Dnia 29 listopada 1996 roku
zmarł tragicznie w wieku 33 lat

Marcin POŹNIAK

matematyk, członek redakcji *EPSILONA*

SPIS TREŚCI

NUMERU 2(273)

W następnym numerze:

O pracach uczniowskich

Okładkę i ilustracje wykonał
Krzysztof BIESAGA

Wybór artykułów z *Delty* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem

http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1997 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1997 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1997 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób. Dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 370044-16551-2700-1-06 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. $8^{00} - 14^{00}$. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę

krajową	ze zleceniem za granicę
5 XII	20 XI na I kwartał roku następnego,
5 III	20 II na II kwartał,
5 VI	20 V na III kwartał,
5 IX	20 VIII na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym pod warunkiem otrzymania zamówienia lub wpłaty na 30 dni przed terminem realizacji.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-12-71 wewn. dla osób fizycznych 2507, 2508, wewn. dla osób prawnych 2576, a także tel. 620-10-19 i 620-12-17 wewn. 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł 50 gr

Numery archiwalne można nabyć w Redakcji osobiście lub korespondencyjnie.

Pál Erdős (1913–1996)

Tomasz ŁUCZAK

Dnia 20 września 1996 roku w Warszawie zmarł Pál (Paul) Erdős, jedna z najbardziej niezwykłych postaci naszych czasów.

Trudno byłoby znaleźć matematyka, który nie zetknął się z tym mądrym, pełnym spokojnego dystansu do siebie i otaczającego go świata człowiekiem. Od wielu lat nieprzerwanie podróżował, z rzadka tylko pozostając w jednym miejscu dłużej niż dwa tygodnie. Woził ze sobą cały swój dobytek: na wpół pustą walizkę i teczkę z artykułami, nad którymi właśnie pracował. Choć prócz tego nie posiadał niemal niczego, każdy znajdujący się w potrzebie mógł liczyć na jego pomoc. Swoje wynagrodzenie za wykłady wygłoszone w Indiach wysłał wdowie po Srivanasie Ramanujanie (genialnym matematyku samouku), której zresztą nigdy nie spotkał. Gdy w 1984 roku przyznano mu bardzo prestiżową i równocześnie jedną z najbardziej lukratywnych nagród matematycznych, Nagrodę Wolfa, natychmiast ufundował stypendium imienia swojej matki. Znalazł też parę osób, które, jego zdaniem, potrzebowały pieniędzy bardziej niż on i, koniec końców, z otrzymanych pięćdziesięciu tysięcy dolarów zostało mu niewiele ponad siedemset. Nie trzeba dodawać, że nie zmartwił się tym zbytnio. Zajmowanie się rzeczami materialnymi zawsze uważał za stratę czasu.

Jego prawdziwą pasją była matematyka, a w niej rozwiązywanie i stawianie problemów. Jego błyskotliwe i niesłychanie skuteczne podejście do rozpatrywanych zagadnień było wręcz legendarne: często potrafił podać zaskakujące rozstrzygnięcie problemu z niemal zupełnie nie znanej mu dziedziny, korzystając tylko z ogólnikowych objaśnień podanych przy kolacji przez cierpliwego współbiesiadnika. Graniczyło to z magią, i nic dziwnego, że już w latach trzydziestych okrzyknięto Erdősa „czarodziejem z Budapesztu". Jednak ponad wszystko był niezrównanym mistrzem stawiania pytań: niemal zawsze ważnych i głębokich, choć najczęściej sformułowanych w bardzo elementarny sposób. Problemy, którymi się zajmował, pomimo swej różnorodności, składały się w zadziwiający, pełen harmonii obraz. Powiadano nawet, że są one szczególnymi wnioskami z jednej wielkiej matematycznej metateorii znajdującej się w Jego umyśle, z której istnienia nawet On, być może, nie zdaje sobie sprawy.

Swoje przemyślenia traktował podobnie jak dobra materialne: udzielał ich szczodrze innym, zawsze gotowy opowiedzieć o frapujących go pytaniach, wyczerpująco przedstawiając wszystkie udane i nieudane próby ich rozwiązania i opisując uzyskane częściowe wyniki. Za problemy, z którymi szczególnie długo nie mógł się uporać, z właściwym sobie poczuciem humoru wyznaczał nagrody, wynoszące od 5 do 3000 \$. Nic dziwnego zatem, że wiele prac pisał wspólnie z jednym, czasami dwoma lub więcej nie znającymi się wzajemnie autorami, z których każdy wnosił swoją cząstkę do rozwiązywanego zagadnienia. Z czasem owa współpraca osiągnęła takie rozmiary, że zaczęto przypisywać matematykom tzw. liczbę Erdősa: dla współautorów Erdősa wynosiła ona jeden, dla współautorów jego współautorów przyjmowała ona wartość dwa, dla współautorów współautorów jego współautorów trzy itd. W chwili śmierci Pála Erdősa liczba jego współautorów sięgała pięciuset, rzecz nie spotykana w historii matematyki; matematyków o liczbie Erdősa równej dwa jest zapewne około pięciu tysięcy.

Jednym z przejawów stosunku Pála Erdősa do matematyki i matematyków był Jego język, w którym z pełną ciepła ironią opisywał swój świat terminami zaczerpniętymi z matematyki, filozofii i teologii. Dwa pojęcia z tego osobliwego dialektu miały znaczenie szczególne. Pierwszym z nich była „Księga", miejsce, gdzie zgromadzone są najprostsze i zarazem wnikające w samo sedno problemu dowody matematycznych twierdzeń; dowód „prosto z Księgi" oznaczał rozumowanie zbliżone do doskonałości („to prawda, lecz warto by znaleźć dowód prosto z Księgi" martwił się nieraz Erdős zbyt skomplikowanym rozumowaniem nie rzucającym przy tym światła na istotę zagadnienia). Drugim terminem, jakże ważnym w życiu Erdősa, był „epsilon" oznaczający młodego człowieka zainteresowanego matematyką. Kontaktom z epsilonami przypisywał Erdős szczególne znaczenie. Zawsze opiekował się troskliwie młodymi matematykami i uczniami szkół średnich, zachęcając ich do pracy naukowej i, co najważniejsze, zasypując problemami, z którymi mieli szanse się uporać. I na tym polu odniósł pełny sukces: wielu dawnych epsilonów zostało wybitnymi matematykami, a węgierska szkoła kombinatoryczna nie ma sobie równej.

Wydawać by się mogło, że w świecie współczesnej wyspecjalizowanej nauki powinnością wybitnego uczonego jest unikanie zbędnego rozproszenia umysłu i skupienie się na jednym zagadnieniu, zbudowanie, samemu lub wespół z gronem współpracowników, teorii pozwalającej zrozumieć, wyjaśnić czy udowodnić jedno zjawisko, prawidłowość, twierdzenie. Przykłady takiego postępowania można by wymieniać bez końca: wspomnijmy tylko fizyków, usiłujących (jak dotąd bezskutecznie) połączyć w jednej teorii wszystkie znane nam cztery rodzaje oddziaływań, i Andrew Wilesa, którego lata samotnej pracy przyniosły nam dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata. Życie Pála Erdősa pokazuje, że nie jest to droga jedyna. Nigdy nie starał się budować monumentalnych teorii (choć jego prace przyczyniły się do powstania wielu z nich). Pozostawił po sobie ponad 1400 artykułów, więcej niż ktokolwiek przed nim, poświęconych problemom, którymi zajmował się li tylko dlatego, że uważał je za ciekawe i interesujące. Był jednym z tych nielicznych, którzy zawsze przypominali, że i w nauce, i w życiu ważne są nie tylko siła i poprawność rozumowania, ale również jego głębia i piękno.

Konwekcja

Grzegorz DERFEL

Konwekcja cieplna w cieczach i gazach jest zjawiskiem bardzo powszechnym. Występuje w wielu skalach. Na co dzień towarzyszy nam przy podgrzewaniu wody w czajniku, ale także kształtuje klimat na Ziemi, przyczynia się do ruchu kontynentów i odgrywa wielką rolę w procesach zachodzących we wnętrzu gwiazd. Konwekcyjne przemieszczanie masy wywołane jest siłą wyporu wynikłą z różnicy gęstości ciepłych i chłodnych obszarów płynu.

Na istnienie konwekcji zwrócił uwagę Benjamin Rumford w 1797 r. Numeryczne symulacje konwekcji w atmosferze, przeprowadzone przez Edwarda Lorenza w roku 1963, uświadomiły nieprzewidywalność zjawisk opisanych deterministycznymi równaniami. Współczesne zainteresowanie konwekcją wiąże się właśnie z badaniami nad chaosem deterministycznym.

U źródeł konwekcji leży przekazywanie ciepła, a więc proces dysypatywny, czyli proces, w którym energia mechaniczna jest rozpraszana. Jego konsekwencją jest zaburzenie spoczywającej cieczy i samorzutne zorganizowanie się przestrzenne ośrodka. Komórki konwekcyjne, tworzące okresowy wzór, są przykładem tak zwanych struktur dysypatywnych. Rozwój tych struktur, ich komplikowanie się, prowadzi do zachowania chaotycznego – turbulencji. Charakteryzują ją przepływy o wielkiej rozmaitości skal długości i czasu. W zależności od parametrów cieczy i geometrii eksperymentu obserwuje się różne scenariusze przejścia od najprostszych struktur laminarnych do chaosu. Te frapujące zjawiska są spopularyzowane w wielu opracowaniach.

Tu chciałbym skupić się raczej na mechanizmach wiodących do niestabilności niż na ogólnych prawach rządzących jej rozwojem. Poświęcę uwagę konwekcji zachodzącej w małej, laboratoryjnej skali, w której charakterystyczna długość jest rzędu 0,001– 0,01 m. Zacznę od opisu konwekcji w zwykłych płynach, a następnie przedstawię zjawiska występujące w cieczach szczególnego rodzaju, których cechą wyróżniającą jest anizotropia wielu właściwości fizycznych: w nematykach. Jest to jedna z klas licznej grupy związków organicznych zwanych ciekłymi kryształami. (Substancje te znane są już Czytelnikom *Delty.*) Pokażę, jak na przebieg ogólnie pojętych niestabilności o charakterze konwekcyjnym wpływa właściwa ciekłym kryształom anizotropia lepkości i przewodnictwa cieplnego. Należy też podkreślić, że dzięki dwójłomności ciekłych kryształów zjawisko to jest w nich szczególnie dobrze widoczne i efektowne.

Ciecze zwykłe

Warunki powstania konwekcji zależą od kształtu objętości zajmowanej przez ciecz, rozkładu temperatur i przyspieszenia grawitacyjnego. Wszelkie niejednorodności sprzyjają wystąpieniu przepływu.

Rozpatrzmy poziomą warstwę cieczy ogrzewaną od dołu. W ogólnym przypadku temperatura może być funkcją wszystkich trzech współrzędnych. Równowaga mechaniczna jest wtedy niemożliwa. Ciecz cieplejsza – o mniejszej gęstości – wznosi się i po oddaniu ciepła przy górnej, chłodzonej powierzchni, opada. Dostatecznie duże przewodzenie ciepła wzdłuż warstwy utrudnia powstanie konwekcji.

Z najprostszym przypadkiem konwekcji mamy do czynienia w tak zwanym problemie Bénarda, w którym pozioma warstwa cieczy ograniczona jest z góry i z dołu płaszczyznami o ustalonych, wszędzie jednakowych temperaturach T_1 i T_2. Właśnie dla takiego układu Henri Bénard przeprowadził w 1900 roku pierwsze systematyczne doświadczenia demonstrujące powstawanie niestabilności. Ich interpretację teoretyczną dał w fundamentalnej pracy z roku 1916 lord John W.S. Rayleigh, rozpatrując wyidealizowany przypadek warstwy nieskończenie rozległej o grubości d.

W opisie teoretycznym stan cieczy zadany jest przez pola prędkości i temperatury. Wielkości te określone są trzema równaniami: równaniem Naviera–Stokesa, będącym równaniem ruchu cieczy, równaniem ciągłości, wyrażającym zachowanie masy i równaniem przewodnictwa cieplnego. Warunki brzegowe ustalają wartości temperatur oraz nakładają ograniczenia na prędkość przy ścianach naczynia (lub na powierzchni swobodnej, jeśli taka istnieje). W tak zwanym przybliżeniu Boussinesqa zakłada się, że spośród parametrów cieczy jedynie jej gęstość zależy od temperatury.

