{abcd}{r^2} - 2ac$  i podobnie  $b^2 + d^2 = \frac{abcd}{r^2} - 2bd$ . Wykorzystując obie te zależności, przekształcamy (5) do postaci

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{16R^2} \left( \frac{m}{r^2} - 4 \right).$$

Stąd już łatwo obliczamy  $m = 2r^2 + 2r\sqrt{r^2 + 4R^2}$ , wstawiamy tę wartość do (4) i po uwolnieniu mianownika od niewymierności mamy gotowy dowód postawionej wcześniej hipotezy.

Warto podkreślić, że rozpatrzenie przypadków szczególnych istotnie pomogło nam w uzyskaniu dowodu zależności  $w^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{r^2 + 4R^2}$  w ogólnym przypadku. Po pierwsze, można było sformułować hipotezę głoszącą, że  $w$  zależy jedynie od  $R$  i  $r$ . Po drugie, wiadomo było, czego należy dowodzić, a dzięki temu można było zastosować twierdzenie o siecznych okręgu. Rozumowania tego typu, pokazujące drogę od sformułowania hipotezy do jej kompletnego dowodu, rzadko pojawiają się w literaturze szkolnej, a szkoda, bo są bardzo kształcące.

Na koniec zauważmy jeden ciekawy wniosek płynący ze wzoru (1): zawsze mamy  $w^2 \geq 0$ , a stąd

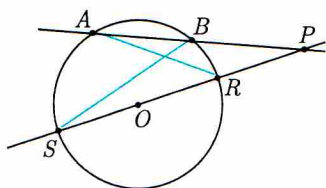
$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{2},$$

przy czym równość zachodzi, jak łatwo sprawdzić, jedynie dla kwadratu.

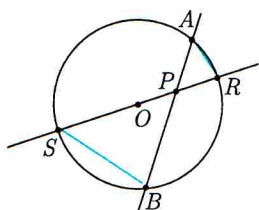




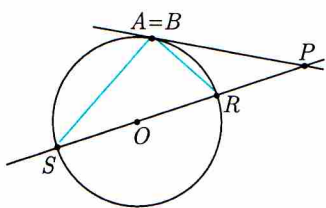
## Potęga



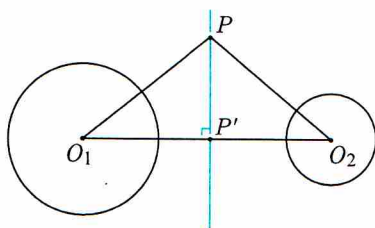
Rys. 1



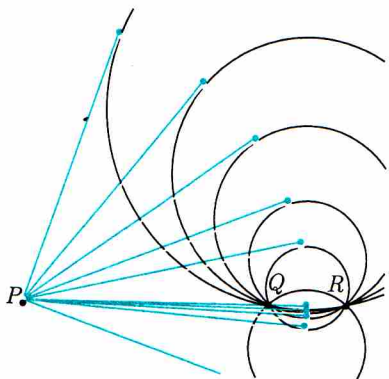
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Nawiasem mówiąc taki jest sens – skracanie rozumowań – każdego wprowadzania do matematyki nowych pojęć. W przeciwnym razie mówilibyśmy w matematyce jedynie bezpośrednio o liczbach, figurach i granicy – nie byłoby miejsca ani na równania, ani na funkcje, ani na zbiory, słowem właściwie na nic z tego, czym się faktycznie w matematyce zajmujemy.

Mamy okrąg  $o$  (o środku  $O$  i promieniu  $r$ ) oraz punkt  $P$ . Okazuje się, że jakąkolwiek weźmiemy prostą przechodzącą przez  $P$  i przecinającą  $o$  – oznaczmy punkty przecięcia przez  $A$  i  $B$  – **zawsze liczba  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  jest taka sama** (dla nie lubiących wektorów: ten iloczyn to po prostu iloczyn  $PA \cdot PB$ , gdy  $P$  nie leży na odcinku  $AB$  i minus ten iloczyn, gdy leży).

Dowód powyższego stwierdzenia polega na wykazaniu, że liczba ta jest równa  $PO^2 - r^2$ . Na szczęście nie ma z tym kłopotu (choć niektórzy... – proszę zajrzeć do kącika olimpijskiego w tym numerze). Wystarczy poprowadzić prostą  $PO$  – oznaczmy jej punkty przecięcia z  $o$  przez  $R$  i  $S$ . Okazuje się (rys. 1 i 2), że w każdym przypadku trójkąty  $PAR$  i  $PSB$  są podobne (bo  $\angle APR = \angle SPB$  – jako równe lub wierzchołkowe – oraz  $\angle PAR = \angle PSB$  – jako wpisane oparte na tym samym łuku). Wobec tego

$$\frac{PA}{PR} = \frac{PS}{PB}, \quad \text{czyli} \quad PA \cdot PB = PR \cdot PS.$$

Ale  $PS = PO + r$ , natomiast  $PR$  to  $PO - r$ , gdy  $P$  jest na zewnątrz okręgu i  $r - PO$  w przeciwnym przypadku.

Aby się upewnić, że z nami nie jest tak, jak z tymi z kącika olimpijskiego, zadanie sprawdzające: wykazać, że gdy  $A = B$  – czyli gdy prosta przez  $P$  jest styczna do okręgu (rys. 3) – to też jest dobrze.

