

## SPIS TREŚCI NUMERU 10(269)

Podróż Ulyssesa <i>Tomasz Kwast</i>	str. 1
Obserwacja kondensacji Bosego-Einsteina <i>Krzysztof Byczuk</i>	str. 1
Mała Delta	str. 5
Periodyczne powierzchnie minimalne <i>Wojciech Góźdź, Robert Holyst</i>	str. 6
Zadania	str.11
Helikoida i katenoida <i>Paweł Strzelecki</i>	str.12
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Epsilon	str.17

### W następnym numerze:

Śnieg z komputera

Okladkę wykonała  
*Anna LUDWICKA.*  
 Obrazy powierzchni minimalnych  
 wyprodukowane zostały za pomocą  
 programu *Data Explorer.*

Wydawca:  
 Uniwersytet Warszawski

Wybór artykułów z *Delta*  
 ukazuje się w języku angielskim  
 w sieci Internet pod adresem  
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny  
 Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego  
 i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,  
 wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.  
 Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:  
 Andrzej Białynicki-Birula  
 Bogdan Cichoński  
 – wiceprzewodniczący  
 Jan A. Gaj  
 Tomasz Hofmokl  
 Marta Kicińska-Habior  
 Krzysztof Maślanka  
 Andrzej Mąkowski  
 Andrzej Pelczar  
 Zbigniew Plochocki  
 Zdzisław Pogoda  
 Michał Różycka  
 Konrad Rudnicki  
 Zbigniew Semadeni  
 Grzegorz Sitarski  
 Mieczysław Subotowicz  
 Andrzej Szymacha  
 Andrzej Woszczyk  
 Wacław Zawadowski  
 Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:  
 Wiktor Bartol  
 Krzysztof Biesaga  
 Jan Kalinowski – z-ca red. nac.  
 Krystyna Kordos – sekr. red.  
 Marek Kordos – red. nac.  
 Tomasz Kwast  
 Anna Ludwicka  
 Krzysztof Rejmer  
 Anna Rudnik  
 Paweł Strzelecki  
 Joanna Udalska  
 Adres Redakcji:  
 ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa  
 tel. 43-02-41(-3) wewn. 21  
 PAWELST@MIMUW.EDU.PL  
 Wydrukowano  
 w Drukarni Naukowo-Technicznej  
 w Warszawie, ul. Mińska 65  
 Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres  
 prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena  
 jednego numeru w 1997 roku wynosi 2 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie  
 okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**)  
 cena numeru w 1997 r. wynosi 5 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą  
 odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje  
 dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1997 r. wynosi 7 zł 50 gr.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:
  - a) jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;
  - b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnieść na konto „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 370044-16551-2700-1-06 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>; dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:
  - do 5 XII na I kwartał roku następnego,
  - do 5 III na II kwartał,
  - do 5 VI na III kwartał,
  - do 5 IX na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 wewn. 2442, 2366.

**Cena 1 egzemplarza 2 zł, 20 000 zł**



# Obserwacja kondensacji Bosego–Einsteina

Krzysztof BYCZUK

Wiele lat temu Richard Feynman wyraził pogląd, iż niemożliwe jest w pełni zrozumieć mechanikę kwantową. To, co potrafimy robić, to z większym lub mniejszym sukcesem używać matematycznego formalizmu oraz obserwować zjawiska dostępne w eksperymencie. Dlatego też każde nowe doświadczenie, które potwierdza tę dziwną teorię (mechanikę kwantową), jest gorąco witane przez fizyków.

Latem 1995 roku grupa badaczy z Colorado University (USA) zaobserwowała po raz pierwszy zjawisko kondensacji cząstek kwantowych zwane *kondensacją Bosego–Einsteina*. Tym samym doświadczenie to poszerzyło listę eksperymentów potwierdzających prawdziwość mechaniki kwantowej. Co więcej, uczeni ci odnieśli podwójny sukces. Oprócz przeprowadzenia tego fundamentalnego eksperymentu udało im się także pokonać szereg trudności technologicznych i otrzymać ekstremalnie niską temperaturę w układzie, wynoszącą około 1 nK ( $= 10^{-9}$  K). Zjawisko kondensacji Bosego–Einsteina zostało przewidziane teoretycznie w 1924 roku przez Satyendranatha Bosego i Alberta Einsteina. Tak więc uczeni potrzebowali ponad 70 lat, aby zrealizować ten pomysł w praktyce. W swoim artykule zamierzam opowiedzieć o tym doświadczeniu, lecz najpierw włączmy maszynę czasu i cofnijmy się o 70 lat, aby zrozumieć, co to jest kondensacja Bosego–Einsteina.

W mechanice kwantowej pojęcie toru ruchu cząstki nie ma sensu. Możemy jedynie przewidywać, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że cząstka będzie tu albo tam. Nie wiemy natomiast, jaką drogę wybrała cząstka, aby tam dotrzeć. Wyobraźmy teraz sobie, że mamy wiele jednakowych cząstek. Słowo jednakowe oznacza, że wszystkie cząstki wyglądają tak samo. Załóżmy, że w pewnej chwili znamy położenia każdej z cząstek. Jeśli po jakimś czasie ponownie określimy położenia wszystkich cząstek, to i tak nie jesteśmy w stanie powiedzieć, która cząstka odpowiada której z konfiguracji początkowej. Oznacza to, że cząstki kwantowe są nierozróżnialne. Zauważmy, że w mechanice klasycznej sytuacja jest zupełnie odmienna. Mając  $N$  jednakowych kul bilardowych możemy śledzić ruch każdej z nich oddzielnie i w ten sposób rozróżnić, która kula wpadła w którą dziurę. Nierozróżnialność cząstek kwantowych wynika tylko z reguł mechaniki kwantowej, a nie z niedoskonałości naszej aparatury.

Nierozróżnialność cząstek ma bardzo istotny wpływ na ich fizyczne własności. Okazuje się mianowicie, że istnieją dwa rodzaje cząstek. Jedne z nich nazywamy fermionami, a drugie bozonami. Fermionami są cząstki o spinie połówkowym ( $\sigma = (k + \frac{1}{2}) \hbar$ ), natomiast bozony mają spin całkowity ( $\sigma = k\hbar$ ). Na przykład elektrony są fermionami o spinie  $1/2$ , co oznacza, że rzut wektora spinu na oś  $z$  jest  $+1/2$  lub  $-1/2$ , czyli jest skwantowany. Mówimy wtedy, że elektron może być w stanie kwantowym o spinie  $+1/2$  lub  $-1/2$ .

Spin cząstki jest to wielkość wektorowa występująca tylko w mechanice kwantowej. Każda cząstka ma spin o pewnej wartości. Dokładniej mówiąc, mierzymy maksymalną długość rzutu wektora spinu na pewną oś (np. oś  $z$ ). Wynik podajemy w jednostkach  $\hbar = h/2\pi$ , gdzie  $h$  jest stałą Plancka.

Bozonem jest foton o spinie jeden, ale też w pewnym przybliżeniu np. atom helu.  $^4\text{He}$  składa się z 6 fermionów (2 protony, 2 neutrony

## Podróż Ulyssesa

Tomasz KWAST

Jeśli ktoś wyobraża sobie przestrzeń międzyplanetarną jako niezmierną, spokojną próżnię przeszywaną od czasu do czasu jedynie przez drobne ciała meteorowe, to jest po prostu w błędzie. Wiemy już od dość dawna, że Słońce stanowi środek ogromnego bąbla w ośrodku międzygwiazdowym, wypełnionego plazmą wiatru słonecznego. Ten nieustający strumień jonów i elektronów jest przedłużeniem korony słonecznej, której temperatura, wynosząca milion kelwinów, zapewnia wydajne jonizowanie wszelkich obecnych tam atomów i rozpędzanie ich do prędkości setek km/s. Wiatr słoneczny jest silnie zmienny w czasie – to wiemy dzięki pomiarom wykonanym przez sztuczne satelity. Wiadomo też, że musi on do pewnego stopnia „słuchać się” słonecznego pola magnetycznego (albo pole to w jakiś sposób modyfikować), ponieważ plazma zachowuje się w nim jak galareta ślizgająca się po elastycznych strunach symbolizujących linie pola. Wreszcie obserwacje korony słonecznej (czy to przy zaćmieniach Słońca, czy w nowszych czasach za pomocą koronografów) ukazywały jej, zmienną zresztą – asymetrię, z czego wypływał wniosek, że charakter wiatru słonecznego musi zależeć od szerokości heliograficznej miejsca obserwacji. Tego dotychczas nie mieliśmy możliwości sprawdzić, ponieważ wszelkie sondy badające Układ Słoneczny, ze zrozumiałych powodów, odbywały loty w płaszczyźnie ekliptyki.

Sytuacja się zmieniła. W październiku 1990 r. z pokładu promu kosmicznego Discovery wysłano sondę Ulysses, której głównym zadaniem było wykonanie badań ośrodka międzyplanetarnego poza płaszczyznę ekliptyki, docelowo nawet nad biegunami Słońca. Aparaturę Ulyssesa stanowiły: licznik cząstek pyłu, kilka liczników cząstek naładowanych nastawionych na różne zakresy energii tych cząstek (w tym zdolnych do określenia składu chemicznego wiatru słonecznego), miernik kierunku i natężenia pola magnetycznego, czujniki promieniowania X,  $\gamma$  i fal plazmowych oraz odbiornik promieniowania radiowego. Ponieważ bezpośrednie wprowadzenie sondy na okołosłoneczną orbitę biegunową jest poza możliwościami współczesnych rakiet, wykorzystano do tego celu Jowisza.



Ulysses poleciał w pierw znaną trasą ku Jowiszowi. Dopiero przeleciawszy koło niego w lutym 1992 r. („Patrz w niebo”, *Delta* 3/1996), dzięki jego grawitacji wypadł z płaszczyzny Układu Słonecznego wszedłszy na orbitę niemal do niej prostopadłą. 13 września 1994 r. Ulysses osiągnął nieco ponad 80° szerokości heliograficznej południowej w odległości 2,3 j.a. od Słońca. Lecąc dalej po dość silnie spłaszczonej elipsie przeciął płaszczyznę ekliptyki w połowie marca 1995 r. i osiągnął 80° szerokości heliograficznej północnej 31 lipca 1995 r. Tak zostały wykonane pierwsze bezpośrednie pomiary własności ośrodka międzyplanetarnego nad oboma biegunami Słońca!

Oto niektóre wyniki misji Ulyssesa. Opuszczając Jowisza sonda rejestrowała prędkość wiatru słonecznego na poziomie 400 km/s. W miarę oddalania się od płaszczyzny Układu Słonecznego Ulysses zaczął rejestrować na przemian prędkość wiatru tę właśnie i w przybliżeniu dwukrotnie większą, wreszcie w dużej szerokości heliograficznej rejestrowany był tylko wiatr o dużej prędkości. Taki wynik pomiarów zgadzał się z przewidywaniami, według których w płaszczyźnie równikowej linie pola magnetycznego przebiegają nieradialnie (wskutek obrotu Słońca) stanowiąc dla wiatru przeszkodę, podczas gdy w pobliżu biegunów linie pola są niemal radialne i wiatr może wypływać swobodnie. Paradoksalne może się przy tym wydawać, że najszybciej wiatr wypływa z chłodnych obszarów korony, tzw. dziur koronalnych. Paradoks znika jednak, gdy rozpatrzyć, co jest przyczyną, a co skutkiem. Otóż przyczyną szybkiego wypływu jest radialność pola magnetycznego, tzn. brak przeszkód, a to pociąga za sobą szybkie chłodzenie się tych właśnie obszarów korony. Dlatego np. na zdjęciach Słońca w promieniowaniu rentgenowskim dziury koronalne widać jako ciemne plamy. To, że Ulysses rejestrował na przemian wiatr szybki i powolny, wynikało z rotacji Słońca: jego oś magnetyczna nie pokrywa się z osią obrotu i dlatego sonda przez pewien czas była „owiewana” na przemian wiatrem pochodzącym z okolic równika (magnetycznego), powolnym, i z okolic biegunowych, a więc szybkim.

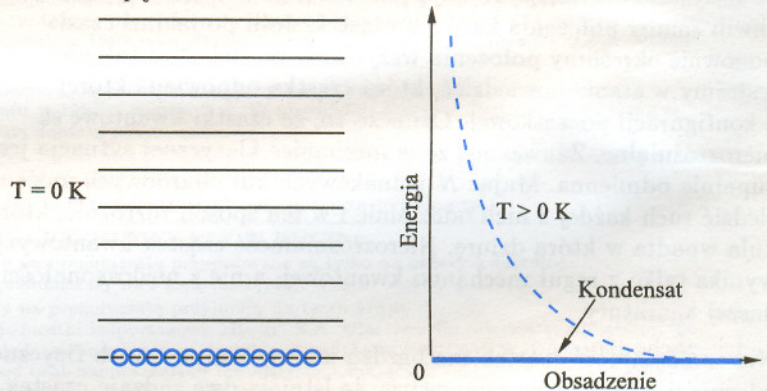
Ulysses lecąc nad biegunem południowym Słońca niemal wręcz „zobaczył”, jak – zgodnie z przewidywaniami – wzdłuż spiralnie opasujących Słońce linii pola

i 2 elektrony), każdy o spinie 1/2. Ponieważ spiny dodają się jak wektory, więc z sześciu liczb  $\pm 1/2$  zawsze otrzymamy tylko liczbę całkowitą. Dla  $^4\text{He}$  spiny ustawiają się tak, że dają w sumie zero, a więc jest to bozon.

