delta
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s $\pi = 3{,}141592\ldots$

23 października 1996 roku
zmarł w Warszawie

Antoni Kreczmar

matematyk, informatyk
autor *Delty*

SPIS TREŚCI

NUMERU 12(271)

W następnym numerze:

Szyfry

Okładkę i ilustracje wykonał
Krzysztof BIESAGA

Wybór artykułów z *Delty* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem
http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-41(-2) wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

400 lat temu nie tylko przeniesiono stolicę Polski do Warszawy, lecz także urodził się René Descartes, Kartezjusz. Dla dziejów naszego świata to niezmiernie ważna okoliczność. W Europie nagromadziło się wtedy niesłychanie wiele czynników, które miały odmienić życie jej mieszkańców (i całej kuli ziemskiej). Zmieniła się i mapa polityczna, i sposoby chwalenia Najwyższego, wymyślono mikroskop (co dało nam maleńkich sąsiadów – mikroby) i teleskop (co dało nam księżyce Jowisza, a wraz z nimi nadzieję, że nie jesteśmy w Kosmosie sami), ciała niebieskie nareszcie zaczęły krążyć po elipsach (i powszechne ciążenie było tuż za progiem), rośliny po raz pierwszy jawnie zaczęły odżywiać się powietrzem, słowem – wszystko zmierzało ku koleinom, które z naszego dzisiejszego punktu widzenia nazwać by wypadało normalnością.

I tylko potrzebny był ktoś, kto powiedziałby, że myślimy teraz zupełnie odmiennie – może mądrzej, ale na pewno inaczej. Kto jasno stwierdziłby, że jest to początek nowego świata. I tę właśnie rolę spełnił Kartezjusz stwarzając język i metodę nowego myślenia. Jego miejsce w naszym świecie jest tak eksponowane, że przypisuje się mu nawet rzeczy, których nie zrobił. I tak np. kartezjański układ współrzędnych wprowadził Pierre Fermat. XVIII-wieczną kłótnię o kształt geoidy (wrzeciono czy dysk) opisuje się jako kartezjańsko-newtonowską, choć strona francuska była w niej reprezentowana przez Jeana i Jacquesa Cassinich. Tak więc przypisuje się Kartezjuszowi wszystko – dobre i złe.

I słusznie – za wszystko bowiem, co nazywa się nauką nowożytną, odpowiedzialność ponosi.

W tym numerze zamieszczamy trzy wypowiedzi na jego temat.

Czwartą, może bardziej sceptyczną (względem nas – współczesnych, nie względem niego) zamieścimy w następnym numerze.

Kartezjusz – matematyk

Roman MURAWSKI

Kartezjusz, uznawany za ojca filozofii nowożytnej, zajmował się również matematyką. Choć był niewątpliwie jednym z najbardziej matematycznie uzdolnionych myślicieli swej epoki, to jego główne zainteresowania nie koncentrowały się jednak na matematyce, lecz na filozofii i naukach przyrodniczych. Napisał właściwie tylko jedno dzieło poświęcone matematyce, niemniej jego znaczenie dla matematyki jest ogromne.

Prace matematyczne Kartezjusza wyrastały z jego poszukiwań ogólnej metody myślenia, która ułatwiałaby robienie wynalazków i poszukiwanie prawdy w nauce, przy czym to właśnie matematyka miała dostarczać wzorca metody naukowej. Wynikiem jego rozważań metodologicznych była zasada badania metody przed badaniem rzeczy. Kryterium pewności w nauce stanowi, według Kartezjusza, jasność i wyraźność idei. Głosił program powszechnej wiedzy racjonalnej na wzór matematyki. W pracy *Rozmowa z Burmanem* pisał: „Matematyka zaś przyzwyczaja do poznawania prawdy, ponieważ w matematyce występują trafne rozumowania, jakich nigdzie poza tym nie znajdziesz. I dlatego ten, kto raz nagiął swój umysł do rozumowań matematycznych, będzie miał również [umysł] zdolny do poszukiwania innych prawd, skoro rozumowanie wszędzie jest jedno i to samo".

Descartes R., *Rozmowa z Burmanem*, w: *Medytacje o pierwszej filozofii wraz z Zarzutami uczonych mężów i Odpowiedziami autora oraz Rozmowa z Burmanem*, tłum. I. Dąmbska, PWN, Warszawa 1958, s. 296.

Według Kartezjusza jedynie matematycy umieją znajdować dowody i dzięki temu dostarczać wiedzy pewnej. Źródeł tej umiejętności dopatruje się on w fakcie, że w matematyce rozważa się same tylko własności ilościowe. W *Prawidłach kierowania umysłem* pisał: „(...) ściśle do matematyki odnosi się to wszystko, w czym bada się porządek i miarę, bez względu na to, czy owej miary szukać należy w liczbach czy figurach, gwiazdach, dźwiękach, czy w jakimkolwiek innym przedmiocie; musi zatem istnieć jakaś ogólna nauka, która by wyjaśniała to wszystko, co może być przedmiotem badań odnośnie do porządku i miary nie przysługujących żadnej szczególnej materii".

Descartes R., *Prawidła kierowania umysłem*, tłum. L. Chmaj, PWN, Warszawa 1958, s. 21.

Naukę tę proponował nazwać matematyką uniwersalną – „ona [bowiem] zawiera to wszystko, dzięki czemu inne nauki nazywają się matematycznymi" (tamże). Pewność zaś matematyki wynika, według Kartezjusza, z tego, że „one [tzn. arytmetyka i geometria] (...) jedynie zajmują się tak czystym i prostym przedmiotem, iż niczego zupełnie nie zakładają, co by doświadczenie czyniło niepewnym, ale polegają całkowicie na rozumowym wyprowadzaniu wniosków. Są więc one ze wszystkich najłatwiejsze i najjaśniejsze" (tamże, s. 8). Z przekąsem dodawał też, że: „Wszelako nie powinno nas dziwić, jeśli wiele umysłów przykłada się chętniej do innych nauk lub do filozofii [w pojmowaniu scholastycznym – przypis tłumacza]: pochodzi to bowiem stąd, że każdy śmielej pozwala sobie na snucie przypuszczeń w rzeczy niejasnej niż oczywistej i że o wiele łatwiej jest o jakiejkolwiek kwestii czynić domysły, aniżeli dojść do samej prawdy w jednej kwestii, chociażby bardzo łatwej" (tamże, s. 9). W samej matematyce należy, według Kartezjusza, stosować metody analityczne – dopuszczał on przy tym tylko intuicję i dedukcję. Przez intuicję rozumiał „tak łatwe i wyraźne pojęcie umysłu czystego i uważnego, że o tym, co poznajemy, zgoła już wątpić nie możemy, lub, co na jedno wychodzi, pojęcie niewątpliwe umysłu czystego i uważnego, które pochodzi z samego rozumu, a jako prostsze jest pewniejsze nawet od dedukcji" (*Prawidła*..., s. 12). Przez dedukcję zaś rozumiał „to wszystko, co daje się wysnuć z koniecznością z jakichś innych rzeczy poznanych w sposób pewny" (tamże). Stąd wynika więc w szczególności, że aksjomaty matematyki były dla Kartezjusza prawdami pewnymi i niepodważalnymi.

Omówiwszy poglądy Kartezjusza na metodologię matematyki i na znaczenie tej ostatniej dla nauki jako takiej, przejdźmy do jego osiągnięć na polu samej już matematyki. Wydaje się, że Kartezjusz na serio zainteresował się nią w czasie surowej zimy 1619 roku, którą spędził jako ochotnik w wojsku. Wtedy to prawdopodobnie odkrył formułę, znacznie później znalezioną również przez Eulera, a głoszącą, że $V - E + F = 2$, gdzie V jest liczbą wierzchołków, E liczbą krawędzi, F zaś liczbą ścian dowolnego danego wielościanu zamkniętego.

To odkrycie Kartezjusza ogłoszone zostało dopiero w 1860 roku.

W liście z roku 1628 do jednego z przyjaciół holenderskich pisał Kartezjusz, iż uczynił tak wielkie postępy w arytmetyce i geometrii, że większych nie może już sobie życzyć. Jakie to były osiągnięcia i czego dotyczyły, nie można dokładnie stwierdzić z tej prostej przyczyny, że Kartezjusz niczego nie opublikował. Być może miał on tu na myśli to, co potocznie uchodzi dziś za największe jego osiągnięcie, a mianowicie geometrię analityczną?

Jedynym opublikowanym dziełem matematycznym Kartezjusza jest *La géométrie* z roku 1637. Stanowiła ona ostatni z trzech dodatków do sztandarowego i najbardziej dziś chyba znanego dzieła metodologicznego Kartezjusza, a mianowicie *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (*Rozprawa o metodzie właściwego kierowania rozumem i poszukiwania prawdy w naukach*, tłum. W. Wojciechowska, PWN, Warszawa 1970). Pozostałe dwa dodatki to *La dioptrique* (*Dioptryka*) i *Les météores* (*Meteory*). Ponieważ późniejsi wydawcy nie widzieli bezpośredniego związku między główną częścią dzieła a dołączonymi dodatkami, w następnych wydaniach *Discours*... dodatki pomijano. *La géométrie* rozpowszechniła się w przekładzie łacińskim (wydanie I: 1649 rok) zaopatrzonym w obszerne komentarze i oryginalne dopełnienia wydawcy. W drugiej połowie XVII wieku stała się książką podręczną wszystkich twórczych matematyków.

W *Discours de la méthode* znajdujemy m.in. ogólne uwagi na temat metod, które powinny być stosowane w nauce, a więc i w matematyce. W szczególności mamy tu cztery prawidła, które – zdaniem Kartezjusza – zupełnie wystarczą w logice. Są one następujące:
(1) „nigdy nie przyjmować za prawdziwą żadnej rzeczy, zanim by jako taka nie została rozpoznana przeze mnie w sposób oczywisty",
(2) „dzielić każde z badanych zagadnień na tyle cząstek, na ile by się dało i na ile byłoby potrzeba dla najlepszego ich rozwiązania",
(3) „prowadzić swe myśli w porządku, poczynając od przedmiotów najprostszych i najdostępniejszych poznaniu, i wznosić się po trochu, jakby po stopniach, aż do poznania przedmiotów bardziej złożonych",
(4) „czynić wszędzie wyliczenia tak całkowite i przeglądy tak powszechne, aby być pewnym, że nic nie zostało pominięte".

Odnajdujemy więc tu zarówno postulat nieuznawania żadnego zdania, które nie jawi się jasno i wyraźnie (zasada (1)), jak i zachętę do stosowania metody analitycznej (zasada (2)) oraz dedukcji (zasada (3)). Zasady te stanowią fundament logiki matematycznej i metody aksjomatyczno-dedukcyjnej i są podstawowymi zasadami, na podstawie których rozwijamy dziś teorie matematyczne.

Przejdźmy teraz do omówienia ściśle matematycznej części *Discours de la méthode*, czyli dodatku *La géométrie*. Zacznijmy omawianie go od stwierdzenia, że był on wynikiem zastosowania przez Kartezjusza jego ogólnej metody unifikacji, o której mówiliśmy na początku – w tym przypadku chodziło o unifikację geometrii i algebry. Powiedzmy też od razu, że wbrew potocznym opiniom nie znajdujemy w tym dziele systematycznego wykładu geometrii analitycznej w dzisiejszym sensie! Cel, jaki stawiał sobie Kartezjusz w tej pracy, daje się jasno odczytać już z pierwszego, otwierającego ją zdania: „Dowolny problem geometryczny można łatwo przeformułować w takich terminach, że do jego konstrukcji wystarczy znajomość długości pewnych linii". Celem Kartezjusza było więc z jednej strony zastosowanie algebry do geometrii i uwolnienie w ten sposób tej ostatniej od konieczności stosowania wykresów, a z drugiej, nadanie znaczenia operacjom i działaniom arytmetycznym poprzez odpowiednie zinterpretowanie ich za pomocą pojęć geometrycznych. Zastosowana przezeń w *La géométrie* metoda polegała na wyjściu od pewnego problemu geometrycznego, przetłumaczeniu go na język równań algebraicznych, a następnie, po uproszczeniu odpowiedniego równania, rozwiązaniu go metodami geometrycznymi. W ten sposób każda z gałęzi matematyki dawała to, co posiadała najlepszego dla rozwiązania rozważanego problemu. Widać więc tu wyraźnie ideę unifikacji matematyki. A była to idea bardzo istotna i potrzebna, jeśli zważyć fakt, że od starożytności arytmetyka i geometria rozwijały się właściwie jako osobne, nie mające żadnego związku, dziedziny (pierwsza dotyczyła wielkości dyskretnych, druga – ciągłych).

Dodatek *La géométrie* składał się z trzech części (ksiąg). W pierwszej z nich znajdujemy jedynie podstawowe zasady tego, co dziś zwiemy geometrią analityczną, szczegółowe badania nad znajdowaniem rozwiązań równań kwadratowych oraz pewne rozważania nad problemem postawionym przez Pappusa, tzn. nad problemem miejsca geometrycznego takich punktów, że iloczyn ich odległości od n prostych jest w stałym stosunku do iloczynu ich odległości od n lub $n-1$ innych prostych. Mówiąc tu o zaczątkach geometrii analitycznej trzeba zaznaczyć, że Kartezjusz nie używał współrzędnych dla określenia położenia punktu, nie myślał też o współrzędnych jako o parze liczb.