Ze względu na geometryczne znaczenie, podane w pierwszym akapicie, liczba  $PO^2 - r^2$  nazywana jest **potęgą punktu  $P$  względem okręgu  $o$** . Nie jest to żadna mądrość, tylko narzędzie pozwalające krócej opisać niektóre sytuacje geometryczne. Potęga ma właściwie jedną istotną własność:

*punkty mające równe potęgi względem dwóch okręgów leżą na jednej prostej (nazywa się ją prostą potęgową tych okręgów).*

Oto uzasadnienie. Niech punkt  $P$  ma taką samą potęgę względem  $o_1$  i  $o_2$ , ponadto niech  $P'$  będzie jego rzutem prostokątnym na  $O_1O_2$ . Wówczas (rys. 4)

$$\begin{aligned} PO_1^2 - r_1^2 &= PO_2^2 - r_2^2, & \text{czyli} & \quad P'O_1^2 + P'P^2 - r_1^2 = P'O_2^2 + P'P^2 - r_2^2, \\ & \text{czyli} & \quad P'O_1^2 - r_1^2 &= (O_1O_2 - P'O_1)^2 - r_2^2, \\ & \text{czyli} & \quad r_1^2 + O_1O_2^2 - 2 \cdot O_1O_2 \cdot P'O_1 - r_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{i ostatecznie} \quad P'O_1 = \frac{O_1O_2^2 + r_1^2 - r_2^2}{2 \cdot O_1O_2}.$$

Ostatecznie, bo oznacza to, że rzuty prostokątne wszystkich punktów o równych potęgach względem  $o_1$  i  $o_2$  na prostą  $O_1O_2$  są w tym samym miejscu – wszystkie takie punkty muszą więc leżeć na prostej oznaczonej na rysunku 4 kolorem.

Dla kolejnego sprawdzenia, czy nie jesteśmy przypadkiem tacy, jak... , trzy proste zadania: uzasadnić, że

1. gdy okręgi są styczne, to ich prosta potęgowa jest ich wspólną styczną w punkcie styczności,
2. gdy okręgi się przecinają, to ich prosta potęgowa przechodzi przez ich punkty przecięcia,
3. gdy dane są trzy okręgi, to proste potęgowe wszystkich trzech par albo mają wspólny punkt, albo wspólny kierunek.

Uwaga: do rozwiązania zadania 3 nie jest potrzebna geometria!

Na zakończenie przykład bardziej efektownego zadania – jego rozwiązanie dobitnie pokazuje, jak skracają się rozumowania, gdy używamy pojęcia potęgi: *Punkt  $Q$  leży wewnątrz odcinka  $PR$ . Rozpatrujemy rodzinę wszystkich okręgów przechodzących przez  $Q$  i  $R$ . Opisać figurę złożoną ze wszystkich punktów styczności prostych przechodzących przez  $P$  z któryś z okręgów tej rodziny (rys. 5).*

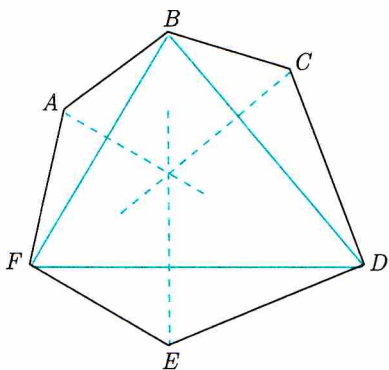
Faktycznie nie ma tu co robić – jest to okrąg o promieniu  $\sqrt{PQ \cdot PR}$ .

Marek KORDOS



Jedno z zadań II stopnia XLVI Olimpiady Matematycznej brzmiało:

W sześciokącie wypukłym  $ABCDEF$  zachodzą równości  $|AB| = |BC|$ ,  $|CD| = |DE|$ ,  $|EF| = |FA|$ . Wykazać, że proste zawierające wysokości trójkątów  $BCD$ ,  $DEF$  i  $FAB$ , poprowadzone odpowiednio z wierzchołków  $C$ ,  $E$ ,  $A$ , przecinają się w jednym punkcie.



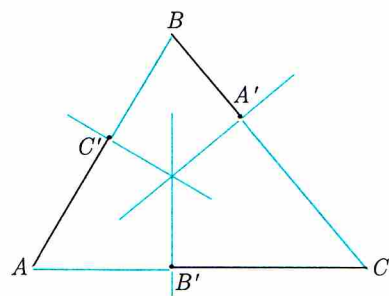
Zadanie nie jest łatwe; zachęcam do samodzielnej próby rozwiązania. Dopiero potem (lub po rezygnacji) proponuję dalszą lekturę.

Oto rozwiązanie Komitetu Głównego, dostarczone po zawodach uczestnikom – zadziwiająco krótkie:

Rozważmy okręgi o środkach  $B$ ,  $D$ ,  $F$  i promieniach odpowiednio równych  $|BA|$ ,  $|DC|$ ,  $|FE|$ . Osie potęgowe tych okręgów pokrywają się z prostymi zawierającymi rozpatrywane wysokości trójkątów  $BCD$ ,  $DEF$ ,  $FAB$ . Oczywiście, te trzy osie potęgowe przecinają się w jednym punkcie.