Jeśli chcemy obliczyć, jaka jest energia układu zawierającego  $N$  jednakowych cząstek kwantowych, to musimy wiedzieć, ile cząstek w układzie ma pęd  $p_1, p_2$  itd. Innymi słowy, konfiguracja liczb  $\{N_{p_1}, N_{p_2}, \dots, N_{p_k}, \dots\}$  będzie określała stan całego układu, gdzie  $N_p$  jest liczbą cząstek o pędzie  $p$ . Na przykład, energia będzie równa 
$$E = \sum_p \frac{p^2}{2m} N_p.$$

I w tym miejscu pojawia się główna różnica między bozonami a fermionami. W przypadku bozonów dowolna ich liczba może mieć pęd  $p$ , czyli  $N_p$  jest dowolną liczbą naturalną (lub zerem). Jeśli chodzi o fermiony, to tylko jedna cząstka może być w danym stanie kwantowym o pędzie  $p$  i spinie  $\sigma$ . Innymi słowy,  $N_p = 0$ , gdy nie ma fermionów o pędzie  $p$ ,  $N_p = 1$ , gdy jest jeden fermion o pędzie  $p$  i spinie  $+1/2$  lub  $-1/2$  oraz  $N_p = 2$ , gdy są dwa fermiony o pędzie  $p$ , jeden o spinie  $+1/2$ , drugi o spinie  $-1/2$ . Opisana reguła stanowi tzw. zakaz (zasadę wykluczania) Pauliego.

W stanie podstawowym ( $T = 0$ ) energia układu musi być najmniejsza, więc wszystkie bozony będą obsadzały stan z pędem  $p = 0$ , czyli będą spoczywały i ciśnienie takiego gazu będzie zerowe (rys. 1). Z powodu zakazu Pauliego tylko dwa fermiony o spinie  $\pm 1/2$  mogą mieć pęd  $p = 0$ , a pozostałe będą obsadzały kolejne stany z większymi pędami aż do poziomu zwanego poziomem Fermiego. Schematycznie zaznaczyliśmy to na rysunku 2. Widzimy, że większość fermionów porusza się sprawiając, że ciśnienie takiego gazu jest niezerowe. To jest przyczyna, dla której gwiazdy neutronowe nie zapadają się pod wpływem własnej siły grawitacji. W niezerowych temperaturach sposób obsadzeń stanów o danym  $p$  ulega zmianie i schematycznie przedstawiliśmy to na rysunkach 1 i 2 linią przerywaną. Część cząstek przebywa w stanach o większych wartościach pędu.



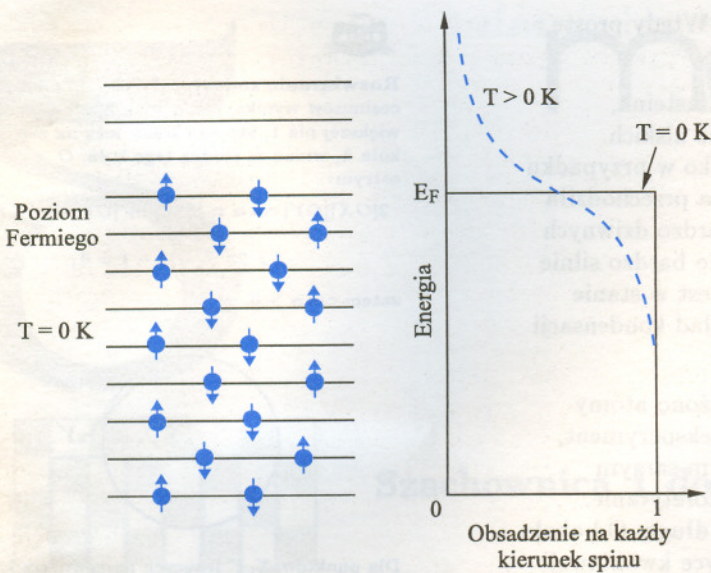
Rys. 1. Rozkład bozonów w temperaturach: zerowej i większej od 0 K. Gruba pozioma kreska w zerowej energii oznacza kondensację Bosego–Einsteina poniżej temperatury krytycznej.

Przyjrzyjmy się dokładnie bozonom w niezerowych temperaturach. Okazuje się, że wtedy najwięcej cząstek jest w stanie o pędzie  $p_0 = 0$ , ale również bardzo dużo jest ich w stanie o pędzie  $p_1$ , który jest bardzo blisko  $p_0$ .

Zakładamy tutaj, że cząstki są zamknięte w pudle o dużej, lecz skończonej objętości. Wtedy składowe wektora pędu przyjmują tylko wartości dyskretne (są skwantowane) podobnie jak np. energia w atomie wodoru.

Kolejne stany o wyższych pędach są obsadzone również przez dużą liczbę bozonów, aczkolwiek liczba obsadzeń ma tendencję malejącą.





Rys. 2. Rozkład fermionów (elektronów) w temperaturach: zerowej i większej od 0 K.

Teraz możemy wyjaśnić, co to jest kondensacja Bosego–Einsteina. Otóż, jest to zjawisko polegające na tym, że poniżej pewnej temperatury  $T_c$ , zwanej temperaturą krytyczną, stan o pędzie  $p_0 = 0$  jest obsadzany przez makroskopową liczbę cząstek. Innymi słowy, stan ten ma liczbę obsadzeń  $N_{p_0}$  znacznie większą niż pozostałe stany, tzn.

$$N_{p_0} \gg N_{p_1}, N_{p_2}, \dots$$

Okazuje się, że bozony lubią gromadzić się w tym samym stanie tworząc coś, co nazywamy kondensatem. Mówimy, że bozony kondensują, gromadzą się w stanie o najniższej energii. To zjawisko jest kwantowym przejściem fazowym pierwszego rodzaju. Czynnikiem odpowiedzialnym za kondensację jest kwantowa natura cząstek i nic poza tym.

Zgodnie z klasyfikacją przejść fazowych Ehrenfesta przemianę fazową nazywamy przemianą  $n$ -tego rodzaju, jeśli potencjał termodynamiczny jest ciągły wraz z pochodnymi do rzędu  $n - 1$  włącznie, natomiast  $n$ -ta pochodna jest nieciągła. Najprostszym przykładem przemiany pierwszego rodzaju jest wrzenie cieczy w temperaturze niższej od krytycznej. Wygodnym potencjałem termodynamicznym jest wtedy energia swobodna Gibbsa  $G$  zależna od temperatury  $T$ , ciśnienia  $p$  i liczby cząstek  $N$ . Pochodna  $\left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{T,p}$  nosi nazwę potencjału chemicznego i jest w punkcie przemiany ciągła, natomiast pochodne względem  $p$  i  $T$  są nieciągłe, pierwsza z nich określa różnicę gęstości obu faz, druga – ciepło przemiany.

Szczegółowe obliczenia teoretyczne pokazują, że zjawisko kondensacji będzie zachodziło, gdy spełniony zostanie następujący warunek

$$\lambda^3 n = 2,612.$$

We wzorze tym  $\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$  jest tzw. termiczną długością fali, będącą odpowiednikiem długości fali de Broglie’a dla pojedynczej cząstki o masie  $m$ , natomiast  $n = N/V$  jest gęstością cząstek w układzie,  $T$  jest temperaturą, a  $k_B$  jest stałą Boltzmanna. Widzimy, że  $n \sim \xi^{-3}$ , gdzie  $\xi$  jest średnią odległością między cząstkami. Tak więc kondensacja Bosego–Einsteina zachodzi wtedy, gdy długość termiczna fali staje się porównywalna ze średnią odległością między cząstkami  $\lambda \sim \xi$ . Może to zajść wtedy, gdy albo gęstość  $n$  jest bardzo duża, albo temperatura  $T$  jest bardzo niska. Załóżmy więc, że gęstość cząstek (niech będą nimi atomy rubidu, z którymi wykonano doświadczenie) jest dana, np.  $n = 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ ,

magnetycznego przemieszczają się zgęszczenia plazmy. Było to możliwe dzięki rejestracji radiowej emisji tych zgęszczeń. Obserwacje wyraźnie pokazały też, jak zgęszczenia te w miarę oddalania się od Słońca stygną emitując coraz dłuższe fale radiowe.

Zaskoczeniem natomiast było stwierdzenie bardzo szybkich fluktuacji kierunku linii pola nad biegunami, i to w skalach czasowych zarówno sekund, jak i godzin. Przypisuje się to turbulencjom w wietrze powstającym przy oddziaływaniu strumieni wiatru szybkiego z powolnym. Bowiem nie tylko pole magnetyczne kieruje ruchem plazmy, ale i plazma może modyfikować kształt pola, jeżeli tylko ma na to dość energii. To samo zjawisko tłumaczy też jeszcze inny nieoczekiwany fakt. Mianowicie, gdyby pole magnetyczne Słońca w pobliżu biegunów tworzyło znany każdemu z czasów szkolnych gładki „lejek”, to cząstki promieniowania kosmicznego mogłyby tam właśnie łatwo wzdłuż linii pola docierać w pobliże Słońca. W przypadku Ziemi tak właśnie jest: cząstki (co prawda, nie promieniowania kosmicznego, lecz głównie wiatru słonecznego) łatwo wpadają do atmosfery w okolicach polarnych wywołując często tam obserwowane zorze. Tymczasem nad biegunami Słońca Ulysses zarejestrował znacznie mniej cząstek promieniowania kosmicznego niż oczekiwano. To właśnie chaotyczny (w małej skali) przebieg linii pola stanowi tu dla nich przeszkodę. Inaczej mówiąc, wysokoenergetyczne cząstki promieniowania kosmicznego „odczuwają” ten lejek linii pola jako bardzo „chropowaty” i dlatego dużo z nich jest z powrotem odrzucanych w przestrzeń.

Jak dotąd, aparatura Ulyssesa działa bez zarzutu. Przedstawione tu niektóre wstępne wyniki jego misji przypadają na okres Słońca spokojnego. Jeżeli sonda dotrwa do lat 2000/2001, to jej następny przelot nad biegunami Słońca wypadnie w okresie aktywności (obieg Ulyssesa wokół Słońca trwa 6,2 lat, czyli jest w przybliżeniu równy połowie cyklu słonecznego). Nie będzie już wtedy jedynym urządzeniem śledzącym Słońce z Kosmosu. Ostatnio European Space Agency wystrzeliła sondę Solar and Heliospheric Observatory (o oficjalnym skrótce – uwaga! – SOHO). Nawet zresztą lecąc daleko od Słońca Ulysses nie będzie próżnował monitorując systematycznie własności ośrodka międzyplanetarnego.



oraz że znamy masę molową cząstki  $m_{Rb} = 85,5$  g. Wtedy proste oszacowania pokazują, że  $T_c \sim 10^{-6}$  K.

Tak więc, aby zaobserwować kondensację Bosego–Einsteina, musimy schłodzić układ do temperatur ekstremalnie niskich. Dotychczas udawało się to zjawisko obserwować tylko w przypadku atomów  $^4\text{He}$ . Poniżej temperatury  $T_c = 2,19$  K ciecz przechodziła do nowego stanu, zwanego stanem nadciekłym o bardzo dziwnych własnościach makroskopowych. Jednakże atomy  $^4\text{He}$  bardzo silnie oddziałują ze sobą i tylko 10% wszystkich cząstek jest w stanie z  $p = 0$  dla  $T = 0$  K. Nie jest więc to idealny przykład kondensacji Bosego–Einsteina.

W doświadczeniu wspomnianym we wstępie ochłodzono atomy  $^{87}\text{Rb}$ . W warunkach, w jakich przeprowadzono ten eksperyment, można przyjąć, że są to cząstki nieoddziałujące. Tym samym wynik powinien być zbliżony do przewidywanego teoretycznie. Prace nad otrzymaniem kondensatu trwały bardzo długo. Od około 15 lat było to marzenie fizyków pracujących w optyce kwantowej i fizyce atomowej. Największe trudności polegały na utrzymaniu atomów w małym obszarze przestrzeni oraz na ich ochłodzeniu. Stosując metody chłodzenia laserowego (w których spowalniano atomy za pomocą wiązki światła) oraz chłodzenia ewaporacyjnego (odparowywanie najszybszych cząstek) udało się otrzymać ekstremalnie niskie temperatury. W szczególności zaobserwowano, że w układzie zawierającym około 5 000 atomów  $^{87}\text{Rb}$  aż 500 z nich (czyli 10%) poniżej  $T_c = 180$  nK obsadza stan o najniższej energii, a pozostałe były rozsypane po stanach o wyższych energiach. Co więcej, gdy obniża się temperaturę do zera, to liczba cząstek w tym stanie wzrasta do prawie 100%. Późniejsze eksperymenty dotyczyły aż 30 000 atomów. Inne grupy zaobserwowały kondensację atomów innych pierwiastków (np. litu czy sodu). Musimy jednak pamiętać, jak trudny jest to eksperyment. Tylko 3 laboratoria na świecie są przygotowane do jego przeprowadzenia.

Doświadczenie to z pewnością przejdzie do historii jako kolejny dowód na prawdziwość mechaniki kwantowej, a autorzy, być może, doczekają się wielu prestiżowych nagród. Ważne jest też, że otwiera ono szereg nowych projektów badawczych dotyczących poznania własności fizycznych kondensatu. Praktycznie na razie nie wiemy nic na ten temat. Ani jak kondensat oddziałuje ze światłem, ani jak wygląda dokładnie przebieg przejścia fazowego w czasie. Jakie są własności termodynamiczne takiego układu, czy takie jak przewiduje teoria Bosego i Einsteina? Lista otwartych pytań i propozycji byłaby zapewne dłuższa niż ten artykuł. Mamy jednak nadzieję, że poinformujemy naszych Czytelników za kilka lat, na jakie pytania udało się już znaleźć odpowiedź.