W księdze drugiej mamy rozważania nad „owalami Kartezjusza". Kartezjusz rozważa tam m.in. równania postaci:

$$f(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

i podaje warunki, kiedy równanie to przedstawia hiperbolę, kiedy parabolę, a kiedy elipsę. Podaje także metodę znajdowania stycznej do danej stożkowej.

Księga trzecia podejmuje na nowo problematykę księgi pierwszej, tzn. konstrukcję pierwiastków równań algebraicznych. Znajdujemy tu m.in. „regułę znaków Kartezjusza", która głosi w uproszczeniu, że równanie algebraiczne $f(x) = 0$ ma co najwyżej tyle pierwiastków dodatnich, ile mamy zmian znaku w ciągu współczynników w $f(x)$ i co najwyżej tyle pierwiastków ujemnych, ile mamy zmian znaku w ciągu współczynników w $f(-x)$. Kartezjusz był przekonany, że wszystkie problemy nauk matematycznych mogą być wyrażone za pomocą równań algebraicznych różnych stopni. Ogólną metodę rozwiązywania takich równań stanowi ich wykreślanie. Pierwiastki rzeczywiste równań kwadratowych mogą być wykreślone za pomocą przecięcia okręgu i prostej, pierwiastki równań stopnia trzeciego i czwartego wykreśla się za pomocą przecięcia okręgu i paraboli, dalej pierwiastki równań stopnia piątego i szóstego wykreśla Kartezjusz za pomocą okręgu i krzywej rzędu 3 zwanej dziś parabolą Kartezjusza lub trójzębem Newtona. Ogólnie konstrukcji pierwiastków równania stopnia $n > 3$ dokonuje się, według Kartezjusza, za pomocą dwóch krzywych rzędu niższego niż n, których punkty wykreśla się na podstawie rozwiązania równań stopnia także niższego niż n.

Dodajmy, że celem Kartezjusza w *La géométrie* było raczej zakomunikowanie uzyskanych wyników niż ich wyjaśnianie. Stąd wykład jest raczej mało systematyczny, a dowody z reguły pominięte czy „zastąpione" uwagami typu: „Nie będę zatrzymywał się tu nad podawaniem szczegółów, ponieważ pozbawiłbym w ten sposób czytelnika przyjemności znalezienia ich samemu".

Znaczenie *La géométrie* polega nie tylko na pewnej unifikacji geometrii i algebry oraz stworzeniu w ten sposób zaczątków geometrii analitycznej, ale także na ostatecznym przezwyciężeniu ograniczeń wynikających z zasady jednorodności. Aby wyjaśnić tę kwestię, musimy cofnąć się do starożytnej Grecji, do momentu odkrycia wielkości niewspółmiernych. Otóż jednym ze sposobów wyjścia z trudności ujawnionych przez to odkrycie była tzw. algebra geometryczna. Polegała ona na zastąpieniu liczb i wykonywanych na nich działań przez figury geometryczne i operacje na nich wykonywane. Liczba stała się w ten sposób odcinkiem otrzymanym z odcinka przyjętego za jednostkę przez dodawanie skończoną liczbę razy, kwadrat liczby był polem, a sześcian – objętością odpowiedniej figury.

W konsekwencji więc wyrażenia typu $a^2 + b - c^3$ nie miały sensu. Kartezjusz zerwał ostatecznie z tym ograniczeniem interpretując potęgi liczby po prostu jako długości linii. Odrzucenie ograniczeń wynikających z zasady jednorodności pozwoliło mu na traktowanie każdego równania algebraicznego po prostu jako związku między liczbami. Stanowiło to istotny postęp w abstrakcji matematycznej.

Mówiąc o zasługach Kartezjusza dla matematyki należy też koniecznie wspomnieć o tym, że wprowadził on wiele nowoczesnych oznaczeń. *La géométrie* jest właściwie najdawniejszym tekstem matematycznym, który dzisiejszy matematyk może czytać bez kłopotów i trudności ze zrozumieniem stosowanej symboliki. Wiele z symboli używanych przez Kartezjusza jest stosowanych (z niewielkimi zmianami) do dziś. Dla przykładu: znajdujemy u niego wyrażenia postaci $\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Różni się ono od tego, co napisalibyśmy dziś, jedynie tym, że mamy tu aa zamiast dzisiejszego a^2 – choć dodać trzeba, że znajdujemy u Kartezjusza a^3 zamiast aaa, czy a^4 zamiast $aaaa$.

Podsumujmy zasługi Kartezjusza jako matematyka. Jest on właściwie autorem tylko jednego dzieła matematycznego, do tego dzieła nie samodzielnego, lecz stanowiącego jedynie jeden z trzech dodatków do innej pracy. Postać Kartezjusza nie może być jednak pominięta przez żadnego historyka matematyki. Na trwałe wpisał się on w dzieje tej (i nie tylko tej!) nauki przede wszystkim przez swoje rozważania metodologiczne. I choć postulat stworzenia matematyki uniwersalnej (rozwinięty później przez G.W. Leibniza w postaci projektu *characteristica universalis*) nie daje się w pełni zrealizować, to sformułowane przez Kartezjusza zasady i reguły do dziś wyznaczają metody budowania i rozwijania teorii naukowych, w szczególności zaś teorii matematycznych. Fakt, że wydają nam się one dziś oczywiste, to tylko dowód na to, jak dobrze zadomowiły się one w naszej metodologii. Jeśli chodzi o kwestie ściśle już matematyczne, to zasługą Kartezjusza pozostaje niewątpliwie unifikacja matematyki, dokładniej algebry i geometrii, i przez to stworzenie idei geometrii analitycznej (przypominają o tym m.in. stosowane dziś nazwy takie, jak „produkt (iloczyn) kartezjański" czy „współrzędne kartezjańskie"). Dalej, ostateczne przezwyciężenie ograniczeń zasady jednorodności, co stanowiło nieodzowny krok umożliwiający ogólne traktowanie krzywych algebraicznych, a w dalszej perspektywie rozwój abstrakcji matematycznej. Kartezjusz przyczynił się też do rozwoju symboliki matematycznej wprowadzając wiele symboli i oznaczeń funkcjonujących z powodzeniem do dziś.

Kartezjusz i fizyka

Roman S. INGARDEN

Apud me omnia fiunt mathematice in natura.

(Łac.: Według mnie wszystko się dzieje w przyrodzie na sposób matematyczny.)

Kartezjusz w liście do Mersenne'a

Bene qui latuit, bene vixit.

(W oryginale: *Bene vixit, qui bene latuit.* Łac.: Dobrze żył, kto dobrze się ukrył.

Owidiusz (43 p.n.e. – 17 n.e.), *Tristia* 3,4,25.)

Dewiza życiowa Kartezjusza

Używam zlatynizowanej i spolszczonej formy Kartezjusz zamiast francuskiej Descartes (czytaj 'Dekart' z akcentem na ostatniej zgłosce), mimo że sam Kartezjusz formy łacińskiej Cartesius nigdy nie używał, nawet gdy pisał po łacinie. (Wówczas pisał o sobie: Renatus Des Cartes.) Chodzi o to, że przydomek szlachecki „Des" nie należy do właściwego nazwiska i dlatego przymiotnik utworzony od nazwiska brzmi nawet po francusku *cartésien, -enne*, a nie *descartésien*, nazwa doktryny zaś to *cartésianisme*, a nie *descartésianisme*. Pełny jego tytuł szlachecki brzmiał po francusku: *René Des-Cartes Chevalier Seigneur du Perron.* Ostatni tytuł pochodzi ze spadku dóbr Perron z rodziny matki, która zmarła, gdy René miał rok (1597). Spadek ten pozwolił mu na dostatnie i samodzielne życie, nawet za życia ojca, który zmarł dopiero w wieku 70 lat, w roku 1640, gdy René miał 44 lata. (Wówczas otrzymał drugi spadek, który zainwestował, z czego uzyskiwał roczną rentę 6 do 7 tysięcy franków, co wówczas było dużo.) Te warunki materialne pozwoliły mu na „ukrycie się" na wsi (*latuit* od łac. *lateo, -ere, -ui* = być ukrytym, pozostać nieznanym). Było to w duchu grecko-rzymskiej etyki stoickiej (od gr. *stoa poikile* = malowany portyk w Atenach, w którym nauczał Zenon z Kition około 300 p.n.e., twórca stoicyzmu). Stoicyzm głosił „obojętność na cierpienia, zamkniętość duszy wobec złych stron życia" (A. Lalande). Stoicyzm był modny wśród klasycznie wykształconych ludzi tego czasu. Kartezjusz otrzymał bardzo staranne wykształcenie klasyczne w świeżo założonym znakomitym jezuickim kolegium królewskim (*Collège Royal*) w La Flèche w prowincji Anjou. Była to szkoła średnia, rodzaj gimnazjum, do której uczęszczał od wieku 10 do 18 lat. (Według nowszych danych Ch. Adama [1]; dawniej uważano, że od wieku 8 do 16 lat i to się często utrzymuje w literaturze, patrz np. [10], [2]). Wykształcenie uzupełnił Kartezjusz bakalaureatem i licencjatem prawa i medycyny na uniwersytecie w Poitiers (1616). Było to wykształcenie, jak chciał ojciec, na urzędnika królewskiego lub działacza samorządowego, lub na lekarza. Sam Kartezjusz, a może też wspólnie z ojcem, uznał, że nadaje się także dla kariery wojskowej i w tym celu wyjechał do Holandii, gdzie w latach 1618–1619 praktykował najbardziej wówczas nowoczesną sztukę wojenną. Na razie nic nie wskazywało na zamiary zostania uczonym. Został nim jednak, jakby mimo woli (a na pewno wbrew woli ojca). Wymaga więc pewnego komentarza to, co napisał Tatarkiewicz [11] o Kartezjuszu:

> Kartezjusz był jakby typem uczonego; był tylko i wyłącznie uczonym. Bez ambicji osobistych (w przeciwieństwie do Fr. Bacona), bez aspiracji do pouczania ludzi i poprawiania świata, opanowany był wyłącznie żądzą udoskonalenia własnego umysłu i poznania prawdy; ten cel kierował jego życiem od początku do końca.

Oddajmy jednak głos samemu Kartezjuszowi. W pierwszym swoim dziele opublikowanym anonimowo po francusku w Lejdzie w roku 1637, pt. *Rozprawa o metodzie właściwego kierowania rozumem i poszukiwania prawdy w naukach* (wraz z dodatkami: *Dioptryka, Meteory i Geometria, które są próbami tej metody*; „Próby", po francusku *Essais*, inaczej „Szkice", tak krótko nazywano to dzieło, patrz [5] i [4]), pisze:

> Od dzieciństwa uczono mnie różnych nauk, a ponieważ przekonywano mnie, że z ich pomocą mogę uzyskać jasne i pewne poznanie wszystkiego, co jest potrzebne do życia, byłem pełen wielkiej chęci opanowania tych nauk. Gdy jednak tylko skończyłem kurs nauki, który zwykle kończy się przyjęciem do

Rozwiązanie zadania F 442. Niech v_0 będzie początkową prędkością, natomiast m – masą kamienia. Oznaczmy przez F siłę oporu. Z zasady zachowania energii wynika, że

$$\int_0^{H_1} mg\,dz = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

gdy nie ma oporu, i

$$\int_0^{H_2} (mg+F)\,dz = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

gdy jest opór (H_1 i H_2 są maksymalnymi wysokościami, na jakie wzniosą się kamienie). Z powyższych równań wynika, że

$$mgH_1 = mgH_2 + \int_0^{H_2} F\,dz,$$

czyli $H_1 > H_2$.

Z zasady zachowania pędu mamy

$$\int_0^{T_1} mg\,dt = mv,$$

gdy nie ma oporu powietrza, i

$$\int_0^{T_2} (mg+F)\,dt = mv,$$

gdy jest opór (T_1 i T_2 są czasami wznoszenia się obu kamieni). Otrzymujemy stąd

$$mgT_1 = mgT_2 + \int_0^{T_2} F\,dt,$$

czyli $T_1 > T_2$.

A zatem kamień, który nie doznaje oporu powietrza, porusza się dłużej i osiąga większą wysokość.

