

SPIS TREŚCI NUMERU 8(267)

Sport z matematycznego i mechanicznego punktu widzenia

– Jednokładności w lekkiej atletyce

– Taktyka biegu po rekord

– Mechanika ćwiczeń gimnastycznych

– Halsowanie w żeglarstwie jako sposób sterowania

Henryk Żółądek str. 1

Mała Delta str. 8

Patrz w niebo str. 9

Huśtawka
Krzysztof Ernst str.10

Zadania str.13

Klub 44 str.14

Kącik olimpijski str.16

Epsilon str.17

W następnym numerze:
Czternastościan

Okladkę i ilustracje wykonał
Krzysztof BIESAGA

Na okładce wykorzystano zdjęcia z albumu *Siła, radość, piękno*, wydanego przez Wydawnictwo Sport i Turystyka, Warszawa 1955.

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

Wybór artykułów z *Delta* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem <http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński – wiceprzewodniczący
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmokl
Marta Kicińska-Habior
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Michał Różycka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wacław Zawadowski
Wiesław Żelazko – przewodniczący

Redaguje kolegium w składzie:
Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Korδος – sekr. red.
Marek Korδος – red. nac.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Krzysztof Rejmer
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem \TeX wykonała Redakcja

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1996 roku wynosi 2 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1996 r. wynosi 4 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:
 - a) jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;
 - b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnieść na konto „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 370044-16551-2700-1-06 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰; dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:
 - do 5 XII na I kwartał roku następnego,
 - do 5 III na II kwartał,
 - do 5 VI na III kwartał,
 - do 5 IX na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 wewn. 2442, 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł, 20 000 zł

Sport z matematycznego i mechanicznego punktu widzenia

Henryk ŻOŁĄDEK

Są dwa zasadnicze powody uprawiania sportu:

– być lepszym od innych, osiągnąć sukcesy (pieniądze i sławę) lub

– utrzymać w przyzwoitym stanie kondycję fizyczną i psychiczną.

(Można spierać się o to, które z tych podejść jest lepsze i ważniejsze. Wydaje się, że nieliczni zajmujący się sportem w Polsce kierują się głównie pierwszym motywem.)

Jednakże każdy uprawiający sport chce być w pewien sposób efektywny, np. osiągnąć dobry czas w biegu, daleko skoczyć itd.

Niewątpliwym i często dominującym czynnikiem w sporcie jest siła mięśni zawodnika. Ale jeszcze częściej okazuje się, że sama siła fizyczna nie wystarcza do uzyskiwania dobrych wyników. Bardzo ważna jest technika wykonywanych ćwiczeń. Wszyscy trenerzy znają ten truizm i usilnie wpajają odpowiednie nawyki swoim podopiecznym. Wiedzą oni również, że techniką rządzą żelazne prawa mechaniki i biochemii.

W niniejszym artykule zamierzamy na przykładzie kilku dyscyplin pokazać, w jaki sposób znajomość praw mechaniki i elementarnej matematyki może przydać się sportowcom.

Jednkładności w lekkiej atletyce

Przytoczę trzy „twierdzenia” pochodzące z książki J. Smitha „Matematyka w biologii”.

(a) *Prędkość rozwijana przez zawodników w płaskim terenie praktycznie nie zależy od ich rozmiarów.*

Dla dowodu oznaczmy przez L parametr mierzący wielkość zawodnika, np. jego wysokość. Wtedy powierzchnia ciała zawodnika jest proporcjonalna do L^2 , a jego masa jest rzędu L^3 .

Moc wydatkowana przez zawodnika na czysty bieg jest proporcjonalna do L^2 . Wynika to z faktu, że około 25% energii chemicznej wytwarzanej przez organizm jest wykorzystywane na pracę mechaniczną mięśni, a pozostałe 75% przechodzi w ciepło. Ponieważ ilość utraconego ciepła jest proporcjonalna do L^2 (powierzchnia ciała), więc użyteczna energia jest proporcjonalna do L^2 .

Siła oporu powietrza jest proporcjonalna do kwadratu prędkości v^2 i do powierzchni poprzecznego oporu ($\sim L^2$). Moc tracona na jego pokonanie jest rzędu $v^2 L^2 \cdot v$ (siła \times prędkość).

Mamy zatem $v^3 L^2 \sim L^2$, co oznacza, że

$$v \sim L^0.$$

Oczywiście, rozmiary zawodników nie różnią się aż tak znacznie, aby można było potwierdzić to prawo doświadczalnie. Jeśli jednak popatrzymy na świat zwierząt, to stwierdzamy, że zając i koń rozwijają podobne prędkości.

(b) *Prędkość rozwijana przez zawodników biegnących pod górę jest odwrotnie proporcjonalna do ich rozmiarów.*

Tym razem zawodnik ma do pokonania siłę ciężenia, która jest proporcjonalna do $mg \sim L^3$, (m – masa, g – przyspieszenie ziemskie). Potrzebna na to moc jest proporcjonalna do $L^3 v$. Porównując ją z użyteczną mocą zawodnika dostajemy $L^3 v \sim L^2$, czyli

$$v \sim L^{-1}.$$

I rzeczywiście, pies wbiega na górę szybko, podczas gdy koń musi zwolnić.

(c) *Wysokość skoków zwierzęcia nie zależy od jego rozmiarów. (Z dosyć oczywistych względów nie chcę stosować tego „twierdzenia” do zawodników).*

Energia potrzebna do skoku na wysokość h jest proporcjonalna do $mgh \sim L^3 h$. Powinniśmy ją porównać do $F \cdot L$, gdzie F jest siłą rozwijaną przez mięśnie podczas odbicia. (Tutaj h nie występuje, ponieważ podczas lotu mięśnie nie wykonują pracy). Siła F jest ograniczona przez wytrzymałość kości proporcjonalną do ich przekroju poprzecznego, czyli $F \sim L^2$. Zatem $L^3 h \sim L^3$ lub

$$h \sim L^0.$$

I rzeczywiście, gryzoń stepowy – skoczek i kangur skaczą mniej więcej tak samo wysoko.