\*\*\*\*\*

W moich starych notatkach odnalazłem następujący dowód twierdzenia Pitagorasa.

Odkładamy  $BD = BE = BC = a$  (patrz rysunek; oznaczenia standardowe,  $\delta = \angle AEC$ ). Wtedy trójkąty  $ACD$  i  $AEC$  są podobne (ponieważ  $(180^\circ - 2\gamma) + (180^\circ - 2\delta) = 180^\circ$ , więc  $90^\circ - \gamma = \delta$ ). Wobec tego

$$\frac{c-a}{b} = \frac{b}{c+a},$$

czyli  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Nie wiem, czy powyższy dowód jest gdzieś w literaturze; jako miniatura matematyczna wydaje się być godny *Delt*y.

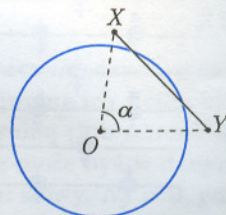
Werner MNICH



**Rozwiązanie zadania M 787.** Z twierdzenia cosinusów wynika, że odcinek  $XY$  o długości nie większej niż 1, którego końce leżą na zewnątrz koła  $k$ , widać ze środka tego koła,  $O$ , pod kątem ostrym:

$$2|OX||OY| \cos \alpha = |OX|^2 + |OY|^2 - |XY|^2 > 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 0,$$

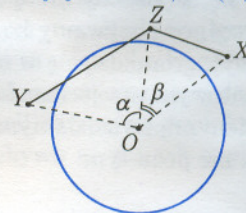
zatem  $\cos \alpha > 0$ .



Dla punktów  $X, Y$  leżących na zewnątrz koła  $k$  możemy wprowadzić pseudoodległość  $d(X, Y)$  równą mierze kąta skierowanego  $XOY$ . Spełnia ona, oczywiście, nierówność trójkąta, tzn. dla dowolnych punktów  $X, Y, Z$  (leżących poza kołem  $k$ ) mamy

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) + d(Y, Z).$$

Niech  $X, Y$  będą tymi spośród punktów  $A, B, C, D$ , pomiędzy którymi pseudoodległość  $d$  jest największa. Jednak na mocy wcześniejszego spostrzeżenia albo  $d(X, Y) \leq \pi/2$ , albo dla pewnego  $Z \in \{A, B, C, D\}$  zachodzi  $d(X, Z) < \pi/2$ ,  $d(Z, Y) < \pi/2$ , co na mocy nierówności trójkąta dowodzi, iż  $d(X, Y) < \pi$ .

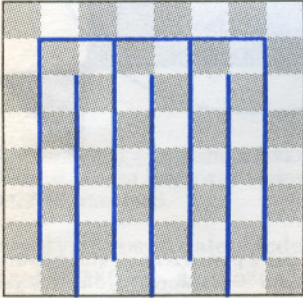


Zatem prosta prostopadła do dwusiecznej kąta  $XOY$  i przechodząca przez środek koła  $k$  spełnia warunki zadania.



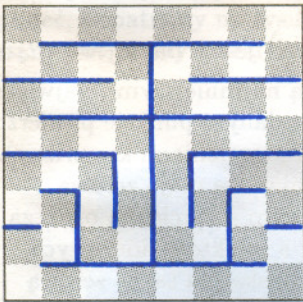
# 8

# mała delta

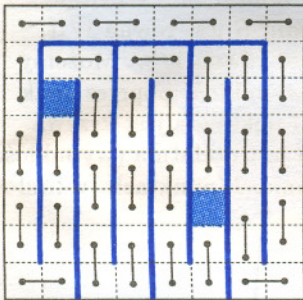


## Szachownica i domino

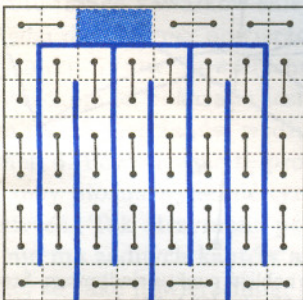
Bardzo wielu Czytelników *Delty* wie, że szachownicy o rozmiarach  $8 \times 8$ , z której ktoś usunął dwa przeciwległe narożne pola, nie można przykryć za pomocą 31 kostek domina układanych tak, by każda przykrywała dwa sąsiednie pola. Powód jest prosty. Oba usunięte pola są tego samego koloru, a zatem na szachownicy bez narożników pół jednego koloru jest 30, a drugiego 32. Tymczasem każda kostka domina – gdziekolwiek byśmy ją na szachownicy położyli – przykrywa jedno pole białe i jedno czarne. Kto ma 31 kostek domina, nie zdoła więc przykryć nimi szachownicy bez przeciwległych narożników, ani szachownicy z usuniętymi dwoma polami tego samego koloru.



Rys. 1. Przykłady dobrych węży.



Rys. 2. Wąż, który po zabraniu pola białego i czarnego (na rysunku zabrane pola są zaznaczone kolorem) rozpadł się na dwa kawałki.



Rys. 3. Wąż, który się nie rozpadł po zabraniu pola białego i czarnego.

Aż się prosi, by zapytać, co będzie wtedy, gdy z szachownicy usuniemy jedno pole białe i jedno czarne? Opisany przed chwilą argument tym razem nie działa, więc może otrzymaną figurę uda się przykryć 31 kostkami domina w taki sposób, by każda zakrywała dwa pola?

Od razu widać, że uda się to zrobić wtedy, gdy usuwamy dwa pola sąsiednie. Czy uda się dla każdego położenia obu zabieranych pól?

Okazuje się, że tak. Żeby zobaczyć, jak się to robi, trzeba najpierw na szachownicy narysować węża zjadającego własny ogon (albo, jeśli kto woli, trasę do gry w kapsle). Nie może być to wąż byle jaki: musi tak leżeć na szachownicy, by zakrywać wszystkie pola, i w dodatku nie może się nigdzie sam ze sobą przecinać. Dobre są, na przykład, węże z rysunku 1. (Może ktoś umie narysować inne dobre węże? Albo powiedzieć, ile jest wszystkich dobrych węży?)

Gdy teraz z szachownicy usuniemy dwa pola różnych kolorów, to mogą stać się dwie rzeczy. Po pierwsze, wąż może rozpaść się na dwa kawałki (rysunek 2). Wtedy każdy z tych kawałków składa się z parzystej liczby pól szachownicy (gdy wędrujemy z usuniętego pola czarnego na usunięte pole białe wzdłuż węża, wszystko jedno w którą stronę, to przechodzimy najpierw przez pole białe, potem przez czarne, potem znów przez białe, ..., i wreszcie na końcu przez czarne). Zatem, każdy z dwóch kawałków węża zdołamy przykryć kostkami domina – trzeba je po prostu układać „wzdłuż węża”. Nie będzie z tym żadnego kłopotu, nawet w tych miejscach, gdzie wąż zakręca.

Po drugie, wąż może nie rozpaść się na dwa kawałki (rysunek 3) – wtedy jednak jest równie łatwo, jak przed chwilą, bo mamy do przykrycia jeden tylko kawałek węża złożony z parzystej liczby pól.

Każdy może sam sprawdzić, że przedstawione rozumowanie jest dobre dla dowolnej prostokątnej szachownicy o parzystej liczbie pól i o obu bokach długości co najmniej 2.

Małą Deltę przygotował Paweł STRZELECKI



# Periodyczne powierzchnie minimalne

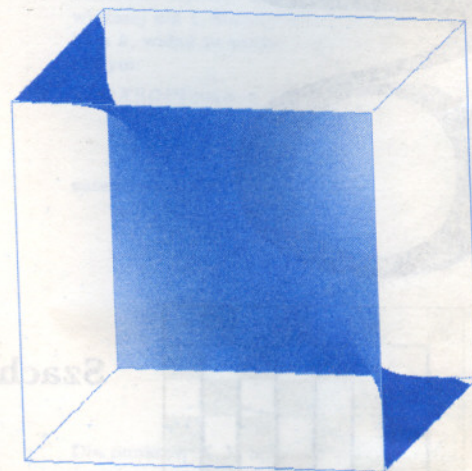
Wojciech GÓZDŹ i Robert HOŁYST

Czym są powierzchnie minimalne i jak je można utworzyć i zobaczyć? Na to pytanie odpowiedzieli matematycy i przyrodnicy w XVIII i XIX wieku. A oto przepis na prosty eksperyment, pokazujący powierzchnię minimalną, który może być wykonany przez każdego Czytelnika *Deltę*:

Przygotuj roztwór mydła taki, abyś mógł zrobić z niego bańki mydlane. Następnie z drutu wykonaj ramkę o dowolnym kształcie. Ciekawszy efekt uzyskuje się, jeżeli ramka nie jest płaska. Zanurz ramkę w roztworze. Utworzy się na niej błonka mydlana. Błonka przyjmie taki kształt, przy którym ma najmniejsze z możliwych pole powierzchni. Wynika to z istnienia napięcia powierzchniowego i proporcjonalnej do niego energii powierzchniowej. Ponieważ każdy układ dąży do stanu, w którym energia jest minimalna (w tym przypadku energia swobodna), błonka mydlana przyjmie kształt odpowiadający najmniejszej energii, a w konsekwencji jak najmniejszemu – przy zadanym kształcie ramki – polu powierzchni. Dlatego powierzchnię utworzoną przez błonkę mydlaną na ramce nazywamy **powierzchnią minimalną**.

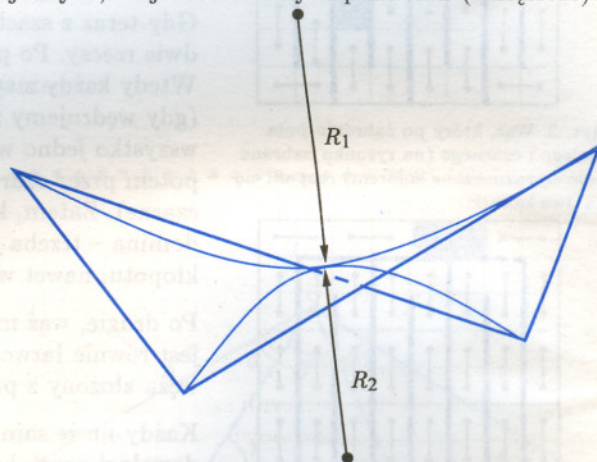
Ogólnie, powierzchnia minimalna jest to powierzchnia o minimalnym, przy zadanych warunkach brzegowych, polu powierzchni. Opisany eksperyment jest nazwany eksperymentem Plateau; nazwa ta pochodzi od nazwiska przyrodnika, który zajmował się problemem napięcia powierzchniowego w XIX wieku. Opisał on w 1873 roku to doświadczenie w książce *Statique Expérimentale et Théorique des Liquides Soumis aux Seules Forces Moléculaires (Statyka doświadczalna i teoretyczna płynów poddanych jedynie działaniu sił molekularnych)*. James Clerk Maxwell w artykule zamieszczonym w Encyclopaedia Britannica podaje, że tego typu eksperymenty wykonał już Leonardo da Vinci kilkaset lat przed Plateau. Na rysunku 1 pokazana jest ramka o charakterystycznym kształcie wraz z powierzchnią, która powinna się na niej utworzyć po zanurzeniu w roztworze mydła. Jest to prosty element powierzchni *D* Schwarza, o której będzie mowa w dalszej części artykułu.

Matematycy znaleźli inny sposób opisu powierzchni minimalnych, niezależny od kształtu brzegu powierzchni. Laplace wykazał, że powierzchnia minimalna jest to taka powierzchnia, której średnia krzywizna w każdym punkcie jest równa zero. Aby zrozumieć, jaki ma kształt powierzchnia minimalna w trójwymiarowej przestrzeni, wyobraźmy sobie siodło końskie (rys. 2). Siodło to ma dwa wygięcia, każde w przeciwną stronę. Jest ono w środkowym punkcie równocześnie wklęsłe i wypukłe. Taki punkt nazywany jest punktem siodłowym. Jak widać (rys. 2), z dwóch krzywizn  $1/R_1$  i  $1/R_2$  jedna jest dodatnia, a druga ujemna, tak, że średnia krzywizna zdefiniowana



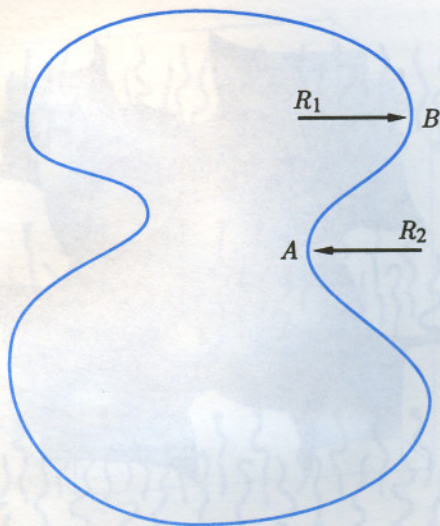
Rys. 1. Prostokątny kształt ramki wraz z powierzchnią, która powinna się na niej utworzyć po zanurzeniu w roztworze mydła. Wszystkie kąty w tej ramce są proste i wszystkie długości boków są równe. Otrzymana powierzchnia jest 1/64 komórki elementarnej powierzchni *D* Schwarza (rys.7).

wzorem:  $H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$  jest – dla  $R_1 = -R_2$  – równa zero ( $R_1$  i  $R_2$  są najmniejszym i największym promieniem krzywizny w danym punkcie powierzchni i nazywają się głównymi promieniami krzywizny). A więc powierzchnie minimalne mają zerową średnią krzywizną w każdym punkcie, co oznacza, że składają się w całości z punktów siodłowych. (Powierzchnia zupełnie płaska ma także zerową krzywizną w każdym punkcie i jest szczególnym przykładem powierzchni minimalnej.) Średnia krzywizna kuli o promieniu  $R$  jest równa  $1/R$ , a walca o promieniu  $r$  jest równa  $1/2r$ . Możemy zdefiniować wklęsłość i wypukłość poprzez znak krzywizny. Na rysunku 3 pokazana jest krzywa płaska, której krzywizna jest dodatnia (wypukłość) w jednych, a ujemna w innych punktach (wklęsłość).