> klasy uczonych, całkowicie zmieniłem swe zdanie. Tak zaplątałem się mianowicie w wątpliwościach i błędach, że wydawało mi się, że swojemi staraniami w nauce osiągnąłem tylko jedno: coraz bardziej i bardziej przekonywałem się o swojej niewiedzy. A, nawiasem mówiąc, kształciłem się w jednej z najbardziej znanych szkół w Europie i uważałem, że jeśli są gdzieś na Ziemi ludzie uczeni, to tam powinni być. (...) Stopniowo oswobodziłem się z wielu błędów, które mogą zasłaniać naturalne światło i uczynić nas mniej podatnymi na głos rozumu.
> Po tym, gdy zużyłem kilka lat na studia księgi świata i zdobyłem pewien zasób doświadczenia, pewnego dnia zdecydowałem się zbadać samego siebie i wyzyskać wszystkie siły rozumu dla wybrania dróg, którymi winienem podążać. (...)
> Pierwszym było, aby nigdy nie przyjmować za prawdziwą żadnej rzeczy, zanim by jako taka nie została rozpoznana przeze mnie w sposób oczywisty; co znaczy, aby starannie unikać pośpiechu i uprzedzeń oraz aby nie zawrzeć w swych sądach nic ponadto, co jawi się przed mym umysłem tak jasno i wyraźnie, że nie miałbym żadnego powodu, by o tym powątpiewać.

Owe „studia księgi świata” to kilkuletnie podróże i udział w wojnach i „na dworach” w Europie. (Był też w Polsce od Gdańska po Kraków, gdy w roku 1619 zdążał przez Danię, Polskę, Węgry i Czechy do Frankfurtu nad Menem na koronację Ferdynanda II Habsburga na cesarza, 28 sierpnia. Asmus [2] przeczy pobytowi Kartezjusza w Polsce, ale jego argumenty wydają się mało przekonywające.) Po koronacji Ferdynanda Kartezjusz wstąpił jako ochotnik do armii bawarskiej i wziął udział w wojnie 30-letniej, w tym w słynnej bitwie pod Białą Górą w Czechach. „W dniu 10 XI 1619 r. na postoju w Neuburg nad Dunajem w kampanii przeciw Czechom odkrył niewzruszoną jego zdaniem podstawę pewności: możemy wątpić we wszystko, ale nie możemy wątpić, że myślimy, a więc istniejemy: *Cogito, ergo sum* (łac.: Myślę, więc jestem)”, ([3] s. 166). W latach 1623 i 1624 był we Włoszech, potem 3 lata w Paryżu. W 1628 wyjechał ostatecznie do Holandii, gdzie spędził 20 lat jako prywatny uczony (jak Bacon, Huygens, Leibniz, Voltaire). Mieszkał w różnych małych miejscowościach, „w ukryciu”, w pobliżu uniwersytetów, z którymi się prywatnie kontaktował, czasami zapisując się też jako student. Zmarł w roku 1650 w Sztokholmie zaproszony do Szwecji przez królową szwedzką, Krystynę.

Oprócz „Szkiców” ogłosił Kartezjusz za życia (już pod swoim nazwiskiem) jeszcze 3 dzieła: *Medytacje o pierwszej filozofii* (po łacinie, dotyczy metafizyki, 1641), *Zasady filozofii* (w tym fizyki, po łacinie, 1644) i *Namiętności duszy* (psychologia, fizjologia, po francusku, 1649). Był więc uniwersalnym uczonym: zajmował się filozofią, matematyką, fizyką i biologią (psychologia, fizjologia). Jeśli chodzi o ocenę jego działalności naukowej dzisiaj, to jako reprezentatywną można zacytować opinię Bertranda Russella z jego znakomitej historii filozofii ([9] s. 583):

> Descartes był filozofem, matematykiem i przyrodnikiem (*man of science*). W filozofii i matematyce dzieło jego ma najwyższe znaczenie; w naukach przyrodniczych (*science*), choć chwalebne (*creditable*), nie było tak dobre jak dzieło niektórych jego współczesnych.

Tu ma Russell niewątpliwie na myśli Galileusza (1564–1642) i Keplera (1571–1630), którzy chociaż starsi od Kartezjusza (Galileusz o 32 lata, Kepler o 25), byli częściowo jego współczesnymi. O Keplerze Kartezjusz raczej niewiele wiedział, ale o Galileuszu słyszał już w kolegium, a potem czytał jego dzieła. Mógł go nawet odwiedzić będąc we Włoszech, ale nie zrobił tego, może nie śmiał, gdyż nie miał jeszcze wtedy żadnych publikacji. Zacytuję pewne wypowiedzi Galileusza i Kartezjusza wskazujące na różnice w ich stylu i sposobie myślenia, (patrz [7] s. 89):

Galileusz:

> W żadnym wypadku nie zamierzam wciskać teorii filozoficznych w ciasne ramy tego niewdzięcznego i całkowicie nieozdobnego stylu stosowanego przez czystych geometrów, którzy nie wypowiedzą żadnego pojedynczego słowa, które by nie było całkowicie niezbędne. (...) Nie uważam za błąd mówienie o wielu rozmaitych rzeczach, nawet w rozprawach, które mają tylko jeden specjalny

Rozwiązanie zadania F 441. Niech m będzie chwilową masą cylindra (wraz z cieczą), v – chwilową prędkością cylindra, h – chwilową wysokością słupa cieczy w chwili t, natomiast $m+\mathrm{d}m$, $v+\mathrm{d}v$, $h+\mathrm{d}h$ odpowiednimi wartościami w chwili $t+\mathrm{d}t$. Z zasady zachowania pędu mamy

$$(m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)-mv=-\mathrm{d}m(v_0-v),$$

gdzie v_0 jest prędkością wypływu cieczy przez otworek (względem cylindra), czyli z dokładnością do wyrazów liniowych w różniczkach

$$m\,\mathrm{d}v+v_0\,\mathrm{d}m=0\,.$$

Z zasady zachowania energii mamy

$$\frac{1}{2}(m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)^2-\frac{1}{2}mv^2-$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{d}m(v-v_0)^2=$$
$$=-\mathrm{d}mgh-\frac{1}{2}\mathrm{d}m\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

Korzystając z zasady zachowania pędu, z dokładnością do wyrazów liniowych w różniczkach otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2+gh=\frac{1}{2}v_0^2\,.$$

Ponieważ ciecz jest nieściśliwa, mamy

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}R^2=-v_0r^2\,.$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy

$$v_0^2=\frac{2gh}{1-p}\,,$$

gdzie $p=\left(\frac{r}{R}\right)^4$ oraz

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{\frac{2gp}{1-p}h}\,.$$

Wprowadźmy zmienne bezwymiarowe

$$y=\frac{h}{H}\,,\qquad u=\sqrt{\frac{1-p}{2gH}}v\,,$$
$$\tau=\sqrt{\frac{gp}{2H(1-p)}}t\,.$$

W tych zmiennych wysokość słupa cieczy opisuje równanie

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=-2\sqrt{y}\,.$$

z warunkiem początkowym $y(0)=1$. Rozwiązanie ma postać

$$y=(1-\tau)^2\,.$$

Podstawiając to do równania określającego prędkość wypływu cieczy z cylindra dostajemy

$$u_0=1-\tau\,.$$

Zasada zachowania pędu przyjmuje postać

$$m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}+(1-\tau)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}=0\,,$$

przy czym $m=M+m_0y$. Otrzymujemy stąd równanie określające prędkość cylindra w postaci

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=\frac{2(\tau-1)^2}{\tau_0^2+(\tau-1)^2};\quad \tau_0=\sqrt{\frac{M}{m_0}}$$

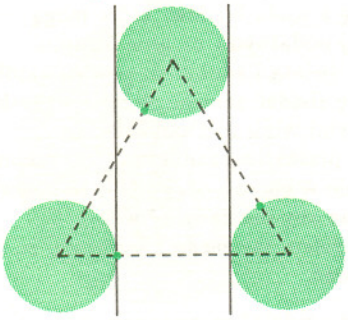
z warunkiem początkowym $u(0)=0$. Rozwiązanie ma postać

$$u=2\left[\tau+\tau_0\left(\operatorname{arctg}\frac{1-\tau}{\tau_0}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\tau_0}\right)\right].$$

Dla $\tau=\tau_0$ cylinder jest pusty, a jego prędkość ma maksymalną wartość

$$u_{\max}=2\left(1-\operatorname{arctg}\frac{1}{\tau_0}\right).$$

Rozwiązanie zadania M 792. Tak; oto przykład takiego zbioru, pomysłu Pana Leszka Pieniążka:



Koła otwarte (bez brzegu) mają promienie jednostkowe, a ich środki są wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku długości 4; ponadto do zbioru należą trzy punkty leżące na bokach trójkąta (patrz rysunek).

Czytelnik zechce zastanowić się, jak zmodyfikować ten przykład, by otrzymać podzbiór płaszczyzny, którego rzut na dowolną prostą jest sumą dwóch rozłącznych półprostych otwartych (bez końców).

Rozwiązanie zadania M 794. Nie. Po pierwsze, gdyby taki zbiór istniał, musiałby być skończony. Aby to wykazać, wprowadźmy na płaszczyźnie układ współrzędnych kartezjańskich. Współrzędne każdego punktu są wyznaczone przez jego rzuty na osie układu. Ponieważ rozpatrywany zbiór po zrzutowaniu na każdą z osi daje dokładnie 1996 punktów, to sam składa się z co najwyżej $1996 \cdot 1996$ punktów.

Rozważmy teraz wszystkie proste przechodzące przez więcej niż jeden punkt zbioru. Jest ich co najwyżej $\binom{1996^2}{2}$, a więc skończenie wiele, podczas gdy kierunków rzutowania na płaszczyźnie jest nieskończenie wiele. Istnieje więc rzut prostopadły, który nie „skleja" żadnych dwóch punktów naszego zbioru, a zatem zbiór musi składać się z dokładnie 1996 punktów. Jednak wówczas rzut w kierunku prostej przechodzącej przez dowolne dwa punkty zbioru „skleja" je i obraz naszego zbioru w tym rzucie składa się z co najwyżej 1995 punktów, co przeczy założeniom zadania i dowodzi, że taki zbiór nie może istnieć.

> temat, gdyż wydaje mi się, że nasze czyny i odkrycia uzyskują swoją wielkość, szlachetność i jakość nie tylko przez rzeczy konieczne, których brak byłby niedopuszczalny, ale także przez wiele innych spraw.

Kartezjusz pisze o Galileuszu:

> Wielkim błędem [Galileusza] wydają mi się jego ciągłe dygresje; nie pozostaje on zwykle przy jednym temacie, aby wszystko wyjaśnić, co należy do tego jednego zagadnienia. To wskazuje, że nie wszystko po kolei przemyślał i że szuka tylko określonych efektów, bez rozważenia pierwszych przyczyn; buduje więc na piasku.

Kartezjusz zajął się więc stworzeniem mocnych podstaw fizyki. Opierał się na tym, co poznał doświadczalnie i zrozumiał Galileusz, ale sformułował to znacznie dokładniej i wyraźniej, zgodnie ze swoją nowo odkrytą „metodą". W ten sposób powstały po raz pierwszy wyraźnie sformułowane następujące podstawowe zasady fizyki (szerzej omawiam to w [8]):

(1) **zasada bezwładności**. W ujęciu Kartezjusza:

> Uważam, że natura ruchu jest taka, że jeżeli jakieś ciało raz zostanie wprawione w ruch, to to samo już wystarcza, by poruszało się dalej z tą samą szybkością i stale w tym samym kierunku po prostej, tak długo aż nie zostanie zatrzymane lub odchylone przez jakąś inną przyczynę.

Jest to już prawie to samo co u Izaaka Newtona (1643–1727, *Principia* 1687), z tym że Newton wyodrębnił drugą część zdania w tzw. drugą zasadę mechaniki wprowadzając pojęcia siły, masy i przyspieszenia i podając związek między nimi, czyli swoje słynne równania ruchu.

(2) **zasada względności**. Czytamy u Kartezjusza:

> Chociaż więc jakiekolwiek ciało posiada tylko jeden ruch sobie właściwy, który należy rozumieć w ten sposób, że ciało odsuwa się od poszczególnych przylegających do niego i spoczywających ciał, może ono jednak uczestniczyć w niezliczonych innych ruchach, jeżeli mianowicie tworzy część innych ciał, które wykonują inne ruchy.

W ten sposób Kartezjusz starał się pogodzić poglądy Ptolemeusza i Kopernika na ruchy Ziemi i Słońca, a także polemicznie obronić się przed zarzutami Kościoła w epoce procesu i skazania Galileusza (1633). Faktycznie Kartezjusz sformułował jasno po raz pierwszy kapitalną zasadę względności ruchu, tylko częściowo rozumianą przez Kopernika i Galileusza, ale nie rozumianą przez współczesnych. Zasady tej nie rozumiał jeszcze w pełni sam Newton wprowadzając błędne pojęcia absolutnej przestrzeni i absolutnego czasu. Całkowicie matematycznie ścisłe sformułowanie zasady względności ruchu dał dopiero Albert Einstein (1879–1955) w XX wieku.

(3) **zasada zachowania ilości ruchu**. Na ten temat Kartezjusz napisał:

> ... ruch jest niczym innym jak tylko stanem, w którym znajduje się poruszająca się materia, ma on jednak pewną określoną ilość, co do której łatwo możemy zrozumieć, że może być stale taka sama w całym wszechświecie, chociażby się zmieniała w jego poszczególnych częściach.