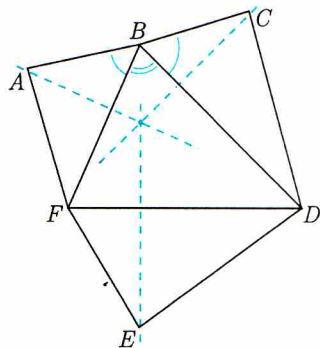
Uczestnicy zawodów przeważnie reagowali na treść rozwiązania stwierdzeniem, że nigdy nie słyszeli o osiach potęgowych okręgów. Niektórzy zresztą rysowali w brudnopisach opisane okręgi, nie wiedząc, że można się tu na coś powołać.

Osi potęgowych nie ma w programie szkolnym, nie jest to też „klasyczny” chwyt olimpijski (typu zasady szufladkowej czy twierdzenia Cevy). Niemniej jednak uczestnicy potrafili sobie z zadaniem poradzić! W Krakowie rozwiązało je kilka osób, czterema różnymi, bardzo ładnymi sposobami.



Jeden z dowodów oparty był na lemacie: *Proste prostopadłe do boków trójkąta  $ABC$  poprowadzone z punktów  $C' \in AB$ ,  $A' \in BC$ ,  $B' \in AC$  przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy  $|AC'|^2 + |BA'|^2 + |CB'|^2 = |BC'|^2 + |CA'|^2 + |AB'|^2$ .* By to wykazać w jedną stronę, wystarczy zastosować twierdzenie Pitagorasa; urok dowodu polega na pięknym wykazaniu implikacji odwrotnej. Prowadzimy dowód nie wprost, zakładamy, że zachodzi nierówność – po czym przesuwamy równolegle jedną z prostych do punktu przecięcia dwóch pozostałych i korzystamy z wykazanego wynikania w przeciwną stronę... Szczegóły pozostawiam Czytelnikowi.

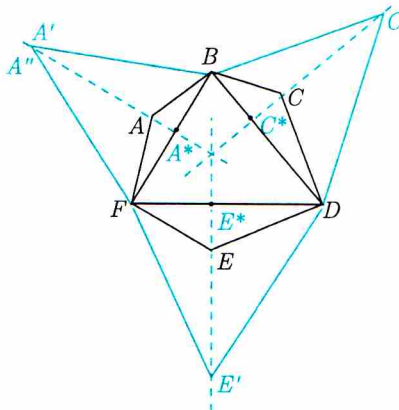
Natomiast inny sposób wręcz olśnił Komitet Okręgowy; nikt spośród nas nie spodziewał się, że można problem pokonać metodą tak ładną. Oto ona. Jeżeli  $\angle ABF + \angle DBC > \angle FBD$  (i analogicznie przy dwóch pozostałych kątach trójkąta  $BDF$ ), wtedy rysunek czterech trójkątów jest... siatką czworoscianu o podstawie  $BDF$ . Szukany punkt przecięcia zaś to po prostu rzut wierzchołka!



No dobrze, ale to przypadek łatwiejszy. Co zrobić, gdy  $\angle ABF + \angle DBC \leq \angle FBD$ ? Oznaczmy spodki badanych wysokości przez  $A^*$ ,  $C^*$ ,  $E^*$ . Na prostej  $AA^*$  obierzmy punkt  $A'$ , a na prostej  $CC^*$  punkt  $C'$  tak, by  $|A'B| = |BC'|$  i  $\angle A'BF + \angle DBC' > \angle FBD$ . Następnie weźmy punkty  $E'$  na prostej  $EE^*$  i  $A''$  na prostej  $AA^*$  tak, by  $|C'D| = |DE'|$  i  $|E'F| = |FA''|$ . Jeżeli wykazemy, że  $A' = A''$ , to sześciokąt  $A'BC'DE'F$  tworzy siatkę czworoscianu i rzecz sprowadza się do pierwszego przypadku, bo badane proste się nie zmieniły... Ale wykazanie, że  $A' = A''$  jest niezwykle łatwe, wystarczy kilka razy zastosować twierdzenie Pitagorasa wykorzystując założoną równość odpowiednich odcinków.

To pozostawiam jako ćwiczenie.

Pomysł „wyjścia w przestrzeń” w zadaniu z geometrii płaszczyzny jest niestandardowy i bardzo oryginalny („odważny”, jak powiedział jeden z najbardziej doświadczonych członków Komitetu Okręgowego). No, i przyniósł przepiękny, krótki dowód.

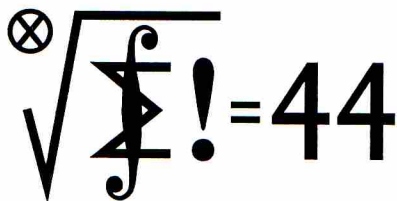


A oto zadanie z I etapu tej samej, XLVI Olimpiady Matematycznej; dowiedziałem się, że ono również ma oryginalne rozwiązanie za pomocą „wyjścia w przestrzeń”. Miłej zabawy!

*Dana jest prosta  $k$  oraz leżące na niej trzy różne punkty. Każdy z nich jest początkiem pary półprostych, wszystkie te półproste leżą w jednej półpłaszczyźnie o krawędzi  $k$ . Każda z tych par półprostych wyznacza z każdą inną czworokąt. Dowieść, że jeśli w dwa z tych czworokątów można wpisać okrąg, to również w trzeci można wpisać okrąg.*

Czemu ten kącik został zatytułowany „wyjście z cienia”? W rozwiązaniu „wyszliśmy”, co prawda, z siatki czworoscianu, ale po jej „gięciu” mamy na płaszczyźnie cień czworoscianu. Zaś „Wyjście z cienia” to tytuł książki, którą gorąco polecam, wydanej w roku 1983, napisanej przez znakomitego, nieżyjącego już pisarza, Janusza A. Zajdla. Zapewne niewielu z miłośników twórczości Zajdla (w tym, być może, olimpijczyków) wie, że Janusz Zajdel został wyróżniony w finale VI Olimpiady Matematycznej...  
Krzysztof CIESIELSKI





## Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Termin nadsyłania rozwiązań:  
30 VI 1997

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1997.