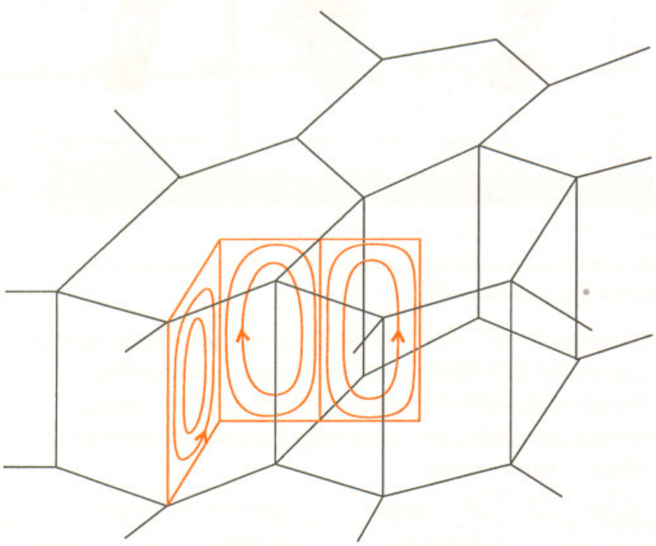
W problemie Bénarda temperatura cieczy zależy tylko od współrzędnej pionowej. Stanowi to warunek konieczny równowagi. Transport ciepła odbywa się wówczas tylko dzięki przewodnictwu. Jednak nawet wtedy, gdy gradient temperatury jest pionowy, równowaga cieczy może zostać zaburzona. Następuje to, gdy małe fluktuacje temperatury, ciśnienia i prędkości cieczy mogą wzrastać nieograniczenie. Warunki po temu pojawiają się, gdy wartość gradientu (lub inaczej różnica temperatur $\Delta T = T_2 - T_1$) przewyższa wielkość krytyczną. Elementy cieczy zostają wtedy wprawione w ruch. Stan cieczy określony jest bezwymiarową liczbą Rayleigha

$$R = \frac{g\alpha\Delta T}{\kappa\nu} d^3 ,$$

gdzie: g – przyspieszenie ziemskie, α – współczynnik rozszerzalności objętościowej cieczy, κ – współczynnik przewodnictwa cieplnego, ν – współczynnik lepkości kinematycznej. Warunkom krytycznym na powstanie niestabilności odpowiada krytyczna wartość liczby Rayleigha R_c. Dla przypadku warstwy ograniczonej sztywnymi powierzchniami obliczenia dają $R_c = 1707$, co pozostaje w dobrej zgodności z wynikiem doświadczalnym 1700 ± 50. Wartość ta wyznacza krytyczną różnicę temperatur

$$\Delta T_c = 1707 \frac{\kappa \nu}{g \alpha d^3}.$$

Rośnie ona silnie przy zmniejszaniu grubości i, na przykład, dla wody przy $d = 1$ mm sięga ponad 100 K. Do zaobserwowania konwekcji konieczne są więc grubsze warstwy, zwłaszcza w przypadku cieczy bardziej lepkich niż woda. Ponieważ żaden kierunek w płaszczyźnie warstwy nie jest uprzywilejowany, przepływ odbywa się w komórkach, których podstawy muszą przybrać kształt wielokątów wypełniających całą warstwę bez luk. W praktyce spotyka się komórki sześciokątne. Rysunek 1 pokazuje charakter przepływu laminarnego w stanie stacjonarnym, gdy krytyczny gradient przekroczony jest nieznacznie. Zaznaczone są linie prądu cieczy w dwóch prostopadłych przekrojach komórki. Dostatecznie duży gradient wywołuje ruch turbulentny, do którego dochodzi po przejściu przez kilka stanów pośrednich.



Rys. 1. Przepływ cieczy izotropowej w sześciokątnych komórkach konwekcyjnych.

Nematyki

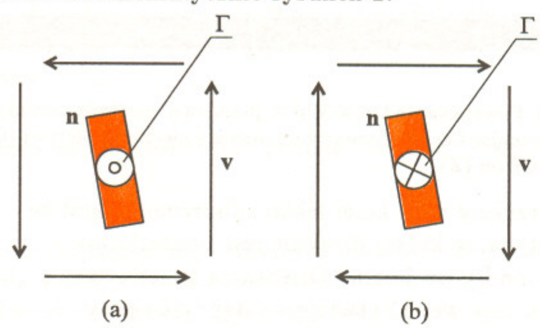
Niestabilności konwekcyjne w ciekłych kryształach nematycznych zostały szczegółowo zbadane na początku lat siedemdziesiątych. Sformułowany został także wtedy ich opis teoretyczny, w pełni zgodny z doświadczeniem. Dzięki anizotropii ciekłych kryształów progowy gradient temperatury jest o trzy rzędy wielkości mniejszy niż w zwykłej cieczy o zbliżonych parametrach. Można więc obserwować konwekcję w próbkach nematyka znacznie cieńszych niż warstwy, w których może pojawić się konwekcyjny przepływ zwykłych cieczy. Anizotropia powoduje, że proces powstawania niestabilności jest także bardziej złożony. Odgrywają w nim rolę trzy czynniki: anizotropia przewodnictwa cieplnego, orientacja direktora i anizotropia lepkości nematyków.

Molekuły ciekłych kryształów są znacznie wydłużone; w typowym przypadku stosunek długości do szerokości molekuły wynosi około 6. Mają one tendencję do równoległego ustawiania się. Opisuje się to tzw. direktorem, tj. wektorem $\mathbf{n}$ o jednostkowej długości skierowanym wzdłuż uśrednionego kierunku długich osi molekuł; wektor ten określony jest z dokładnością do znaku. Uśrednienie przeprowadza się lokalnie, toteż $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ jest w istocie polem wektorowym na ogół zależnym od czasu. *(Red.)*

Przewodnictwo cieplne $\kappa_\parallel$ w kierunku direktora $\mathbf{n}$ jest większe niż przewodnictwa cieplne $\kappa_\perp$ w kierunkach do niego prostopadłych. Anizotropię tego rodzaju mierzy się różnicą $\Delta\kappa = \kappa_\parallel - \kappa_\perp$. Jest ona dodatnia, a stosunek $\kappa_\parallel / \kappa_\perp$ nieznacznie przewyższa jedność i wynosi np. 1,6.

Pierwotna orientacja direktora jest zwykle wymuszona oddziaływaniem ścian na molekuły ciekłego kryształu i rozprzestrzenia się na całą jego objętość.

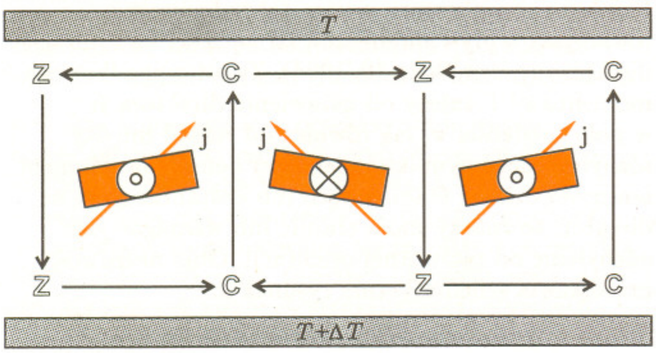
Każdemu przepływowi, a więc także konwekcji, towarzyszy wpływ momentów sił lepkości na orintację direktora (patrz *Delta* 10/1994). Zwrot wypadkowego momentu sił Γ zależy od ustawienia direktora $\mathbf{n}$ w polu prędkości $\mathbf{v}$, jak również od relacji między różnymi współczynnikami lepkości nematyka. Moment ten może działać stabilizująco lub destabilizująco na direktor, to znaczy może tłumić lub wzmagać jego odchylenie od pierwotnej orientacji. Obie możliwości przedstawia schematycznie rysunek 2.



Rys. 2. Moment sił lepkich Γ wzmaga (a) lub tłumi (b) odchylenie direktora od pierwotnej pionowej orientacji. (Direktor $\mathbf{n}$, którego oba zwroty są fizycznie równoważne, przedstawiony jest w postaci zacieniowanego prostokąta.)

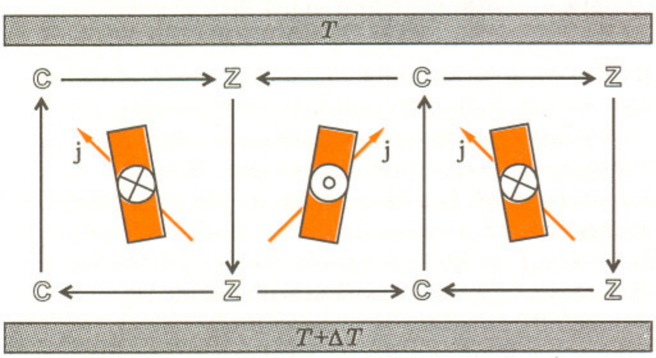
Bardzo ważnym czynnikiem, który – oprócz fluktuacji wymienionych dla przypadku zwykłych cieczy – decyduje o powstaniu niestabilności, stają się fluktuacje uporządkowania direktora. W celu rozpatrzenia ich konsekwencji w sposób jakościowy weźmiemy pod uwagę najprostszy, podstawowy typ fluktuacji, przy którym kąt określający odchylenie direktora od pierwotnej orientacji zmienia się sinusoidalnie wzdłuż pewnego kierunku w warstwie. Zaburzenie takie sprawia, że wektory strumienia ciepła $\mathbf{j}$ nie są równoległe do gradientu temperatury, lecz nachylone w kierunku direktora. Pojawiają się więc składowe wektora strumienia ciepła mające przeciwne zwroty w sąsiadujących ze sobą obszarach. Dają one tak zwany efekt ogniskowania ciepła, w wyniku którego tworzą się rozlokowane na przemian masy cieczy cieplejszej i chłodniejszej. Siła wyporu sprawia, że masy te dążą do góry lub do dołu.

Rozważmy dwie podstawowe orientacje warstwy ciekłokrystalicznej. W pierwszej z nich direktor jest wstępnie ustawiony w jednakowym wszędzie kierunku równolegle do ścian. (Jest to tak zwana orientacja planarna.) Dolna ścianka ma temperaturę o ΔT wyższą od górnej. W stanie równowagi wektor strumienia ciepła jest prostopadły do warstwy. Rysunek 3 przedstawia sytuację panującą w warstwie o lekko zaburzonym rozkładzie direktora. Kierunek direktora zmienia się sinusoidalnie. Można w niej znaleźć obszary, w których direktor będzie w takich samych warunkach, jak pokazane na rysunku 2a. Tutaj oznacza to, że zaburzenie będzie się wzmacniać, co doprowadzi do konwekcji.



Rys. 3. Powstawanie konwekcji w planarnej warstwie nematyka ogrzewanej od dołu. Zaznaczono obszary cieczy cieplejszej (C) i zimniejszej (Z).

Przyjrzyjmy się z kolei lekko zaburzonej warstwie nematyka, w której direktor jest początkowo prostopadły do ścian. (Orientacja ta nosi nazwę homeotropowej.) Sytuację występującą przy ogrzewaniu od dołu przedstawia rysunek 4.

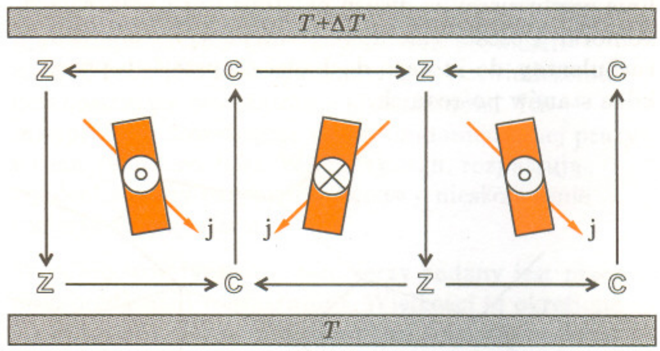


Rys. 4. Tłumienie konwekcji w homeotropowej warstwie nematyka ogrzewanej od dołu.

Direktor jest tu pod działaniem takich momentów sił lepkości, jak na rysunku 2b. Oznacza to, że nawet gdyby wystąpił konwekcyjny przepływ (dzięki ogniskowaniu ciepła wynikłemu z fluktuacji direktora), to stłumi on przyczynę, dzięki której powstał.

Przy ogrzewaniu od dołu wystąpienie konwekcji jest możliwe tylko w bardzo grubych warstwach homeotropowych. Wówczas wpływ anizotropii może być pokonany zastosowaniem dostatecznie dużego gradientu temperatury dzięki efektowi właściwemu dla cieczy zwykłych.

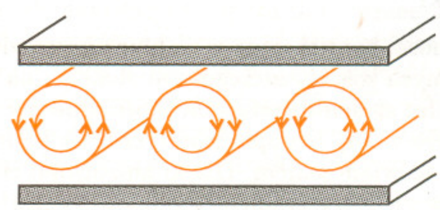
Inaczej jednak rozwinie się zjawisko, gdy homeotropowa warstwa nematyka będzie ogrzewana od góry (rys. 5). Wówczas działanie momentów sił lepkich będzie destabilizujące. Mamy tu więc do czynienia z konwekcją, ale „do góry nogami". Zwykła ciecz byłaby w takiej sytuacji, oczywiście, w stanie równowagi trwałej.



Rys. 5. Powstawanie konwekcji w homeotropowej warstwie nematyka ogrzewanej od góry.

Ogrzewanie od góry w orientacji planarnej nie sprzyja wzrostowi fluktuacji i nie prowadzi do konwekcji. Wymienione cztery możliwości wzajemnej relacji zwrotu gradientu temperatury i orientacji direktora zebrane są w tabelce.

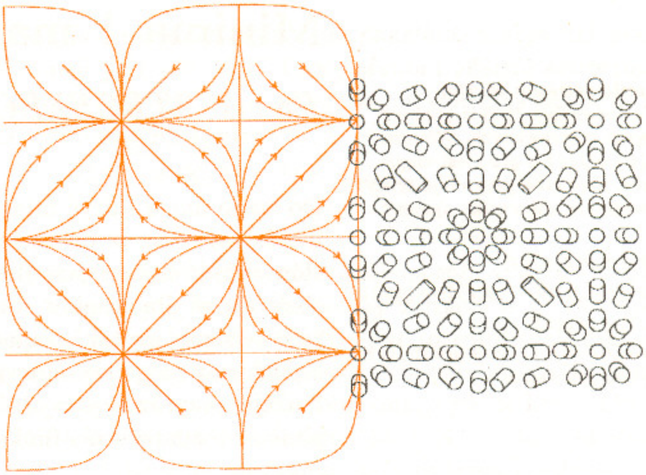
anizotropia	orientacja	ogrzewanie	wynik
$\Delta\kappa > 0$	planarna	od dołu	konwekcja
$\Delta\kappa > 0$	homeotropowa	od góry	konwekcja
$\Delta\kappa > 0$	planarna	od góry	stabilizacja
$\Delta\kappa > 0$	homeotropowa	od dołu	stabilizacja



Rys. 6. Rolki konwekcyjne w planarnej warstwie nematyka.