Kartezjusz uważał, że ilość ruchu jest iloczynem szybkości i „wielkości ciała", którą rozumiał jako objętość ciała, a nie jako iloczyn objętości przez gęstość (jak dopiero wprowadził pojęcie masy Newton). Błąd ten miał przyczynę filozoficzną: Kartezjusz uważał materię za „rzecz rozciągłą" (a duszę za „rzecz myślącą" nierozciągłą), podczas gdy materii trzeba przypisać także inne istotne atrybuty (jak masę, ładunek, moment magnetyczny itp.). Drugi błąd Kartezjusza polegał na tym, że chociaż dobrze wiedział, że szybkość ma kierunek, nie tylko absolutną wielkość, zlekceważył ten fakt uznając, że istotna w prawie zachowania ilości ruchu jest tylko absolutna wielkość szybkości. Uważał bowiem, że dusza musi mieć swobodę zmiany kierunku ruchu, aby w ten sposób kierować ciałem. Znowu zaważyła więc jego filozofia metafizyczna, która wydała mu się zupełnie oczywista, a więc prawdziwa. Widzimy tu wyraźnie granice racjonalizmu: nie można wszystkiego na temat świata wyprowadzać z „czystego myślenia".

Bibliografia

[1] Adam, Ch. (1937) *Descartes, sa vie et son oeuvre*, Boivin, Paris.
[2] Asmus, W.F. (1956) *Dekart*, Gos. Izd. Polit. Lit., Moskwa.
[3] Bocheński, J. (1993) *Zarys historii filozofii*, Philed, Kraków.
[4] Descartes, R. (1970) *Rozprawa o metodzie*, tłum. W. Wojciechowska, PWN, Warszawa.
[5] Dekart, R. (1953) *Rassuždenie o metodie s priloženiami Dioptrika, Meteory, Geometria*, red. i tłum. G.G. Slusarewa i A.P. Juszkiewicza, Izd. Akad. Nauk SSSR, Moskwa.
[6] Eco, U. (1995) *Wyspa dnia poprzedniego*, tłum. A. Szymanowski, PIW, Warszawa.
[7] Feyerabend, P. (1986) *Wieder den Methodenzwang*, Suhrkamp, Frankfurt am Main.
[8] Ingarden R.S. (1950) Descartes a fizyka nowożytna, *Kwart. Filozoficzny* **19**, 71–149, nowe wyd: Kartezjusz a Galileusz i Newton – jako twórcy fizyki nowożytnej, w: R.S. Ingarden (1994) *Fizyka i fizycy. Szkice i studia o historii i filozofii fizyki*, Wyd. UMK, Toruń, s. 75–127.
[9] Russell, B. (1946) *History of Western Philosophy*, Allen and Unwin, London.
[10] Specht, R. (1966) *René Descartes in Selbstzeugnissen und Bilddokumenten*, Rowohlt, Reinbek bei Hamburg.
[11] Tatarkiewicz, W. (1958) *Historia filozofii*, t. II. *Filozofia nowożytna do roku 1830*, Wyd. nowe, PWN, Warszawa.
[12] Voltaire (1956) *Elementy filozofii Newtona*, wstęp A. Teske, tłum. B.J. Gawecki, PWN, Warszawa.

Ten drugi błąd Kartezjusza poprawił Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) w roku 1686 w pracy *Brevis demonstratio memorabilis erroris Cartesii* (*Krótki dowód pamiętnego błędu Kartezjusza*). Leibniz wprowadził obok zasady zachowania ilości ruchu (czyli pędu) dla wszystkich trzech składowych przestrzennych także zasadę zachowania energii. (Energię zdefiniował, ale jeszcze tak jej nie nazwał, nazywał ją „siłą": *vis viva* = siła żywa jako energia kinetyczna, a *potentia motrix* lub *potentia agendi* = możliwość poruszania, jako energia potencjalna.) Leibniz wdał się jednak w raczej bezsensowną dyskusję filozoficzną, co jest ważniejsze: ilość ruchu czy energia? Dziś wiemy, że obie wielkości są równie ważne jako całki pierwsze równań ruchu Newtona. Energia tworzy czwartą, czasową, składową pędu z punktu widzenia szczególnej teorii względności Einsteina.

Dalsze spekulacje filozoficzno-fizyczne Kartezjusza to jego kosmologia. Opierając się na swoich prawach ruchu, czyli – jakbyśmy dziś powiedzieli – na swojej dynamice, chciał wyjaśnić prawa ruchu układu planetarnego. Wprowadził w tym celu hipotetyczne wiry przezroczystej „materii kosmicznej" (fluidu, eteru?), która – według niego – wypełnia całą przestrzeń międzyplanetarną. Wiry te miałyby poruszać planety w ich ruchu obrotowym i naokoło Słońca. Ów fluid międzyplanetarny miałby być też, według Kartezjusza, ośrodkiem przenoszącym światło. Kartezjusz ignorował odkryte już w tym czasie trzy prawa Keplera ruchu planet (być może ich nie znał) i nie wykonał żadnych obliczeń matematycznych ruchu planet. Obliczenia zrobił dopiero Newton wychodząc ze swych równań ruchu i uzyskując z rachunku prawa Keplera. Newton wyśmiał całkowicie teorię Kartezjusza. (Napisał: „Hipoteza wirowa zatem w zupełności przeczy zjawiskom astronomicznym...", a o sobie: „Hipotez nie wymyślam" = *Hypotheses non fingo.*) Poglądy Newtona rozpropagował we Francji Voltaire (1694–1778) w swoich „Listach filozoficznych" („Listach o Anglikach") i w „Elementach filozofii Newtona" (1738), ([12]), zwalczając gwałtownie kartezjanizm. W Niemczech zrobił to Leibniz. W ten sposób upadła wielka przedtem sława Kartezjusza w fizyce.

Krytyka ta była w dużym stopniu słuszna, ale trzeba sobie uświadomić, jakim kosztem ona się dokonała. Newton faktycznie wrócił do tzw. ukrytych właściwości Arystotelesa (które słusznie krytykował Kartezjusz), gdyż uznał za taką właściwość siłę grawitacji. Działa ona, według Newtona, na odległość przez próżnię bez żadnego opóźnienia, momentalnie. Tak się wówczas wydawało, dziś jednak wiemy, że nie jest to prawda, istnieje pewne opóźnienie. Oddziaływanie rozchodzi się z szybkością światła (a więc bardzo dużą) przez pole grawitacyjne, które istnieje też w „fizycznej próżni", to znaczy przestrzeni bez ciał o tzw. masie spoczynkowej. Wyjaśnił to dopiero Einstein w swojej ogólnej teorii względności. Mamy tu więc jakby podwójne zwycięstwo poglądów Kartezjusza. Po pierwsze, zachodzi w przyrodzie (w niekwantowym przybliżeniu) lokalna przyczynowość (o którą walczył Kartezjusz), w której pośredniczy ośrodek fizyczny (pole), choć nie posiadający masy spoczynkowej (dziś mówimy o grawitonach o masie zerowej jak fotony). Po drugie, zwyciężył geometryczny opis materii uzyskany dzięki temu, że Einstein wprowadził nową własność przestrzeni: krzywiznę według tzw. geometrii Riemanna odkrytej w XIX wieku. (Nie znaczy to jednak, aby program geometryzacji już dziś został w fizyce kompletnie zrealizowany: na razie odnosi się tylko do grawitacji.) Jednak pozostają błędami Kartezjusza jego niewiara w istnienie próżni fizycznej (mimo że uczestniczył w doświadczeniach Pascala z próżnią) oraz jego hipoteza wirów.

Kartezjusz wniósł jednak do fizyki znacznie więcej niż tylko swe ogólne koncepcje teoretyczne. (Nie były one jeszcze bardzo matematyczne, wbrew jego ogólnemu postulatowi matematyzacji fizyki, ale wtedy nie mogły jeszcze być.) Mimo wszystko rozjaśniły one drogę dalszego postępu fizyki. Należy sobie bowiem uświadomić, jaka była wtedy mentalność ludzi epoki baroku, por. np. na ten temat kapitalną satyrę baroku w ostatniej powieści Umberta Eco [6]. Istotne są też wyniki Kartezjusza w optyce i w tym, co się wówczas nazywało „meteorami", czyli fizyce atmosfery. Kartezjusz pierwszy opublikował

prawidłowe prawo załamania światła (prawdopodobnie niezależnie od W. Snella, który je nieco wcześniej, ale inaczej, sformułował i nie opublikował) oraz dokonał wielu znakomitych odkryć w dziedzinie teorii przyrządów optycznych (punkty aplanatyczne, owale Descartesa, zastosowanie hiperboloidy obrotowej itp.). Niestety, większość tych odkryć jest niepraktyczna z powodu trudności wykonania asferycznych powierzchni optycznych (Kartezjusz zbudował maszynę do tego celu, ale niewystarczająco dokładną). W *Meteorach* wyjaśnił prawidłowo powstawanie tęczy przez załamanie i odbicie światła w kroplach wody (niestety, nie znał jeszcze zjawiska rozszczepienia, które odkrył dopiero Newton, więc barwy tęczy pozostały na razie nie wyjaśnione).

W sumie był Kartezjusz wielkim fizykiem przełomowej epoki. Nikt z wielkich fizyków jego czasu nie dokonał wszystkiego dla stworzenia tzw. fizyki klasycznej (przedkwantowej). Był im równy wielkością myśli, choć mylił się w niektórych sprawach.

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

Sprostowanie

Zadanie **M 769** z kwietniowego numeru *Delty* zostało sformułowane w niezbyt ścisły sposób, a jego rozwiązanie zawiera poważną usterkę. Przypomnijmy treść tego zadania:

Czy istnieje podzbiór płaszczyzny, którego rzut prostopadły na dowolną prostą jest sumą dwóch rozłącznych odcinków?

Rozwiązanie przedstawione przeze mnie w *Delcie* korzystało z pewnej własności, którą intuicyjnie można opisać następująco: jeśli podzbiór płaszczyzny spełniający warunki zadania rzutować na ustaloną prostą obracając go wokół ustalonego punktu, to końce obu odcinków, z których rzut się składa, będą się poruszać w sposób ciągły (czyli obrót o „mały" kąt zmieni rzut w „małym" stopniu). Ścisły, formalny dowód tej własności wymaga – jak sądziłem – pewnych rozważań technicznych, żmudnych, ale dość oczywistych dla każdego, kto zna podstawy analizy matematycznej. W tym przekonaniu powierzyłem Czytelnikom uściślenie rozumowania. Na szczęście Pan Leszek Pieniążek nie dał się oszukać i podał prosty przykład wskazujący nie tylko, iż moja sugestia jest **fałszywa**, lecz, co więcej, zbiór spełniający warunki zadania **istnieje**! (Zob. zadanie **M 792**.)

Czy zatem rozwiązanie firmowe jest całkiem błędne? Na szczęście nie; po minimalnych zmianach „kosmetycznych" działa bez zarzutu, jeśli słowo *odcinek* w treści zadania rozumieć jako *przedział prostej wraz z końcami* (jak to często przyjmuje się w geometrii) albo jeśli słowo *rozłącznych* zastąpić przez *rozłącznych i nie mających wspólnego końca*. Również dodanie pewnych założeń technicznych (np. że zbiór jest otwarty lub domknięty) zapewnia spełnienie powyższej własności ciągłej zależności rzutu od kąta obrotu i – co za tym idzie – negatywną odpowiedź na pytanie z zadania **M 769**. Sprawdzenie, iż tak jest w istocie, pozostawiam, jak zwykle, Wnikliwym Czytelnikom...

Przepraszam za niedbalstwo, a Panu Leszkowi Pieniążkowi dziękuję za czujność i inspirację do zadań, które ukazują się w niniejszym numerze *Delty*.

M 792. Czy istnieje podzbiór płaszczyzny, którego rzut prostopadły na dowolną prostą jest sumą dwóch rozłącznych odcinków otwartych (tj. bez końców)?
Rozwiązanie na str. 6

M 793. Czy istnieje podzbiór płaszczyzny, którego rzut prostopadły na dowolną prostą jest sumą trzech rozłącznych odcinków otwartych (tj. bez końców)?
Rozwiązanie na str. 10

M 794. Czy istnieje podzbiór płaszczyzny, którego rzut prostopadły na dowolną prostą składa się dokładnie z 1996 różnych punktów?
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Krzysztof REJMER

F 441. Otwarty od góry cylinder o promieniu wewnętrznym R i masie M jest wypełniony nieściśliwą cieczą o masie m_0. Wysokość słupa cieczy w cylindrze jest równa H. W bocznej ściance cylindra u jego podstawy wywiercono dziurkę o promieniu r. Znaleźć prędkość cylindra jako funkcję czasu, jeśli w chwili początkowej spoczywa on na gładkiej, poziomej płaszczyźnie.
Rozwiązanie na str. 5

F 442. Dwa kamienie rzucono z taką samą prędkością początkową w polu grawitacyjnym Ziemi pionowo do góry. Pierwszy porusza się w próżni, a drugi w powietrzu. Porównać maksymalne wysokości, na jakie wzniosą się kamienie, oraz czasy wznoszenia się. Przyjmujemy, że pole grawitacyjne jest jednorodne.
Rozwiązanie na str. 4

Kartezjusz – ojciec nowożytnego racjonalizmu

Michał TEMPCZYK

W trwającej tysiące lat historii filozofii europejskiej wielu było wybitnych myślicieli, którzy wnieśli trwały wkład do tej dziedziny poznania, jednak Kartezjusz zajmuje w ich gronie miejsce szczególne, uważa się go bowiem powszechnie za twórcę filozofii nowożytnej. Oto jak Władysław Tatarkiewicz rozpoczyna paragraf poświęcony temu filozofowi:

„Czym dla nowożytnej nauki był Galileusz, tym Kartezjusz dla nowożytnej filozofii. Połączywszy zabiegi o wzorową metodę ze spekulacją filozoficzną stworzył nowy typ filozofii. Toteż od jego wystąpienia, czyli od pierwszej połowy XVII w., przyjęte jest zaczynać nowy okres w filozofii."