Taktyka biegu po rekord

Rozwiązanie zadania M782. Tym razem szeryf osiągnął swój cel. Załóżmy, że udałooby się znaleźć legalną lokalizację dla 100 saloonów. Zakreślmy wokół każdego z nich koło o promieniu 125 m. Wszystkie te koła muszą być parami rozłączne (w przeciwnym razie ich środki znajdowałyby się w odległości nie większej niż 250 m), zatem łącznie pokrywają powierzchnię $100 \cdot \pi \cdot (125 \text{ m})^2 = \frac{100}{64} \pi \text{ km}^2$. Jednak każde z tych kół musi zawierać się w kole o środku w miejskim więzieniu i promieniu 1125 m (ponieważ środki tych kół należą do koła o promieniu 1000 m i środka w więzieniu), więc suma ich pól nie może przekraczać $\pi \cdot (1125 \text{ m})^2 = \frac{81}{64} \pi \text{ km}^2$, co stoi w sprzeczności z poprzednim wynikiem.

Uwaga. W niniejszych rachunkach więzienie traktowano jako punkt materialny. Czytelnik zechce zastanowić się, w jaki sposób rozbudowa systemu penitencjarnego umożliwi zwiększenie podaży mleka.

Zadanie jest następujące.

W jaki sposób biegacz powinien biec, aby dystans L przemierzyć w jak najkrótszym czasie? Jego jedynymi ograniczeniami są: zapas energii A i maksymalna osiągalna prędkość v_m .

Inaczej mówiąc

$$v(t) \leq v_m, \quad \int_0^T v(t) dt = L, \quad \int_0^T E(v(t)) dt \leq A$$

i poszukujemy takiej optymalnej funkcji prędkości $v(t)$, aby czas T był minimalny. Tutaj $E(v)$ jest funkcją strat energii na jednostkę czasu. Zgodnie z badaniami przeprowadzonymi przez biochemików, można przyjąć, że

$$E(v) = b_0 + b_1 v + b_2 v^2 + b_3 v^3,$$

gdzie b_0 jest sumą strat energii na funkcjonowanie organizmu w spoczynku, b_1 charakteryzuje liniową reakcję organizmu na obciążenie, b_2 pojawia się przy dużych obciążeniach, a b_3 – przy maksymalnych prędkościach.

Przeformułujemy nieco nasz problem. Za niezależną zmienną przyjmijmy drogę x pokonaną w czasie t . Załóżmy także, że taktyka przebiegnięcia całego dystansu z maksymalną prędkością v_m jest nierealizowalna i możemy przyjąć, że cała energia A jest zużyta podczas biegu. Wtedy $dt = \frac{1}{v} dx$ i

$$T = \int_0^L \frac{dx}{v(x)}, \quad \int_0^L \frac{E(v)}{v} dx = A.$$

Poszukujemy takiej funkcji $v(x)$, aby przy A ustalonym T było minimalne. Jest to typowe zadanie z rachunku wariacyjnego. Twierdzę, że *takie $v(x)$ musi być stałe.*

Aby to wykazać, zastąpimy całki sumami Riemanna:

$$\sum_1^N f(v_i), \quad \sum_1^N g(v_i) = B,$$

gdzie $f = 1/v$, $g = E(v)/v$, $B = \text{const} \sim NA$. Pytamy o v_1, \dots, v_N realizujące minimum pierwszej sumy. Z drugiego wiążącego warunku wyznaczamy

$$v_N = g^{-1}\left(B - \sum_1^{N-1} g(v_i)\right) \text{ (jeśli funkcja } g \text{ nie jest odwracalna, to jako } g^{-1}$$

wybieramy jedną z gałęzi jej przeciwobrazu) i zadanie sprowadza się do szukania punktów minimum funkcji

$$h(v_1, \dots, v_{N-1}) = \sum_1^{N-1} f(v_i) + f \circ g^{-1}\left(B - \sum_1^{N-1} g(v_i)\right).$$

Widać, że funkcja jest symetryczna względem v_i . Ograniczając ją do zmiennej v_i , przy ustalonych pozostałych v_j , stwierdzamy, że ta nowa funkcja też osiąga minimum. Obliczając jej pochodną przekonujemy się, że minimum jest osiągane przy $v_1 = v_2 = \dots = v_{N-1} = v_*$. Oczywiście, także $v_N = v_*$. (Pozostawiamy Czytelnikowi samodzielne uzupełnienie tego dowodu.)

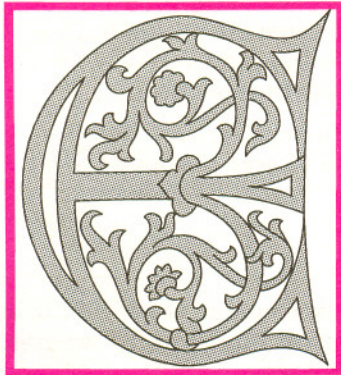
Teraz dokończenie zadania jest proste. Mamy $T = L/v_*$,

$$b_0/v_* + b_1 + b_2 v_* + b_3 v_*^2 \leq A/L$$

i poszukujemy maksymalnego $v_* \leq v_m$ spełniającego powyższą nierówność. Rozwiązanie jest następujące.

Najlepszą taktyką jest albo przebiec cały dystans z maksymalną prędkością, albo ze stałą optymalną prędkością.

Pierwszy przypadek dotyczy sprintów, a drugi średnich i długich dystansów (np. sposób biegania Bronisława Malinowskiego).



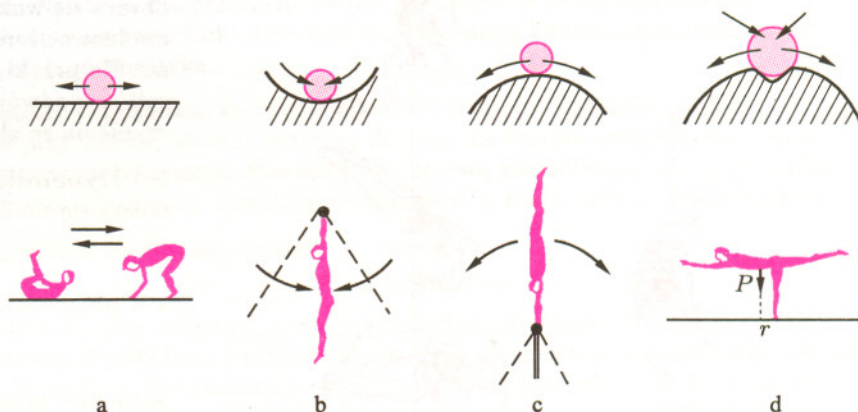
Przykład ten (z moimi modyfikacjami) zaczerpnąłem z książki Sadowskich (L.E. Sadowski, A.L. Sadowski) „Matematyka i sport” (po rosyjsku). Zainteresowani mogą w niej znaleźć ciekawe zastosowania metod probabilistycznych w sędziowaniu zawodów sportowych i w prognozowaniu wyników. Jest tam również takie intrygujące zdanie:

„Istnieje pogląd, że idee Czebyszewa, dotyczące rozcinania tkanin, były wykorzystane przy konstruowaniu sukiennego obszycia piłki tenisowej.”