### Zadania z matematyki nr 339, 340

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**339.** Czworokąt  $ABCD$  jest wpisany w okrąg. Punkty  $P$  i  $Q$  leżą odpowiednio na półprostych  $AB^-$  i  $AD^-$ , przy czym  $|AP| = |CD|$ ,  $|AQ| = |BC|$ . Wykazać, że środek odcinka  $PQ$  leży na prostej  $AC$ .

**340.** Dowieść, że dla liczb nieujemnych  $a, b, c$  zachodzi nierówność

$$\frac{1}{2} \left( \frac{a+b+c}{3} + \sqrt[3]{abc} \right) \geq \frac{1}{3} \left( \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab} \right).$$

Zadanie **340** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1996

Przypominamy treść zadań:

**331.** Znaleźć wszystkie wielomiany  $P(x)$  spełniające tożsamościowo równanie  $P(2x - x^2) = P(x)^2$ .

**332.** W ostrosłupie o podstawie prostokątnej  $OACB$  oraz wysokości  $OS$ , prostopadłej do płaszczyzny podstawy, znane są kąt  $\alpha$  między podstawą i ścianą  $SAC$ , kąt  $\beta$  między podstawą i ścianą  $SBC$ , oraz długość przekątnej podstawy  $c = OC$ . Obliczyć długość krawędzi  $SC$ .

**331.** Załóżmy, że wielomian  $P(x)$ , nie równy tożsamościowo zeru, spełnia podane równanie i przyjmijmy  $Q(x) = P(1 - x)$ . Wówczas  $P(x) = Q(1 - x)$ , co po podstawieniu do równania daje związek:  $Q((1 - x)^2) = (Q(1 - x))^2$ ; równoważnie:

$$(1) \quad Q(x^2) = Q(x)^2 \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Przypuśćmy, że  $Q(x)$  nie jest jednomianem; daje się więc zapisać jako

$$Q(x) = ax^k + x^m R(x),$$

gdzie  $m > k \geq 0$  są wykładnikami całkowitymi,  $a \neq 0$  jest stałym współczynnikiem, a  $R(x)$  jest wielomianem,  $R(0) \neq 0$ . Dla takiego wielomianu  $Q(x)$  wyrażenia po lewej i prawej stronie równania (1) mają (odpowiednio) postać

$$ax^{2k} + x^{2m} R(x^2), \quad a^2 x^{2k} + 2ax^{k+m} R(x) + x^{2m} R(x)^2.$$

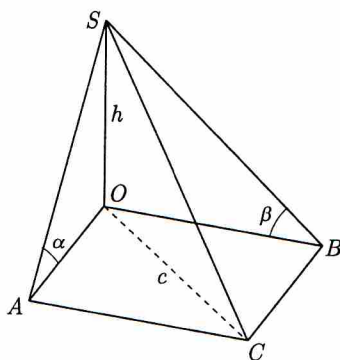
W drugim z nich występuje z niezerowym współczynnikiem wyraz  $x^{k+m}$ ; w pierwszym - nie występuje. Sprzeczność dowodzi, że  $Q(x)$  musi być jednomianem:  $Q(x) = ax^k$  ( $a \neq 0$ ); z równości (1) wnosimy, że  $a = 1$ , i ostatecznie  $P(x) = (1 - x)^k$ ; wykładnik  $k$  może być dowolną nieujemną liczbą całkowitą. Dołączając do tej rodziny wielomianów jeszcze wielomian równy tożsamościowo zeru otrzymujemy ogólne rozwiązanie postawionego zagadnienia.

**332.** Jeśli  $|OS| = h$ , to  $|OA| = h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $|OB| = h \cdot \operatorname{ctg} \beta$ ,

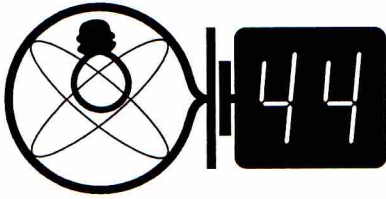
$$c^2 = |OA|^2 + |OB|^2 = h^2 (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta),$$

i wobec tego

$$|SC| = \sqrt{c^2 + h^2} = c \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}}.$$







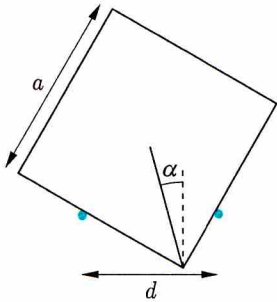
## Zadania z fizyki nr 237, 238

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**237.** Jednorodny sześcian o boku  $a$  położono na dwóch cienkich, równoległych i poziomych prętach odległych o  $d$  (rys. 1). Tarcie między sześcianem a prętami nie występuje.

a) Jaki warunek muszą spełniać  $a$  i  $d$ , aby dla  $\alpha = 0$  równowaga była trwała, tzn. aby po małym przechyle następował powrót do tego położenia?

b) Jaki warunek muszą spełniać  $a$  i  $d$ , aby sześcian mógł spoczywać na prętach w równowadze dla pewnego kąta  $\alpha$  różnego od zera? Czy ten stan równowagi będzie trwały?