Celem tego tekstu jest zastanowienie się, na czym polega oryginalność filozoficznego systemu Kartezjusza i dlaczego jego propozycja odegrała tak wielką rolę w rozwoju filozofii. Zacznijmy od stwierdzenia, że na filozofię można spojrzeć jako na walkę optymistów z pesymistami. Optymiści to twórcy wielkich systemów, których zadaniem jest opisanie podstawowej struktury tego, co istnieje. Wierzą oni, że zadanie to jest wykonalne i że to im udało się powiedzieć o świecie najważniejsze prawdy. Z kolei pesymiści twierdzą, że poznanie ludzkie jest ułomne i że w związku z tym nigdy nie odkryjemy żadnej niepodważalnej, niezawodnej prawdy o świecie. Oba stanowiska są w filozofii potrzebne i oba nurty – konstruktywny i krytyczny – wzajemnie wpływaja na siebie, dając w rezultacie wiedzę świadomą swoich ograniczeń, dążącą wytrwale do ich przezwyciężenia.

W Starożytności sceptycy dokładnie opracowali teorię ograniczeń i pomyłek ludzkiego poznania, atakując wielkie systemy, dzięki którym filozofia tak wspaniale rozwijała się w tym okresie. Ich twórcy nie ulegali presji sceptyków, z przekonaniem głosząc, że świat jest taki, jak go opisują. Wydaje się, że problemem większym od tych ataków była dla nich różnorodność alternatywnych propozycji, dlatego dyskutowali między sobą, kto ma rację, wierząc, że prawda o świecie jest możliwa do zdobycia. W toku tych dyskusji filozofia rozwijała się, powstawały nowe systemy, a stare wzbogacały się. Okresy rozkwitu przeplatały się z okresami zastoju i wątpliwości. W Średniowieczu ostatnim okresem wielkiego rozwoju był wiek XIII, gdy powstał filozoficzny system Tomasza z Akwinu.

Kartezjusz zastał sytuację trudną i zniechęcającą. Kilka stuleci trwało scholastyczne dzielenie włosa na czworo, jałowa walka stanowisk różniących się w szczegółach, brak nowych propozycji. Jednocześnie w tym czasie powstawała nowożytna nauka, Bacon i Galileusz opracowywali podstawy skutecznej metody naukowej, o której niezawodności byli przekonani. Filozofia przestała być królową nauk. Można było pogodzić się z upadkiem filozofii lub dążyć do przywrócenia jej dawnej świetności. Gdyby Kartezjusz wybrał pierwszą możliwość, to dzisiaj wspominalibyśmy go jedynie jako wybitnego matematyka i przyrodnika, na szczęście postanowił on stworzyć skuteczną metodę dążenia do poznania pewnego i uniwersalnego. Jego pierwsza praca filozoficzna nosi tytuł *Rozprawa o metodzie.* To właśnie ta metoda spowodowała, że filozofia wkroczyła na nowe tory. Obok opisywania świata jednym z jej podstawowych zadań stało się krytyczne uzasadnianie prawdziwości poznania filozoficznego. Rozpoczęła się epoka nowożytna.

Punktem wyjścia metody filozoficznej Kartezjusza jest głęboki sceptycyzm. Skoro celem jego badań jest stworzenie metody skutecznej i niezawodnej, to metoda ta musi być odporna na zarzuty sceptyków. Zarzuty te można podzielić na dwie grupy. Pierwsza dotyczy poznania świata zewnętrznego i oparta jest głównie na błędach spostrzegania zmysłowego. Błędów tych nie można skutecznie wyeliminować, dlatego wszelkie poznanie świata zewnętrznego, które jest przecież w ostateczności oparte na zmysłach, musi być uznane za zawodne. Historia nowożytnej nauki, a zwłaszcza burzliwe przemiany zachodzące w niej

obecnie, przekonująco pokazują, że nawet poznanie naukowe nie prowadzi do prawdy pewnej i jedynej. Po odrzuceniu poznania zmysłowego jedynym źródłem poznania filozoficznego może być umysł i tej sferze Kartezjusz poświęcił swoją uwagę, stając się pierwszym wielkim racjonalistą nowożytnym, na którego powoływali się wszyscy racjonaliści późniejsi.

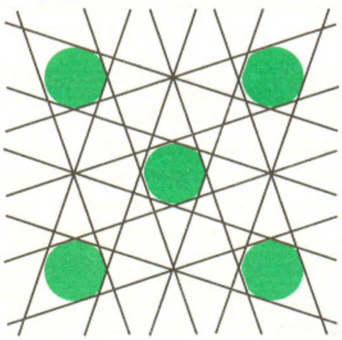
W dziedzinie poznania umysłowego sytuacja była wiele lepsza niż w poznaniu empirycznym, a to dzięki matematyce, która w tym czasie wspaniale się rozwijała, między innymi za sprawą naszego filozofa. Z tego powodu matematyka stała się dla Kartezjusza wzorcem poznania pewnego. Podstawowymi cechami tej dziedziny wiedzy jest jasność i wyraźność, a to z kolei wiąże się z prostotą. Powstała w ten sposób metoda analityczna, polegająca na rozkładaniu każdego zagadnienia na najprostsze składniki, dokładnym poznaniu tych składników i na skutecznym złożeniu z nich wyjściowej całości. Jest to metoda uniwersalna, obejmująca zarówno filozofię, matematykę, jak i nauki empiryczne. W fizyce i chemii szczytowym osiągnięciem tej metody jest atomowa teoria budowy materii i jej kontynuacja, czyli fizyka kwantowa i teoria cząstek elementarnych. Warto w tym miejscu przypomnieć, że sam Kartezjusz nie wierzył w istnienie próżni, dlatego był przeciwnikiem filozofii atomistycznej. Wierzył on, że cała przestrzeń jest napełniona subtelnym eterem, który przenosi oddziaływania między ciałami. Z kolei ciała, jego zdaniem, są jedynie zagęszczeniami eteru i nie ma zasadniczej różnicy między nimi a tym, co uważa się zwykle za przestrzeń pustą.

Powróćmy do filozofii i poszukajmy w umyśle tego, w co nie można wątpić. Otóż takim podstawowym faktem jest nasze myślenie. Nie treść myśli, która może być błędna nawet w matematyce, lecz sam fakt myślenia. Myślenie stało się punktem wyjścia filozofii Kartezjusza. Znalazło to wyraz w sławnym powiedzeniu *cogito ergo sum*. Dalszy krok to poszukiwanie niezawodnych prawd poznawalnych przez umysł, których źródłem jest przede wszystkim matematyka. Zarzut sceptyków w tej dziedzinie polegał na głoszeniu, że nasz umysł może być oszukiwany przez jakąś potężną istotę, która dostarcza nam fałszywej matematyki. Z zarzutem tym Kartezjusz rozprawił się odwołując się do Boga, który w swojej dobroci i mądrości na pewno nas nie oszukuje.

Poprzestaniemy na tym zwięzłym opisie podstaw filozofii Kartezjusza i na koniec zastanowimy się nad jego rolą w filozofii. Prostota i przekonująca moc tej filozofii były tak wielkie, iż stała się ona na ponad sto lat punktem odniesienia dla innych filozofów. Na przykład Spinoza sformułował swoją *Etykę* w sposób aksjomatyczny. Do dzisiaj wszyscy racjonaliści nawiązują do Kartezjusza. E. Husserl, twórca najwybitniejszego systemu filozofii spekulatywnej naszego stulecia – fenomenologii – kontynuował jego dzieło. Tworząc system metafizyczny trzeba obecnie w jakiś sposób poruszyć i rozwiązać problem jego uzasadnienia, a ponieważ empiryzm okazał się zawodny, racjonalizm wydaje się jedyną drogą poszukiwania podstawowej prawdy o bycie. Można zatem zapytać: Dlaczego filozofowie nie są przeważnie racjonalistami? Odpowiedź na to wiąże się z problemem ceny, jaką zapłacił Kartezjusz za pewność poznania rozumowego.

Cena ta okazała się wysoka. W przeciwieństwie do poznania empirycznego nasza wiedza umysłowa może być tak czysta i niezawodna, ponieważ człowiek składa się z dwóch odrębnych substancji: ciała i duszy. Jest to podział uniwersalny, dlatego u Kartezjusza wszystkie byty są albo duchowe i ich podstawową własnością jest myślenie, albo fizyczne i wtedy istnieją w przestrzeni. Te dwa rodzaje substancji są niezależne, czego dowodem są duchy, na przykład anioły, i pozbawione duszy ciała fizyczne. Ten podział, gwarantujący czystość i niezależność poznania umysłowego, prowadzi jednak natychmiast do kłopotów, które dla nas brzmią czasem anegdotycznie. Bardzo poważnym i nierozwiązanym do końca zagadnieniem jest sposób połączenia ludzkiej duszy i ciała. Po wielu dyskusjach i wahaniach Kartezjusz wskazał szyszynkę jako tę część ciała, której zadaniem jest utrzymywanie kontaktu z duszą. Widać na tym przykładzie jak poważnie i dosłownie traktował zagadnienie powiązania obu rodzajów substancji.

Rozwiązanie zadania M 793. Tak. Przykładową konfigurację przedstawia poniższy rysunek.



Środki pięciu kół otwartych są wierzchołkami i środkiem pewnego kwadratu, a cztery czwórki równoległych prostych – to te styczne wewnętrzne do różnych par kół, które nie przecinają wnętrza żadnego koła. Na poszukiwany zbiór składają się koła, do których trzeba jeszcze dołączyć osiem punktów styczności kół z prostymi – Czytelnik zechce samodzielnie rozstrzygnąć, które. Czy można tak dobrać rozmiary kół i kwadratu, by promienie wszystkich kół nie były jednakowe?

Nasuwa się naturalne pytanie, dla jakich liczb naturalnych n istnieje taki podzbiór płaszczyzny, którego rzut prostopadły na dowolną prostą jest sumą dokładnie n rozłącznych odcinków otwartych. Wiemy, że $n = 2, 3$ spełniają ten warunek, $n = 1$, oczywiście, też. Nieco trudniej sprawdzić, że również w przypadku $n = \infty$ odpowiedź jest pozytywna. Ogólne rozstrzygnięcie tego zadania nie jest znane autorowi – być może to atrakcyjny temat na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki *Delty*. Pan Leszek Kołtuński umie podobno skonstruować przykłady takich zbiorów dla wszystkich n parzystych, lecz dowód nie jest jeszcze znany redakcji *Delty*.

Trudność jest jednak znacznie głębsza. Uwięzieni w czystym poznaniu umysłowym nie potrafimy wyjść poza świadomość i kontaktować się ze światem fizycznym. Świat ten pozostaje dla duszy tylko sferą jej subiektywnych wrażeń, czymś na kształt gry obserwowanej na monitorze komputera. Ten podział na świadomość i niedostępny dla niej bezpośrednio świat fizyczny, jest zasadniczym ograniczeniem nowoczesnej filozofii. Starożytni wierzyli, że kontaktują się ze światem i że poznają go w sposób prawdziwy. Filozofowie próbują przekroczyć granicę zarysowaną przez Kartezjusza, lecz na razie nie udaje im się to.

Drugie ograniczenie to kłopoty współczesnego racjonalizmu. Coraz więcej wiemy o ograniczeniach i konwencjonalności matematyki. Nie wierzymy w prawdziwość jej teorii, a ponadto okazało się, jak wiele matematyka czerpie z doświadczenia zmysłowego. Nie jest ona już źródłem wiedzy pewnej i jednoznacznej. Racjonalizm szuka głębszych korzeni poznania, na przykład w schematach myślenia i języka. Te kłopoty nie zmniejszają jednak wielkości Kartezjusza i jego roli zarówno w przeszłości, jak i obecnie.

Od Redakcji

Sformułowanie „Nie wierzymy w prawdziwość matematyki", użyte w ostatnim akapicie powyższego artykułu, może się wydawać bulwersujące. Matematyka jest wszak podstawowym instrumentem inżyniera, fizyka, astronoma, ekonomisty itp. itd. Czy można stosować – i to na ogół z dobrym skutkiem – naukę, w której prawdziwość nie wierzymy?