Mechanika ćwiczeń gimnastycznych

Gimnastyka sportowa, jak żadna inna dyscyplina sportowa, jest bardzo techniczna i wykorzystuje do maksimum prawa mechaniki. (Na Zachodzie gimnastyka sportowa nazywa się *artistic gymnastics*, a nasza gimnastyka artystyczna nosi miano *rhythmic gymnastics*). Spróbujemy krótko opisać niektóre elementy i czynniki wpływające na jakość wykonywanych ćwiczeń gimnastycznych.

(a) **Stabilność.** Na rysunku 1 są przedstawione cztery typy położenia równowagi układów mechanicznych: nieokreślone (a), stabilne (b), niestabilne (c) i względnie stabilne (d).

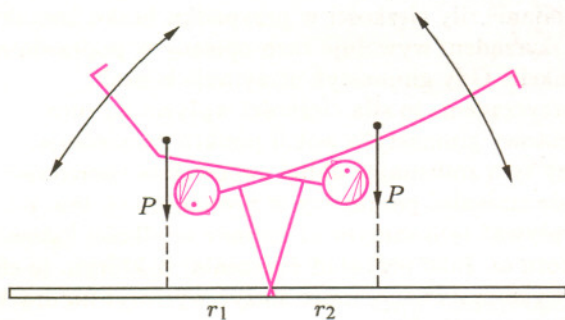


Rys. 1

Najważniejsze w gimnastyce są względnie stabilne położenia równowagi. Do nich zaliczają się ćwiczenia na równoważni, stójki na rękach (na podłodze, na poręczach, na kółkach) itp. Istotnym parametrem takiego położenia równowagi jest moment stabilności

$$P \cdot r,$$

gdzie P jest ciężarem, r zaś odległością rzutu środka ciężkości gimnastyka (na płaszczyznę poziomą) od brzegu obszaru oparcia (patrz rys. 1d).

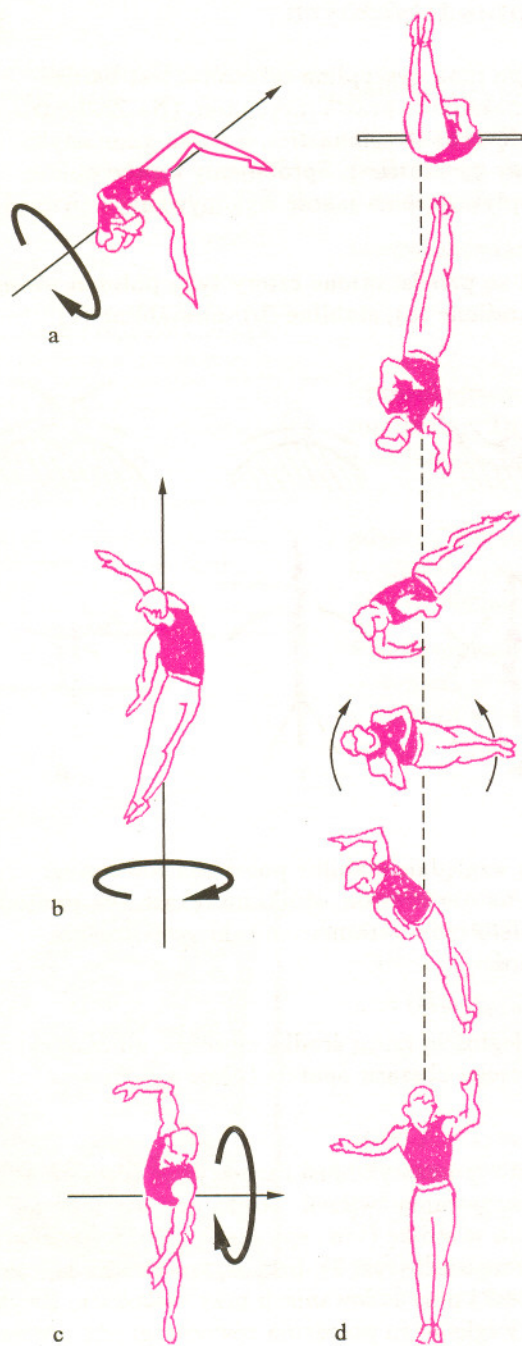


Rys. 2

Bardzo często gimnastyk musi zachowywać równowagę podczas wykonywania ćwiczeń. Ma to miejsce podczas przechodzenia w stójkę (tzw. spiczaga), przy wymachach na niskich poręczach (rys. 2), przy wykonywaniu kół na koniu z łękami i przy lądowaniach przy zeskokach. Zwykle zachowanie względnego położenia równowagi jest procesem sterowanym. Każdemu odchyleniu ciała od równowagi powinien odpowiadać kontrujący wysiłek gimnastyka. Rzut środka ciężkości zmienia się i przechodzi (nieraz wielokrotnie) przez punkt oparcia.

(b) **Kinematyka.** Gimnastyk może być traktowany jako ciało sztywne (z dużym przybliżeniem) albo lepiej jako układ złożony z kilku sztywnych elementów połączonych gibkimi złączami (stawami). Ruch gimnastyka można rozłożyć na ruch jego środka ciężkości, ruch obrotowy całego układu wokół środka ciężkości i względne ruchy członków ciała gimnastyka.

Ruch środka ciężkości jest dobrze znany. Przy skokach i zeskokach porusza się on po paraboli, której parametry są określone przez długość wektora prędkości początkowej i przez początkowy kierunek lotu. Żadne, najbardziej nawet aktywne, sztuczki podczas lotu nie mogą zmienić tego toru. Istotny jest fakt, że do 80% czasu całego zeskoku (z drążka, kółek, poręczy) zabiera ruch powyżej przyrzędu. Zmiana wysokości przyrzędu nie ma istotnego wpływu na czas zeskoku.



Ruch obrotowy ciała wokół środka masy jest bardziej złożony. Jako ciało sztywne gimnastyk ma trzy własne osie obrotu (są to trzy kierunki własne tzw. tensora bezwładności). Wokół poprzecznej osi (a) (patrz rys. 3) są wykonywane salta w przód i w tył, przrzućy i fiiflaki. Wokół osi podłużnej (b) wykonuje się obroty, najczęściej stosowane w łyżwiarstwie figurowym. Obroty wokół przednio-tylnej osi (c) są rzadziej wykonywane (przy saltach bokiem, gwieździe i wymachach na koniu z łękami).