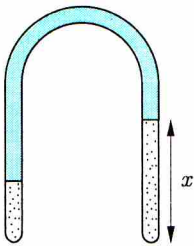


Rys. 1

**238.** Dwa pierwiastki w temperaturze pokojowej występują w stanie gazowym, przy czym jeden jest gazem jednoatomowym, a drugi – dwuatomowym. Okazuje się, że zderzenia atomów (lub cząsteczek) pierwiastka  $A$  są sprężyste (suma energii kinetycznych przed zderzeniem jest równa tej sumie po zderzeniu), natomiast dla pierwiastka  $B$  często są niesprężyste. Który z pierwiastków  $A$  i  $B$  jest gazem jednoatomowym, a który dwuatomowym, i dlaczego?

Po silnym oziębieniu gazów okazało się, że zderzenia obu rodzajów cząsteczek mają taki sam charakter. Czy są one wtedy sprężyste, czy niesprężyste, i dlaczego?

Po silnym podgrzaniu gazów okazało się, że zderzenia obu rodzajów cząsteczek także mają taki sam charakter. Czy są one wtedy sprężyste, czy niesprężyste, i dlaczego? Zachowując temperaturę początkową zmieszano gazy. Czy zderzenia cząsteczek jednego gazu z atomami drugiego są sprężyste?



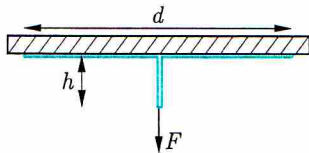
Rys. 2

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1996

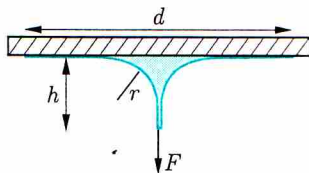
Przypominamy treść zadań

**229.** W zamkniętej rurce o kształcie litery  $U$  dwie jednakowe ilości gazu są rozdzielone słupem rtęci (rysunek obok). Jaki warunek muszą spełniać parametry  $S$  (pole przekroju poprzecznego rurki),  $l$  (długość każdego ze słupów gazu),  $T$  (temperatura),  $n$  (liczba moli gazu w każdej części),  $\rho$  (gęstość rtęci) i  $g$  (przyspieszenie ziemskie), aby po odwróceniu rurki „do góry nogami” równowaga słupa rtęci w położeniu symetrycznym okazała się niestabilna? Założyć, że słup rtęci nie ulegnie przerwaniu.

**230.** Do prostego pręta w dwóch punktach odległych od siebie o  $d = 10$  cm przymocowano końce nici o długości  $l = 14$  cm i rozpięto błonkę cieczy (np. bańkę mydlaną) między prętem a nicią. Do środkowego punktu nici przyłożono siłę  $F$  skierowaną prostopadle do pręta, w rezultacie czego ten punkt odsunął się od pręta na odległość  $h$ . Z badać zależność  $F(h)$  i wykonać wykres tej funkcji, w razie potrzeby posługując się obliczeniami numerycznymi; można przyjąć dowolną liczbową wartość napięcia powierzchniowego.



Rys. 3



Rys. 4

**229.** Niech długość słupa gazu po jednej stronie wynosi  $x$ , a po drugiej  $2l - x$  (rys. 2). Po odwróceniu rurki warunek równowagi słupa rtęci przybiera postać

$$(2l - x - x)\rho g = \frac{nRT}{S} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2l - x} \right).$$

Wprowadźmy oznaczenie  $\tau = nRT/\rho g S$ . Analiza algebraiczna wskazuje, że jeśli wykluczmy symetryczne rozwiązanie  $x = l$ , to pozostaje nam równanie

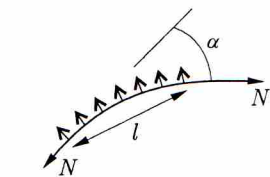
$$x^2 - 2lx + \tau = 0.$$

Ma ono rozwiązania pod warunkiem, że  $l^2 > \tau$ ; nietrudno sprawdzić, że te dodatkowe rozwiązania są stabilne, podczas gdy symetryczne położenie słupa rtęci staje się niestabilne. Jeśli postawimy dany problem w taki sposób, że rurka pozostaje odwrócona i np. rozpoczynając od wysokiej temperatury ( $\tau > l^2$ ) obniżamy ją, to w punkcie  $\tau = l^2$  mamy do czynienia z przykładem tzw. spontanicznego łamania symetrii, znanego w różnych gałęziach fizyki (w tym w fizyce cząstek elementarnych).