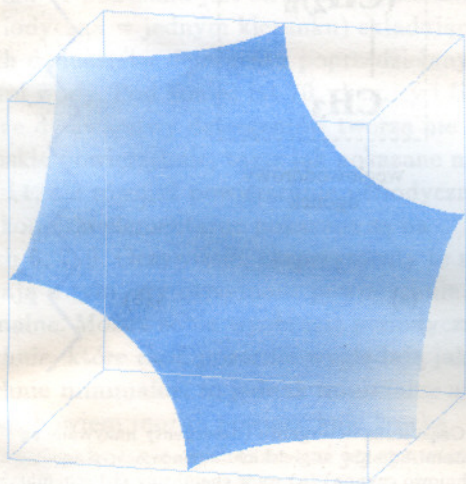
Rys. 2. Kształt powierzchni minimalnej w pobliżu punktu siodłowego. Średnia krzywizna jest równa  $H = \frac{1}{2} (1/R_1 + 1/R_2)$ . W równaniu na  $H$  należy wziąć  $R_1$  i  $R_2$  z przeciwnymi znakami, ponieważ siodło jest wygięte w przeciwną stronę (popatrz też na uproszczony rys. 3).





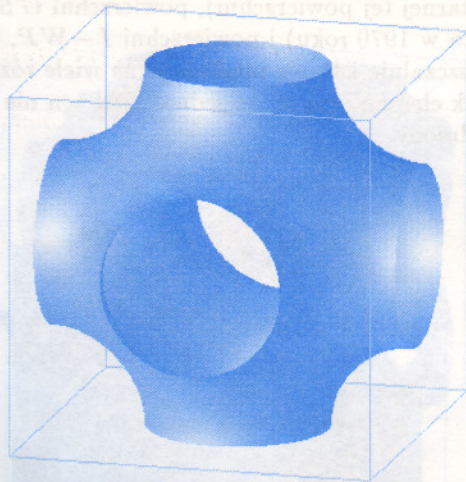
Rys. 3. Płaska krzywa z ujemną krzywizną w punkcie  $A$  i dodatnią w punkcie  $B$ . Znak krzywizny można użyć do zdefiniowania wypukłości i wklęsłości.

Matematycy poszli dalej. Jeden z nich (Schwarz) wykazał w 1865 r., że można wziąć proste kawałki powierzchni minimalnej i poskładać je tak, aby otrzymać periodyczne powierzchnie minimalne. Aby to zrozumieć, popatrzymy na rysunki 4–6. Na rysunku 4 pokazany jest prosty kawałek powierzchni minimalnej.

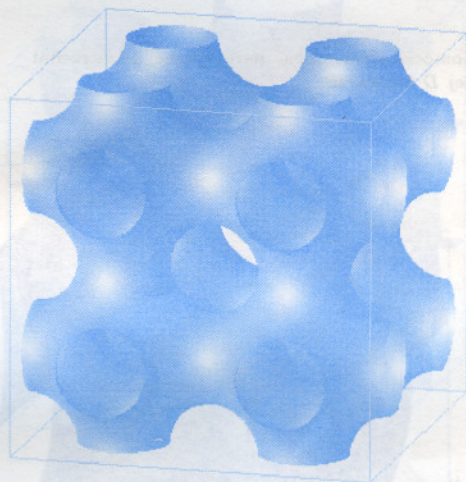


Rys. 4. Prosty element powierzchni minimalnej  $P$  Schwarza. Z ośmiu takich kawałków powierzchni sklejonych odpowiednio wzdłuż krawędzi otrzymamy rysunek 5.

Z ośmiu takich kawałków sklejonych wzdłuż jej krawędzi dostaniemy powierzchnię pokazaną na rysunku 5 (tzw. powierzchnia  $P$  Schwarza). Powierzchnia ta pokazana jest w sześcianie. Składając ośmiu takich sześcianów wzdłuż ścian dostaniemy rysunek 6. Powtarzając tę procedurę nieskończoną ilość razy można wypełnić tymi sześcianami całą przestrzeń. Tak otrzymana powierzchnia jest gładka, tzn. nie ma żadnych kantów ani załamań. Zwróćmy uwagę, że taką powierzchnię, która wypełnia całą przestrzeń, można otrzymać z elementu pokazanego na rysunku 5 przez wielokrotne przesuwanie



Rys. 5. Komórka elementarna minimalnej powierzchni periodycznej  $P$  Schwarza. Takimi komórkami możemy wypełnić całą przestrzeń (patrz rys. 6).

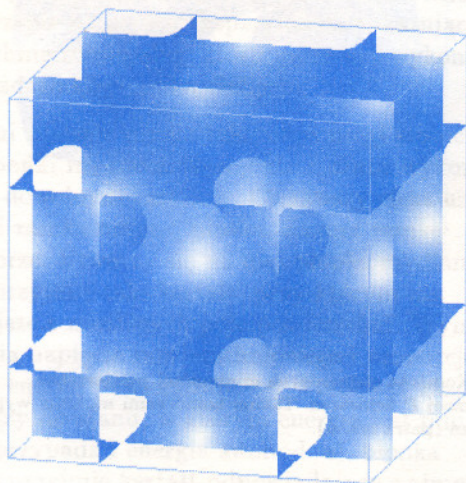


Rys. 6. Ośmiu komórek elementarnych powierzchni  $P$  Schwarza (rys. 5) złożonych razem.

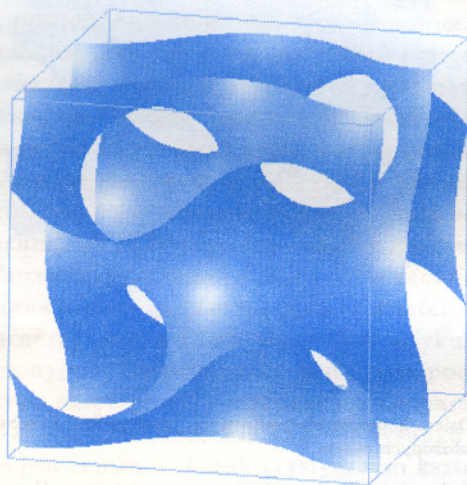
go w kierunkach osi sześcianu o wektor o długości równej wielokrotności długości jego boku. Otrzymujemy w ten sposób periodyczną powierzchnię minimalną, a sześcian pokazany na rysunku 5 wraz z powierzchnią nazywamy komórką elementarną. Prosty element powierzchni, pokazany na rysunku 4, (od którego zaczęliśmy całą procedurę) można utworzyć według przepisu Plateau (podanego na początku) biorąc odpowiedni kształt ramki, tak by jej krawędzie odpowiadały brzegom tej powierzchni. Nie każdy prosty kawałek powierzchni minimalnej daje się tak złożyć, aby można z niego było utworzyć gładką, periodyczną powierzchnię minimalną. Matematycy, którzy badają ten problem od 130 lat, odkryli tylko 7 takich powierzchni o symetrii kubicznej, tj. takich, w których komórka elementarna ma kształt sześcianu. Na rysunkach 7, 8, 9 pokazane są komórki elementarne, kolejno, powierzchni  $D$  Schwarza



(a na rysunku 1 widoczna jest 1/64 komórki elementarnej tej powierzchni), powierzchni  $G$  Schoena (odkryta w 1970 roku) i powierzchni  $I - WP$ . Choć przypuszczalnie istnieje nieskończenie wiele różnych komórek elementarnych, to jednak fakt ten nie został udowodniony.



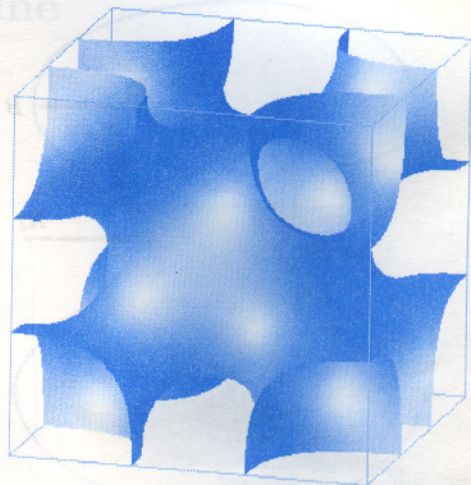
Rys. 7. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej  $D$  Schwarza.



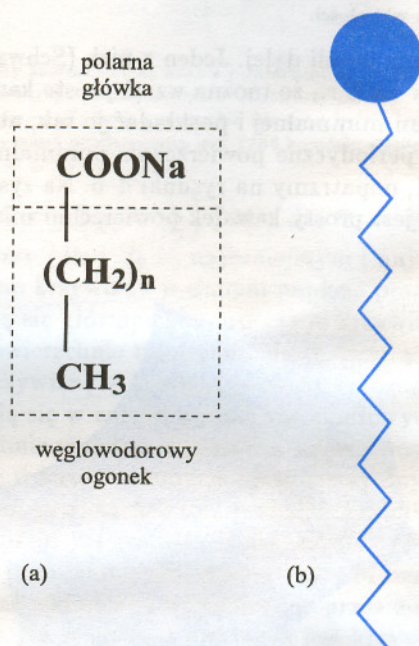
Rys. 8. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej  $G$  Schoena.

Czy periodyczne powierzchnie minimalne występują w przyrodzie? Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy najpierw omówić właściwości pewnych cząsteczek, które towarzyszą nam na co dzień: są nimi cząsteczki mydeł i detergentów. Cząsteczki takie składają się z dwóch części: polarnej „główki” (tzn. mającej moment dipolowy) i niepolarnego (węglowodorowego) „ogonka” (rys. 10).

Polarna główka jest wodolubna, a ogonek nie. Mówiąc w skrócie: polarna główka przyciąga cząsteczki wody, a ogonek je odpycha. Jeżeli w wodzie znajdują się cząsteczki brudu (najczęściej tłuszcze i węglowodory), to cząsteczki detergentu otaczają brud ogonkami, a główki kierują w stronę wody. Jest to podstawą



Rys. 9. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej  $I - WP$ .

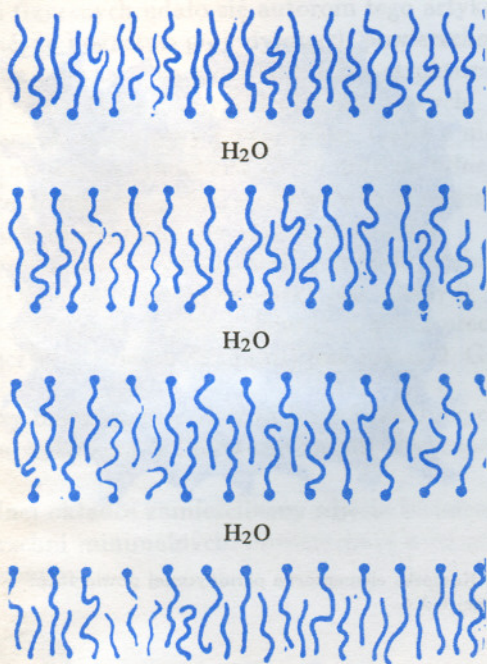


Rys. 10. Cząsteczka detergentu (detergenty nazywane są surfaktantami od słów angielskich: surface active agent – substancja powierzchniowo czynna) (a) wzór chemiczny (b) schematyczny rysunek cząsteczki.

procesu mycia czy prania. Brud jest zmywany przez detergent z tkaniny czy rąk dzięki temu, że detergent izolując brud od wody zmniejsza jego energię powierzchniową i odrywa go od tkaniny. Następnie brud i detergent są splukiwane wraz z wodą. O ile energia powierzchniowa brudu i wody jest dużo większa niż energia powierzchniowa brudu i tkaniny, o tyle energia powierzchniowa detergentu i brudu jest dużo mniejsza i dlatego brud odrywa się od powierzchni i przyczepia do detergentu. Znow mamy do czynienia z zasadą minimum energii.

No dobrze, ale gdzie są te powierzchnie periodyczne? Jeżeli rozpuścimy cząsteczki detergentu w czystej wodzie, to mogą się one tak ułożyć w dwuwarstwę, aby ogonki były izolowane od wody (rys. 11).

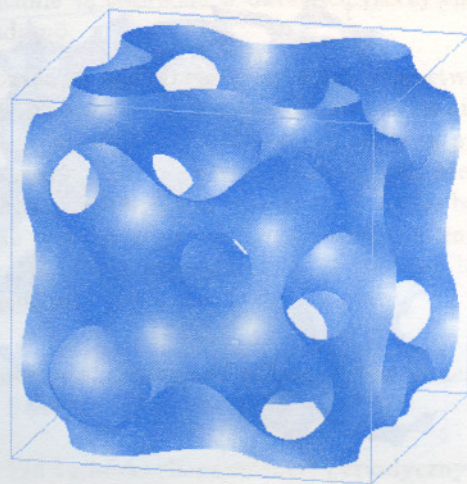




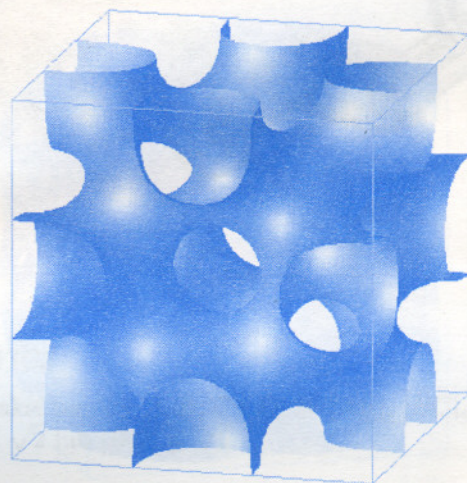
Rys. 11. Faza lamelarna złożona z dwuwarstw utworzonych przez cząsteczki detergentu w roztworze wodnym. Dwuwarstwy tworzą też powierzchnie periodyczne, takie jak pokazane na rysunkach 5, 7–9.