Przepływ rodzi się zwykle jako para komórek konwekcyjnych w pobliżu jakiegoś defektu struktury. Rozwój konwekcji jest bardzo powolny: trwa kilkadziesiąt minut. W warstwie planarnej dobrze rozwinięta konwekcja ma postać równoległych rolek krążącej cieczy. Ich osie są prostopadłe do początkowego kierunku direktora (rys. 6).

Struktura ta widoczna jest w postaci jaśniejszych i ciemniejszych równoległych prążków. W warstwie homeotropowej wszystkie kierunki poziome są równouprawnione. Należy więc spodziewać się wielokątnych komórek konwekcyjnych. W doświadczeniach obserwuje się komórki kwadratowe jako wynik superpozycji skrzyżowanych rolek. Przepływ, jaki odbywa się w nich, przedstawiony jest na rysunku 7. Natomiast gdy przeważa izotropowy mechanizm utraty stabilności (na przykład przy dużym ΔT), obserwuje się heksagonalną sieć komórek konwekcyjnych.



Rys. 7. Kwadratowa sieć komórek konwekcyjnych. Przedstawiono, widzianą z góry, sytuację w płaszczyźnie odległej o 1/4 grubości od dolnej płyty. Po lewej – rzut linii prądu cieczy na płaszczyznę warstwy, po prawej – orientacja direktora.

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

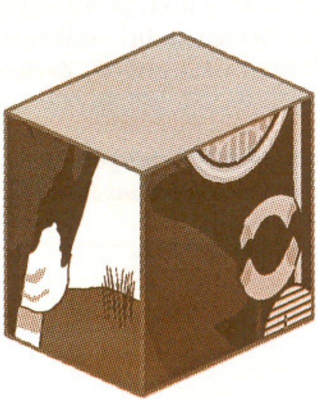
M 798. Funkcje ciągłe $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ spełniają równanie $f(g(x)) = g(f(x))$ dla wszystkich x. Udowodnić, że jeśli równanie $f(f(x)) = g(g(x))$ ma rozwiązanie, to także równanie $f(x) = g(x)$ ma rozwiązanie.
Rozwiązanie na str. 6

M 799. Wykazać, że w poprzednim zadaniu nie można pominąć założenia ciągłości funkcji f i g.
Rozwiązanie na str. 16

M 800. Właściciel dużego sklepu składającego się z dziesięciu sektorów chce w nim umieścić 8 ukrytych kamer. Każda z nich pozwala z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ zarejestrować dokonywaną w jej sektorze kradzież, przy czym kamery działają niezależnie (w sektorze, w którym działa n kamer, kradzież pozostanie nie zarejestrowana z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2^n}$). Jakie rozmieszczenie kamer będzie najskuteczniejsze przy założeniu, że we wszystkich sektorach sklepu częstotliwość i dotkliwość kradzieży jest taka sama?
Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Krzysztof REJMER

F 445. Znaleźć tempo wydłużania się roku na skutek wypromieniowywania energii przez Słońce. Aktualna masa Słońca wynosi $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg, aktualna długość roku $T = 3{,}16 \cdot 10^7$ s. Moc wypromieniowywana obecnie przez Słońce ma wartość $P = 3{,}904 \cdot 10^{26}$ W. Zakładamy, że orbita Ziemi nie ulega zmianie.
Rozwiązanie na str. 16



F 446. Zgodnie z zasadą Fermata promień świetlny przechodzący przez dwa punkty A i B porusza się po trajektorii, wzdłuż której jego droga optyczna jest ekstremalna bądź stacjonarna. Rozważmy promienie ulegające odbiciu od zwierciadła sferycznego wklęsłego o promieniu R. Niech A leży na osi optycznej zwierciadła w kształcie półsfery w odległości l od jej środka, a B znajduje się w środku sfery, z której wycięto zwierciadło. Znaleźć takie wartości l, dla których droga optyczna promienia spełniającego zasadę Fermata, jest:
a) minimalna,
b) maksymalna,
c) stacjonarna.
Rozwiązanie na str. 14

Minima i maksima z innej strony

Paweł STRZELECKI

Rozwiązanie zadania M 798.
Załóżmy, że równanie $f(x) = g(x)$ nie ma rozwiązań rzeczywistych. Wówczas funkcja $h(x) = f(x) - g(x)$ jest ciągła i nie ma zer, więc albo przyjmuje tylko wartości dodatnie, albo tylko ujemne. Zatem

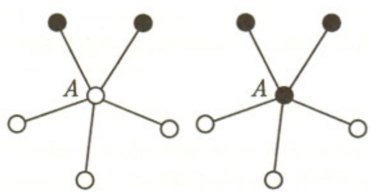
$$0 \neq h(f(x)) + h(g(x)) = \\ = f(f(x)) - g(f(x)) + f(g(x)) - g(g(x)) = \\ = f(f(x)) - g(g(x)),$$

więc i równanie $f(f(x)) = g(g(x))$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Do czego mogą służyć minima i maksima? Większość polskich maturzystów uważa zapewne, że do gnębienia uczniów za pomocą zadań zaczynających się od słów *znajdź najmniejszą (największą) wartość...*. Przykładów dostarczy dowolny zbiór zadań dla uczniów starszych klas liceum. Każdy maturzysta doda też, że rozwiązuje się takie zadania niemal mechanicznie, bez głębszego namysłu, a problemy mogą się pojawić tylko w rachunkach. Ot, bierze się odpowiednią funkcję, przyrównuje się do zera jej pochodną, sprawdza, że w znalezionym punkcie rozpatrywana funkcja rzeczywiście ma maksimum czy minimum, i po zabawie.

Przykłady nieoczekiwanego i skutecznego wykorzystania metody wariacyjnej można znaleźć np. w rozwiązaniu zadania **M 790** w *Delcie* 11/1996, albo w *Kąciku olimpijskim* z *Delty* 8/1996.

Stali Czytelnicy *Delty*, w szczególności miłośnicy *Kącika olimpijskiego*, wiedzą jednak, że minima i maksima mogą się zupełnie nieoczekiwanie przydać do rozwiązania również takich zadań i problemów, w których – ani na pierwszy, ani nawet na drugi rzut oka – nie chodzi wcale o znajdowanie minimów czy maksimów. Matematyka (i ta szkolna, i ta bardzo poważna) nie polega bowiem wcale na tym, by znać tysiące definicji i twierdzeń; wystarczy zamiast tego nauczyć się kilku (no, może kilkunastu) stosunkowo ogólnych i prostych metod, a następnie przyzwyczaić się do ich stosowania w najrozmaitszych sytuacjach. Jedną z takich uniwersalnych metod jest właśnie metoda wariacyjna; polega ona, mówiąc niezbyt ściśle, na znajdowaniu minimów lub maksimów odpowiednio dobranych funkcji. Zademonstrujemy niżej dwa – być może Czytelnikom do tej pory nie znane – ładne zastosowania tej metody.



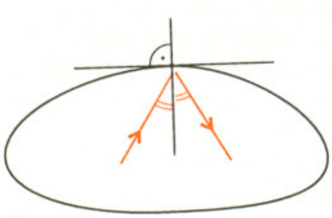
Rys. 1. Gdy przemalujemy wierzchołek A na kolor czarny, to wzrośnie liczba par różnokolorowych sąsiadów.

Oto przykład pierwszy. Zapytajmy, czy można tak pomalować wierzchołki dowolnego skończonego grafu kolorem czarnym i białym tak, by każdy wierzchołek miał wśród swoich sąsiadów przynajmniej połowę innego koloru niż on sam? Odpowiedź jest (o dziwo) twierdząca; ten fakt żartownisie nazywają twierdzeniem o unikaniu segregacji rasowej. Metoda wariacyjna pozwala podać uzasadnienie w pięciu słowach: trzeba *zmaksymalizować liczbę par różnokolorowych sąsiadów*. Dla leniwych wyłóżmy całą kawę na ławę: gdy graf ma n wierzchołków, to różnych jego czarno-białych pomalowań jest 2^n. Wśród nich istnieje oczywiście takie, że liczba par sąsiednich wierzchołków grafu pomalowanych różnymi kolorami jest największa z możliwych. Gdyby dla takiego pomalowania np. pewien biały wierzchołek grafu miał ponad połowę sąsiadów białych, to przemalowując ten wierzchołek na czarno zwiększylibyśmy liczbę par różnokolorowych sąsiadów (patrz rys. 1).

Mówimy, że zbiór D jest wypukły, jeśli dla wszystkich punktów $P, Q \in D$ odcinek PQ jest zawarty w D. Gładkość brzegu znaczy dla naszych potrzeb tyle: dla dowolnego punktu $A \in \partial D$ istnieje takie koło otwarte K o środku w A, że fragment ∂D zawarty w K jest (z dokładnością do izometrii) wykresem pewnej różniczkowalnej w sposób ciągły funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Drugi przykład będzie nieco poważniejszy. Podamy szkic dowodu twierdzenia Birkhoffa o bilardach. Rolę stołu bilardowego odegra wypukły podzbiór D płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ z gładkim brzegiem ∂D. Bila to po prostu punkt, poruszający się po stole po linii prostej aż do momentu dojścia do brzegu stołu – wówczas odbija się tak, by kąt padania był równy kątowi odbicia (patrz rys. 2). Zachodzi wówczas następujące ogólne i przepiękne

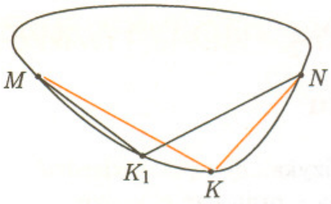
Twierdzenie (Birkhoff). *Dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ istnieje w D zamknięta trajektoria bilardowa złożona z dokładnie n różnych odcinków o końcach należących do brzegu ∂D obszaru D.*



Rys. 2.

Innymi słowy, dla każdego n można położyć bilę w pewnym punkcie stołu i uderzyć tak, by dokładnie po n odbiciach od brzegu stołu wróciła (z przeciwnego kierunku) do punktu wyjścia.

Do dowodu potrzebny będzie prosty

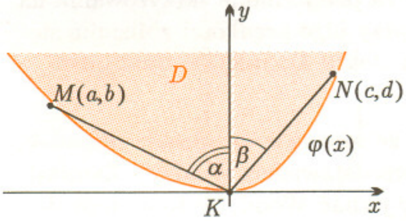


Rys. 3

Lemat. *Niech M i N będą (różnymi) ustalonymi punktami brzegu ∂D obszaru D i niech K leży na ∂D między M i N. Jeśli kąty padania i odbicia utworzone w punkcie K przez odcinki MK i KN nie są równe, to wówczas blisko K istnieje na brzegu obszaru D taki punkt K_1* (patrz rys. 3), *że*

$$MK_1 + K_1N > MK + KN\,.$$

Odłóżmy na chwilę dowód lematu i pokażmy, w jaki sposób wynika z niego twierdzenie Birkhoffa. Rozpatrzmy wszystkie n-kąty wpisane w D. Istnieje wśród nich taki, który ma największy obwód. Nie jest to wprawdzie fakt całkowicie oczywisty, ale zdoła go uzasadnić każdy, kto słyszał przynajmniej raz w życiu, że funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy. Ów n-kąt o najdłuższym z możliwych obwodzie – nazwijmy go $A_1A_2\ldots A_n$ – to właśnie poszukiwana trajektoria bili. Istotnie, gdyby np. kąty padania i odbicia utworzone w punkcie A_1 przez odcinki A_nA_1 i A_1A_2 były różne, to zgodnie z lematem można by punkt A_1 tak nieco przesunąć po brzegu ∂D obszaru D, by wzrosła suma długości odcinków A_nA_1 i A_1A_2. Wówczas wzrośnie jednak także obwód wielokąta $A_1A_2\ldots A_n$, a to jest sprzeczność.



Rys. 4

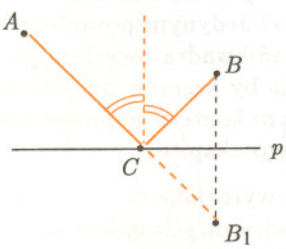
Pozostaje zatem udowodnić lemat. Dokonajmy najpierw niezbędnych przygotowań technicznych. Wprowadźmy w tym celu układ współrzędnych na płaszczyźnie tak, by $K=(0,0)$, $M=(a,b)$, $N=(c,d)$. Załóżmy też, bez zmniejszenia ogólności, że oś OX pokrywa się ze styczną do ∂D w punkcie K. Następnie sparametryzujmy brzeg obszaru D w otoczeniu punktu K. Weźmy w tym celu niewielką liczbę dodatnią ε i przyjmijmy, że $\varphi : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbf{R}_+$, $\varphi(0)=0$, jest funkcją gładką, której wykres zawiera się w brzegu obszaru D. To już koniec przygotowań. Przechodzimy do rzeczy i definiujemy funkcję (patrz rys. 4)

$$S(x) := \sqrt{(-a+x)^2 + (b-\varphi(x))^2} + \sqrt{(c-x)^2+(d-\varphi(x))^2}\,.$$

Jak widać, $S(x)$ jest po prostu sumą odległości punktów M i N od punktu $(x,\varphi(x))$ leżącego na ∂D. Okazuje się, że pochodna $S'(0)$ jest równa różnicy sinusów kątów padania i odbicia. Rachunek jest prosty, trzeba tylko pamiętać, że $\varphi'(0)=0$, bowiem styczna w punkcie K do wykresu φ, czyli do brzegu obszaru D, to oś OX. Oto szczegóły:

$$S'(0) = \frac{-a-b\varphi'(0)}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{-c-d\varphi'(0)}{\sqrt{c^2+d^2}} =$$
$$= -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} = \sin\alpha - \sin\beta\,.$$

Ponieważ kąty padania α i odbicia β nie są równe, więc $S'(0)\neq 0$. Zatem, w małym otoczeniu zera istnieją wartości x, dla których mamy $S(x) > S(0)$. Na przykład, w sytuacji przedstawionej na rysunku nierówność ostra $S(x) > S(0)$ zachodzi dla wszystkich odpowiednio małych dodatnich wartości x. Tym samym dowód lematu jest zakończony. (Kto zauważył, gdzie skorzystaliśmy z wypukłości D?)