Wyjaśnienia należy szukać w rozumieniu słów „wierzymy" i „prawdziwość". Dla matematyka „wierzymy" może być rozumiane jedynie jako „mamy dowód", podczas gdy „prawdziwość" teorii odnosi się zwykle do jakiegoś określonego jej modelu.

W tej sytuacji „prawdziwość matematyki" może oznaczać istnienie modelu, w którym jest ona prawdziwa, czyli jej niesprzeczność. Otóż, Kurt Gödel wykazał w 1931 roku, że w żadnej dostatecznie bogatej teorii matematycznej nie można udowodnić jej własnej niesprzeczności. Cóż dopiero mówić o całej matematyce! W tym znaczeniu wolno więc stwierdzić, że nie możemy wiedzieć o prawdziwości matematyki. Bo przecież dla matematyka nie jest wystarczającym dowodem niesprzeczności jego nauki fakt, że dotychczas nikt na sprzeczność nie natrafił, a stosowanie metod matematycznych w życiu realnym nie przyniosło totalnej katastrofy...

Patrz w niebo

Na zdrowy rozum, jednym z głównych celów wszelkich obserwacji astronomicznych powinno być zlokalizowanie na niebie źródła promieniowania, potem określenie jego odległości, następnie badanie jego cech fizycznych itd., jak to się zazwyczaj robi. Jednak jest rodzaj obserwacji, gdzie to wszystko na ogół nie wchodzi w grę – są to obserwacje promieniowania kosmicznego. Jedyne, co można w tym przypadku zaobserwować, to tylko sam fakt wpadnięcia szybkiej cząstki do ziemskiej atmosfery, no i parametry tej cząstki, ale ta cała najciekawsza reszta jest z zasadniczych powodów nie do odtworzenia. Bowiem cząstki promieniowania kosmicznego, jako obdarzone ładunkiem elektrycznym, podlegają podczas swojego ruchu oddziaływaniu ze strony kosmicznego pola magnetycznego i ich kierunek ruchu w chwili trafienia w Ziemię nie ma przeważnie wiele wspólnego z kierunkiem do ich ewentualnego źródła.

Mierzy się więc energię cząstek, ich rozkład w czasie, rozkład według mas, przy czym nawet te parametry promieniowania kosmicznego są w ziemskich warunkach odtwarzane okrężnymi metodami. Mianowicie detektory umieszczone na powierzchni Ziemi rejestrują nie same cząstki kosmiczne, lecz produkty reakcji jądrowych wywoływanych przez nie w wyniku zderzeń z atomami gazów górnej atmosfery. Same oryginalne cząstki można rejestrować tylko poza atmosferą, tzn. za pomocą aparatury umieszczonej na sztucznych satelitach.

Kosmos, jako najwszechstronniejsze laboratorium, przysyła nam m.in. cząstki obdarzone energiami, o jakich współcześni konstruktorzy akceleratorów mogą tylko marzyć. I tak grupa amerykańskich i australijskich fizyków pod kierunkiem Pierre'a Sokolsky'ego i Eugene'a Loha badała takie superenergetyczne cząstki za pomocą specjalnie do tego celu przeznaczonego zestawu detektorów zainstalowanego pod Salt Lake City w stanie Utah (USA). 15 X 1991 r. zarejestrowali oni ulewę cząstek wtórnych dowodzącą, że do ziemskiej atmosfery wpadła cząstka promieniowania kosmicznego o energii – uwaga! – 3×10^{20} eV. Jest to energia, jak na jedną cząstkę, zupełnie nieprawdopodobna. Łatwo przeliczyć, że odpowiada to energii kinetycznej kilogramowego odważnika poruszającego się z prędkością 10 m/s. W dodatku, zanim cząstka ta dotarła do Ziemi, musiała już utracić część energii, chociażby w zderzeniach z fotonami promieniowania reliktowego, a skoro nadal miała tak ogromną energię, to widocznie musiała pochodzić z niezbyt daleka.

Niestety, nie bardzo wiadomo, co nadaje cząstkom tak ogromne energie. Najbardziej obiecująca hipoteza głosi, że mogą to być wielokrotne odbicia cząstki od fal uderzeniowych (w których istotną rolę odgrywa pole magnetyczne) generowanych np. przy wybuchach supernowych. Cząstka musiałaby więc mieć osobliwe szczęście, by przypadkowe spotkania z falami uderzeniowymi mogły ją tak rozpędzić, ale cząstki takie pojawiają się rzeczywiście bardzo rzadko, może zatem tak właśnie jest.

Tomasz KWAST

Nurek Kłapouchego (Apokryf)

– Czy to będzie historyjka o wychlupaniu Kłapouchego ze strumienia? – zapytał Krzyś.

– Nie, to będzie opowiadanie o malutkim posłusznym baloniku – powiedziałem.

– Takim małym jak Prosiaczek?

– Nie, takim małym jak Mały.

– Ten żuczek, którego znalazł Prosiaczek na plecach Puchatka w pułapce na Hohonie? – upewniał się zaaferowany Krzyś.

– Tak, ten sam krewny-i-znajomy Królika, dzięki któremu Prosiaczek nie został marynarzem – roześmiałem się – ale dobrze, że przypomniałeś o Prosiaczku. Pamiętasz, jak Prosiaczek upadł z balonikiem dla Kłapouchego?

„Prosiaczek leżał rozważając, co się stało [...] po czym wstał ostrożnie i rozejrzał się wokoło.

– To dziwne – pomyślał. – Ciekaw jestem, skąd się wziął ten huk. To chyba nie ja narobiłem takiego hałasu... A gdzie jest mój balonik? I co tu robi koło mnie ta mokra szmatka?"[1]

– Bo z balonikami to nigdy nic nie wiadomo – powiedział Puchatek – jak się wisi pod balonikiem koło pszczół, które zamiast robić miód tylko brzęczą (albo i jeszcze gorzej), to baloniki nie opadają, a jak się nimi bawić, to baloniki zamieniają się w mokre szmatki.

– Przekonam Cię, Misiu, że mokre szmatki można z powrotem zamienić w baloniki i to w takie co opadają na życzenie i wznoszą się na życzenie – powiedziałem.

Był ciepły słoneczny dzień. Krzyś, Puchatek i Prosiaczek leżeli na mostku i patrzyli na płynący leniwie strumień. Ponieważ akurat dochodziła godzina jedenasta, Puchatek poszedł sprawdzić, czy nikt nie dobiera się do koszyka z pro-rzeczami do jedzenia. Po dłuższej chwili już nikt się nie dobierał. Nos mówił mu jednak, że gdzieś blisko powinien być jeszcze miód lub coś w tym rodzaju, do którego mogłyby się dobrać głodne łasiczki. Na samym dnie koszyka, pod serwetką, leżała, zapomniana, plastykowa butelka wypełniona czymś o wspaniałym słonecznym kolorze. Miś sprawdził, czy jest dobrze zakręcona. „Zapach się zgadza – pomyślał Puchatek – ale nigdy nie widziałem takiego rzadkiego miodu."

– Krzysiu, Prosiaczku – wołał Puchatek biegnąc do nich z pustą butelką – głodne łasiczki dobrały się do butelki z miodem i nalały tam roztopionego żółtego sera z wodą. Sprawdziłem do samego dna.

– Och ty głupi, kochany Misiu, to była herbata z miodem i cytryną – powiedział Krzyś.

– Czy pamiętacie, jak Kłapouchy wziął udział w zabawie w „Misie-patysie" – szybciutko zapytał Prosiaczek chcąc wybawić przyjaciela z kłopotu.

– Tak – ucieszył się Puchatek i zaczął nad czymś myśleć. – Prosiaczku – powiedział po chwili z przejęciem – przypomniałeś mi o czymś, o czym dobrze pamiętałem, tylko zapomniałem. Dziś rano Słońce nie dawało mi spać tak samo jak wtedy, gdy rok temu dałem Kłapouchemu „Praktyczną Baryłeczkę do Przechowywania Różnych Różności".

– A ja mu dałem balonik, który wspaniale wchodził i wychodził z Praktycznej Baryłeczki?

– Tak, Prosiaczku. I coś mi się zdaje, że dziś są znów urodziny Kłapouchego, i że chyba nikt mu od zeszłego roku nie składał życzeń urodzinowych.

– Masz rację, Puchatku, ja też o tym pamiętałem, tylko też zapomniałem – powiedział Krzyś. – Musimy do niego pójść. Tylko co my mu damy w prezencie?

– Może „Praktyczną Buteleczkę" – nieśmiało zaproponował Puchatek.

– Świetny pomysł, zrobimy z niej „Nurka Krato z Jusza" – ucieszył się Krzyś. – Chodźmy. – I poszli. Po drodze spotkali Królika.

– Jak się macie. Czy sprzątacie las? – zapytał wskazując na pustą butelkę.

– Nie – odpowiedział Puchatek – idziemy dać Kłapouchemu „Nurka Kratożercy", na jego urodziny.

– Nie „Kratożercy", tylko Krato z Jusza, czy coś w tym rodzaju – sprostował Krzyś.

– Aha, Kartezjusza – powtórzył Królik, gdy właśnie ujrzeli Kłapouchego po drugiej stronie strumienia.

– Dzień dobry, Kłapouszku – krzyknęli wszyscy razem – najlepsze życzenia z okazji urodzin.

– Dzień dobry – odparł zdziwiony Kłapouchy – już mi je składaliście rok temu.

– Ależ Kłapouszku, przyszliśmy Ci złożyć życzenia tegoroczne, a nie zeszłoroczne – wyjaśnił Puchatek.

– I mamy dla Ciebie prezent – dodał Prosiaczek.

– Damy Ci Nurka – wyjaśnił Królik. I wszyscy zaczęli przeprawiać się przez strumień.

– Gdzie jest Tygrys? – zapytał smętnie Kłapouchy, gdy byli już po drugiej stronie.

– Nie widzieliśmy go dzisiaj – odparł Krzyś.