Często obroty mają złożony charakter. Zawodnik obraca się wokół chwilowej osi obrotu, która może ewoluować i nie musi pokrywać się z żadną z własnych osi. Na przykład, gdy zawodnik wykonuje na drążku salto z podwójnym obrotem (rys. 3d), mamy do czynienia ze złożeniem obrotów wokół trzech osi naraz.

(c) **Dynamika.** Dynamika ćwiczeń gimnastycznych opiera się na dwóch prawach Newtona. Drugie mówi, że

$$m \cdot a = F,$$

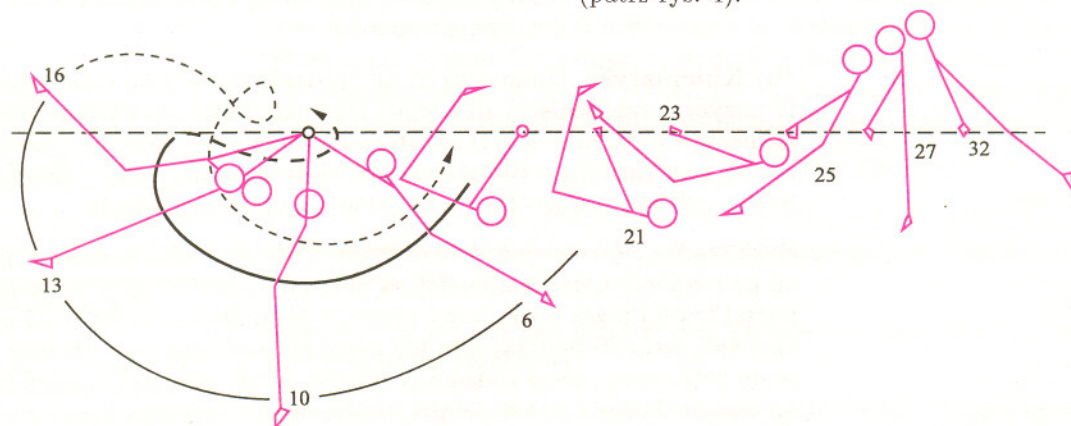
a w przypadku ruchu obrotowego przyjmuje postać

$$(1) \quad \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{M}}{dt}, \quad \mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega},$$

gdzie m – masa, \mathbf{a} – wektor przyspieszenia, \mathbf{F} – siła, \mathbf{r} – wektor położenia punktu przyłożenia siły, \mathbf{M} – moment pędu, I – moment bezwładności względem tej osi, $\boldsymbol{\omega}$ – wektor prędkości kątowej. Trzecie prawo dynamiki mówi, że każde działanie siłą \mathbf{F} jednego ciała na drugie wywołuje reakcję (równą $-\mathbf{F}$) drugiego ciała na pierwsze.

W gimnastyce występują następujące siły: siła ciężkości, siły odśrodkowe i dośrodkowe, siły Coriolisa, siły oporu i siły tarcia.

Działanie siły ciężkości w przypadku braku kontaktu z przyrządem wywołuje ruch opisany w poprzednim punkcie. Gdy gimnastyk utrzymuje kontakt z przyrządem, to siła ciężkości wpływa na ruch obrotowy gimnastyka wokół punktu zaczepienia. Przy tym zmieniając układ swego ciała sportowiec może zmieniać parametry w równaniu (1), tzn. \mathbf{r} i I , i wpływać tym samym na zmiany prędkości kątowej obrotu $\boldsymbol{\omega}$. Jako przykład ćwiczenia, w którym te efekty są wykorzystywane, może służyć wychwyt na drążku (patrz rys. 4).



Rys. 3

Rys. 4

Początkowo zawodnik wykonuje zamach w przód i w maksymalnym położeniu (pozycja 16) siła ciężkości ma duży moment. Następnie gimnastyk przybliża wyprostowane nogi do drążka i wykonuje kopnięcie w przód, nie odrywając jednak nóg od drążka. W ten sposób ciało przybliża się do przyrządu (I maleje) i zwiększa się szybkość powrotnego obrotu. Szybszy ruch nogami umożliwia „wejście” na drążek.

Siła dośrodkowa działa na zawodnika wykonującego obrót i jest odpowiedzialna za zmianę wektora prędkości v w kierunku osi obrotu. Wyraża się wzorem

$$F_d = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r.$$

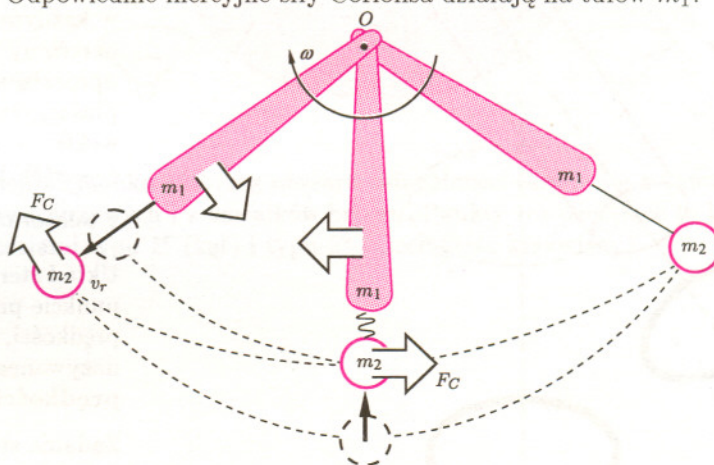
Siła odśrodkowa jest siłą reakcji zawodnika na przyrząd i zgodnie z trzecim prawem Newtona ma przeciwny zwrot. Te dwie siły powodują znaczne przeciążenia na zawodniku i na przyrządzie. Mogą kilkakrotnie przekroczyć ciężar ciała gimnastyka.

Na rysunku 5 pokazano krzywą wielkości tych sił w zależności od kąta obrotu przy dużym obrocie w tył na drążku. Ta krzywa przypomina znaną w matematyce lemniskatę Pascala i jest krzywą zakreślaną przez gryf drążka. Duża pętla odpowiada ruchowi pod drążkiem, a mała ruchowi nad drążkiem.