Rys. 5

Tym, którzy cierpliwie dobrnęli niemal do końca artykułu, przypomniało się, być może, szkolne zadanie z geometrii: na prostej p wskazać taki punkt C, by suma jego odległości od dwóch zadanych, leżących po jednej stronie p punktów A i B była najmniejsza z możliwych (patrz rys. 5). Wiadomo dobrze, że C należy wybrać tak, by kąty padania i odbicia utworzone przez odcinki AC i CB były równe. Fizyk powiedziałby może, że to przykład stosowania metody wariacyjnej w optyce, i że można też metodą wariacyjną udowodnić prawo załamania światła (patrz *Delta* 9/1995, a także zadanie **F 446**).

Metody wariacyjne można napotkać, gdy się studiuje najrozmaitsze obiekty matematyczne. Opisywanie wszystkich po kolei i z osobna przypominałoby opisywanie po kolei pojedynczych drzew w lesie, nie będziemy więc tego robić.

Bariera dźwięku i bariera rozsądku

Każdy wie – bez zdobywania jakiej bądź wiedzy fizykalnej – jak stwierdzić „nausznie", że jakiś pojazd – powiedzmy, za ścianą – mija nas w pędzie. Oczywiście, jeśli pojazd ten nie porusza się bezgłośnie. Stosowne *wźźź*... dzieci umieją wydawać z siebie, jeszcze zanim zaczną mówić.

Dowodzi to niezbicie (żeby zażartować z Kanta), iż człowiek przynosi ze sobą na świat znajomość *efektu Dopplera*. Wie mianowicie, że zbliżające się do nas źródło dźwięku (czy innych fal) odbieramy tak, jakby ten dźwięk (ta fala) miał częstotliwość większą niż ma w istocie, jakby był wyższy. A oddalające się źródło dźwięku (fal) robi wrażenie, iż jego częstotliwość jest mniejsza.

Potem dowiadujemy się jedynie, że to, co znaliśmy od zawsze, ma właśnie nazwę efektu Dopplera. No, może nie jedynie – dowiedzieć się możemy tego, co w poprzednim akapicie było w nawiasie: że efekt Dopplera ma miejsce przy obserwowaniu każdych fal. Co więcej, okazuje się, że obserwacja odległych galaktyk wykazuje przesunięcie barwy ich światła ku czerwieni, co świadczy o tym, iż Wszechświat się rozszerza. Przy okazji możemy zapamiętać, że barwa czerwona odpowiada niższym częstotliwościom niż inne.

Np. niż zielona. I tu anegdotka znana dzisiejszemu pokoleniu dziadków z książki Jakuba Perelmana *Zajmująca fizyka*. Otóż Perelman twierdzi, że jakoby Robert Wood (wybitny optyk), gdy został zatrzymany za przejechanie skrzyżowania na czerwonym świetle, przekonywał policjanta, iż przy jego prędkości zbliżania się do świateł barwa czerwona – właśnie na skutek efektu Dopplera – była przez niego obserwowana jako zielona.

Nie należy, rzecz jasna, naśladować go (bo raz, że można spowodować wypadek, a dwa, że można otrzymać mandat za obrazę przedstawiciela władzy). Zamiast tego warto obliczyć, z jaką prędkością musiałby jechać Wood, by to co mówił, pokrywało się z prawdą – powinno wyjść około 135 mln km/godz. Gdyby więc jechał ulicą z taką prędkością i tak należałby się mu mandat.

Dla zwolenników nowszej fizyki inne zadanie: równanie Schrödingera dotyczy fal prawdopodobieństwa – jak dla takich fal przejawia się efekt Dopplera?

Orientacyjne częstotliwości
($1\text{Hz}=\text{s}^{-1}$)

precesja punktu równonocy	1 pHz
pory roku	32 nHz
fazy Księżyca	392 nHz
pory dnia	12 μHz
okrążenie biegu na 10 km	15 mHz
ruch sekundnika ściennego zegara elektronicznego	1 Hz
puls	1,2Hz
granica słyszalności basów	16 Hz
klatki taśmy filmowej	24 Hz
prąd zmienny w Europie	50 Hz
podstawowy dźwięk *a*	440 Hz
granica słyszalności wiolinów	20 kHz
fala nośna telefonii	100 kHz
fale radiowe	30 kHz – 6 GHz
długie	200 kHz
krótkie	1 MHz
UKF dolny	70 MHz
UKF górny	100 MHz
UHF	1 GHz
łącza satelitarne	10 GHz
radar	1 THz
zegar atomowy Cs-133	108 THz
podczerwień	300 THz
światło widzialne	400 – 750 THz
czerwone	450 THz
żółte	550 THz
zielone	650 THz
niebieskie	700 THz
nadfiolet	1 PHz
promieniowanie rentgenowskie	1 EHz
promieniowanie gamma	ponad 100 EHz

Nasza rodzima delta

Jak wiadomo, *delta równa się be kwadrat mniej cztery ace*. Nie wiadomo tylko, po co to wiadomo?

Przede wszystkim warto zdać sobie sprawę z tego, iż delta (zwana naukowo wyróżnikiem) nie jest potrzebna do rozwiązywania równań kwadratowych. w większości krajów świata równanie kwadratowe rozwiązuje się bez jej użycia. Np. aby rozwiązać równanie

$$x^2 - 5x + 6 = 0\,,$$

dodajemy i odejmujemy od jego lewej strony kwadrat połowy współczynnika przy x, czyli piszemy

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6 = 0$$

i grupujemy początkowe trzy wyrazy

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0\,.$$

Teraz stosujemy znany wzór na różnicę kwadratów (gdyby zamiast różnicy kwadratów wyszła nam suma, to stwierdzilibyśmy, że rozwiązań nie ma) i równanie mamy już przedstawione jako iloczyn dwóch wyrażeń stopnia pierwszego:

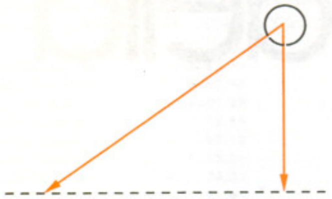
$$\left(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0\,,$$

skąd bezpośrednio można wypisać pierwiastki: 3 i 2 (czego i tak się domyślaliśmy – chodziło jednak o przykład).

Oczywiście, gdybyśmy rozwiązywali równanie posługując się współczynnikami literowymi, delta by się tam pojawiła. Ale przecież procedura znajdowania pierwiastków obywa się bez niej swobodnie. Po cóż więc ona? Jedynym powodem jest to, by rozwiązywanie równań kwadratowych miało swoją teorię, z której można by uczniów odpytywać. A fe! W takim to paskudnym kontekście pojawia się recytacja zdania z pierwszego akapitu.

Ciekawe, że przy używaniu wyróżnika do rozwiązywania równań kwadratowych upiera się jedynie Europa Środkowa i Wschodnia (Niemcy, Rosja i to, co pomiędzy). Nie ma jednak nadziei, byśmy zdołali przekonać do tego innych (i całe szczęście).

Równia bez sinusów



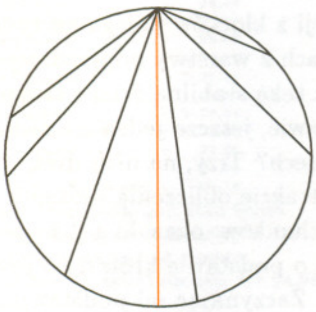
Rys. 1

Pionowy spadek swobodny trwa krócej niż ukośny spadek swobodny z tej samej wysokości. Pojęcie pionowego spadku swobodnego jest dobrze znane – wiadomo też, że niczego takiego wokół nas nie ma, bo zawsze w spadku coś przeszkadza, w skrajnym przypadku choćby opór powietrza. Swoboda ma oznaczać brak oporów.

Ukośny spadek swobodny ma tę własność co biegun wschodni i zachodni – dorośli niechętnie o nim mówią. Różni się od nich jednak tym, że istnieje. Spadek bez oporów po torze ukośnym to przecież równia pochyła.

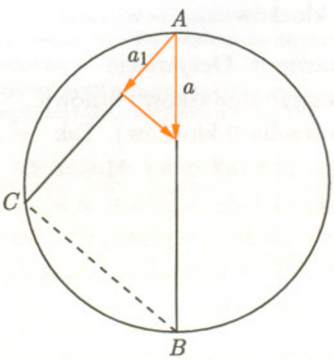
Nawet jednak w naszym świecie z oporami można łatwo stwierdzić, że pionowy spadek swobodny trwa krócej niż ukośny spadek swobodny z tej samej wysokości. Ale

jak znaleźć taką wysokość ukośnego spadku swobodnego, by trwał on tyle samo czasu, co pionowy spadek swobodny z danej wysokości?



Rys. 2

Odpowiedź jest prosta. Należy narysować okrąg, dla którego dana wysokość pionowego spadku swobodnego będzie średnicą. Wówczas ukośny spadek swobodny po dowolnej cięciwie tego okręgu, wychodzącej z górnego końca tej średnicy (rys. 2), będzie trwał tyle samo czasu, co pionowy.



Rys. 3

Uzasadnienie jest bardzo proste. Przyspieszenie a spadku pionowego w przypadku spadku ukośnego będzie wykorzystywane nie w całej pełni – jego część prostopadła do toru nie będzie ani przyspieszała, ani opóźniała ruchu, nie będzie miała znaczenia. Pozostałą część, tę, która będzie powodować spadek ukośny, oznaczmy przez a_1. Odpowiednio czas spadku po AB oznaczmy przez t, a czas spadku po AC przez t_1. Ponieważ oba spadki są swobodne, więc

$$AB = \frac{a \cdot t^2}{2}, \qquad AC = \frac{a_1 \cdot t_1^2}{2}.$$

Teraz potrzebna jest znajomość odrobiny geometrii. Ponieważ AB jest średnicą okręgu, na którym leży C, więc kąt ACB jest prosty i trójkąt zbudowany z wektorów okazuje się podobny do trójkąta ABC. Skoro tak, to

$$\frac{a_1}{a} = \frac{AC}{AB} = \frac{a_1 \cdot t_1^2}{a \cdot t^2},$$

co po skróceniu daje

$$1 = \frac{t_1^2}{t^2}, \qquad \text{czyli} \qquad t_1 = t,$$

bo zarówno t_1, jak t to liczby dodatnie.

Oczywiście, jak ktoś zna sinusy, kosinusy itp., to może zauważyć, że

$$a_1 = a \cdot \cos \angle BAC.$$

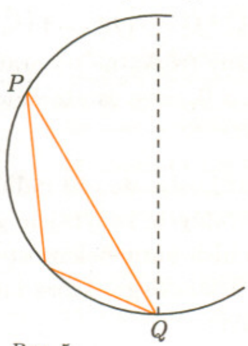
Pożytek z tego taki, że można różne zadania dotyczące równi pochyłej rozwiązywać bez rysowania takiego, jak wyżej, okręgu.

Ale to jest równocześnie i strata: nie można spożytkować do rozwiązywania zadań o równi swojej wyobraźni geometrycznej. A przecież wielu z nas ją ma (często nawet nie wiedząc o tym).

Uzyskane spostrzeżenie można też zastosować do rozwiązania zadania odwrotnego: na pytanie, *jak długo będzie trwał ruch po równi pochyłej*, każdy już bez trudu narysuje odpowiednią drogę trwającego tyle samo czasu pionowego spadku swobodnego.

Dla sprawdzenia, czy ci, którym próbowalibyśmy objaśnić to, co napisane wyżej, cokolwiek zrozumieli, możemy polecić im, aby uzasadnili, że swobodny spadek po każdym z torów przedstawionych na rysunku 4 trwa tyle samo czasu, albo dać zagadkę: *czy swobodny spadek z P do Q* (rys. 5) *po torze prostoliniowym trwa dłużej niż po torze łamanym*?