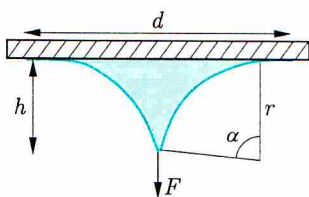
**230.** Wystarczy dowolnie mała siła  $F$ , aby  $h$  osiągnęło wartość  $(l - d)/2 = 2$  cm (rys. 3). Dopiero po przekroczeniu tego punktu powierzchnia błonki zacznie się zwiększać, przy czym początkowo przybierze ona kształt przedstawiony na rysunku 4. Aby wyznaczyć dokładny kształt „niesklejonych” części nitki, rozpatrzmy siły działające na jej mały fragment (rys. 5). Ponieważ siły napięcia powierzchniowego są prostopadle do nitki, więc napinająca nitkę siła  $N$  ma wszędzie jednakową wartość. Warunek równowagi sił przedstawionych na rysunku 5 dla małego kąta  $\alpha$  ma postać

$$N\alpha = 2l\sigma,$$

gdzie  $\sigma$  jest napięciem powierzchniowym (czynnikiem 2 wynika z uwzględnienia obu stron błonki). Widzimy, że promień krzywizny nitki  $r = l/\alpha = N/2\sigma$  jest stały, tzn. ma ona kształt łuku

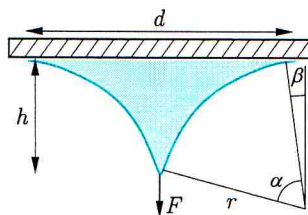


Rys. 5

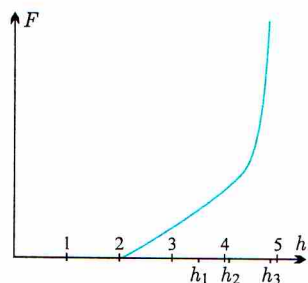


Rys. 6





Rys. 7



Rys. 8

okręgu. W przypadku przedstawionym na rysunku 4 promień łuku  $r$  jest powiązany z  $h$  wzorem

$$l = d - 2r + 2(h - r) + \pi r,$$

a dalej znajdujemy

$$(1) \quad F = 2N = 4\sigma r = 4\sigma(d + 2h - l)/(4 - \pi).$$

Otrzymana zależność  $F(h)$  jest liniowa, a obowiązuje ona dopóty, dopóki pewne odcinki nitki pozostają „przyklejone” do pręta (w pobliżu końców nitki), a inne – do siebie nawzajem (w pobliżu środka). Przy podanych wartościach  $l$  i  $d$  (ogólnie, gdy  $2l < \pi d$ ) nitka najpierw „odklei się do końca” w środku; nastąpi to w momencie, gdy  $h$  przekroczy wartość  $h_1 = (l - d)/(\pi - 2) = 3,504$  cm. Wtedy błonka przybierze kształt przedstawiony na rysunku 6 i mamy układ równań

$$(2) \quad h = r(1 - \cos \alpha), \quad l = d - 2r \sin \alpha + 2r\alpha, \quad F = 4\sigma r \sin \alpha.$$

Wylimitowanie kąta  $\alpha$  i wyznaczenie szukanej funkcji  $F(h)$  może być przeprowadzone w tym przypadku tylko numerycznie. Przy dalszym zwiększaniu siły  $F$  osiągamy punkt  $h = h_2$ , w którym nitka „odkleja się” także od pręta. Wartość  $h_2$  można wyznaczyć dołączając do równań (2) dodatkowy warunek  $d = 2r \sin \alpha$ ; otrzymuje się  $h_2 = 4,096$  cm. Po przekroczeniu tego punktu obowiązują równania (zob. rys. 7)

$$(3) \quad h = r(\cos \beta - \cos(\alpha + \beta)), \quad d = 2r((\sin(\alpha + \beta) - \sin \beta)), \quad l = 2r\alpha, \quad F = 4\sigma r \sin(\alpha + \beta).$$

Maksymalną wartość  $h$  (osiąganą w granicy  $F \rightarrow \infty$ ) jest  $h_3 = (1/2)\sqrt{l^2 - d^2} = 4,899$  cm. Kompletując dane numeryczne uzyskane z analizy równań (1), (2) i (3) otrzymujemy wykres  $F(h)$  przedstawiony na rysunku 8.

## List do Redakcji *Delty*

Ciekawy skądinąd artykuł Stanisława Mrówczyńskiego „Rozszczepienie jąder uranu i datowanie skał” (*Delta* 11/1996) koniecznie wymaga uzupełnienia. Czytelnik, który nie uczył się jeszcze o uranie (a o pierwiastku tym mówi się dopiero w ostatniej klasie liceum) może dojść do wniosku (sprawdziłem to na paru zdolnych uczniach), że promieniotwórczość uranu polega właśnie na rozszczepieniu jego jąder, bo tylko o takim rozpadzie najbardziej rozpowszechnionego izotopu,  $^{238}\text{U}$ , jest mowa w artykule. Tymczasem, dla tego izotopu rozszczepienie jest zjawiskiem marginalnym: jedno rozszczepienie przypada średnio na blisko milion rozpadów na cząstkę  $\alpha$ , czyli jądro helu  $^4\text{He}$  oraz izotop toru  $^{234}\text{Th}$ . Ciekawe byłoby wyjaśnienie, dlaczego nie ten rozpad, tylko właśnie tak rzadkie rozszczepienie zostawia w skałach wyraźne ślady. Liczę w tym względzie na odpowiedź Autora artykułu.

Piotr GOLDSTEIN

## Dlaczego w górach jest zimniej?

Najwięcej energii w widmie słonecznym niesie promieniowanie widzialne, ale bezpośrednio ogrzać powietrza nie może, gdyż jest ono dla niego przezroczyste. Światło może przekazać energię powierzchni Ziemi, dopiero od niej ogrzewa się powietrze. Ogrzane bańki powietrza unoszą się ku górze, rozprężają (bo ciśnienie ku górze spada), a więc i ochładzają.