Siła Coriolisa wyraża się wzorem

$$\mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

i pojawia się przy zmianach pozycji gimnastyka podczas ruchu obrotowego. Na rysunku 6 pokazano jej działanie: m_1 jest masą tułowia gimnastyka, m_2 jest masą jego nóg. Gdy sportowiec zgina nogi w dolnym położeniu, to masa m_2 porusza się w górę z prędkością v_r i wywołana tym ruchem siła Coriolisa F_C odchyła nogi do tyłu. Przy rozginaniu nóg siła Coriolisa działa w przeciwnym kierunku. Odpowiednie inercyjne siły Coriolisa działają na tułów m_1 .



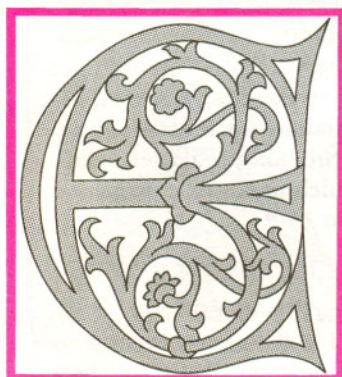
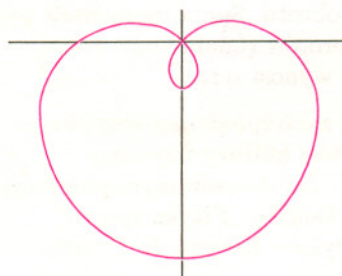
Rys. 6

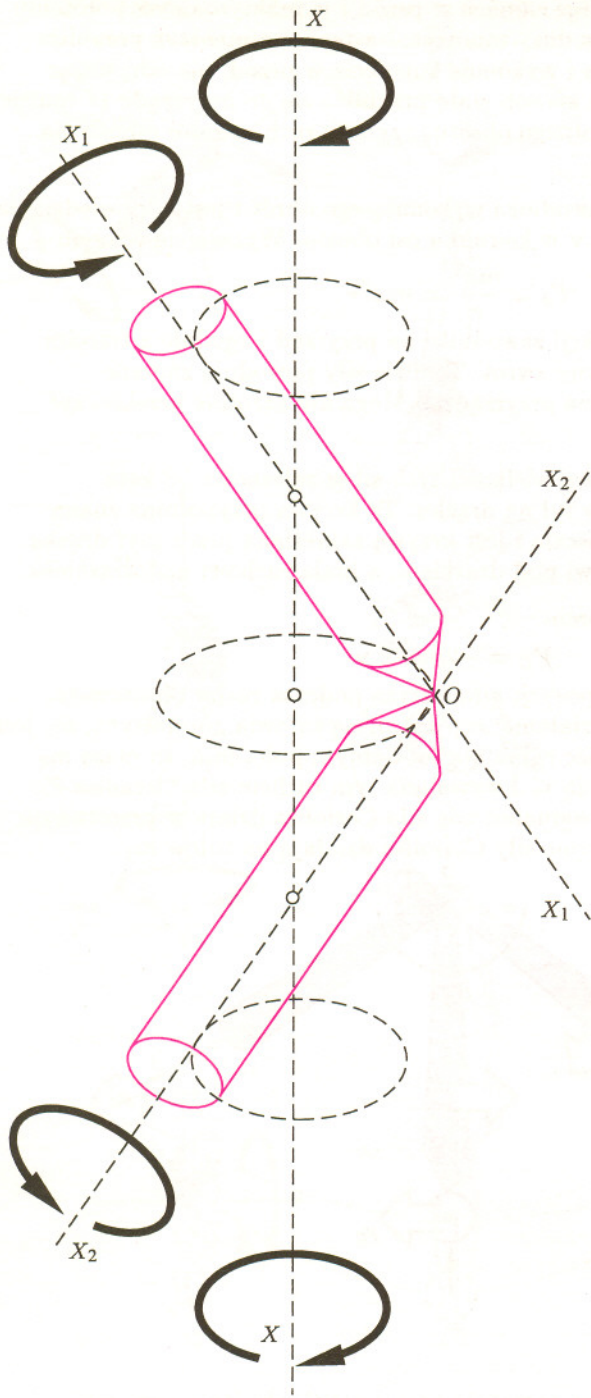
Działanie sił oporu i tarcia ma znaczenie przy wyskokach. Przy tym, jeśli wykonujemy salto, to istotny jest moment sił działających względem środka ciężkości. Uzyskujemy w ten sposób pewien moment pędu $I\omega$. Potem, korzystając z prawa zachowania momentu pędu i zmieniając I (poprzez zgrupowanie się), zwiększamy częstość obrotu ω i następnie rozprostowujemy się spadając na nogi po wykonanym obrocie w przód.

Na zakończenie pragnę przedstawić mechanizm wykonywania obrotów wokół osi podłużnej w locie, tzn. bez uprzedniego nadania momentu pędu poprzez działanie siły oporu. Gimnastyk nie jest w stanie sam stworzyć momentu pędu z niczego i wydaje się, że taki obrót nie jest możliwy. A jednak gimnastycy, akrobaci i skoczkowie do wody takie obroty wykonują.

Najprostszy przykład takiego ruchu przedstawia obrót w zwisie na jednym kółku. Gimnastyk zaczyna wykonywać ruchy typu „hula-hop”. Przy tym stopy, miednica i ramiona zaczynają opisywać nieduże okręgi. Natychmiast pojawia się wymuszony obrót całego układu w kierunku przeciwnym do „hula-hop”.

Rys. 5





Ten ostatni jest żądanym obrotem. Charakterystyczne jest to, że zaprzestanie ruchów „hula-hop” prowadzi do natychmiastowego zatrzymania obrotu. Podobne ruchy wykonuje kot, gdy wolno puszczone w powietrzu obraca się i spada na cztery łapy.

Schemat tego mechanizmu jest pokazany na rysunku 7, gdzie ciało jest traktowane jako dwuczłonowy cylindryczny model. Gdy cylindry zaczynają się obracać, opisując stożki wokół osi X , to natychmiast pojawia się przeciwnie skierowany obrót cylindrów wokół osi X_1 i X_2 . W sumie te dwie osie przedstawiają wygiętą podłużną „oś” obrotu. Suma momentów pędu opisanych wyżej dwu obrotów („hula-hop” wokół osi X i wokół $X_1 \cup X_2$) wynosi zero.

Materiały o gimnastyce zaczerpnąłem z rosyjskiego podręcznika dla instytutów kultury fizycznej „Sportowa gimnastyka”. Zainteresowanym podobnymi zagadnieniami polecam książkę „Fizyka sportu” autorstwa rodzimego fizyka – Krzysztofa Ernsta.