Rys. 4



Rys. 5

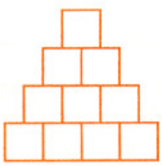
Jest interesujące, że tak, jak to zostało wyżej opisane, wyglądało pierwsze pojawienie się równi pochyłej. Tak mianowicie opisał jej własności Galileusz. Równia pochyła służyła mu do tego, by uzyskać powolny spadek swobodny. Zwykły, pionowy spadek swobodny odbywa się bowiem tak szybko, że przy ówczesnych możliwościach technicznych praktycznie mierzyć się nie dawał. Uzyskanie takich wyników kazało następnie szukać możliwości zrealizowania prawdziwej równi pochyłej, czyli ukośnego spadku swobodnego. Kulka na desce, jak wiadomo, jest takiego spadku (szczególnie przy bardzo małych kątach) dość lichym przybliżeniem – występują bowiem niezaniedbywalne opory tarcia, a i stopień gładkości realnej równi się liczy. I tu Galileusz posłużył się bardzo długim wahadłem, ale to już zupełnie inna historia.

mała delta

Liczby trójkątne

Rys. 1

Podstawowa zasada budowania stabilnej konstrukcji z klocków polega na tym, by klocek z kolejnej warstwy leżał na dwóch klockach z warstwy poprzedniej (jak na rys. 1). Ile klocków potrzeba, by zbudować taką stabilną ścianę stojącą na dwóch klockach? Niewiele. Dwa klocki w podstawie, jeszcze jeden na nich i to wszystko. Razem trzy. A jeśli zaczniemy od trzech? Trzy, na nich dwa, a na nich jeszcze jeden, razem sześć. Widać, że w trakcie obliczenia możemy wykorzystać znany nam już wynik poprzednich rachunków: okazało się, że po ułożeniu podstawy mamy na niej postawić ściankę o podstawie krótszej o jeden klocek. Nietrudno zauważyć, że tak będzie zawsze. Zaczynając od podstawy z n klocków, w następnej warstwie musimy ułożyć ich $n-1$. Wiedząc, ile klocków potrzeba dla $(n-1)$-klockowej podstawy, łatwo możemy obliczyć liczbę klocków potrzebnych dla ścianki o podstawie złożonej z n klocków.



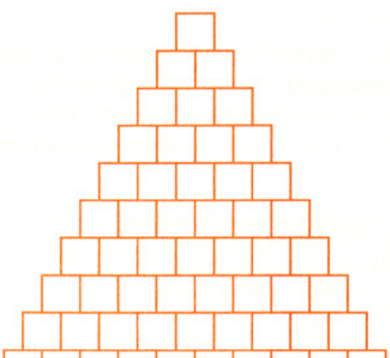
Rys. 2

Oznaczmy przez t_n ową liczbę dla ścianki o podstawie n. Oczywiście $t_1 = 1$, a $t_n = t_{n-1} + n$ dla $n > 1$ (możemy się jeszcze dodatkowo umówić, że $t_0 = 0$, bo przecież do ścianki o podstawie 0 potrzeba 0 klocków). Tak więc $t_2 = 1 + 2 = 3$, $t_3 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (rys. 2) i tak dalej. Można się domyślać, że t_n jest zawsze sumą liczb naturalnych od 1 do n (dla $n > 0$) – i rzeczywiście tak jest. Czytelnik znający indukcję może ją wykorzystać do wykazania, że dla każdej liczby naturalnej n, $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (podobno ten wzór wymyślił młody Gauss, gdy nudził się na lekcji matematyki).

Pobawmy się chwilę takimi liczbami, zwanymi *liczbami trójkątnymi* ze względu na kształt ścianki z klocków. Oczywiście, nie każda liczba naturalna jest trójkątna (np. 4 i 5 nie są), ale czy można każdą liczbę naturalną wyrazić za ich pomocą? Też pytanie: przecież widać, że $n + 1 = t_{n+1} - t_n$ (i oczywiście, $0 = t_0$). Różnica dwóch sąsiednich liczb trójkątnych jest więc wyjątkowo prosta. Z sumą może być gorzej, ale spróbujmy. Wiemy już, że $t_{n+1} + t_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$. Liczymy szybko (np. wyciągając $\frac{n+1}{2}$ przed nawias) i okazuje się, że $t_{n+1} + t_n$ to po prostu $(n+1)^2$. Układa nam się całkiem niezła arytmetyka liczb trójkątnych, więc idźmy dalej. Z naszych rachunków wynika natychmiast, że $(n+1)^3$ to po prostu $(t_{n+1} + t_n) \cdot (t_{n+1} - t_n)$, czyli $t_{n+1}^2 - t_n^2$. Bardzo sympatycznie. Czy można to wykorzystać w „normalnej" matematyce? Można. Wiemy już, czemu równa się suma kolejnych liczb naturalnych od 1 do n. A czemu równa się suma ich trzecich potęg? Zaprzęgnijmy do pracy nasze specjalne liczby:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(t_1^2-t_0^2)+(t_2^2-t_1^2)+\ldots+(t_{n-1}^2-t_{n-2}^2)+(t_n^2-t_{n-1}^2).$$

Widać, że prawie wszystkie liczby trójkątne po prawej stronie zredukują się i zostanie tylko $t_n^2 - t_0^2$. Ale $t_0^2 = 0$, więc ostatecznie nasza suma jest równa t_n^2, czyli $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.



Rys. 3

Gdyby ktoś Wam zaproponował kiedyś dowód indukcyjny wzoru na sumę sześcianów kolejnych liczb naturalnych, zapytajcie go, czy zna liczby trójkątne. A jeśli chcecie dowiedzieć się o nich paru ciekawostek, zajrzyjcie do książki *Śladami Pitagorasa* Szczepana Jeleńskiego, która już wiele pokoleń młodych ludzi wprowadziła do matematyki.

Odpowiedz bez liczenia Czytelniku: czy liczba trójkątna jest wyższa czy szersza?

Małą Deltę przygotował Wiktor BARTOL

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1996 upłynął 31 stycznia 1997). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. **4**), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44 M** lub **Klubu 44 F**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44 M** (lub **Klubu 44 F**) daje tytuł **Weterana Klubu 44 M** (**Klubu 44 F**).

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 323 (WT=1,44) i 324 (WT=2,50) z numeru 6/1996

Lesław Skrzypek	– 3-42,39
Tomasz Wietecha	– 2-42,33
Adam Czornik	– 2-41,29
Piotr Żmijewski	– 39,15
Krzysztof Zapisek	– 39,12
Tadeusz Józefczyk	– 2-38,10
Bartłomiej Dyda	– 36,33
Tomasz Kulpa	– 1-34,45
Jarosław Łazuka	– 33,94
Zbigniew Galias	– 1-32,14
Konrad Patkowski	– 29,18
Andrzej Dudek	– 26,04
Jerzy Witkowski	– 1-25,64
Wojciech Maciak	– 25,46
Jan Ciach	– 5-24,98
Janusz Olszewski	– 3-24,18
Witold Bednorz	– 24,13
Kazimierz Serbin	– 3-23,34
Bogumiła Piotrowska	– 22,34
Michał Lewandowski	– 21,69
Marcin Sawicki	– 21,20
Mieczysław Jędrzejowski	– 21,10

Legenda (przykładowo): stan konta 5-24,98 oznacza, że uczestnik już pięciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (szóstej) rundzie ma 24,98 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 1994, 1995 lub 1996.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście, jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik, M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, J. Ciach (5), M. Prauza, P. Kumor, P. Gadziński (5), K. Jedziniak, J. Olszewski, L. Skrzypek, H. Kornacki (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

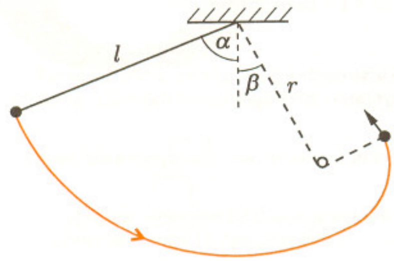
Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk figurujących na liście powyżej):
„dwukrotni": Z. Bartold, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro, S. Solecki, G. Zakrzewski;
„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Kasperski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, P. Kubit, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, J. Mańdziuk, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, W. Olszewski, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, J. Siwy, A. Smolczyk, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, K. Trautman, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski.

Zadania z fizyki nr 233, 234

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1997

233. Jeden koniec nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l jest unieruchomiony, a do drugiego przymocowano punktowe ciało, odchylono od pionu o kąt $\alpha < 90°$ i puszczono. W odległości r od punktu zawieszenia, pod kątem β do pionu (rys. 1) znajduje się sztywna i cienka poprzeczka, tak że gdy nić się o nią oparła, ciało poruszało się dalej na nici skróconej. Jaki warunek muszą spełniać wymienione parametry, aby po wzniesieniu się do góry ciało spadając uderzyło w poprzeczkę?



Rys. 1

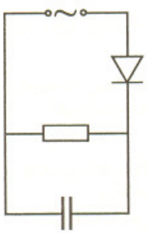
234. a) Do jednego końca metalowego pręta przyczepiono kuleczkę wosku, a drugi koniec umieszczono w płomieniu palnika. Kuleczka spadła po czasie t. Po jakim czasie spadłaby ta kuleczka, gdyby pręt był dwukrotnie dłuższy?
b) Kuleczkę wosku przyczepiono w wierzchołku metalowego wycinka kuli („wyciętego" np. przez powierzchnię stożkową o wierzchołku w środku kuli), a całą kulistą powierzchnię wycinka objęto płomieniem palnika. Kuleczka spadła po czasie t. Po jakim czasie spadłaby ta kuleczka, gdyby promień kuli był dwukrotnie większy?
c) Kuleczkę wosku przyczepiono na osi metalowego wycinka walca („wyciętego" przez dwie półpłaszczyzny przechodzące przez oś walca), a całą boczną (cylindryczną) powierzchnię wycinka objęto płomieniem palnika. Kuleczka spadła po czasie t. Po jakim czasie spadłaby ta kuleczka, gdyby promień walca był dwukrotnie większy?
Temperatura początkowa bryły nie ulega zmianie przy podwojeniu długości lub promienia. Dla uproszczenia należy pominąć odpływ ciepła do otoczenia.

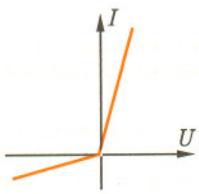
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1996

Przypominamy treść zadań

225. Kulkę upuszczono z pewnej wysokości H na szalkę wagi sprężynowej, od której odbiła się sprężyście, w wyniku czego szalka zaczęła drgać harmonicznie z amplitudą równą $(1/4)H$. Odbita kulka spadła ponownie i po drugim odbiciu wzniosła się na poziom początkowy (z którego została upuszczona). Dla jakiego stosunku mas kulki m i szalki M takie zdarzenie jest możliwe?

226. Do źródła napięcia przemiennego (sinusoidalnego) o amplitudzie $U_0 = 30$ V przyłączono obwód składający się z diody, opornika o oporze 100 Ω i kondensatora o dużej pojemności (rys. 2). Charakterystyka diody jest przedstawiona na rysunku 3 – w kierunku przewodzenia jej opór wynosi 10 Ω, a w kierunku zaporowym – 1000 Ω. Ile wyniesie napięcie na kondensatorze po upływie bardzo długiego czasu? Pojemność kondensatora jest tak duża, że to napięcie osiąga wartość stałą.


Rys. 2



Rys. 3

225. Prędkość kulki w chwili pierwszego uderzenia o szalkę była równa $v = \sqrt{2gH}$. Stosując zasady zachowania pędu i energii znajdujemy prędkości szalki v_1 i kulki v_2 natychmiast po odbiciu:

$$v_1 = v\frac{2m}{M+m}, \qquad v_2 = v\frac{M-m}{M+m}.$$

Aby po drugim odbiciu kulka podskoczyła na początkową wysokość, musi ono przebiegać odwrotnie względem pierwszego, tzn. oba zajdą na tej samej wysokości i kulka przejmie całą energię, pozostawiając szalkę nieruchomą w położeniu równowagi. Tak się stanie pod warunkiem, że od pierwszego do drugiego odbicia upłynie 1/2 okresu drgań szalki (lub 3/2, lub 5/2... – ogólnie $(n+\frac{1}{2})$ okresu). Z drugiej strony, czas ten musi być równy czasowi lotu kulki:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)T = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2v_2}{g},$$

gdzie ω jest częstością drgań szalki. Ponieważ maksymalna prędkość ruchu szalki jest związana z amplitudą A tożsamością $v_1 = \omega A$, otrzymujemy

$$v_1 v_2 = \pi g A\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

Należy jeszcze podstawić $A = H/4$ oraz wyliczone na początku v_1 i v_2. Dla $n=0$ z równania

$$16m(M-m) = \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)(M+m)^2$$

znajdujemy dwie możliwe wartości ułamka m/M: 0,155 i 0,577. Dla $n>0$ równanie nie ma rozwiązań.

226. Oznaczmy opór opornika przez R, opór diody w kierunku przewodzenia przez R_p, w kierunku zaporowym przez R_z, a szukane napięcie na kondensatorze przez U_1. Ustalenie się napięcia U_1 oznacza, że ładunek na kondensatorze zmienia się okresowo, powracając do wartości początkowej po upływie czasu T (okresu zmian napięcia źródła). Ładunek przepływający w tym czasie przez opornik jest równy różnicy między ładunkami przepływającymi przez diodę w kierunku przewodzenia i zaporowym

$$(*) \qquad \frac{U_1}{R}T = \frac{1}{R_p}\int (U(t)-U_1)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{R_z}\int (U_1 - U(t))\,\mathrm{d}t,$$

gdzie $U(t)$ jest zmiennym napięciem źródła, a zakres całkowania jest dla każdej z całek (oznaczmy je symbolami I_1 i I_2) tą częścią okresu, w której wyrażenie podcałkowe jest dodatnie. Kładąc $U(t) = U_0\sin(\omega t)$ (lub $U_0\cos(\omega t)$) nietrudno wyliczyć całki analitycznie

$$I_1 = \frac{2}{\omega}\left(\sqrt{U_0^2 - U_1^2} - U_1\arccos(U_1/U_0)\right),$$

$$I_2 = \frac{2}{\omega}\left(\sqrt{U_0^2 - U_1^2} + U_1\frac{\pi}{2} + U_1\arcsin(U_1/U_0)\right).$$

Podstawiając te wyrażenia do wzoru (*) należy wykorzystać związek $\frac{2}{\omega} = \frac{T}{\pi}$ i skrócić okres T. Wyznaczenie wartości U_1 następuje w wyniku obliczeń numerycznych – przy podanych wartościach oporów otrzymuje się $U_1 \approx 0{,}627\,U_0 \approx 18{,}8$ V.