Jak gwałtowny jest spadek temperatury z wysokością? Można to oszacować w dwóch etapach.

1. Oszacujmy najpierw spadek ciśnienia z wysokością. Gdy obserwator uniesie się o  $dh$ , to ciężar słupa powietrza o jednostkowym przekroju nad nim zmaleje o  $g\rho dh$ , gdzie  $g$  jest przyspieszeniem ziemskim, a  $\rho$  gęstością. Spadek ciśnienia wynosi więc

$$dP = -g\rho dh.$$

Przy powierzchni Ziemi mamy:  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$ , więc  $dP \approx -13 dh$  w jednostkach SI.

2. Unoszące się powietrze ochładza się w przybliżeniu adiabatycznie, czyli

$$PT^\gamma = \text{const}, \quad \text{gdzie } \gamma \approx -2,5.$$

Wtedy

$$\frac{dP}{P} = 2,5 \frac{dT}{T},$$

co po wykorzystaniu wyniku z punktu 1 daje

$$dT \approx -5 \frac{T}{P} dh.$$

Podstawiając  $T \approx 300 \text{ K}$ ,  $P = 100\,000 \text{ Pa}$ , stwierdzamy, że temperatura opada o 1,5 K na każde 100 m wysokości.

Nic więc dziwnego, że nawet w tak niskich górach jak Tatry przez cały rok utrzymują się miejscami płaty śniegu. Troposfera jest tą warstwą atmosfery, w której temperatura spada ze wzrostem wysokości. Wyżej temperatura rośnie, gdyż w stratosferze leży warstwa ozonu absorbująca słoneczny nadfiolet. Jeszcze wyżej, w mezosferze, temperatura powietrza znowu spada ze wzrostem wysokości, tak jak być powinno.

Tomasz KWAST



**Złota rybka,**  
czyli  
dlaczego sławny jest Andrew Wiles,  
a nie Anastazy Duduś

spisał K.C.

Młody matematyk, Anastazy Duduś, siedział nad jeziorem i, jak mawiają złośliwi, „moczył kij w wodzie”. Określenie to dość dobrze oddawało efekty łowienia ryb tego dnia – choć zbliżał się wieczór, wiaderko było wciąż puste.

Anastazy już zamierzał iść do domu, gdy nagle splawik lekko drgnął. Duduś odczekał krótką chwilę i poderwał wędkę. Udało się! Na końcu żyłki trzepotała bezradnie niewielka rybka, koloru robiącego wrażenie złotego.

– *Nigdy takiej nie widziałem* – pomyślał Anastazy i zaczął zwijać kołowrotek, by się przyjrzeć dokładniej. – *Istotnie, chyba złota* – stwierdził ze zdziwieniem i zabrał się do odczepiania rybki, gdy ta otworzyła pyszczek i rzekła:

– Jeśli mnie wpuścisz z powrotem do jeziora, spełnię twoje życzenie.

Anastazy osłupiał. Dopiero po chwili mógł wydobyć z siebie głos:

– Myślałem, że złote rybki spełniające życzenia są tylko w bajkach. . .

– Skąd się te historie wzięły. Dla nas bardzo dobrze, że ludzie w nas nie wierzą; wiesz, co by się działo nad jeziorami? – odparła rybka. – Więc jak, interesuje cię spełnienie życzenia?

– Tak, tak. . . Ale dlaczego tylko jednego? W bajkach piszą o trzech.

– Tak było kilka wieków temu. Teraz trudności, inflacja. . . I tak dobrze, że jesteśmy jeszcze w stanie oferować spełnianie życzeń. Słuchaj, jeśli mnie tak będziesz tu trzymał, to wkrótce nic z tego nie będzie! Ja muszę przebywać w wodzie!

Anastazy zaczął intensywnie myśleć. Czego sobie życzyć? Pieniądzy? Stypendium zagranicznego? Najlepiej sławy w środowisku matematycznym, ale jak to wyrazić konkretnie? I wtedy przyszedł mu do głowy pomysł.

Poprosi o rozwiązanie słynnego problemu i opublikuje! – Chcę poznać dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata – rzekł.

Rybka zamysliła się.

– Ja osobiście nie znam. . . Musisz mnie wpuścić do wody, dowiem się, wypłynę i ci powiem.

– *Powie mi, a czy ja zapamiętam?* – pomyślał Duduś, któremu zazwyczaj po wykładach na studiach trudno było powtórzyć nawet sformułowania podanych twierdzeń.

– Hm. . . A czy mógłbym dostać ten dowód na piśmie?

– Oczywiście! To nawet będzie dla mnie łatwiej – ucieszyła się rybka.

Anastazy Duduś wpuścił rybkę do wody i usiadł w pozycji wyczekującej nad brzegiem. Nie czekał długo. Rybka po chwili wypłynęła, w pyszczku trzymała kartkę papieru w plastikowej folii. Z daleka Duduś widział symbole matematyczne wydrukowane na drukarce laserowej.

– *Tylko jedna kartka! Może więc istotnie Fermat znał dowód?* – to była pierwsza myśl, która przyszła Anastazemu do głowy. Podeszedł do rybki i wziął kartkę. Rybka wdzięcznie machnęła mu na pożegnanie ogonkiem i zniknęła w jeziorze.