Halsowanie w żeglarskim jako sposób sterowania

Zwykły układ ewolucyjny jest określony przez układ równań różniczkowych (pole wektorowe): w każdym punkcie przestrzeni położenia układu jest określony wektor prędkości zmian tego układu. Dla uproszczenia przyjmijmy, że przestrzenią położenia jest płaszczyzna \mathbf{R}^2 . W każdym punkcie $x \in \mathbf{R}^2$ mamy wektor $v(x) \in \mathbf{R}^2$. Trajektoriami układu są krzywe $t \rightarrow x(t)$, których wektory styczne pokrywają się z wektorami pola, $\frac{dx}{dt} = v(x(t))$.

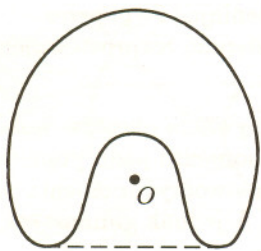
Układ sterowania określa się przez zadanie w każdym punkcie przestrzeni położenia nie jednego wektora prędkości, lecz całego zbioru tych wektorów nazywanego **trajektorią dopuszczalnych prędkości**.

Zadanie sterowania polega na tym, aby wybierając w każdym momencie wektor prędkości z danego zbioru dopuszczalnych prędkości, osiągnąć określony cel (np. dojść w jak najkrótszym czasie do zadanego celu – podzbioru \mathbf{R}^2).

Łatwo zauważyć, że zadanie sterowania jachtem należy do tej klasy problemów. Gdy wieje silny wiatr o ustalonym kierunku, to zbiór dopuszczalnych prędkości ma kształt pokazany na rysunku 8 (i nie zależy od punktu x). Sterowanie w kierunku zgodnym z kierunkiem wiatru nie przedstawia żadnych trudności. Natomiast ruch w kierunku przeciwnym jest możliwy tylko przy stosowaniu halsowania. Strategia polega na systematycznych zmianach ruchu z różnymi prędkościami należącymi do dopuszczalnego zbioru. Średnia prędkość ruchu przy takiej mieszanej strategii należy do zbioru średnich arytmetycznych wykorzystywanych wektorów. Stąd mamy wniosek, że

zawsze zbiór dopuszczalnych prędkości można zastąpić jego otoczką wypukłą.

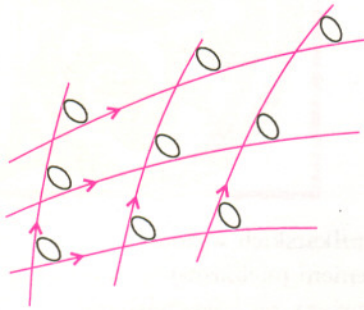
Ruch we wszystkich kierunkach jest możliwy, gdy 0 należy do otoczki wypukłej (jak na rys. 8). Oczywiście, jeśli wiatr jest bardzo silny, to ani zbiór dopuszczalnych prędkości, ani jego otoczka wypukła nie zawierają 0 i niektóre kierunki ruchu są zabronione (patrz rys. 9).



Rys. 7

Rys. 8

Odsyłamy Czytelnika do popularnej książki V.I. Arnolda „Teoria katastrof” (po rosyjsku i angielsku).



Rys. 9

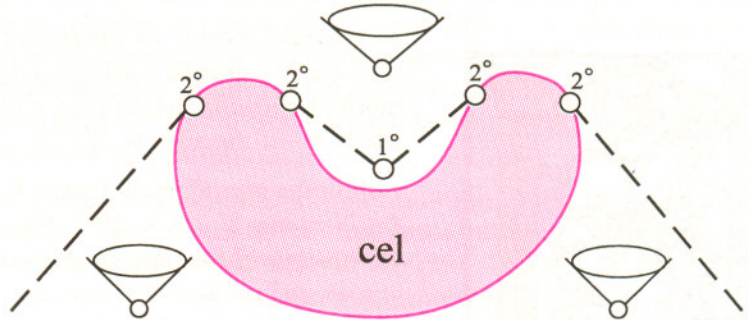
W ogólnym przypadku cel może być osiągnięty (po pewnym czasie) tylko dla pewnego podzbioru punktów startowych, który nie musi pokrywać się z płaszczyzną \mathbf{R}^2 . Nazywamy go **obszarem osiągalności**.

Interesującym matematycznym problemem jest zbadanie brzegu obszaru osiągalności. Jeśli zbiór dopuszczalnych prędkości gładko zależy od punktu i jest typowy (cokolwiek to słowo oznacza), to brzeg obszaru osiągalności składa się z gładkich kawałków i punktów osobliwych (punktów niegładkości). Okazuje się, że typowe osobliwości brzegu zbioru osiągalności są czterech typów. Trzy z nich są bardzo proste; są takie same jak wykresy funkcji

$$1^\circ \quad y = |x|, \quad 2^\circ \quad y = x|x|, \quad 3^\circ \quad y = x^2|x|.$$

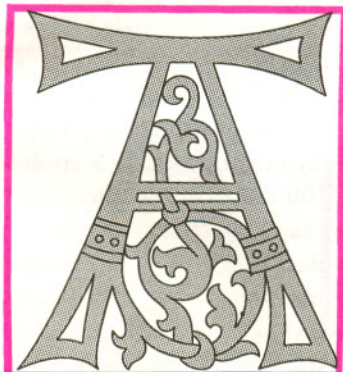
Czwarta osobliwość jest bardziej złożona i nie opiszemy jej tutaj.

Osobliwości typu 1° i 2° można zobaczyć na przykładzie przedstawionym na rysunku 10. Zakłada się, że zbiór dopuszczalnych prędkości jest stały i dopuszczalne prędkości leżą w kącie o rozwartości mniejszej od 180° . Dopuszczalne wektory na brzegach tych kątów określają graniczne prędkości. Mamy dwa pola granicznych prędkości; każde z nich ma swoje trajektorie. Dostajemy dwie rodziny krzywych zwanych **granicznymi krzywymi** (patrz rys. 9).



Rys. 10

W sytuacji z rysunku 10 brzeg obszaru osiągalności składa się z kawałków granicznych krzywych i z kawałków brzegu. Punkty rozdzielające te kawałki są osobliwościami typu 1° (kąt) i typu 2° (nieciągłość krzywizny).