W regulaminie **Klubu 44** została wprowadzona zmiana polegająca na wyraźniejszym rozdzieleniu klubu matematycznego i fizycznego. Jest to usankcjonowaniem przyjętego od dawna zwyczaju, zgodnie z którym podajemy oddzielne listy członków i weteranów obu klubów.

A oto najciekawsze rozwiązania i uwagi przysłane przez naszych Czytelników:

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej

Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 221 ($WT = 2{,}50$) i 222 ($WT = 2{,}38$) z numeru 6/1996

Jarosław Łazuka	– Warszawa	47,94
Aleksander Surma	– Myszków	2- 42,16
Andrzej Borowski	– Aleksandrów K.	1- 38,48
Przemysław Gworys	– Częstochowa	2- 37,06
Zbigniew Galias	– Kraków	36,75
Przemysław Gadziński	– Środa Śląska	31,28
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	25,72
Dariusz Wilk	– Rzeszów	25,57
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	1- 16,69
Stanisław Świątek	– Kłodzko	11,12
Andrzej Nowogrodzki	– Chocianów	1- 10,88

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1994–1996 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 10 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już **44** punkty. Prowadzący pan **Łazuka** właśnie dołączył do grona członków **Klubu 44 F** powiększając ich liczbę do 22.

Pozostali członkowie **Klubu 44F** (alfabetycznie; liczby w nawiasach oznaczają wielokrotność przekroczenia **44** punktów): Piotr Bała (3), Anna Gluza (1), Wiesław Kacprzak (1), Jerzy Lipkowski (2), Dzierżysław Lipniacki (3), Bogusław Mikielewicz (1), Leszek Motyka (1), Roman Musiał (1), Paweł Perkowski (2), Tomasz Rawlik (1), Robert Repucha (1), Adam Sikorski (3), Jacek Stelmach (1), Leszek Szalast (1), Piotr Wach (1), Tomasz Wietecha (2).

Zadanie **203.** [Obrót „spadającego kota" składającego się z dwóch walców] (współczynnik trudności $WT = 3{,}03$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 1$). Pan **A. Gawryszczak** oprócz bezbłędnego rozwiązania problemu zasadniczego podał też prawidłową odpowiedź na pytanie dodatkowe dotyczące walców obracających się z przeciwnym zwrotem. Okazało się, że w tym punkcie do rozwiązania zamieszczonego w *Delcie* 1/1996 wkradł się błąd polegający na nieuwzględnieniu odległości między walcami.

Zadanie **204.** [Ocenić maksymalny ładunek kulki stalowej, który nie spowoduje jej rozerwania] ($WT = 1{,}90$, $LPR = 4$). Prawidłowy wynik $Q \approx 10^{-4}$ C otrzymali **A. Nowogrodzki**, **A. Gawryszczak**, **A. Surma** i **J. Łazuka**, przy czym do niektórych rozwiązań można mieć pewne drobne zastrzeżenia. Pan **Gawryszczak** pisze, że „trudno byłoby zgromadzić taki ładunek na kulce, gdyż odpowiada on potencjałowi $1{,}5 \cdot 10^8$ V i elektrony miałyby energię potencjalną wielokrotnie przewyższającą pracę wyjścia". Uwaga ta wydaje się niesłuszna, gdyż wyjście elektronu z metalu wymaga uzyskania energii na samym początku drogi, podczas gdy potencjał względem nieskończoności jest związany z pracą wykonaną na znacznie większej drodze. Bariera potencjału zapobiegłaby więc ucieczce elektronów z kulki (chyba że pokonywałyby ją na zasadzie przejścia tunelowego). W innych listach Czytelnicy próbowali ściśle całkować siły wzajemnego oddziaływania ładunków na kulce, mimo wyraźnej sugestii „oceń orientacyjnie…". Najbardziej ambitna pod tym względem była praca **J. Łazuki**, który zaprzągł do obliczeń pełny aparat teorii sprężystości wraz z przywołaniem współczynników Poissona i Lamégo (Łyżka dziegciu: dlaczego przyjął, że ładunek jest jednorodnie rozłożony w objętości kulki?). Wreszcie w jednym z przysłanych rozwiązań zwraca uwagę zdumiewający wynik $Q \approx 10^{11}$ C! Skąd może pochodzić błąd aż o 15 rzędów wielkości? Otóż autor rozwiązania (lepiej nie wymieniajmy nazwiska…) rozpatruje tylko oddziaływanie naprzeciwległych par elementarnych ładunków, zapominając o tym, że oddziaływanie wiąże każdy ładunek z każdym innym. Że też mu pióro nie zadrżało…

Zadanie **205.** [Ciało naładowane krąży w polu magnetycznym zmieniającym się bardzo powoli] ($WT = 2{,}98$; $LPR = 1$). Prawidłowe rozwiązanie nadesłał **J. Łazuka**, natomiast dwa inne przysłane rozwiązania zawierały identyczny błąd: Autorzy korzystając z prawa indukcji w postaci $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -d\Phi/dt$ uwzględnili w pochodnej strumienia po prawej stronie zmianę pola powierzchni objętej torem krążącego ciała. Jest to nieporozumienie, gdyż wirowe pole elektryczne zależy od zmian B, a nie od jakichkolwiek parametrów związanych z ruchem ciała (oczywiście, przy założeniu, że jego własne pole można pominąć).

Zadanie **206.** [Ile wynosi dokładność kąta uderzenia bili niezbędna do zapewnienia jej dwukrotnego zderzenia z inną bilą?] ($WT = 2{,}50$; $LPR = 3$). Przebijając się przez gęsto zapisane wzorami strony w niektórych listach chciałoby się westchnąć – niech uczestnicy mają litość dla prowadzącego Ligę! Niech rozłożą rachunki na etapy, niech czytelnie przedstawią wyniki cząstkowe… Dobre rozwiązanie nadesłał **P. Gadziński**, a niezłe(?) – **A. Gawryszczak** i **J. Łazuka**.

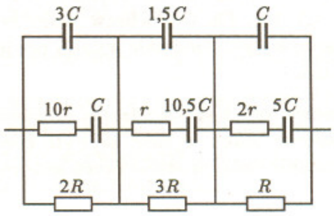
Zadanie **210.** [Wyznaczyć ciepło właściwe substancji wrzuconej do pojemnika zawierającego element grzejny, gdy dany jest przebieg czasowy temperatury] ($WT = 2{,}20$; $LPR = 4$). Być może, niewielkie przesunięcie kolorów na wykresie wydrukowanym w *Delcie* sprawiło, że **A. Gawryszczak**, **P. Gworys** i **A. Idzik** otrzymali liczbową wartość c nieco niższą od podanej w rozwiązaniu „wzorcowym". Ciekawsza jest rozbieżność wyniku **J. Łazuki**, który przyjął, że o wymianie ciepła z otoczeniem decyduje promieniowanie i w związku z tym tempo odpływu ciepła do otoczenia jest proporcjonalne do różnicy czwartych potęg temperatury absolutnej. Trudno rozstrzygnąć, czy w praktyce to założenie sprawdziłoby się lepiej od najprostszego (w którym przyjmuje się proporcjonalność do różnicy temperatur), ale powinno ono dać wartość c równą około 430 J/(kg·K), tzn. większą od podanej. Ponieważ p. **Łazuka** otrzymał znacznie mniej, więc prawdopodobnie popełnił jakąś pomyłkę rachunkową.

Zadanie **214.** [Zmienne pole magnetyczne przecinające wnętrze obwodów oporowych i nadprzewodzących] ($WT = 3{,}28$; $LPR = 1$). Nawet najbardziej wytrawni uczestnicy Ligi popełniali tu elementarne błędy. W listach występują np. terminy „potencjał" i „różnica potencjałów", które w wirowym polu elektrycznym nie mają żadnego sensu. Niektórzy Czytelnicy koniecznie chcą siłę elektromotoryczną indukcji jakoś „umiejscowić" w obwodzie, albo nawet podzielić na części, co nieuchronnie prowadzi do sprzeczności. Pan **A. Surma** podał trzy odpowiedzi prawidłowe, ale ich uzasadnienie jest bardzo niekompletne.

Zadanie **216.** [Wielkość napisu na powierzchni Ziemi, który można odczytać z satelity] ($WT = 2{,}32$; $LPR = 3$). Jak pisze **A. Idzik**, „zgodnie z zasadami pisma technicznego stosunek szerokości liter do ich wysokości wynosi 4:7", zatem celowe byłoby użycie teleskopu o zwierciadle eliptycznym w celu dopasowania zdolności rozdzielczej w pionie i w poziomie! Ten niezwykle oryginalny pomysł należałoby niezwłocznie opatentować i za ciężkie pieniądze sprzedać CIA… Pozostałe dwa prawidłowe rozwiązania (niestety, całkiem banalne) nadeszły od **P. Gworysa** i **J. Łazuki**.

Zadanie **218.** [Głośnik pod kloszem pompy próżniowej – jakie powinno być ciśnienie, aby osłabić dźwięk o 20 dB?] ($WT = 2{,}50$; $LPR = 1$). Pan **A. Idzik** wziął tu pod uwagę zależność od ciśnienia współczynników transmisji i odbicia fali na styku między gazem a ścianką. Ale dźwięk odbity pada ponownie na ściankę klosza, więc, jeśli można pominąć absorpcję, efekt ten nie powinien mieć znaczenia.

Zadanie **220.** [Zaprojektować „czarne skrzynki", na których napięcie się zmienia w zadany sposób przy połączeniu szeregowym] ($WT = 2{,}80$; $LPR = 1$). Schemat zaproponowany w *Delcie* 9/1996 nie był jedynym rozwiązaniem i nawet poprzestając tylko na elementach R i C można było przyjąć inny, np. według pomysłu **A. Surmy** (zob. rysunek, gdzie $R \gg r$; pomyłka została poprawiona). Jeszcze więcej możliwości otwierało się po dopuszczeniu elementów L – niestety, próby niektórych Czytelników nie zostały dobrze opracowane.



Zadanie **303**. [Wielościan wypukły, którego każdy płaski przekrój jest p-kątem lub q-kątem (p, q – dane liczby naturalne), jest czworościanem] (współczynnik trudności $WT = 3,43$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 5$). Dobre rozwiązania (**W. Bednorz, P. Gadziński, J. Olszewski, L. Skrzypek, J. Witkowski**) nie są prostsze od firmowego. Nonsensowna pomyłka w sformułowaniu („kąty dwuścienne ostre" – miało być: mniejsze od półpełnego) została na szczęście zignorowana przez rozwiązujących.

Zadanie **305**. [Rzuty punktu P, leżącego na wysokości CD trójkąta ostrokątnego ABC, na boki AC i BC są współliniowe ze środkami kół: opisanego i wpisanego; znaleźć związek między liczbami $h = |CD|$, R, r (promienie tych kół) oraz obliczyć minimalną wartość $|CP| : h$] ($WT = 2,84$; $LPR = 8$ (1?)). **L. Skrzypek** zgłasza – i słusznie! – zastrzeżenia do rozwiązania firmowego (lub do sformułowania treści zadania). Co to znaczy: „znaleźć związek"? Jeśli chodzi o warunki *konieczne i dostateczne* istnienia punktu P o podanych własnościach, to nie wystarczy równość $h = R + r$, wyprowadzona w rozwiązaniu firmowym, ale trzeba jeszcze przeanalizować zakres dopuszczalnych wartości badanych parametrów. Autor zastrzeżenia wykonał tę mozolną pracę i doszedł do następującego stwierdzenia: w trójkącie o danych parametrach R, r, h punkt P o podanych własnościach (i różny od C) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $h = R + r$ oraz $\frac{2}{3}h \le R < \frac{1}{2}\sqrt{2}\,h$. Może należałoby uznać tę pracę za jedyne poprawne rozwiązanie? Ponieważ jednak słowa „znaleźć związek" mogą być interpretowane jako pytanie o samą tylko zależność algebraiczną (równanie), uznaliśmy wielkodusznie, że poprawnych rozwiązań było osiem (przy okazji „załapuje się" też rozwiązanie firmowe).

Zadanie **306**. [$p > 2$ – liczba pierwsza; r_k – reszta z dzielenia k^p przez p^2; $\sum_{k=1}^{p-1} r_k = ?$] ($WT = 1,00$; $LPR = 21$). **M. Lewandowski** rozważa analogiczne zagadnienie dla dowolnej liczby nieparzystej $p > 2$ i dowodzi, że jeżeli w zbiorze $\{1, \ldots, p-1\}$ jest s liczb podzielnych przez wszystkie dzielniki pierwsze liczby p, to $\sum r_k = \frac{1}{2}p^2(p-1-s)$.

Zadanie **308**. [$f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; f różniczkowalna; $f' = g \circ f \Rightarrow f$ monotoniczna] ($WT = 3,22$; $LPR = 5$). Tylko **Ś. Gal, J. Olszewski, M. Sawicki, L. Skrzypek** oraz **P. Gadziński**, który zadanie zaproponował. Wszystkie rozwiązania podobne do firmowego.