Na rysunku 11 pokazana jest struktura lamelarna (tzn. periodyczna w jednym kierunku) składająca się z płaskich dwuwarstw detergentu poprzedzielanych warstwami wody. Pod koniec lat 70. chemicy i fizycy odkryli, że dwuwarstwy detergentów tworzą nie tylko płaskie powierzchnie, takie jak pokazane na rysunku 11, ale również powierzchnie periodyczne, których komórki elementarne pokazane są na rysunkach 5, 7–9. Oczywiście, eksperymenty te nie przesądzają o tym, czy otrzymane powierzchnie są minimalne. Można sobie wyobrazić periodyczne powierzchnie, które choć pozornie wyglądają jak powierzchnie minimalne, to jednak minimalne nie są. Zawsze bowiem można powierzchnię trochę zdeformować i choć nie zmieni to ani jej symetrii, ani topologii, to jednak spowoduje, że nie wszystkie jej punkty będą miały zerową średnią krzywiznę. Niemniej periodyczne powierzchnie minimalne służą za wzór wszystkich powierzchni periodycznych.

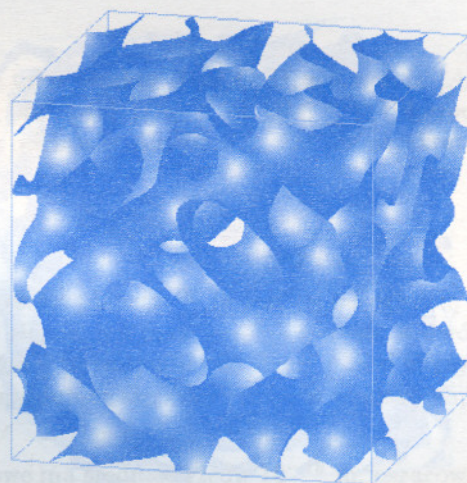
Gdzie w biologii pojawiają się powierzchnie periodyczne? Wiadomo na pewno, że lipidy, z których składają się ściany komórkowe w naszych organizmach, tworzą takie powierzchnie periodyczne w roztworach wodnych. Najczęściej występującą strukturą jest tzw. struktura żyroidalna pokazana na rysunku 8. Być może takie struktury tworzone są w chloroplacie, który jest odpowiedzialny za proces fotosyntezy. Powierzchnie periodyczne pojawiają się w mieszaninach blokowych polimerów (składniki poliuretanu), jak również w kryształach jonowych, jako powierzchnie zerowego potencjału elektrostatycznego.



Rys. 12. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej zwanej motylem *BFG*.

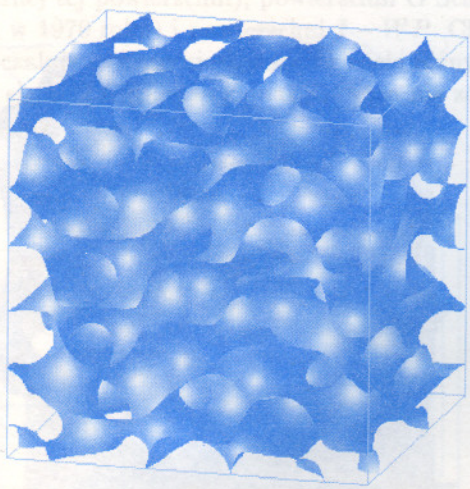


Rys. 13. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej *CPD*.

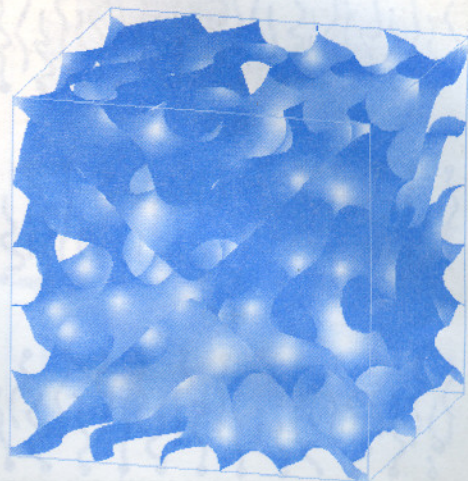


Rys. 14. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej *GX1*.

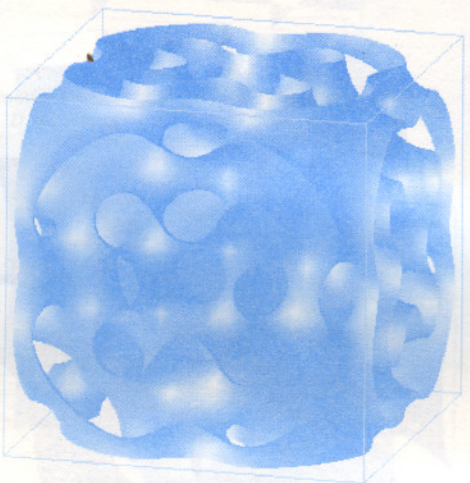




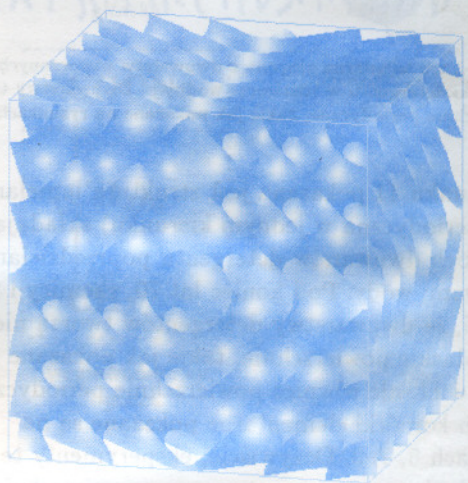
Rys. 15. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej GX2.



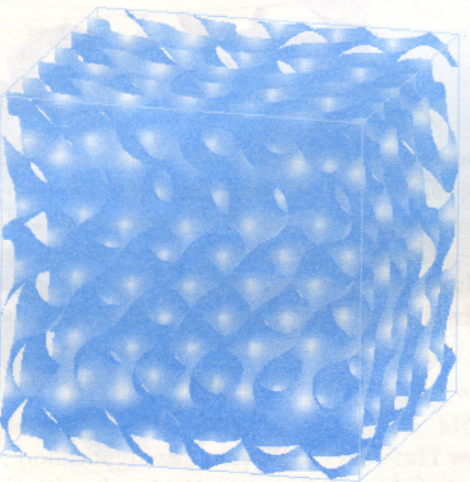
Rys. 18. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej GX4.



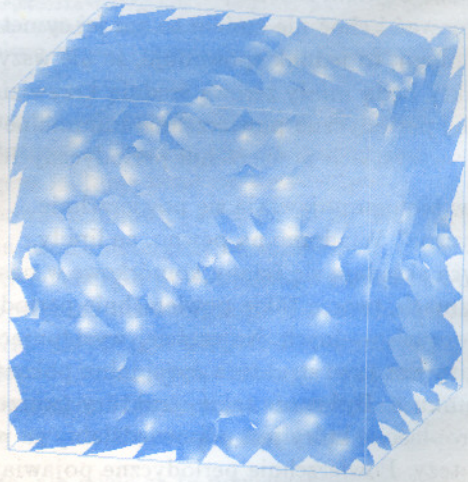
Rys. 16. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej SCN1.



Rys. 19. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej GX5.



Rys. 17. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej GX3.



Rys. 20. Komórka elementarna periodycznej powierzchni minimalnej GX6.



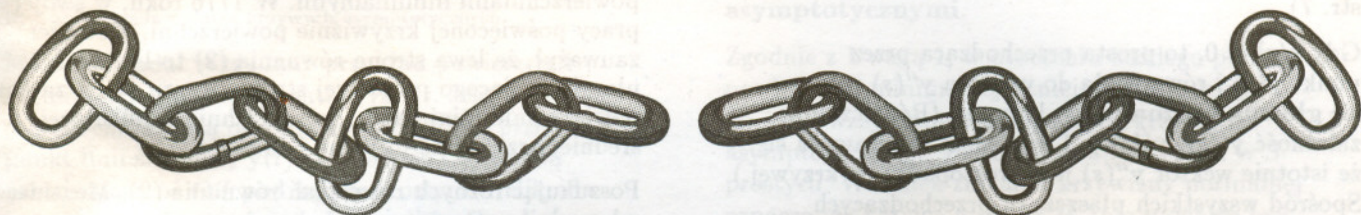
Opisując roztwory wodne detergentów za pomocą modeli fizycznych udało się autorom tego artykułu pokazać, że bogactwo periodycznych powierzchni jest ogromne i nie zamyka się w tych kilku strukturach (rys. 5, 7–9). Odkryliśmy kilkadziesiąt nowych nie znanych do tej pory powierzchni. Część z nich pokazana jest na rysunkach 12–20 oraz na tylnej okładce *Delty*. Jak widać, niektóre z tych powierzchni są bardzo skomplikowane. Miarą złożoności powierzchni jest jej genus, czyli z grubsza liczba dziur. Dla przykładu: genus sfery jest równy 0, genus torusa jest równy 1 (jedna dziura), a genus precelka (ciasteczko z dwiema dziurami) jest równy 2. Genus

powierzchni z rysunku 20 wynosi 141, a genus powierzchni *P* Schwarza (rys. 5) tylko 3. Czy te nowe powierzchnie są tworzone w układach rzeczywistych? Nie wiadomo.

Nasza praca na pewno nie wyczerpuje bogactwa świata powierzchni periodycznych. Powierzchnie te mają nie tylko walor poznawczy, ale także są piękne poprzez swoją symetrię i wysoką złożoność. Może i Ty, Czytelniku, będziesz kiedyś miał okazję badać te piękne twory matematyczne, których realizację tak nieoczekiwanie odnaleziono w roztworach lipidów i detergentów.

Autorzy dziękują Komitetowi Badań Naukowych za wsparcie badań nad powierzchniami minimalnymi. Praca została wykonana w Instytucie Chemii Fizycznej PAN i Szkole Nauk Ścisłych.

Na tylnej okładce zamieściliśmy zdjęcia komórek elementarnych (lub 1/8 komórki elementarnej) periodycznych powierzchni minimalnych. Powierzchnia rozdziela objętość na dwie rozłączne części zaznaczone kolorami niebieskim i czerwonym.

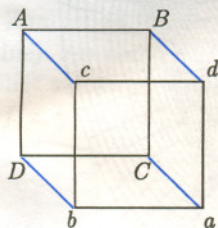


## Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

**M 786.** W przestrzeni dane są takie punkty  $A, B, C$  i  $D$ , że  $|AB|, |BC|, |CD|, |DA| \leq 1$ . Udowodnić, że  $|AC| \leq \sqrt{2}$  lub  $|BD| \leq \sqrt{2}$ .

Rozwiązanie na str. 15



Wszystkie zaznaczone odcinki są nie dłuższe niż 1.

**M 787.** Na płaszczyźnie dane są: koło  $k$  o średnicy  $\sqrt{2}$  i leżące na zewnątrz niego takie punkty  $A, B, C$  i  $D$ , że  $|AB|, |BC|, |CD|, |DA| \leq 1$ . Udowodnić, iż przez środek koła można przeprowadzić taką prostą, że wszystkie te punkty będą leżeć po jej jednej stronie.

Rozwiązanie na str. 4

**M 788.** Na płaszczyźnie dane są takie punkty  $A, B, C, D, a, b, c, d$ , że  $|AB|, |BC|, |CD|, |DA|, |ab|, |bc|, |cd|, |da|, |Ac|, |Db|, |Ca|, |Bd| \leq 1$ . Udowodnić, że długość co najmniej jednego z odcinków  $Aa, Bb, Cc, Dd$  nie przekracza  $\sqrt{2}$ .

Rozwiązanie na str. 15

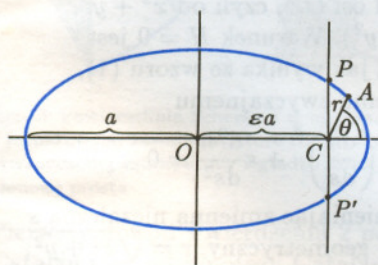
Redaguje Krzysztof REJMER

**F 437.** Wykazać, że radialna prędkość planety  $\frac{dr}{dt}$  ( $r$  jest jej odległością od gwiazdy), poruszającej się po elipsie, ma maksymalną wartość w dwóch punktach znajdujących się na prostej prostopadłej do dużej półosi elipsy i przechodzącej przez gwiazdę (znajdującą się, oczywiście, w ognisku elipsy).

Rozwiązanie na str. 16

**F 438.** Wiedząc, że jądro atomowe ma średnicę rzędu  $10^{-15}$  m, oszacować energię wiązania nukleonu w jądrze. Wykazać, że w jądrze atomu nie mogą znajdować się elektrony.