– A dlaczego pytasz?
– Zwykle wtedy daję nurka, jak Tygrys mnie w-b-r-y-k-u-j-e – odparł osioł melancholijnie – więc chciałem się przygotować.
– Nie, Kłapouszku, to nie Ty masz dać nurka, tylko my Ci damy, jak go zrobimy – wyjaśnił Krzyś.
– Ach tak. To pozdrówcie go ode mnie, jak go spotkacie.
– I właśnie przynieśliśmy butelkę – powiedział Prosiaczek.
– Potrzebujemy jeszcze tylko balonik – dodał Krzyś.
„– Balonik? – zapytał Kłapouchy. – Powiedziałeś: balonik? Wielki, kolorowy przedmiot, który fruwa w powietrzu? Szaleństwo, śpiew i taniec? Hopsasa?!”[1]
– Nno niezupełnie – interesuje nas raczej studium późniejsze balonika – powiedział Krzyś.
– ???
– Czy masz jeszcze tę mokrą szmatkę, którą dostałeś od Prosiaczka? – uściślił.
– Nie – odburknął Kłapouchy.
– Wyrzuciłeś ją? – zmartwił się Prosiaczek.
– Czyście rozum stracili – jęknął Kłapouchy – miałbym wyrzucić mój urodzinowy prezent? Po prostu – dawno nie było deszczu.
– ???
– Mój balonik wysechł – zamyślił się. – Ale skoro dzisiaj są moje urodziny, to powinno jeszcze popadać. Wystarczy trochę poczekać.
– Nie, nie trzeba – odetchnął z ulgą Krzyś – sucha szmatka też może być. Czy możesz ją przynieść?
Kłapouchy pokuśtykał w zarośla i wrócił z suchą szmatką w zębach. Krzyś wziął to, co zostało z balonika, przytknął do ust, wciągnął powietrze, zacisnął wargi i wyjął malutki czerwony balonik, trochę mniejszy od nakrętki. Na koniec zawiązał go wyjętą z kieszeni grubą nicią.
– Myślałem, że baloniki się dmucha, a nie wciąga – powiedział Prosiaczek.
– Myślałem, że baloniki są większe – powiedział Kłapouchy.
– Puchatku, nabierz pełno wody do butelki, żeby balonik miał w czym pływać – poprosił Krzyś.
– Myślałem, że baloniki latają, a nie pływają – powiedział Puchatek.
– Pani w szkole mówiła, że trzeba balonik tak obciążyć, żeby prawie tonął – wyjaśniał Krzyś przywiązując do nitki wyjęte z kieszeni nakrętki i ciężarki do spławika.
– Potem trzeba go włożyć do butelki. Jak się teraz butelkę naciśnie, to balonik opadnie na dno.
– Ja to zrobię – powiedział Królik – i zrobił, balonik jednak zamiast opaść wyskoczył z butelki i wraz ze strumieniem wody wylądował na Kłapouchym.
– A nie mówiłem, że będzie lało – westchnął osioł.
– Coś się tu nie zgadza – rzucił Królik – czy nie trzeba tej butelki najpierw zakręcić?
– Tak, masz rację – przypomniał sobie Krzyś – w butelce ma zostać jak najmniej powietrza. Proszę, Twój nurek gotowy, Kłapouchy.
– Dziękuję – powiedział wzruszony osioł odsuwając się na bezpieczną odległość.
Krzyś wziął butelkę w ręce i nacisnął, balonik posłusznie opadł, Krzyś zwolnił nacisk i nurek popłynął w górę. Wszyscy po kolei próbowali powtórzyć sztuczkę i nawet Prosiaczkowi się udało.
– Ciekawy jestem, dlaczego tak się dzieje? – zastanawiał się Krzyś, gdy wracali do domu.
– Może ten nurek się boi, jak się ściska butelkę? – powiedział Prosiaczek.
– Ależ Prosiaczku, przecież Ci tłumaczyłem – sprzeciwił się Królik – jak się ściska butelkę, to woda chce wypłynąć, natrafia na korek i zawracając spycha balonik na dół.
– A mnie się zdaje – powiedział Puchatek – że Prosiaczek ma rację. Jak się ściska butelkę, to balonik też się ściska i robi się taki, taki...
– Taki gęsty jak żołądź? – wtrącił Prosiaczek.
– O, właśnie tak, to znaczy nie, nie jak żołądź, ale raczej jak miodek i dlatego opada.
– Bzdura – sprzeciwił się Królik – jeżeli balonik mógłby się ścisnąć, to guma od razu by go ścisnęła, zresztą wcale nie widać, żeby się ściskał i się go wcale nie dotyka. Rozumiecie? To dobrze, bo ja już muszę iść spotkać się z jednym moim krewnym-i-znajomym. Cześć.
– A kto to był ten Krato z Jusza? – zapytał Prosiaczek, gdy Królika już nie było.
– To był taki pan, który wymyślił kratkę na papierze, żeby było łatwiej rysować kwadraty i mierzyć, czy są większe czy mniejsze. I chyba dlatego go nazwano Krato – powiedział Krzyś. – Ten pan żył bardzo dawno, chyba pięćdziesiąt lat temu i był bardzo mądry. Myślał jak myśleć i czy coś jest, czy tego nie ma, i odtąd już wszyscy co myślą, to myślą tak, jak on myślał.
– I wymyślił tego nurka, żeby było o czym myśleć – wtrącił Prosiaczek.
– Tak – przytaknął Krzyś – choć pani w szkole mówiła, że wcale nie wiadomo, czy to on go wymyślił, bo nigdzie o tym nie napisał, a napisał o tym jakiś inny pan, który też myślał i nazywał się jakoś tak jak anioł i przyprawa do zupy [2].
Puchatek już nie słuchał, co Krzyś tłumaczy Prosiaczkowi. Myślał o swoich garnczkach miodu. Zastanawiał się, czy jest w nich miód zawsze, czy tylko wtedy, kiedy o nim myśli i czy on sam, Miś o Bardzo Małym Rozumku, jest tak naprawdę, czy może go wcale nie ma. „Myślę, że znów zbliża się godzina jedenasta” – pomyślał w końcu. „A jeżeli myślę, to przecież jestem, bo to właśnie ja myślę, a nie kto inny” – ucieszył się. „A jeżeli jestem, bo myślę, że myślę, to chyba i miód jest, bo o nim jeszcze bardziej myślę” – rozpromienił się Puchatek.

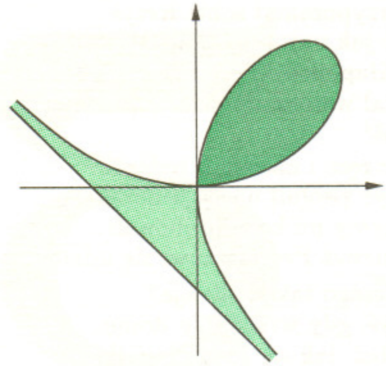
[1] Fragmenty *Kubusia Puchatka* A.A. Milne w przekładzie Ireny Tuwim.

[2] 1648, Raffaelo Maggiotti, uczeń Galileusza; źródło: Richard Frazier *A philosophical toy* wraz z referencjami URL: http://www.ed.uiuc.edu/courses/CI241-science-Sp95/resources/philoToy/philoToy.html

Małą Deltę przygotował Piotr ZALEWSKI

Owale, liście, spirale

By oszczędzić zainteresowanym Czytelnikom kłopotu z wertowaniem indeksów, spisów treści i zakurzonych kartek opasłych podręczników dwuwymiarowej geometrii analitycznej i różniczkowej, opowiemy krótko o tych krzywych płaskich, których nazwy pochodzą od nazwiska Kartezjusza.



Rys. 1. Liść Kartezjusza $x^3+y^3=3axy$ i jego asymptota $x+y+a=0$; pola obu zakreskowanych obszarów są równe.

Liść Kartezjusza jest *cissoidą elipsy*, tzn. dla odpowiednio położonych elipsy i prostej o równaniach parametrycznych $\mathbf{r}_1(\theta)=(x_1(\theta),y_1(\theta))$ i $\mathbf{r}_2(\theta)=(x_2(\theta),y_2(\theta))$, w których θ jest kątem biegunowym, krzywa o równaniu $\mathbf{r}(\theta)=\mathbf{r}_2(\theta)-\mathbf{r}_1(\theta)$ to właśnie liść Kartezjusza.

Zacznijmy od *liścia Kartezjusza*. Tą nazwą określa się zwykle krzywą o równaniu

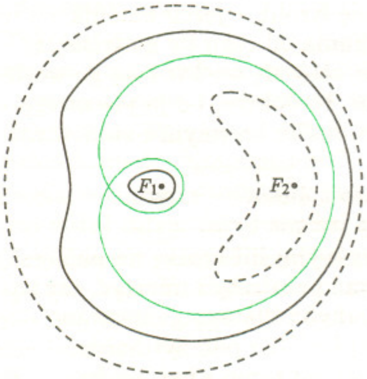
$$x^3+y^3=3axy\,,$$

gdzie a jest ustalonym parametrem. Mój sześcioletni syn twierdzi, że liść Kartezjusza bardziej przypomina rybkę niż liść. O takie skojarzenie nietrudno, gdy na rysunku razem z liściem widać jego asymptotę. Równanie tej ostatniej najprościej znaleźć, kładąc w równaniu liścia $y=tx$ i przechodząc do równań parametrycznych,

$$x=\frac{at}{1+t^3},\quad y=\frac{at^2}{1+t^3},\qquad t\neq -1\,.$$

Widać z nich wyraźnie, że $x\to\pm\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y\to\mp\infty$, a w dodatku jest tak dla wartości $t=\frac{y}{x}$ dążących do -1. Stąd już tylko prosty rachunek dzieli nas od stwierdzenia, że asymptota liścia ma równanie $x+y+a=0$. Wykorzystując parametryczne równania liścia Kartezjusza można także udowodnić (polecamy to ćwiczenie wielbicielom całkowania funkcji wymiernych), że pole obszaru ograniczonego pętelką liścia w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych jest równe polu nieograniczonego paska leżącego między dwoma ogonkami liścia i jego asymptotą.

Kartezjusz, który studiował rozmaite własności liścia w 1638 roku, błędnie sądził, że widoczna w pierwszej ćwiartce układu pętelka liścia powtarza się w innych ćwiartkach. Jego pogląd podzielał Roberval, który nawet używał nazwy *fleur de jasmin* (kwiatek jaśminu). Dość trafna, używana niekiedy po francusku, nazwa liścia Kartezjusza to *noeud de ruban* (dosł. *kokarda ze wstążki*).



Rys. 2. Rodzina owali Kartezjusza dla różnych wartości parametrów a i m z wyróżnionym ślimakiem Pascala.

Dużo ciekawsze od liścia są tzw. *owale Kartezjusza*. Tak nazywa się zbiór tych punktów płaszczyzny M, których odległości $d_1=MF_1$ i $d_2=MF_2$ od dwóch zadanych punktów F_1 i F_2 spełniają zależność

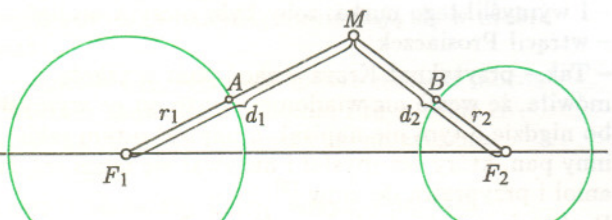
$$d_1+md_2=a \tag{1}$$

(m i a są tu ustalonymi parametrami rzeczywistymi). W ogólnym przypadku zbiór takich punktów M składa się z dwóch owalnych krzywych (rys. 2).

Każdy widzi, że dla $m=\pm1$ i $a>F_1F_2>0$ otrzymujemy jako przypadki szczególne elipsę oraz hiperbolę. Każdy też może sprawdzić, że we współrzędnych kartezjańskich owale Kartezjusza opisane są równaniem

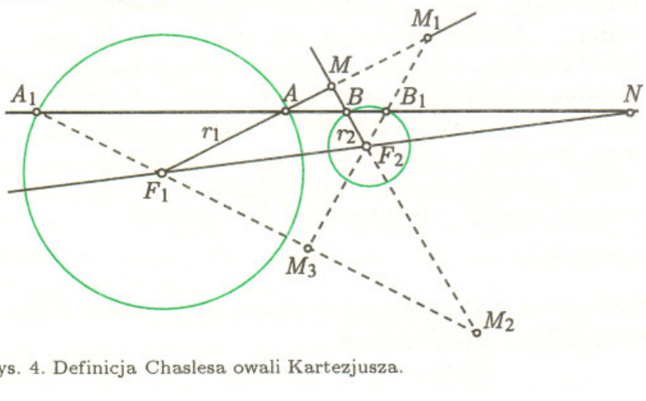
$$\left(\left(1-m^2\right)\left(x^2+y^2\right)+2dm^2x+a^2-d^2m^2\right)^2= \\ =4a^2\left(x^2+y^2\right), \tag{2}$$

gdzie d jest odległością punktów F_1 i F_2. W kolejnym przypadku szczególnym, gdy $m=a/d>1$, wewnętrzny owal dotyka zewnętrznego, a równanie (2) opisuje tzw. ślimak Pascala albo inaczej konchoidę okręgu, krzywą, którą można wykorzystać do przeprowadzenia trysekcji kąta (*Mała Delta* 11/1996).



Rys. 3. Definicja Newtona owali Kartezjusza.

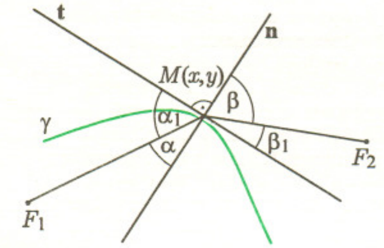
Równoważne określenie owali Kartezjusza podał Newton. Mianowicie, owale Kartezjusza są zbiorem tych punktów płaszczyzny M, dla których stosunek odległości od dwóch danych okręgów jest stały (rys. 3). Istotnie, jeśli $\frac{MA}{MB}=\text{const}=c$, to wtedy $\frac{d_1-r_1}{d_2-r_2}=c$, czyli równoważnie $d_1+(-c)d_2=r_1-cr_2$. Jeszcze inną definicję owali Kartezjusza podał Chasles (czyt. Szal). Weźmy dwa okręgi o środkach i promieniach odpowiednio F_1, F_2 oraz r_1, r_2 oraz dowolny punkt N na prostej F_1F_2 (rys. 4).



Rys. 4. Definicja Chaslesa owali Kartezjusza.

Samodzielny dowód faktu, że definicja Chaslesa określa istotnie owale Kartezjusza, polecamy jako ciekawe zadanie miłośnikom kącika olimpijskiego znającym twierdzenie Menelaosa.

Z punktu N prowadzimy sieczną, która przecina dane okręgi w punktach A_1, A, B, B_1. Łącząc punkty A_1 i A z F_1 oraz B i B_1 z F_2 otrzymujemy cztery proste przecinające się w punktach M, M_1, M_2, M_3. Gdy będziemy zmieniać położenie siecznej poprowadzonej z punktu N, to punkty M, M_1, M_2 i M_3 poruszać się będą właśnie po jednym z owali Kartezjusza.



Rys. 5. Proste **t** i **n** to odpowiednio styczna i normalna do krzywej γ w punkcie $M(x,y) \in \gamma$, α to kąt padania promienia F_1M, a β – kąt załamania.

Sam Kartezjusz natrafił na owale poszukując tzw. krzywych aplanatycznych. Są to krzywe γ oddzielające dwa ośrodki optyczne i mające tę własność, że promienie świetlne wychodzące z ustalonego punktu F_1 w jednym ośrodku, po załamaniu na granicy ośrodków, na krzywej γ, skupiają się w ustalonym punkcie F_2 w drugim ośrodku. Okazuje się, że owale Kartezjusza są krzywymi aplanatycznymi.