Rozwiązanie zadania M781. Mleko nie wywołuje uzależnienia (jest to pogląd autora zadań, niekoniecznie odzwierciedlający poglądy redakcji *Delty*). Poza tym tylko część kowbojów przesiaduje w saloonach samotnie (nawet gdy nie-kowboje z niezrozumiałych względów omijają saloony). Przeprowadźmy obliczenia podobnie jak w zadaniu M780. Niech

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{jeśli do } i\text{-tego saloonu zawitał dokładnie jeden kowboj,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}$ jest liczbą kowbojów pijących samotnie. Mamy, oczywiście,

$$\begin{aligned} EY &= E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{100}) = EY_1 + EY_2 + \dots + EY_{100} = \\ &= P(Y_1 = 1) + P(Y_2 = 1) + \dots + P(Y_{100} = 1) = 100 \cdot \binom{100}{1} \cdot \frac{1}{100} \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{99} = \\ &= \frac{100^2}{99} \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{99} \leq \frac{100^2}{99e} = 37,15\dots \end{aligned}$$

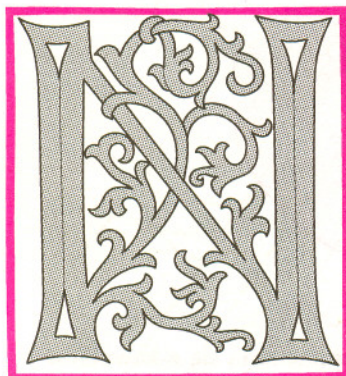
Średnia liczba kowbojów pijących samotnie nie sięga więc połowy ogólnej ich liczby, wbrew insynuacjom szeryfa.

5

mała delta

Jak wyłonić zwycięzcę?

Ile meczów trzeba rozegrać, żeby z 32 drużyn piłkarskich wyłonić najlepszą? Gdy rozgrywki prowadzone są systemem pucharowym, wystarcza $31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ meczów. Dzielimy drużyny na pary, następnie zwycięzców 16 meczów pierwszej rundy znów dzielimy na pary, które rozgrywają ze sobą 8 meczów; ich zwycięzcy rozgrywają następnie cztery mecze ćwierćfinałowe, potem podczas dwóch półfinałów wyłania się uczestników finału, i wreszcie mecz finałowy decyduje, kto wygrywa turniej.

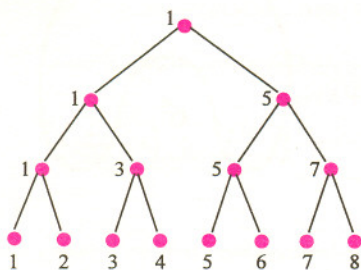


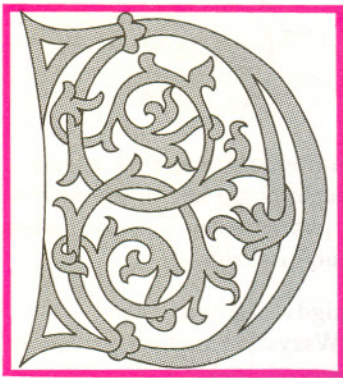
Jeśli turniej chcemy od początku rozgrywać systemem pucharowym, to liczba k startujących drużyn musi być potęgą dwójki 2^ℓ (dlatego, żeby po każdej rundzie można było podzielić drużyny na pary). Do wyłonienia zwycięzcy potrzeba wtedy $k - 1$ meczów, bo $2^{\ell-1} + \dots + 4 + 2 + 1 = 2^\ell - 1$.

Jeśli liczba startujących drużyn k nie jest potęgą dwójki, to dla pewnego $\ell \in \mathbb{N}$ mamy $2^\ell < k < 2^{\ell+1}$. Jeśli przydzielimy $w = 2^{\ell+1} - k$ wolnych losów, to w pierwszej rundzie rozegranych zostanie $(k - w) : 2 = k - 2^\ell$ meczów, a w drugiej rundzie będziemy mieć $(2^{\ell+1} - k) + (k - 2^\ell) = 2^\ell$ drużyn. Dalej można grać standardowym systemem pucharowym – po kolejnych $2^\ell - 1$ meczach będzie wiadomo, kto jest najlepszy. Zauważmy, że do wyłonienia zwycięzcy potrzeba o jeden mecz mniej, niż jest startujących drużyn, bo $(k - 2^\ell) + (2^\ell - 1) = k - 1$. Można zresztą było nie trudzić się rachunkiem, bo wiadomo, że w trakcie całego turnieju $k - 1$ drużyn musi przegrać swoje mecze, a przegrywa się w systemie pucharowym tylko raz.

Dla porównania, w systemie *każdy z każdym* meczów byłoby $k(k - 1)/2$ (bo tyle jest różnych par drużyn). W przypadku 32 drużyn czas rozgrywek wydłużyłby się więc 16 razy. Mała liczba meczów potrzebnych do wyłonienia zwycięzcy, połączona z dużą dawką emocji (każdy mecz kończy się czymś nieodwracalnym dramatem), jest niewątpliwą zaletą systemu pucharowego.

System pucharowy ma także wady. Wprawdzie zwycięzca jest wyłaniany dość obiektywnie (jeśli któraś drużyna jest bezapelacyjnie najlepsza, to wygra swoje mecze, a więc i cały turniej). Jednakże sprawa drugiego miejsca jest już mocno wątpliwa, finalistą w systemie pucharowym może bowiem zostać byle szarak ze środka stawki. Dla przykładu, gdy drużyn jest 8, to można – przy odpowiednim początkowym zestawieniu par, rzecz jasna – być gorszym od 4 drużyn i zagrać w finale (patrz rysunek). Gdy wszystkie początkowe rozstawienia drużyn są jednakowo prawdopodobne, to szansa na to, że drużyna gorsza od $k/2$ spośród k startujących dotrze do finału, jest równa około $3/100$ dla $k = 8$, około $0,00016$ dla $k = 16$, a dla $k = 32$ jest ponad 20 razy mniejsza niż szansa trafienia szóstki w Totolotku. Przed niepożądanym i, jak widać, mało prawdopodobnym trafieniem szaraków do finału (a co za tym idzie, przedwczesnym odpadaniem dobrych drużyn) organizatorzy turniejów zabezpieczają się, rozstawiając silne drużyny w różnych parach, co wyklucza sytuacje takie, jak na naszym rysunku.