Duduś wziął kartkę i zaczął czytać.

„Złota Rybka”  
Spółka z o.o.

Szanowny Panie,

*W ostatnim okresie firma nasza ma ogromne trudności. Zostaliśmy praktycznie pozbawieni dotacji z budżetu.*

*Nie mamy sponsorów, gdyż wpłat wspierających naszą działalność nie można odliczyć od podstawy opodatkowania, zaś wpływy własne są nad wyraz mizerne. Od wartości świadczonych usług płacimy podatek VAT (22%). Ponadto przepisy zobowiązują nas do odprowadzania do centralnej kasy podatku od zarobków pracowników w wysokości 21%, a także 48% pensji na ZUS. W tych warunkach zmuszeni jesteśmy pokrywać te koszty z funduszy przeznaczonych na świadczenie usług klientom, a co za tym idzie, jakość tych usług musi zostać – mamy nadzieję, nieznacznie – obniżona. W związku z powyższym, zamiast zamówionego przez Pana dowodu Wielkiego Twierdzenia Fermata załączamy (poniżej) dowód Małego Twierdzenia Fermata.*

Z poważaniem

Prezes

(podpis nieczytelny)

**Piłka jest okrągła** – mówi znane powiedzenie. Nie jest to ściśle; na przykład piłka nożna to trochę zdeformowany dwudziestościan ścięty (który, jak łatwo się domyślić, ma 32 ściany).

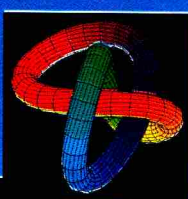
Także i monety nie zawsze są okrągłe. Istnieją monety, których przekroje poprzeczne są wielokątami, i to foremnymi! Uwaga – chodzi o przekroje, nie zaś o to, że na monecie uwidoczniiony jest trójkąt (najczęściej wpisany w obwód monety), bo takie też są.

Trzynastokątem foremnym jest 20 koron czeskich (nowych). Dwunastokątów znamy aż pięć: 50 centów z Australii, 5 centów i 1 cent z Kanady, 3 penty z Wielkiej Brytanii (kilkanaście lat temu wycofane z obiegu) i 10 senti somalijskich. Jedenastokątem jest 1 dolar kanadyjski, ośmiokątem – 250 filów z Iraku (wyjątkowo ładna moneta), siedmiokątami – 50 pensów i 20 pensów z Wielkiej Brytanii. Istnieje sześciokąt, jest nim 20 pais (Indie). Jest też i. . . kwadrat, 5 pais z Indii.

Ciekawostka: istnieją dwa rodzaje kanadyjskiej monety pięciocentowej, niemal identyczne, z takimi samymi rysunkami i napisami, różniące się jedynie obwodem. Są pięciocentówki – koła i są dwunastokąty foremne.

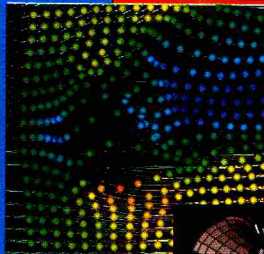
Może Czytelnicy EPSILONA znają inne przykłady? Będziemy wdzięczni za informację (a jeszcze bardziej za przysłanie nam w prezencie rzeczonych monet, do kolekcji). Z góry dziękujemy!



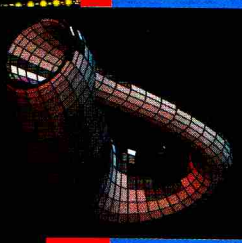
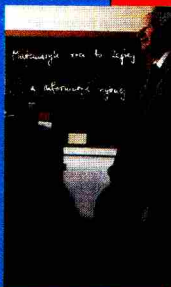


Matematyka ma wiele twarzy.

Matematyka jest uniwersalnym językiem innych nauk. Laureat Nagrody Nobla z fizyki za rok 1963, Eugene Wigner, mawiał o *niepojętej skuteczności matematyki w naukach przyrodniczych*. Dziś na poparcie swego sądu mógłby sypać przykładami z rękawa, mówiąc o modelach matematycznych już nie tylko w fizyce, chemii i biologii, ale też w meteorologii, finansach, ubezpieczeniach...



Informatyka i matematyka są żywe. W ostatnim czasie powstało wiele ich nowych dziedzin; niektóre z nich - dzięki wzajemnemu przenikaniu się obu tych nauk. Co roku na całym świecie ukazuje się kilkadziesiąt tysięcy nowych prac matematycznych. Część z nich powstaje w naszych murach, na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW.




Wykształcenie, które oferuje nasz Wydział, to bardzo cenny składnik bagażu na całe życie, niezależnie od tego, czy zostaniesz naukowcem, nauczycielem, poligrafem, ekonomistą, politykiem czy bankowcem. Nasi absolwenci - matematycy i informatycy - zdobywają znaczące pozycje w najbardziej rozwiniętych krajach świata.

O wszystkim możesz przekonać się sam -

zaprasza Cię na studia

**Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki  
Uniwersytetu Warszawskiego,  
ul. Banacha 2 (wejście od ul. Pasteura).**

Bliższych informacji o rekrutacji na Wydział MIM udziela Dziekanat (1 piętro, pon.-pt., godz. 9 -15),

 (0-22) 658-30-93

W Dziekanacie można również nabyć informator dla kandydatów na studia na Wydziale oraz testy egzaminacyjne z lat ubiegłych.