Aby ów fakt udowodnić, wprowadźmy oznaczenia takie, jak na rysunku 5. Niech w szczególności $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ będzie kątem padania promienia wychodzącego z F_1, $\beta = \frac{\pi}{2} - \beta_1$ zaś kątem załamania tego promienia. Wykażemy, że gdy γ jest owalem Kartezjusza, to stosunek $\sin\alpha/\sin\beta$ jest stały (tak, jak każe prawo Sneliusa załamania światła). Zgodnie z równaniem (1) mamy

$$d_1 + md_2 = \text{const}\,,$$

gdzie $d_1 = MF_1$, $d_2 = MF_2$. Różniczkując, dostajemy stąd równanie $d_1' + md_2' = 0$ (primy oznaczają tu różniczkowanie względem długości łuku s). Zauważmy teraz, że $d_1' = \sin\alpha$, $d_2' = \sin\beta$. Przyjmijmy bez zmniejszenia ogólności, że $F_1 = (0,0)$. Wtedy

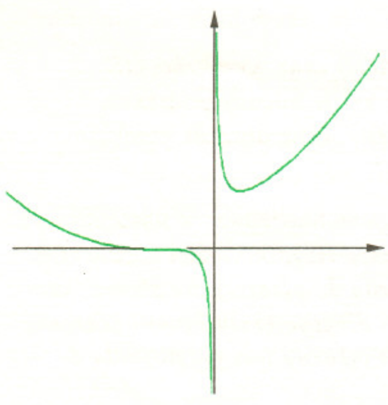
$$d_1' = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{3}$$

Po prawej stronie widać wyraźnie iloczyn skalarny dwóch wektorów. Jeden z nich jest równoległy do $F_1M = [x,y]$ i ma długość 1, drugi – to wektor $[x',y']$. Kładąc $\mathbf{r} = [x,y]$ i wykorzystując odpowiedni wzór redukcyjny, przepisujemy równanie (3) w postaci

$$d_1' = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{r}' \equiv \cos\angle(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \cos\alpha_1 = \sin\alpha$$

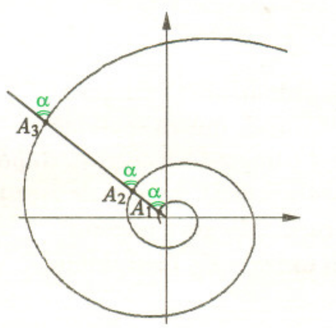
(trzeba tylko jeszcze pamiętać, że wektor prędkości $\mathbf{r}'$ krzywej sparametryzowanej długością łuku ma długość 1). Analogicznie wykazujemy, że $d_2' = \sin\beta$. Stąd już natychmiast wynika, że

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{d_1'}{d_2'} = -m = \text{const}\,.$$



Rys. 6. Trójząb Newtona, czyli parabola Kartezjusza.

Warto wspomnieć jeszcze o *paraboli Kartezjusza* zwanej także czasem *trójzębem Newtona*. Nie jest to wcale parabola, lecz krzywa o równaniu $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. By ją ujrzeć, wystarczy narysować wykres sumy funkcji kwadratowej i funkcji $y = d/x$, albo, mówiąc inaczej, dodać parabolę i hiperbolę (patrz rys. 6, na którym przy pewnej dozie dobrej woli można istotnie zobaczyć trójząb). Wedle Newtona, Kartezjusz wykorzystywał tę krzywą w swych konstrukcjach pierwiastków równań wielomianowych.



Rys. 7. Spirala równokątna (lub inaczej logarytmiczna) $r(\theta) = \alpha\exp(\theta\operatorname{ctg}\alpha)$; α jest parametrem, a r i θ to współrzędne biegunowe. Mamy $\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OA_2}{OA_3} = \ldots = \text{const}$, a półprosta o początku w punkcie O przecina spiralę (zawsze) pod kątem α.

Kartezjusz studiował także inne krzywe. W 1638 roku rozpatrywał ciekawą spiralę (tzw. równokątną lub logarytmiczną) o równaniu $r(\theta) = \alpha\exp(\theta\operatorname{ctg}\alpha)$ (patrz rys. 7, który tłumaczy nazwę; α jest ustaloną liczbą, a r i θ to współrzędne biegunowe). Jakub Bernoulli nazwał tę krzywą *spira mirabilis* i chciał mieć ją wyrzeźbioną na swym grobie w Bazylei. Długość łuku spirali od środka układu współrzędnych do punktu P, leżącego na niej w odległości d od środka układu, jest skończona i równa się $d/\cos\alpha$.

Kartezjusz interesował się też własnościami cykloidy (jest m.in. autorem konstrukcji stycznej do tej krzywej). Gdy dumny Roberval doniósł mu w liście o swym wzorze na pole pod łukiem cykloidy ($3\pi r^2$, gdzie r jest promieniem koła, którego punkt zakreśla cykloidę), Kartezjusz odpisał, że wynik

jest ładny i nie zauważyłem go wcześniej, lecz dowód nie sprawiłby trudności żadnemu średnio zręcznemu geometrze.

Nam wszystkim pozostaje wybaczyć Kartezjuszowi zgryźliwość i mieć nadzieję, że też zostalibyśmy uznani za *zręcznych*, choć może tylko *średnio*.

Paweł STRZELECKI

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1997

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 317 (WT=2,13) i 318 (WT=1,76) z numeru 3/1996

Henryk Kornacki	– Augustów	44,20
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	44,18
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	39,12
Piotr Żmijewski	– Łódź	36,00

Zdobywając po raz trzeci **44** punkty pan Kornacki zostaje osiemnastym Weteranem Klubu 44M. Przemek Gadziński już jest Weteranem od dawna, a teraz pokonuje „barierę **44**” już po raz piąty!

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 215 (WT=2,92), 216 (WT=2,32), zadań 217 (WT=2,50) i 218 (WT=2,50) z numerów 3/1996 i 4/1996

Jarosław Łazuka	– Warszawa	43,06
Aleksander Surma	– Myszków	39,68
Przemysław Gworys	– Częstochowa	35,06
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	27,87
Andrzej Idzik	– Bolesławiec	21,59

Zadania z matematyki nr 331, 332

Redaguje Marcin E. KUCZMA

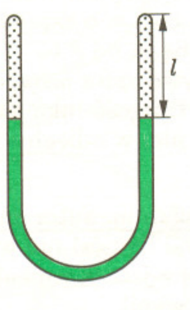
331. Znaleźć wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające tożsamościowo równanie $P(2x-x^2) = P(x)^2$.

332. W ostrosłupie o podstawie prostokątnej $OACB$ oraz wysokości OS, prostopadłej do płaszczyzny podstawy, znane są: kąt α między podstawą i ścianą SAC, kąt β między podstawą i ścianą SBC, oraz długość przekątnej podstawy $c = OC$. Obliczyć długość krawędzi SC.

Zadanie **332** zaproponował pan Mirosław Matlęga ze Skoczowa, w następującym oryginalnym sformułowaniu: *Wyznaczyć rzeczywistą długość krokwi koszowej, jeśli znane są jedynie: kąt nachylenia połaci lukarny do płaszczyzny stropu, kąt nachylenia połaci dachu do tejże płaszczyzny oraz długość rzutu krokwi koszowej na płaszczyznę stropu, przy założeniu, że kalenica lukarny jest prostopadła do kalenicy dachu.*

Zadania z fizyki nr 229, 230

Redaguje Jerzy B. BROJAN



229. W zamkniętej rurce o kształcie litery U dwie jednakowe ilości gazu są rozdzielone słupem rtęci (rysunek obok). Jaki warunek muszą spełniać parametry S (pole przekroju poprzecznego rurki), l (długość każdego ze słupów gazu), T (temperatura), n (liczba moli gazu w każdej części), ϱ (gęstość rtęci) i g (przyspieszenie ziemskie), aby po odwróceniu rurki „do góry nogami” równowaga słupa rtęci w położeniu symetrycznym okazała się niestabilna? Założyć, że słup rtęci nie ulegnie przerwaniu.

230. Do prostego pręta w dwóch punktach odległych od siebie o $d = 10$ cm przymocowano końce nici o długości $l = 14$ cm i rozpięto błonkę cieczy (np. bańkę mydlaną) między prętem a nicią. Do środkowego punktu nici przyłożono siłę F skierowaną prostopadle do pręta, w rezultacie czego ten punkt odsunął się od pręta na odległość h. Zbadać zależność $F(h)$ i wykonać wykres tej funkcji, w razie potrzeby posługując się obliczeniami numerycznymi; można przyjąć dowolną liczbową wartość napięcia powierzchniowego.

12/96
(69)

Wydawać *EPSILONA* zaczęliśmy ponad pięć lat temu (jak ten czas leci...). W drugim roku epsilonowania, w grudniu, zaproponowaliśmy Czytelnikom konkurs – zestaw zadań świątecznych i odtąd co rok umieszczaliśmy w numerach grudniowych jakieś łamigłówki. Wśród odpowiedzi, które wpłynęły na nasz pierwszy konkurs, była tylko jedna w pełni poprawna – jej autorem był Waldemar Pompe, wówczas uczeń liceum, dziś stały współpracownik *Delty*. I właśnie on przysłał nam niedawno zestaw zadań z propozycją przedstawienia ich w kolejnym konkursie świątecznym. Zadania nam się bardzo spodobały – a zatem tym razem z okazji Świąt Bożego Narodzenia nie epsilonowe, ale

Waldkowe zadania na Święta

1. Sześć spośród ośmiu wierzchołków równoległościanu leży na jednej sferze. Czy równoległościan ten musi być prostopadłościanem?

2. Na bokach AD i BC równoległoboku $ABCD$ tak obrano punkty K i L, że $AK = LC$. Niech P będzie dowolnym punktem leżącym na boku CD. Prosta KL przecina proste AP i BP odpowiednio w punktach M i N. Wykazać, że

pole $\triangle AKM$ + pole $\triangle BLN$ = pole $\triangle PMN$.

3. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC obrano (w sposób dowolny) punkt P. Niech D, E, F będą rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na boki BC, CA, AB. Udowodnić, że suma pól trójkątów PAF, PBD, PCE nie zależy od wyboru punktu P.

4. Niech $n > 2$ będzie liczbą naturalną. Czy istnieją liczby całkowite x, y, z, wszystkie różne od zera, spełniające równanie:

$$(x^{2n} + y^{2n} + z^{2n})^2 = 2(x^{4n} + y^{4n} + z^{4n})\,?$$

5. Czy istnieją takie liczby naturalne $1 < k < l < n$, że liczby $\binom{n}{k}$ i $\binom{n}{l}$ są względnie pierwsze?

Tych, którym uda się rozwiązać choć część tych zadań (niekoniecznie wszystkie), zachęcamy do przysłania nam, do *EPSILONA*, rozwiązań.
Termin: 31 stycznia 1997 r.

A teraz jeszcze coś dodatkowego, od nas

Każdy, kto słyszał cokolwiek o rachunku prawdopodobieństwa, wie, że przy rzucie monetą prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi $\frac{1}{2}$. Ale błędem jest wnioskowanie z tego, że jeżeli dwa razy rzucimy monetą, to orzeł wypadnie dokładnie raz! Natomiast z twierdzeń rachunku prawdopodobieństwa wynika w szczególności, że jeżeli będziemy rzucać monetą wiele razy, to iloraz liczby uzyskanych orłów przez liczbę wszystkich rzutów będzie dążył do $\frac{1}{2}$.

Osobie zbytnio ufnej w siłę rachunku prawdopodobieństwa proponujemy następującą zagadkę:

Pan Heliodor jest zapalonym szachistą, nie wyobraża sobie wieczora bez partyjki szachów. Ma dwie przyjaciółki, z którymi bardzo lubi grać: pannę Chwalisławę i pannę Dzierżysławę.

Tak się składa, że koło domu, w którym mieszka pan Heliodor, jest przystanek tramwajowy, na którym stają dwa tramwaje: linii 1 i linii 7. Panna Chwalisława mieszka blisko końcowego przystanku „jedynki", a panna Dzierżysława koło końcowego przystanku „siódemki". Tramwaje jeżdżą regularnie, z taką samą częstotliwością.

Każdego dnia wieczorem, ale o bliżej niesprecyzowanej porze – losowo, o różnych godzinach, pan Heliodor wychodzi z domu. Staje na przystanku i wsiada do pierwszego tramwaju – jeśli jest nią „jedynka", jedzie do panny Chwalisławy, jeśli „siódemka" – do panny Dzierżysławy, by zagrać codzienną partyjkę.

Wydawać by się mogło, że po pewnym czasie sytuacja ustabilizuje się i liczby wizyt u obu partnerek będą mniej więcej równe...

Otóż nie! Gdy po roku pan Heliodor dokonał obliczeń, okazało się, że u panny Dzierżysławy bywał mniej więcej dziewięć razy (!) częściej niż u panny Chwalisławy; średnio odwiedzał pannę Chwalisławę trzy razy miesięcznie, bynajmniej nie starając się panny Dzierżysławy faworyzować...

Czy oznacza to, że rachunek prawdopodobieństwa jest całkiem do niczego? Jak wytłumaczyć dziwne przygody pana Heliodora?

Odpowiedź na tę zagadkę zamieścimy w jednym z najbliższych *EPSILONÓW*.

Rozwiązania Waldkowych zadań – w marcu.

Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.