Rozwiązanie na str. 16



$C$  – centrum przyciągania,  
 $A$  – planeta,  
 $P, P'$  – punkty, w których  $\frac{dr}{dt}$  jest maksymalne.



# Helikoida i katenoida

Paweł STRZELECKI

W artykule W. Góździa i R. Hołysta można przeczytać o periodycznych powierzchniach minimalnych. Matematyk chciałby dorzucić do zawartych w nim informacji swoje trzy grosze.

Zacniemy od przypomnienia definicji krzywizny krzywej przestrzennej. Niech  $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbf{R}^3$  będzie krzywą gładką. **Krzywizna** krzywej  $\mathbf{y}$  w punkcie  $\mathbf{y}(s)$  to odwrotność promienia okręgu, który najlepiej ze wszystkich „udaje” krzywą w otoczeniu punktu  $\mathbf{y}(s)$ . Gdy krzywa jest sparametryzowana długością łuku, tzn. długość wektora stycznego  $|\mathbf{y}'(s)|$  jest dla każdego  $s$  równa 1, to krzywizna jest równa liczbie  $k(s) = |\mathbf{y}''(s)|$ . (Druga pochodna mierzy, jak szybko w pobliżu punktu  $\mathbf{y}(s)$  obraca się wektor styczny do krzywej.) Dla krzywych płaskich wprowadza się krzywiznę ze znakiem (patrz rys. 3 na str. 7).

Gdy  $k(s) \neq 0$ , to prosta przechodząca przez punkt  $\mathbf{y}(s)$  i równoległa do wektora  $\mathbf{y}''(s)$  nazywa się **główną normalną** do krzywej. (Różniczkując zależność  $\mathbf{y}'(s) \cdot \mathbf{y}'(s) = 1$  względem  $s$ , sprawdza się, że istotnie wektor  $\mathbf{y}''(s)$  jest prostopadły do krzywej.) Spośród wszystkich płaszczyzn przechodzących przez punkt  $\mathbf{y}(s)$  najlepiej przylega do krzywej jej **płaszczyzna ściśle styczna**, rozpięta na wektorach  $\mathbf{y}'(s)$  i  $\mathbf{y}''(s)$ .

A jak opisywać zakrzywienie gładkiej powierzchni  $S \subset \mathbf{R}^3$ ? Wyobraźmy sobie, że w ustalonym punkcie  $p \in S$  ktoś wbił słupek prostopadły do  $S$  (czyli prostopadły do płaszczyzny stycznej), my zaś kroimy  $S$ , prowadząc płaskie cięcia wzdłuż owego słupka (czyli wektora normalnego do  $S$ ). Za każdym razem w przekroju otrzymujemy krzywą płaską; jej krzywizna zależy w sposób ciągły od kierunku cięcia  $\theta \in [0, \pi]$ , bo  $S$  jest gładka. Istnieją zatem dwa takie przekroje, że krzywa leżąca na jednym ma krzywiznę najmniejszą, a na drugim – największą z możliwych. Owe ekstremalne krzywizny  $k_1$  i  $k_2$  to tzw. **krzywizny główne**  $S$  w punkcie  $p$ , odpowiednie zaś kierunki cięć – tzw. **kierunki główne**. Prawdziwy jest zaskakujący fakt: jeśli  $k_1 \neq k_2$ , to kierunki główne są prostopadłe. **Krzywizna średnia**  $S$  w  $p$  to połowa sumy krzywizn głównych,  $H := \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ .

**Uwaga 1.** Gdy przetniemy w  $p$  powierzchnię  $S$  dowolnymi dwiema prostopadłymi płaszczyznami zawierającymi wektor normalny do powierzchni  $S$  w  $p$ , to suma krzywizn dwóch krzywych płaskich otrzymanych w przekrojach będzie równa podwójnej krzywiznie średniej.

Można sprawdzić (po niemiłych rachunkach), że w ogólnym przypadku krzywizna średnia powierzchni  $S$  opisanej równaniem  $z = f(x, y)$  dana jest wzorem

$$(1) \quad H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$

(gdzie  $f_x, f_y, f_{xx}, \dots$  oznaczają odpowiednie

pochodne cząstkowe funkcji  $f$ ). Dla kogoś, kto liźnął nieco rachunku całkowego, niedaleka stąd droga do związku między powierzchniami minimalnymi a średnią krzywizną. Mianowicie, pole powierzchni o równaniu  $z = f(x, y)$  jest równe całce podwójnej

$$A(f) = \iint \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

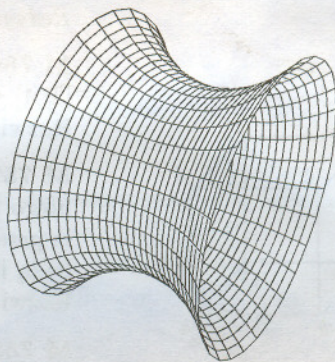
W 1760 roku Lagrange badał problem znalezienia powierzchni  $z = f(x, y)$  o najmniejszym możliwym polu wśród wszystkich powierzchni o zadanych wartościach na brzegu ustalonego otwartego podzbioru płaszczyzny. Jak wykazał Lagrange, funkcja będąca rozwiązaniem powyższego problemu musi spełniać tzw. **równanie Eulera–Lagrange’a dla funkcjonau**  $A(f)$ ,

$$(2) \quad (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Rozwiązania równania (2) Lagrange nazwał powierzchniami minimalnymi. W 1776 roku, w swojej pracy poświęconej krzywiznie powierzchni, Meusnier zauważył, że lewa strona równania (2) to licznik ułamka stojącego po prawej stronie wzoru (1), a zatem powierzchnie minimalne i powierzchnie o znikającej średniej krzywiznie to jedno i to samo.

Poszukując różnych rozwiązań równania (2), Meusnier udowodnił następujące

**Twierdzenie 1.** *Jedyną obrotową powierzchnią minimalną jest katenoida (czyli powierzchnia powstająca przez obrót krzywej łańcuchowej  $y = \frac{1}{a}(\exp(ax) + \exp(-ax))$  wokół prostej  $y = 0$ ; zob. rys. 1).*



Rys. 1. Katenoida.

**Szkic dowodu.** Powierzchnia  $S$  o równaniu  $z = f(x, y)$  ma oś obrotu  $OZ$ , gdy  $f$  zależy tylko od odległości od osi  $OZ$ , czyli od  $x^2 + y^2$ , tzn.  $f(x, y) = h(x^2 + y^2)$ . Warunek  $H = 0$  jest wówczas równoważny, jak wynika ze wzoru (1), równaniu różniczkowemu zwyczajnemu

$$\frac{dh}{ds} + 2s \left( \frac{dh}{ds} \right)^2 + s \frac{d^2h}{ds^2} = 0,$$

gdzie  $s = x^2 + y^2$ . Zmieniając zmienną niezależną  $s$  na nową, mającą sens geometryczny,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , dostaniemy równanie

$$h'(r) + (h'(r))^3 + r h''(r) = 0$$

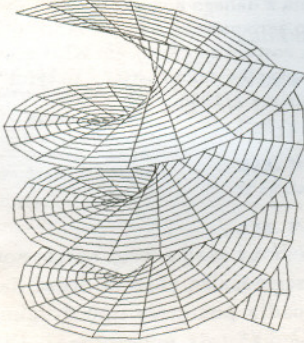
(primy oznaczają pochodne względem  $r$ ).



Stąd, podstawiając  $h' = 1/\psi$ , otrzymujemy po prostym rachunku  $r\psi'(r) = \psi(r) + 1/\psi(r)$ . To już jest równanie o rozdzielonych zmiennych; całkujemy je, wstawiamy  $\psi = 1/h' = dr/dh$  i całkujemy po raz drugi, by ostatecznie otrzymać

$$r(h) = \frac{1}{a}(\exp(ah + b) + \exp(-ah - b)),$$

gdzie  $a, b$  są stałymi. Zatem,  $S$  powstaje przez obrót krzywej łańcuchowej wokół osi  $OZ$ . ■

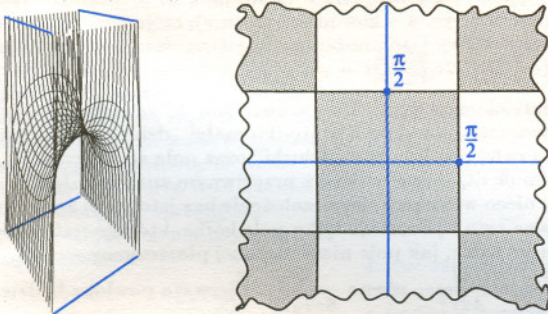


Rys. 2. Helikoida z siatką krzywych asymptotycznych.

Meusnier podał także inny przykład powierzchni minimalnej – helikoidę (patrz rys. 2). Jest to powierzchnia, jaką otrzymamy prowadząc przez każdy punkt linii śrubowej  $\mathbf{y}(t) = (\cos t, \sin t, t)$  prostą przecinającą oś  $OZ$  pod kątem prostym. Helikoida jest, oczywiście, powierzchnią prostokreślną (przez każdy jej punkt przechodzi leżąca na niej prosta). Dziś wiemy, że zachodzi

**Twierdzenie 2.** *Jedynymi prostokreślnymi powierzchniami minimalnymi są: płaszczyzna i helikoida.*

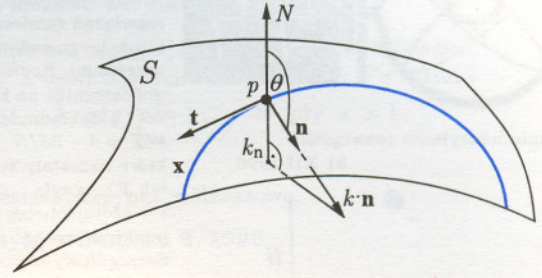
W pół wieku po ukazaniu się pracy Meusniera bezskutecznie próbował to twierdzenie udowodnić Scherk. Znalazł za to kolejny przykład powierzchni minimalnej:  $z = \log(\cos y / \cos x)$ . Można ten przykład „wymyślić” samemu, szukając rozwiązań równania (2) postaci  $f(x, y) = g(x) + h(y)$ .



Rys. 3. Powierzchnia Scherka  $z = \log(\cos y / \cos x)$  składa się z jednakowych kawalków, które trzeba rozstawić na czarnych polach nieskończonej szachownicy i gładko skleić, dodając w narożach pół pionowe proste.

Pierwszy dowód Twierdzenia 2 podał w 1842 roku Catalan (ten od hipotezy Catalana, stałej Catalana i liczb Catalana; jego nazwisko znane jest Czytelnikom *Delta*). Dla ciekawych podajemy

**Szkic dowodu.** Skorzystamy z pojęcia **krzywizny normalnej** (w punkcie  $p \in S$ ) krzywej  $\mathbf{x}$  leżącej na powierzchni  $S$ . Jest to liczba  $k_n = k \cos \theta$  (patrz rys. 4).



Rys. 4. Między wektorem normalnym do krzywej i wektorem normalnym do  $S$  jest kąt  $\theta$ ;  $k$  oznacza krzywiznę krzywej.

Meusnier pokazał, że krzywizna normalna w punkcie  $p$  zależy **tylko** od wektora stycznego do krzywej  $\mathbf{x}$  w tym punkcie. Krzywe o krzywiznie normalnej równej w każdym punkcie zero (np. proste na powierzchni prostokreślnej) nazywa się **krzywymi asymptotycznymi**.

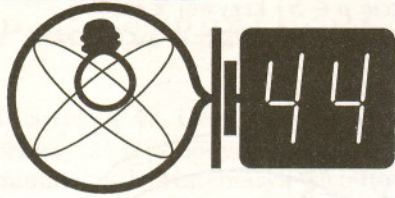
Zgodnie z Uwagą 1, w otoczeniu każdego punktu powierzchni minimalnej istnieją dwie rodziny,  $\mathcal{F}_1$  i  $\mathcal{F}_2$ , wzajemnie prostopadłych krzywych asymptotycznych.  $\mathcal{F}_1$  to rodzina zawartych w  $S$  prostych. Warunek znikania krzywizny normalnej oznacza, że krzywe rodziny  $\mathcal{F}_2$  (nie mogą to być proste, gdy  $S$  nie jest płaszczyzną) mają płaszczyzny ściśle styczne pokrywające się z płaszczyznami stycznymi do  $S$ . Zatem proste rodziny  $\mathcal{F}_1$  to główne normalne do krzywych rodziny  $\mathcal{F}_2$ . Wynika stąd, że krzywe rodziny  $\mathcal{F}_2$  są **koleżankami w sensie Bertranda** (patrz Uwaga 2 niżej). Ponieważ jest ich nieskończenie wiele, to każda z nich jest linią śrubową, a powierzchnia  $S$  – helikoidą. ■

**Uwaga 2.** Powiemy, że krzywe przestrzenne  $\mathbf{y}$  i  $\mathbf{x}$  (o niezerowej torsji i krzywiznie) są **koleżankami w sensie Bertranda**, gdy proste będące głównymi normalnymi do  $\mathbf{y}$  są jednocześnie głównymi normalnymi do  $\mathbf{x}$ . By dokończyć dowód twierdzenia 2, wystarczy wykazać, że jeśli krzywa  $\mathbf{y}$  ma dwie różne koleżanki w sensie Bertranda, to ma ich nieskończenie wiele; w dodatku jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{y}$  jest linią śrubową.