Zadanie **316**. [$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $xf(x) - yf(y) = (x-y)f(x+y)$; $f = ?$] ($WT = 2,08$; $LPR = 7$). Bardzo zgrabnie rozwiązał to równanie **P. Gadziński**: trzy kolejne podstawienia

$$x = u,\ y = v; \qquad x = u,\ y = -v; \qquad x = v,\ y = -v$$

dają trzy równania, które dodane stronami (środkowe ze znakiem minus) pokazują, że

$$(u+v)f(u-v) = (u-v)f(u+v) + 2vf(0);$$

teraz wystaczy podstawić $u = \frac{1}{2}(t+1)$, $v = \frac{1}{2}(t-1)$, aby otrzymać wniosek, że f jest funkcją liniową (oraz sprawdzić, że każda funkcja liniowa jest „dobra").

Zadanie **320**. [Maksymalne i minimalne pole trójkąta przy zadanych promieniach R i r kół: opisanego i wpisanego] ($WT = 3,03$; $LPR = 4$). Pan **J. Ciach** znalazł to zagadnienie w książce: D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volonec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Dordrecht-Boston-London 1989, Ch. I, Sec. 1.1–1.2, Th. O1; wbrew temu, co sugeruje tytuł książki, przytoczone w tym rozdziale wyniki pochodzą jeszcze z ubiegłego stulecia.

Rozwiązanie firmowe, przez sprowadzenie do równania sześciennego i badanie znaku wyróżnika, było zdecydowanie uciążliwe. Rozwiązanie proponowane przez autora zadania (**L. Skrzypek**) – raczej też nie lepsze (mnożniki Lagrange'a). Pozostałe dwa rozwiązania (**P. Gadziński, J. Witkowski**) – zgrabniejsze i „bardziej geometryczne". Zreferujemy w skrócie rozwiązanie **J. Witkowskiego**:

Jeśli okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AC w punkcie K, to

$$\text{pole}(\triangle ABC) = (|AK| + |BC|)r = r^2 \operatorname{ctg}(\alpha/2) + 2Rr\sin\alpha\,;$$

krańcowe dopuszczalne wartości kąta α odpowiadają sytuacjom, gdy trójkąt jest równoramienny (dokładniej, gdy $|AB| = |AC|$); dowód nietrudny. Po wprowadzeniu zmiennej $x = \sin(\alpha/2)$ przebiegającej przedział $\langle x_1; x_2\rangle$ o krańcach $x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 2r/R})$, odpowiadających tym dwóm sytuacjom, rutynowe badanie znaku pochodnej otrzymanej funkcji prowadzi do wyniku:

$$S_{\max,\min} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,R^{-1/2}(R - \epsilon d)(R + r + \epsilon d)^{3/2}\,,$$

gdzie

$$d = \sqrt{R^2 - 2Rr}\,, \quad \epsilon = +1 \quad \text{dla } S_{\max}\,, \quad \epsilon = -1 \quad \text{dla } S_{\min}\,.$$

Ciekawostka: otrzymane w poszczególnych pracach ekstremalne wartości pola są wyrażeniami „optycznie" całkiem niepodobnymi, a sprawdzenie, że są to w istocie te same liczby, wymaga nieco wysiłku (program DERIVE samodzielnie tego nie potrafił rozpoznać).

Trójkąt o zadanych promieniach R, r i o maksymalnym polu zawsze jest ostrokątny. Trójkąt o minimalnym polu jest ostrokątny wtedy i tylko wtedy, gdy $r > d$, czyli gdy $R/r < \sqrt{2} + 1$. Jeśli natomiast $r \le d$, wówczas – jak oblicza **L. Skrzypek** – kres dolny pól trójkątów *ostrokątnych* wynosi $2Rr + r^2$.

Warto w tym miejscu przypomnieć dawniejsze zadanie **231** (*Delta* 12/1991) [w trójkącie ostrokątnym $\left(\sum \cos\alpha_i\right)^2 \le \frac{1}{2}\sqrt{3}\sum \sin\alpha_i$] (trudne! $WT = 3,82$; ani jedno z nadesłanych wówczas rozwiązań nie było w pełni zadowalające; dobre rozwiązanie, różne od firmowego, ale też mocno rachunkowe, przysłał dwa lata później, już poza konkursem, **P. Gadziński**). Otóż nierówność z zadania **231** jest równoważna następującej: $(*)\quad S \ge \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot r(R+r)^2/R$ (wzór Herona oraz twierdzenie sinusów plus proste tożsamości trygonometryczne). Mając teraz dolne oszacowanie pola S dla trójkątów ostrokątnych pan Skrzypek dostaje bez większego trudu dowód nierówności $(*)$, a co za tym idzie, rozwiązanie zadania **231**, które zresztą – jak sam wyznaje – było dlań inspiracją do zaproponowania zadania **320**. To ostatnie zadanie można więc uważać za wzmocnienie zadania **231**.

Zadanie **321**. [Charakteryzacja par liczb naturalnych (m, n), dla których „(m, n)-koń" jest w stanie osiągnąć każde pole nieskończonej szachownicy $\mathbf{Z}^2$] ($WT = 1,90$; $LPR = 10$). Uogólnienie (**L. Skrzypek**) – układy liczb naturalnych $(n_1, \ldots, n_k)$, dla których analogicznie określony „$(n_1, \ldots, n_k)$-koń" jest w stanie osiągnąć każdą komórkę k-wymiarowej szachownicy $\mathbf{Z}^k$, są scharakteryzowane przez koniunkcję warunków: $\mathrm{NWD}(n_1, \ldots, n_k) = 1$; suma liczb n_i jest nieparzysta, ale co najmniej jedna z tych liczb jest parzysta.

Zadanie **324**. [G – środek ciężkości czworościanu $A_1A_2A_3A_4$ wpisanego w sferę o środku O i promieniu R; A_iK_i – cięciwa przechodząca przez $G \Rightarrow \sum |GK_i|^{-2} \ge 4/R^2$] ($WT = 2,50$; $LPR = 9$). Ogólniej, dla układu n punktów A_i na sferze w przestrzeni k-wymiarowej zachodzi (przy oznaczeniach jak w zadaniu) równość $\sum |GK_i|^{-2} = n/(R^2 - |OG|^2)$; wystarczy bardzo nieznaczna modyfikacja rozwiązania firmowego. Na to proste uogólnienie zwrócili uwagę **P. Gadziński** i **L. Skrzypek** oraz autor zadania **J. Ciach**.

Zadania z matematyki nr 335, 336

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1997

335. Na bokach AB i AC trójkąta ABC o polu S i obwodzie $2p$ odłożono (odpowiednio) odcinki AK, AL o długościach k, l. Pole trójkąta AKL wynosi S'. Udowodnić, że prosta KL przechodzi przez środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC wtedy i tylko wtedy, gdy $2pS' = (k+l)S$.

336. Ciąg (a_n) jest określony wzorami: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$ dla $n \geq 1$. Dowieść, że każdy jego wyraz jest równy ilorazowi pewnych dwóch wyrazów ciągu Fibonacciego (określonego wzorami: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$ dla $n \geq 1$).

Rozwiązania zadań z numeru 10/1996

Przypominamy treść zadań:

327. Rozważamy wielomiany postaci $x^4 + ax^3 + bx + c$, mające cztery pierwiastki rzeczywiste. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości iloczynu ab.

328. Zbiór Z zawarty w płaszczyźnie ma następującą własność: dla każdego punktu $P \in Z$ liczba punktów $Q \in Z$ spełniających warunek $|PQ| = r$ wynosi:

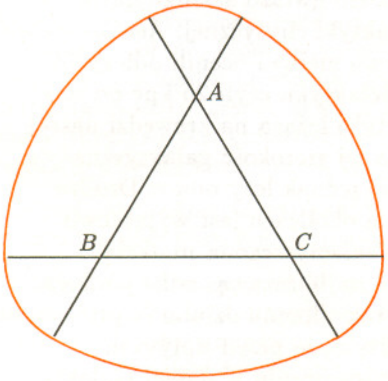
$$2 \text{ gdy } 0 < r < 1; \quad 1 \text{ gdy } r = 1; \quad 0 \text{ gdy } r > 1.$$

Czy zbiór Z musi być okręgiem?

327. Przyjmijmy, że wielomian $F(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste i przypuśćmy, że $a > 0$. Na mocy twierdzenia Rolle'a wielomian pochodny $F'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste. Badając znak F'' stwierdzamy, że F' jest funkcją rosnącą w przedziałach $(-\infty; -a/2)$ i $\langle 0; \infty)$, a malejącą w przedziale $\langle -a/2; 0\rangle$; wartość $F'(0) = b$ nie może więc być dodatnia. Zatem jeśli $a > 0$, to $b \leq 0$. Analogicznie wykazujemy, że jeśli $a < 0$, to $b \geq 0$. Wniosek: $ab \leq 0$.

Przykład wielomianu $F(x) = x(x-r)(x-2r)(3x+2r) = 3x^4 - 7rx^3 + 4r^3x$ (gdzie r jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą) pokazuje, że wartość iloczynu ab, w tym przypadku równa $-28r^4$, może być dowolną liczbą niedodatnią.

328. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym o boku długości 1/2. Kreślimy łuk okręgu o środku A i promieniu 3/4, wyznaczony przez półproste $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$, oraz łuk okręgu o środku A i promieniu 1/4, wyznaczony przez półproste $BA^{\rightarrow}$ i $CA^{\rightarrow}$. Kreślimy też analogicznie określone łuki okręgów o środkach w punktach B i C (rysunek). Suma tych sześciu łuków jest zbiorem mającym wymaganą własność; proste sprawdzenie (którego szczegóły pominiemy) wymaga rozpatrzenia trzech przypadków: gdy P jest punktem wewnętrznym jednego z trzech większych łuków, jednego z trzech mniejszych łuków, oraz gdy jest jednym z sześciu punktów „klejenia".



Czytelnicy pamiętają czasy, nie tak znów odległe, kiedy to trzeci w danym roku numer *Delty* – a więc nominalnie numer marcowy – pojawiał się w sprzedaży w połowie maja. Uczestnicy ligi mieli na rozwiązywanie zadań czas do końca czerwca (formuła $n+3$); „firmowe" zaś rozwiązania mogli obejrzeć w numerze lipcowym $(n+4)$, który do kiosków trafiał gdzieś we wrześniu.

Tempora mutantur, teraz numer wrześniowy kupuje się we wrześniu, a bywa, że i w ostatnich dniach sierpnia; stąd też zmiana terminu przysyłania rozwiązań z $n+3$ na $n+2$ w szóstym punkcie *Regulaminu*. Ale, jak to ze zmianą być musi, od momentu zauważenia jej potrzeby do jej efektywnego pojawienia się w drukowanym *Skrócie regulaminu* minęło parę miesięcy (cykl produkcyjny *Delty*). I oto stała się rzecz zabawna: zamiast własnych rozwiązań można było przez te kilka miesięcy przysyłać odsyłacze do literatury (por. *Regulamin*, p. 11), mianowicie do czasopisma *Delta*, do rozwiązania firmowego w numerze, który pojawiał się w sprzedaży jeszcze przed upływem terminu wysyłki.

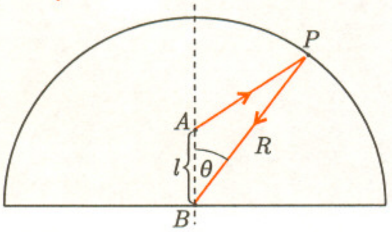
Gdyby ktoś tak uczynił, otrzymałby maksymalną ocenę (jeśli tylko rozwiązanie firmowe nie miało błędów); byłoby to zagranie pełne wdzięku. Jak natomiast wyglądało zagranie kompletnie wdzięku pozbawione? Młody uczestnik ligi z dużego miasta wojewódzkiego na północy Polski po prostu przepisał rozwiązania zadań z numeru 12/1995 (przedstawił się jako uczeń trzeciej klasy liceum – czy nie miało być: podstawówki?). Miesiąc później podobnie postąpił z kolejną serią zadań mieszkaniec małej miejscowości z Dolnego Śląska. Dzieci kochane! przecież można było użyć kserokopiarki, wysiłek mniejszy, a pełne punkty i tak lecą.

A swoją drogą, dobrze, że *Delta* ukazuje się terminowo; oby tak było nadal...

W dorocznym omówieniu, jak zwykle, przedstawiamy znalezione przez Czytelników rozwiązania zgrabniejsze od firmowych, a także interesujące komentarze i uogólnienia, oraz odnotowujemy te zadania, gdzie poprawne rozwiązania były bardzo nieliczne. Raz i drugi bijemy się w pierś z powodu usterek w sformułowaniach.

Rozwiązanie zadania F 446.

Przyjmijmy konwencję dotyczącą znaku l: $l > 0$, gdy punkt A znajduje się wewnątrz półsfery tworzącej zwierciadło, i $l < 0$, gdy punkt A znajduje się na zewnątrz tej półsfery.



Długość drogi optycznej APB jest równa

$$D = AP + BP = \sqrt{l^2 + R^2 - 2lR\cos\theta} + R.$$

Dla ustalonej wartości l jest to funkcja jednej zmiennej θ. Różniczkując otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}D(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = \frac{lR\sin\theta}{\sqrt{l^2 + R^2 - 2lR\cos\theta}}.$$

Przyrównując tę pochodną do zera otrzymujemy $\theta = 0$. Druga pochodna obliczona w punkcie $\theta = 0$ ma wartość

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2D(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0} = \frac{lR}{R-l}.$$

Wynika stąd, że jest ona dodatnia dla $l > 0$, ujemna dla $l < 0$ i zerowa dla $l = 0$.