Na zakończenie powiedzmy tylko, że teoria powierzchni minimalnych jest niezwykle bogatą gałęzią geometrii różniczkowej; stale się w niej bada ciekawe, nietrywialne problemy. Sformułowania twierdzeń tej teorii mocno na ogół przemawiają do wyobraźni i nietrudno je zrozumieć; dowody za to bywają bardzo trudne. Dla wielu matematyków jest to wystarczająca motywacja, by z powierzchni minimalnych uczynić główny przedmiot swych zainteresowań.

Szkic dowodu twierdzenia 2 zaczerpnąłem z książek: Barbosa, Colares, *Minimal surfaces in  $\mathbf{R}^3$*  oraz M.P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*. Tę ostatnią szczerze polecam Czytelnikom chcącym poszerzyć wiedzę z zakresu elementarnej geometrii różniczkowej.



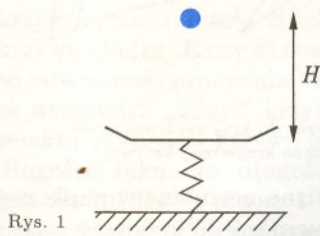


### Skrót regulaminu

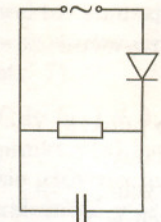
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Termin nadsyłania rozwiązań:

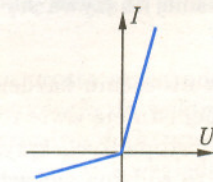
31 XII 1996



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

### Zadania z fizyki nr 225, 226

Redaguje Jerzy B. BROJAN

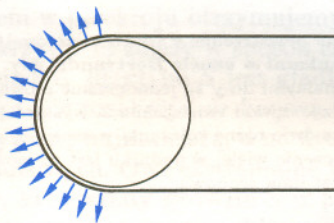
**225.** Kulkę upuszczono z pewnej wysokości  $H$  na szalkę wagi sprężynowej (rys. 1), od której odbiła się sprężysto, w wyniku czego szalka zaczęła drgać harmonicznie z amplitudą równą  $(1/4)H$ . Odbita kulka spadła ponownie i po drugim odbiciu wzniosła się na poziom początkowy (z którego została upuszczona). Dla jakiego stosunku mas kulki  $m$  i szalki  $M$  takie zdarzenie jest możliwe?

**226.** Do źródła napięcia przemiennego (sinusoidalnego) o amplitudzie  $U_0 = 30$  V przyłączono obwód składający się z diody, opornika o oporze  $100 \Omega$  i kondensatora o dużej pojemności (rys. 2). Charakterystyka diody jest przedstawiona na rysunku 3 – w kierunku przewodzenia jej opór wynosi  $10 \Omega$ , a w kierunku zaporowym –  $1000 \Omega$ . Ile wyniesie napięcie na kondensatorze po upływie bardzo długiego czasu? Pojemność kondensatora jest tak duża, że to napięcie osiąga wartość stałą.

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 6/1996

Przypominamy treść zadań

**221.** Pętlę ze sznura o wytrzymałości  $W$  i masie na jednostkę długości  $\rho$  nałożono na dwa walce o promieniu  $r$  obracające się z prędkością kątową  $\omega$  (rys. 4). Jaka jest maksymalna wartość siły odsuwającej osie walców, przy której pętla nie ulegnie zerwaniu? Przyjmując, że siła oddziaływania między sznurem a walcami nie ma składowej stycznej (nie ma więc żadnego przekazu energii), a także nie występuje poślizg.



Rys. 4

**222.** Dwie cienkie powłoki sferyczne o promieniach  $r_1$  i  $r_2$  są ustawione koncentrycznie (pierwsza wewnątrz drugiej) i naładowane równomiernie rozłożonymi ładunkami  $Q_1$  i  $Q_2$ , a w środku sfer znajduje się punktowy ładunek  $q$ . Jakie związki muszą spełniać  $q$ ,  $Q_1$  i  $Q_2$ , aby powłoki były mechanicznie stabilne, tzn. aby nie podlegały siłom ściskającym ani rozciągającym?

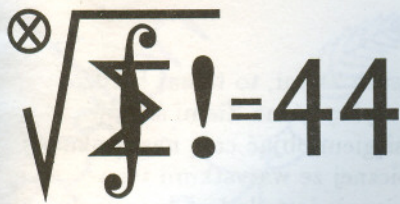
**221.** Zgodnie z przyjętym założeniem działająca wzdłuż sznura siła napinająca ma stałą wartość – przyjmijmy, że jest ona równa  $W$  (na granicy zerwania). Rozważmy odcinek pętli o długości  $dl$ , czemu odpowiada kąt skręcenia  $d\alpha = dl/r$ . Na ten odcinek działają dwie siły  $W$  (rys. 5), których wypadkowa ma wartość  $W d\alpha = W dl/r$ , oraz siła nacisku ze strony walca  $dF$ . Ponieważ wypadkowa wszystkich tych sił jest równa  $dm \cdot a = \rho dl \cdot \omega^2 r$ , więc otrzymujemy  $dF/dl = (W/r) - \rho \omega^2 r$ . Całkowitą siłę  $F$  działającą na oś znajdziemy dodając rzuty  $dF$  na wspólny kierunek (na rys. 4 – kierunek poziomy), co jest równoważne zrutowaniu odcinków  $dl$  na kierunku pionowy i pomnożeniu sumy (tzn. średnicy walca) przez wyliczone  $dF/dl$ . Ostatecznie  $F = (dF/dl) \cdot 2r = 2(W - \rho \omega^2 r^2)$ .

**222.** Obliczmy siłę działającą na mały element powłoki o powierzchni  $dS$  ze strony reszty powłoki. Jest to równoważne wyliczeniu natężenia pola w środku małej „dziurki w powłoce”. Przedstawmy to pole jako sumę pola całej powłoki bez „dziurki” oraz pola samej części usuniętej (małego kółka), której ładunek  $dQ$  został związany z przeciwnym znakiem. Jeśli punkt, w którym badamy pole, leży nieco wewnątrz sfery (założenie bez istotnego znaczenia), to w nim pole całej powłoki jest równe zero i pozostaje tylko pole kółka, którego natężenie jest w bardzo małej odległości od niego takie, jak pole nieskończonej płaszczyzny – czyli równe  $\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{dQ}{dS}$ , a po podstawieniu  $\frac{dQ}{dS} = \frac{Q}{4\pi r^2}$  – równe  $\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 r^2}$ . Pierwsza powłoka będzie w równowadze wtedy, gdy obliczone pole w środku „dziurki” (dla  $Q = Q_1$ ) będzie przeciwnie do pola ładunku  $q$  – stąd  $Q_1 = -2q$ . W podobny sposób dla drugiej powłoki wyznaczamy  $Q_2 = -2(q + Q_1) = 2q$ .

A oto nieco prostszy wariant rozwiązania. Oznaczmy natężenie pola elektrycznego po jednej (np. wewnętrznej) stronie powłoki jako  $E$ , a po drugiej (np. zewnętrznej) – jako  $E'$ . Warunek równowagi powłoki oznacza, że przy niewielkiej zmianie jej promienia pole nie wykonuje nad nią pracy, czyli nie występuje zmiana całkowitej energii pola elektrostatycznego. Ponieważ podczas zmiany promienia powiększa się jeden z dwóch obszarów przestrzeni, a zmniejsza drugi, więc brak zmiany całkowitej energii nastąpi tylko wtedy, gdy  $|E| = |E'|$ . Przy niezerowym ładunku powłoki oznacza to, że pole po obu stronach powłoki (tuż przy niej) ma tę samą wartość, a przeciwnie zwroty. Otrzymujemy te same warunki, co poprzednio:  $Q_1 = -2q$  i  $Q_2 = -2(q + Q_1) = 2q$ .

Rys. 5





## Zadania z matematyki nr 327, 328

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**327.** Rozważamy wielomiany postaci  $x^4 + ax^3 + bx + c$ , mające cztery pierwiastki rzeczywiste. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości iloczynu  $ab$ .

**328.** Zbiór  $Z$  zawarty w płaszczyźnie ma następującą własność: dla każdego punktu  $P \in Z$  liczba punktów  $Q \in Z$  spełniających warunek  $|PQ| = r$  wynosi  
2 gdy  $0 < r < 1$ ; 1 gdy  $r = 1$ ; 0 gdy  $r > 1$ .

Czy zbiór  $Z$  musi być okręgiem?

Zadanie 328 zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 6/1996

Przypominamy treść zadań:

**323.** Wyznaczyć wszystkie potęgi liczby 2 (o wykładniku całkowitym dodatnim), których zapis w siódemkowym układzie pozycyjnym składa się z samych jedynek.

**324.** Punkt  $G$  jest środkiem ciężkości czworokąta  $ABCD$  wpisanego w sferę o środku  $O$  i promieniu  $R$ . Proste  $AG, BG, CG, DG$  przecinają tę sferę odpowiednio w punktach  $K, L, M, N$  (różnych od  $A, B, C, D$ ). Dowieść, że  $\frac{1}{|GK|^2} + \frac{1}{|GL|^2} + \frac{1}{|GM|^2} + \frac{1}{|GN|^2} \geq \frac{4}{R^2}$ .

**323.** Ciąg złożony z  $x$  jedynek przedstawia w układzie siódemkowym liczbę  $(7^x - 1)/6$ . Zadanie sprowadza się więc do rozwiązania równania  $7^x - 1 = 6 \cdot 2^y$ , czyli  
 $7^x - 1 = 3 \cdot 2^{y+1}$

w liczbach całkowitych  $x, y \geq 1$ .

Jeśli para  $(x, y)$  jest rozwiązaniem, to prawa strona tego równania dzieli się przez 4, wobec czego  $x$  musi być liczbą parzystą:  $x = 2k$ . Lewa strona jest więc równa iloczynowi  $(7^k + 1)(7^k - 1)$ , w którym pierwszy czynnik nie dzieli się przez 3. Zatem

$$7^k + 1 = 2^u, \quad 7^k - 1 = 3 \cdot 2^v$$

dla pewnych liczb całkowitych  $u \geq 3, v \geq 1$ . Odejmując te równości stronami i dzieląc przez 2 otrzymujemy równość  $1 = 2^{u-1} - 3 \cdot 2^{v-1}$ ; ostatni składnik musi być liczbą nieparzystą. Stąd  $v = 1, k = 1, x = 2, y = 3$ . Para  $(x, y) = (2, 3)$  spełnia rozważane równanie i jest jego jedynym rozwiązaniem.

**324.** Oznaczmy:  $\vec{OA} = \mathbf{v}_1, \vec{OB} = \mathbf{v}_2, \vec{OC} = \mathbf{v}_3, \vec{OD} = \mathbf{v}_4, \vec{OG} = \mathbf{w} = \frac{1}{4} \sum \mathbf{v}_i$ . Każdy z iloczynów  $|AG| \cdot |GK|, |BG| \cdot |GL|, |CG| \cdot |GM|, |DG| \cdot |GN|$  jest równy  $R^2 - |OG|^2$ . Stąd

$$\frac{1}{|GK|^2} = \frac{|AG|^2}{(R^2 - |OG|^2)^2} = \frac{(\mathbf{w} - \mathbf{v}_1)^2}{(R^2 - \mathbf{w}^2)^2};$$

pozostałe trzy składniki rozważanej sumy wyrażają się analogicznymi wzorami. A zatem

$$\begin{aligned} \frac{1}{|GK|^2} + \frac{1}{|GL|^2} + \frac{1}{|GM|^2} + \frac{1}{|GN|^2} &= \frac{\sum (\mathbf{w} - \mathbf{v}_i)^2}{(R^2 - \mathbf{w}^2)^2} = \frac{\sum (R^2 + \mathbf{w}^2 - 2\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i)}{(R^2 - \mathbf{w}^2)^2} = \\ &= \frac{4R^2 + 4\mathbf{w}^2 - 2\mathbf{w} \cdot 4\mathbf{w}}{(R^2 - \mathbf{w}^2)^2} = \frac{4}{R^2 - \mathbf{w}^2} \geq \frac{4}{R^2}. \end{aligned}$$

Termin nadsyłania rozwiązań:

31 XII 1996

Czołówka ligi zadaniowej

**Klub 44 M**

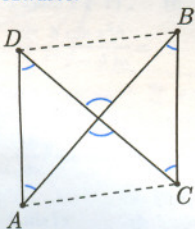
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 313 (WT=2,67) i 314 (WT=1,62)  
z numeru 1/1996

Piotr Lipiński - Radom 43,51  
Henryk Kornacki - Augustów 42,07  
Tadeusz Józefczyk - Poznań 38,10  
Przemysław Gadziński - Środa Śl. 35,76



**Rozwiązanie zadania M 786.** Jeśli  $A = C$  lub  $B = D$ , to teza zadania jest oczywista. W przeciwnym razie zrzućmy wszystkie punkty na płaszczyznę równoległą do prostych  $AC$  i  $BD$ , co sprowadzi zadanie do przypadku, gdy wszystkie punkty leżą w jednej płaszczyźnie (rzut prostopadły zachowuje długość odcinków równoległych do płaszczyzny rzutowania i nie wydłuża pozostałych). Załóżmy, że teza zadania nie jest spełniona.

Z twierdzenia cosinusów wiemy, że jeśli długości ramion trójkąta są mniejsze od 1, a długość podstawy jest nie mniejsza od  $\sqrt{2}$ , to kąt między ramionami jest rozwarty. Wynika stąd, iż lamana zamknięta  $ABCD$  nie może wyznaczać czworokąta, gdyż musiałyby on mieć wszystkie kąty rozwarte. Jeśli natomiast lamana miałaby samoprzecięcie, w pewnych trójkątach musiałyby być po dwa kąty rozwarte.