Punkty leżące na osi optycznej wewnątrz półsfery odpowiadają minimum drogi optycznej, na zewnątrz półsfery – maksimum drogi optycznej. Punkt $A = B$ odpowiada stacjonarnej drodze optycznej. W tym ostatnim przypadku pochodna $\frac{\mathrm{d}D(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$ znika nie tylko dla $\theta = 0$, ale dla wszystkich wartości kąta θ.

Patrz w niebo

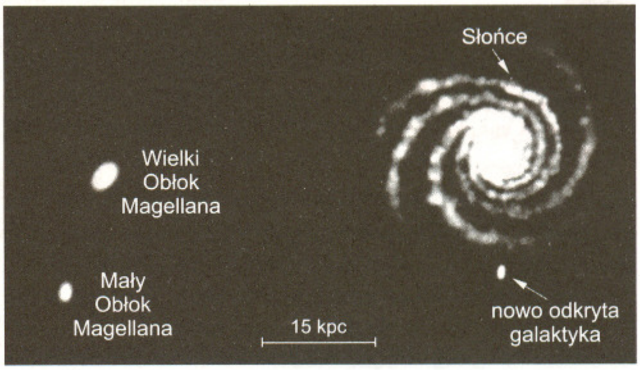
Wiadomo powszechnie, że najbliższymi sąsiadami naszej Galaktyki są Obłoki Magellana. Wielki Obłok leży w odległości około 50 kpc, a Mały 60 kpc. Dla przypomnienia – promień naszej Galaktyki wynosi 15 kpc. Otóż Wielki Obłok Magellana nie jest już najbliższą galaktyką. Aż dziwne, że w dzisiejszych czasach można było przeoczyć najbliższą sąsiadkę, jednak jest na to usprawiedliwienie. Znaleziono ją mianowicie właściwie w Drodze Mlecznej, gdzie zalega materia międzygwiazdowa skutecznie utrudniająca obserwacje centralnych obszarów naszej Galaktyki (do dziś przecież nie wiadomo, co naprawdę dzieje się w jej jądrze), a co dopiero dalszych obiektów pozagalaktycznych. Pas o szerokości co najmniej 20°, leżący wzdłuż równika galaktycznego i pokrywający się praktycznie z Drogą Mleczną, zyskał nawet kiedyś nazwę strefy unikania, ponieważ z obserwacji wynikało, że galaktyki jej „unikają". Mówiąc po prostu, przez grubą warstwę materii międzygwiazdowej galaktyk nie widać, a poszukiwanie ich tam każdy uznałby za sprawę z góry przegraną.

Nic dziwnego, że zaskoczeniem było odkrycie przez włoskiego astronoma, Paolo Maffei, w 1968 r. dwóch galaktyk w Kasjopei, a dokładniej – położonych o 0°,5 od równika galaktycznego. Galaktyka Maffei 1 jest eliptyczna, a Maffei 2 spiralna. Leżą one w odległości odpowiednio 4 i 5 Mpc, więc dalej nawet niż Wielka Mgławica Andromedy, ale odkrycie galaktyk w Drodze Mlecznej było samo w sobie niezwykłe.

Ale to jeszcze nic. Na podstawie atlasu nieba łatwo zorientować się, że Kasjopeja leży wprawdzie na tle Drogi Mlecznej, ale daleko – bo o 120° – od Strzelca, gdzie znajduje się centrum Galaktyki. Można więc przypuszczać, że w kierunku Kasjopei materii międzygwiazdowej nie jest specjalnie dużo, a najwięcej można jej się spodziewać w Strzelcu i okolicach.

To prawda i tym bardziej sensacyjne jest odkrycie trzy lata temu galaktyki właśnie w Strzelcu, która w dodatku jest znacznie bliższa niż Obłoki Magellana. Trzej angielscy astronomowie, Rodrigo Ibata, Gerry Gilmore i Mike Irwin, badając widma gwiazd centralnych obszarów Galaktyki znaleźli grupę czerwonych olbrzymów o bardzo zbliżonych prędkościach radialnych, która przy bliższym zbadaniu okazała się zbiorowiskiem gwiazd zasługującym na nazwę karłowatej galaktyki eliptycznej. Astronomowie ci otrzymali jej zarys na niebie i ocenili odległość na 15 kpc od jądra Galaktyki, czyli 25 kpc od nas. Byłaby to więc galaktyka leżąca na krawędzi naszej Galaktyki. Co prawda jej szerokość galaktyczna wynosi −14°, niemniej jednak leży ona w Drodze Mlecznej, która w tych okolicach jest wyjątkowo szeroka i wyjątkowo zanieczyszczona materią rozproszoną. Ta nasza najbliższa sąsiadka podlega najprawdopodobniej tak silnemu działaniu pływowemu ze strony jądra Galaktyki, że przed upływem 100 mln lat ulegnie rozproszeniu w naszej Galaktyce. Uważa się, że taki „kanibalizm" jest w świecie galaktyk zjawiskiem wcale nie wyjątkowym.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania F 445. Na mocy drugiego prawa Keplera mamy

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM},$$

gdzie a jest długością dużej półosi orbity. Różniczkując powyższe równanie otrzymujemy

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T}{2M}\frac{dM}{dt}.$$

Ponieważ $P = -\frac{dM}{dt}c^2$, otrzymujemy

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T}{2Mc^2}\cdot P.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy

$$\frac{dT}{dt} = 1{,}08\cdot 10^{-6}\ \mathrm{s/rok}.$$

Rozwiązanie zadania M 799. Rozpatrzmy funkcje $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dane wzorami

$$f(x) = \begin{cases}\sqrt{2} & \text{dla } x \text{ wymiernych,}\\ 0 & \text{dla } x \text{ niewymiernych,}\end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{2} - f(x) = \begin{cases}0 & \text{dla } x \text{ wymiernych,}\\ \sqrt{2} & \text{dla } x \text{ niewymiernych.}\end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że dla wszystkich $x\in\mathbf{R}$ mamy

$$f(g(x)) = g(f(x)) = f(x).$$

Ponadto, dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(f(x)) = g(g(x)) = g(x),$$

ale, oczywiście, równanie $f(x) = g(x)$ nie ma żadnych rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

Rozwiązanie zadania M 800. Niech x_i oznacza liczbę kamer w i-tym sektorze. Wartość oczekiwana liczby nie wykrytych kradzieży będzie najmniejsza wtedy, gdy najmniejsza będzie wartość sumy

$$2^{-x_1} + 2^{-x_2} + \dots + 2^{-x_{10}}.$$

Możliwych rozstawień kamer jest skończenie wiele, więc istnieje wśród nich optymalne. Jeśli $x > y+1$, to wtedy

$$2^{-y} - 2^{-(y+1)} = 2^{-(y+1)} > 2^{-x} = 2^{-(x-1)} - 2^{-x},$$

czyli $2^{-x} + 2^{-y} > 2^{-(x-1)} + 2^{-(y+1)}$. Liczby kamer w sektorach nie mogą się więc różnić o więcej niż 1, bo w przeciwnym razie przenosząc jedną z nich poprawilibyśmy wykrywalność kradzieży. Zatem każda z kamer powinna trafić do innego sektora.

epsilon
2/97
(71)

Kółko, krzyżyk i Nagroda Nobla

Niewiele jest chyba osób, zwłaszcza wśród związanych z naukami ścisłymi, które nie grywały w *kółko i krzyżyk*. Reguły gry są bardzo proste: na nieograniczonej, kratkowanej kartce gracze stawiają na przemian swoje znaki. Wygrywa ten, który pierwszy ułoży pięć w jednym rzędzie – pionowym, poziomym lub ukośnym.

Gra może się niektórym wydawać banalna, ale tak nie jest. Martin Gardner pisze o niej, że jest „far from trivial”.

Niewątpliwie nie wszyscy spośród grających w kółko i krzyżyk wiedzą, że jest to starożytna gra pochodząca ze Wschodu. Japońska nazwa to *go-moku*, co oznacza *pięć kamieni*. Jej wariant to *go-bang*, gra odbywa się na kartce ograniczonej (19×19), czyli po prostu na planszy do gry w go. W Europie gra znana jest już od ponad wieku.

Wielu graczy, a zwłaszcza matematyków, postawi pytanie: czy istnieje wygrywająca strategia dla któregoś z graczy? Łatwo zauważyć, że jeżeli dla któregoś, to dla rozpoczynającego. Istotnie, nietrudno wykazać, że dla niego istnieje strategia prowadząca co najmniej do remisu. Gdyby bowiem dla drugiego gracza istniała strategia wygrywająca, to rozpoczynający mógłby postawić swój pierwszy znak gdziekolwiek i potem grać jak ten drugi...

Takie rozumowanie, bardzo proste, jako pierwszy przedstawił John Nash (ur. 1928). Dotyczyło ono gry nazwanej *hex*. Rozmaite prace Nasha są dziś już klasyczne, choć opublikował ich jedynie kilkanaście. Zwłaszcza jego rezultaty w rozmaitych działach geometrii mają duże znaczenie. Do terminologii matematycznej weszły *zbiory Nasha, funkcje Nasha*...

Nash w latach 1950–1958 opublikował dwanaście prac. Z powodu poważnej choroby przerwał badania matematyczne, do których jednak potem kilkakrotnie wracał na krótkie okresy. W roku 1994 Nash stał się sławny w świecie naukowym; wspólnie z Johnem Harsanyi i Reinhardem Seltenem otrzymał Nagrodę Nobla z ekonomii – za wprowadzenie do ekonomii metod teorii gier.

Wśród prac Nasha było 5 z teorii gier (z lat 1950–1954; cztery samodzielne i jedna wspólna, m.in. z Johnem Milnorem). Ta, za którą dostał Nagrodę Nobla, jest jego pierwszą pracą, napisaną w wieku 21 lat. Praca ta dla wielu na pierwszy rzut oka mogła się wydawać znacznie mniej znacząca od wielu innych rezultatów Nasha...

A problem istnienia strategii wygrywającej w *kółko i krzyżyk* jest, o ile mi wiadomo, wciąż otwarty.

(*KC*)

W *EPSILONIE* 5/1996 informowaliśmy o konkursie Koła Matematyków Studentów UJ na

CYTAT ROKU

i zaprezentowaliśmy laureata za rok akademicki 1994/95. Niektórym Czytelnikom ten cytat tak się spodobał, że poprosili nas o przedstawienie innych cytatów, konkurujących ze zwycięzcą. Oto zatem wybór niektórych spośród 214 cytatów, zanotowanych przez studentów na wykładach i ćwiczeniach w roku 1994/95 (autorami niektórych mają zaszczyt być redaktorzy *EPSILONA*!)

- *Zróbmy to na boczku. Najlepiej na skrzydełku* (chodzi o miejsce zapisania rozwiązania na tablicy).
- *Oddam dobry komputer za dobrą tablicę.*
- *Załóżmy, że mamy następujące równanie i kredę, która pisze...*
- *Jak się ubrudzę wodą, to nie mam problemu ze zmyciem.*
- *Chodzi o to, aby Państwo mieli pewien intymny kontakt z funkcjami próbnymi.*
- *Przeprowadzam czysty, chamski rachunek.*
- *Strasznie nie lubię dowodów nie wprost, bo polegają one na tym, że człowiek opowiada cały czas jakieś bzdury, aż dojdzie do takiej bzdury, że wszyscy już się zgadzają, że tak dalej być nie może.*
- *Musielibyśmy rozważać przypadki, żeby zapisać to w sposób koszerny.*
- *I jeśli to przetnę, to wyjdzie mi takie bydlę.*
- *Drugą część robi się ideologicznie analogicznie.*
- *Siedzi takie mruczące bractwo patrzące bykiem...* (o studentach).
- *Państwo już wiedzą dobrze, jak to się robi: albo się kiwa głową, albo pokazuje pokerową twarz. A wykładowca cały głupi stoi pod tablicą i nie wie – dotarło czy nie.*
- *Ależ co ja wam wmawiałem... Ależ nie wierzcie mi.*
- *Nie wymaga to zbyt dużego wysiłku umysłowego, więc może uda mi się to zrobić.*
- *Ta przestrzeń nie jest taka porządna, więc ma papiery na to, żeby być uniwersalną.*
- *Kwadrat zjada moduł.*
- *Mogę tę macierz nakarmić dowolnym wektorem.*
- *Nie istnieje funkcja odwrotna do funkcji nie będącej injekcją. Jest to matematyczny dowód na nierozerwalność małżeństwa.*
- *Wymiar spadł, a przestrzeń nie drgnęła.*
- *Jesteśmy w sytuacji dyskretnej, tutaj taki punkt to kawał zbioru.*
- *Funkcja v ma w punkcie p silne globalne minimum. Ale co nas to obchodzi?*
- *Banach to jest Banach, to jest ten od Hahna.*
- *Ten robaczek obok to jest g z ptaszkiem.*
- *Proponuję zróżniczkować względem m, to nam ten składnik szlag trafi.*
- *Cały trójkącik zapadnie się do odcinka, albo do czegoś jeszcze bardziej nieprzyzwoitego.*
- *Ta krzywa jest wklęsła, bo jest wypukła.*
- *Jak jest słoń, to jest słoń. Nie można założyć, że nie ma trąby. Ale w matematyce można.*
- *Mamy dwa rodzaje jeleni: gołębie i sokoły.*
- *Ja się wyróżniam oryginalnym sposobem egzaminowania, bo nie stać mnie na nic więcej.*
- *Proszę uważać, abym kogoś nie oblał jeszcze przed egzaminem* (profesor idący na wykład ze szklanką z herbatą).

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, $\boxed{\text{Marcin Poźniak}}$
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.