Gdyby było  $|AC|, |BD| > \sqrt{2}$ , to wszystkie kolorowe kąty byłyby rozwarte.

Uzyskana sprzeczność kończy dowód.



**Rozwiązanie zadania M 788.** Załóżmy, że teza zadania nie jest prawdziwa. Wprowadźmy na płaszczyźnie układ współrzędnych i zdefiniujmy punkty:

$$A' = \frac{1}{2}(A - a), \quad a' = \frac{1}{2}(a - A), \quad B' = \frac{1}{2}(B - b), \quad b' = \frac{1}{2}(b - B),$$

$$C' = \frac{1}{2}(C - c), \quad c' = \frac{1}{2}(c - C), \quad D' = \frac{1}{2}(D - d), \quad d' = \frac{1}{2}(d - D).$$

Łatwo zauważyć, że  $|A'a'| = |Aa|, |B'b'| = |Bb|, |C'c'| = |Cc|, |D'd'| = |Dd|$ , więc także długość tych „nowych” odcinków jest większa od  $\sqrt{2}$ . Wynika stąd, że punkty te leżą na zewnątrz koła o środku w punkcie  $(0, 0)$  i średnicy  $\sqrt{2}$  (początek układu współrzędnych jest środkiem odcinków  $A'a', B'b', C'c', D'd'$ ). Ponadto, z nierówności trójkąta wynika, iż  $|A'B'|, |B'C'|, |C'D'|, |D'A'|, |A'b'|, |b'c'|, |c'd'|, |d'a'|, |A'c'|, |D'b'|, |C'a'|, |B'd'| \leq 1$ , (czyli po prostu zredukowaliśmy zadanie do „przypadku środkowo-symetrycznego”). Dla przykładu:

$$|A'B'| = \left| \frac{1}{2}(A - a) - \frac{1}{2}(B - b) \right| = \left| \frac{1}{2}(A - B) + \frac{1}{2}(b - a) \right| \leq \frac{1}{2}(|AB| + |ab|) \leq \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$

Pozostałe nierówności można udowodnić w podobny sposób. Na mocy zadania 787. widzimy, że istnieje taka prosta przechodząca przez punkt  $(0, 0)$ , że punkty  $A', B', C', D'$  leżą po jednej jej stronie, punkty  $a', b', c', d'$  zaś – po drugiej. Podobnie, niech przechodząca przez punkt  $(0, 0)$  prosta  $\beta$  i  $\gamma$  oddzielają odpowiednio punkty  $A', D', b', c'$  od  $B', C', a', d'$  i  $A', B', d', c'$  od  $D', C', a', b'$ . Jednakże trzy proste przechodzące przez jeden punkt dzielą płaszczyznę na nie więcej niż 6 części, więc któreś dwa spośród punktów  $A', B', C', D', a', b', c', d'$  nie są oddzielone żadną z prostych  $\alpha, \beta, \gamma$ , co prowadzi do sprzeczności. Teza zadania jest więc prawdziwa.





**Rozwiązanie zadania F 438.**

Zakładamy, że nukleon może znajdować się w dowolnym miejscu wewnątrz jądra, a więc nieoznaczoność jego położenia jest rzędu średnicy jądra. Przyjmijmy, że pęd jest tego samego rzędu co nieoznaczoność pędu. Z zasady nieoznaczoności dostajemy

$$p \approx \frac{\hbar}{d}$$

Oszacujemy prędkość nukleonu

$$v \approx \frac{\hbar}{md}$$

gdzie  $m \approx 1,7 \cdot 10^{-27}$  kg. Otrzymujemy

$$v \approx 10^6 \text{ m/s,}$$

czyli ruch nukleonu jest nierelatywistyczny. Oszacujemy energię kinetyczną nukleonu

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2md^2} \approx 10 \text{ MeV.}$$

Ponieważ nukleon w jądrze znajduje się w stanie związonym, wartość bezwzględna jego energii potencjalnej (czyli głębokość studni potencjału) jest nie mniejsza od energii kinetycznej. Głębokość studni potencjału daje przybliżoną wartość energii wiązania nukleonu. Z danych doświadczalnych wiemy, że dla większości jąder energia wiązania jest równa 8 MeV, a więc powyższe, proste oszacowanie jest dość dobre. Gdyby elektron był zlokalizowany w jądrze, musiałby być ultrarelatywistyczną cząstką o energii rzędu 0,1 GeV, czyli o rzędu wielkości większą od energii wiązania na jedną cząstkę. (W pierwszych modelach jądra atomowego zakładano, że składa się ono z protonów i elektronów.)

Gigantyczna katastrofa, która zaważyłaby na losach Ziemi, to temat bardzo frapujący. Nic dziwnego, że ciągle trwają próby wykrycia na Ziemi śladów katastrofy kosmicznej, która mogłaby swoim zasięgiem objąć całą naszą planetę i spowodować np. gwałtowny koniec ery mezozoicznej ze wszystkimi tego konsekwencjami. Jednak np. słynny krater w Arizonie jest śladem katastrofy zbyt słabej i jest zbyt mały na to, by być odpowiedzialnym za wyginięcie dinozaurów. Ślad katastrofy globalnej musi być dużo większy, ale też znacznie starszy i przez to trudniej widoczny. Śladów spadków wielkich meteorów w odległej geologicznej przeszłości Ziemi właściwie niepodobna rozpoznać stojąc na jej powierzchni, tak są silnie zerodowane. Dopiero zdjęcia lotnicze lub satelitarne ukazują dziwnie regularne ich szczątkowe struktury.

Chyba najczęściej ostatnio się mówi o regularnej wielopięścieniowej strukturze odkrytej przy brzegu Jukatana. Badacze są zgodni, że miał tam miejsce upadek wyjątkowo wielkiej masy, a rozbieżności dotyczą tylko wielkości owej masy. Krater ten, a raczej to, co z niego zostało, nosi nazwę Chicxulub, od nazwy miejscowości, w pobliżu której się znajduje. Większość jego obszaru leży w oceanie i jest on właściwie całkiem niedostrzegalny, a o jego istnieniu świadczą skrupulatne pomiary zaburzeń lokalnego pola grawitacyjnego i magnetycznego. Na ich podstawie oceniono na 180 km średnicę trzeciego, i prawdopodobnie zewnętrznego, pierścienia tej struktury.

Jednak około trzech lat temu grupa amerykańskich i meksykańskich geologów doniosła, że Chicxulub może mieć nawet 300 km średnicy. Takie rozmiary może mieć czwarty pierścień, którego śladów dopatrzono się na podstawie nowych pomiarów prowadzonych od 1990 r. Pierścień o średnicy 180 km byłby wtedy nie pierścieniem zewnętrznym, lecz obrzeżem dziury powstałej w wyniku bezpośredniego uderzenia. Według opinii badaczy, ten głęboki, lecz niestabilny krater następnie zaważył się tworząc depresję o rozmiarach niemal dwukrotnie większych. Jeśli tak, to trzeba na nowo ocenić energię potrzebną do wytworzenia takiej struktury. Poprzednie oceny dawały wynik rzędu  $10^{13}$  ton trotylu (jak kto woli: 10 Tt TNT), krater 300-kilometrowy potrzebowałby do swojego powstania co najmniej pięć razy tyle. Chicxulub stałby się w ten sposób jednym z największych kraterów uderzeniowych w całym Układzie Słonecznym – przynajmniej na planetach typu Ziemi (tj. także Merkury, Wenus, Mars).

Sprawa, oczywiście, nie jest przesądzona. Inni badacze bowiem wręcz wątpią w istnienie 300-kilometrowego pierścienia. Nie wiadomo też, czy wybitcie w Ziemi nawet tak wielkiego krateru to już katastrofa globalna. Ludzkość ma małą praktykę z tego rodzaju zjawiskami – zresztą całe szczęście.

Tomasz KWAST



**Rozwiązanie zadania F 437. Z zasady zachowania energii mamy**

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V(r),$$

gdzie  $V(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$ ,  $M$  jest masą gwiazdy,  $m$  – masą planety,  $E$  – energią planety, a  $L$  – jej momentem pędu (te dwie wielkości są stałymi ruchu). Prędkość  $\frac{dr}{dt}$  ma maksymalną wartość tam, gdzie  $V(r)$  jest minimalny. Różniczkując  $V(r)$  i przyrównując do zera otrzymujemy

$$r_m = \frac{L^2}{GMm^2}$$

Dla ruchu po elipsie w polu siły grawitacji prawdziwe są wzory

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

oraz

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}},$$

gdzie  $\epsilon$  jest mimośrodem elipsy. Dostajemy stąd

$$a(1 - \epsilon^2) = r_m.$$

Ponieważ równanie elipsy we współrzędnych biegunowych ma postać

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta},$$

otrzymujemy

$$r = \frac{r_m}{1 + \epsilon \cos \theta}.$$

W interesujących nas punktach  $\cos \theta$  musi zniknąć, a więc  $\theta = \pi/2$  lub  $\theta = 3\pi/2$ .

II sposób: Różniczkując względem czasu równanie elipsy otrzymujemy

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a(1 - \epsilon^2)\epsilon \sin \theta}{(1 + \epsilon \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2 \epsilon \sin \theta}{a(1 - \epsilon^2)} \frac{d\theta}{dt}.$$

Pochodną  $\frac{d\theta}{dt}$  możemy wyznaczyć z momentu pędu (stała ruchu)

$$l = mr^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Wynika stąd, że

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\epsilon l \sin \theta}{ma(1 - \epsilon^2)}.$$

A zatem maksymalna wartość bezwzględna prędkości radialnej odpowiada kątom  $\theta$  o wartości  $\pi/2$  lub  $3\pi/2$ .



## O egzaminach wieść gminna niesie...

- Proszę podać przykład zbioru zwartego.
- Zbiór liczb rzeczywistych.
- Hm... Świetnie! A z jaką topologią?

\*\*\*\*\*

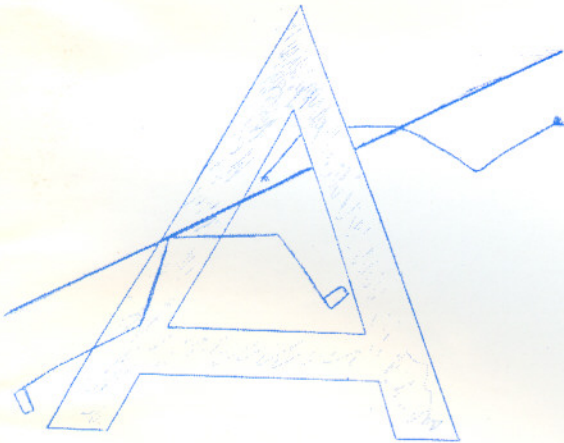
- Proszę sformułować twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

- Jeśli w trójkącie prostokątnym długości przyprostokątnych wynoszą  $a$  i  $b$ , długość zaś przeciwprostokątnej  $c$ , to zachodzi wzór

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}.$$

- Hm... Jest taki słynny trójkąt prostokątny o bokach 3, 4 i 5. Proszę podstawić do wzoru.
- ... Nie zgadza się!
- I jaki z tego wniosek?
- Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa nie jest prawdziwe.

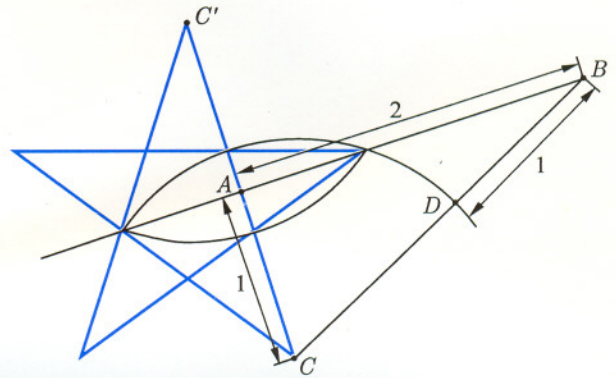
## WIZUALIZACJA MATEMATYKI



Prosta przebiega przez  $A$ .

## W końcu nauczyłam się na pamięć!

Konstrukcje większości wielokątów foremnych nie są łatwe (a niektórych w ogóle niemożliwe do wykonania). Pierwszym, z którym są problemy, jest pięciokąt foremny; o jego konstrukcji mówi się jednak w rozmaitych okolicznościach, a zdarza się, że nauczyciele w szkołach zadają ją jako zadanie... I tu nawet korepetytorzy mają problemy. Istnieje, co prawda, wiele pięknych konstrukcji, ale z reguły są one skomplikowane, trudne do zapamiętania. Niedawno zetknęłam się z konstrukcją gwiazdy pięcioramiennej, którą zapamiętałam bez problemów! Oto ona.



Rysujemy parę prostych prostopadłych przecinających się w punkcie  $A$ . Na jednej prostej odmierzymy odcinek  $AC = 1$ , na drugiej odcinek  $AB = 2$ . Z punktu  $B$  odkładamy na odcinku  $BC$  odcinek  $BD = 1$ . Z punktu  $C$  kreślimy okrąg o promieniu równym długości odcinka  $CD$ . Odbijamy symetrycznie względem prostej  $AB$  okrąg o środku w punkcie  $C$ . Punkty przecięcia okręgów z prostymi  $AB$  i  $AC$  to wierzchołek gwiazdy pięcioramiennej i trzy z pięciu punktów przecięcia boków. Dwa wierzchołki gwiazdy to punkt  $C$  oraz punkt symetryczny do niego względem prostej  $AB$  – punkt  $C'$ . Łącząc odpowiednio punkty otrzymujemy pentagram. Sprawdzenie poprawności konstrukcji pozostawiam Czytelnikowi.

D.C.