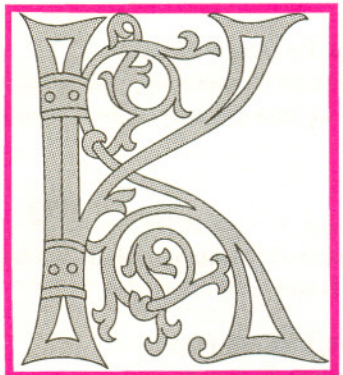




Patrz w niebo

Zaobserwowanie w 1917 r. ugięcia światła gwiazd w pobliżu Słońca było, jak wiadomo, jednym z pierwszych dowodów słuszności ogólnej teorii względności. Była to obserwacja, jak na owe czasy, wyjątkowa. Przede wszystkim musiało nastąpić zaćmienie Słońca, by w jego sąsiedztwie widać było gwiazdy. Następnie sam pomiar bardzo małego kąta (rzędu sekundy łuku), o jaki miał się ugiąć promień świetlny, też nie był sprawą prostą, no i, oczywiście, cała akcja musiała zostać przeprowadzona dostatecznie szybko, by zdążyć przed końcem zaćmienia.

Trudno było więc w owym czasie przypuścić, że tak unikalne zjawisko będzie obserwowane niemal masowo. Znamy bowiem już wiele przykładów zniekształcenia obrazu odległej galaktyki lub kwazara przez obiekt leżący bliżej nas (np. Krzyż Einsteina), a naprawdę masowo – bo inaczej zresztą nie można – obserwuje się tzw. mikrosoczewkowanie grawitacyjne. W tym przypadku chodzi o zarejestrowanie zmian nie kształtu obrazu (bo to niewykonalne), lecz jasności odległej gwiazdy przesłanianej przez jakąś bliższą – obie należące do naszej Galaktyki. Ta bliższa przesuwając się przed dalszą – a trwa to tygodnie lub miesiące – ma szansę przez pewien czas kierować do obserwatora zwiększoną ilość światła odległego obiektu. Na zjawisko to można natrafić obserwując cierpliwie jasności gwiazd w najgęstszych obszarach Galaktyki, co praktycznie oznacza, że trzeba śledzić – powiedzmy – milion gwiazd przez rok. Jest to w ogóle wykonalne, ponieważ obserwacje można opracowywać za pomocą dostatecznie pojemnych i szybkich komputerów. W takim programie o kryptonimie OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment) bierze udział grupa astronomów z Warszawy.



Wreszcie wszystko zaczyna wskazywać na to, że efekt grawitacyjnego soczewkowania w świecie galaktyk też występuje masowo, a nie sprowadza się tylko do kilku dziwnie wyglądających obiektów. Pojawiają się obliczenia modelowe i statystyki dowodzące, że rolę gigantycznych soczewek spełniają gromady galaktyk. Odległe kwazary widziane poprzez gromadę galaktyk są jaśniejsze, co powoduje, że za gromadą widać ich więcej niż obok gromady. Ten wzrost liczebności jest obecnie oceniany na 70%, a nie na kilka procent, jak dawniej. Wynika to z tego, że zaczyna doceniać się rolę ciemnej materii zawartej zapewne w dużych ilościach w gromadach galaktyk. Tłumaczyłoby to znany od wielu lat fakt, że w pobliżu średnio odległych galaktyk obserwuje się podejrzenie wiele kwazarów o dużych przesunięciach widm ku czerwieni, a więc bardzo odległych. Coraz wyraźniej więc przekonujemy się, że oglądamy Wszechświat przez przestrzeń powyginaną grawitacyjnie „w różne strony”, jakbyśmy patrzyli przez ogromną i nierówną szybę.

Tomasz KWAST



Rozwiązanie zadania M780. Niech

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{jeśli do } i\text{-tego saloonu zawitał choć jeden kowboj,} \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

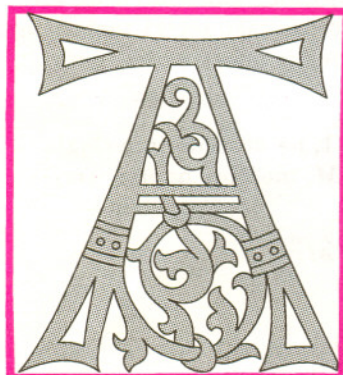
Wówczas $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$ jest liczbą pustych lokali. Niech p oznacza prawdopodobieństwo tego, że $X \geq \frac{3}{4} \cdot 100 = 75$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} 75p &\leq EX = E(X_1 + X_2 + \dots + X_{100}) = \\ &= EX_1 + EX_2 + \dots + EX_{100} = P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1) + \dots + P(X_{100} = 1) = \\ &= 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \leq 100 \cdot \left(e^{-1/100}\right)^{100} = \frac{100}{e} \end{aligned}$$

(skorzystalismy z faktu, że $e^t \leq 1 + t$ dla każdej liczby rzeczywistej t). Zatem

$$p \leq \frac{100}{75e} = \frac{4}{3e} < \frac{1}{2}.$$

Sytuacja opisana przez szeryfa nie zachodzi więc przez większość nocy.





Rozwiązanie zadania F 433. Równanie ruchu pocisku ma postać

$$\frac{dv}{dt} = g - c(v + u_0),$$

gdzie $g = \text{const}$ jest ziemskim przyspieszeniem grawitacyjnym, a stała c określa wartość siły oporu. Przepiszemy je w następującej postaci

$$\frac{dv}{dt} + cv = g - cu_0.$$

Jest to równanie ruchu w efektywnym, jednorodnym polu grawitacyjnym $g' = g - cu_0$. Skoro więc pocisk spadł na działo, to został wystrzelony w kierunku $-g'$, czyli pod kątem θ (do poziomu) spełniającym warunek

$$\text{tg } \theta = \frac{g}{cu_0},$$

a jego tor jest linią prostą.

Skierujmy oś y' wzdłuż wektora $-g'$.

Całkując równanie ruchu dostajemy

$$v = -\frac{g'}{c} + \left(v_0 + \frac{g'}{c}\right) e^{-ct},$$

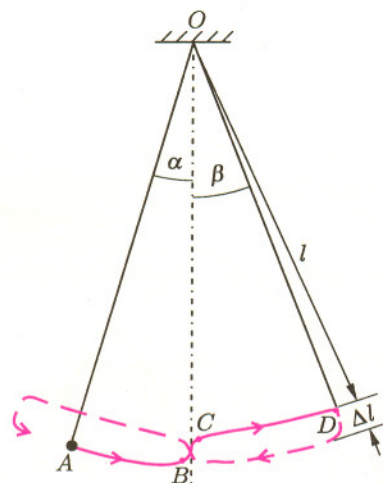
$$y' = -\frac{g'}{c}t + \left(\frac{v_0}{c} + \frac{g'}{c^2}\right)(1 - e^{-ct}),$$

gdzie $g' = \sqrt{g^2 + c^2 u_0^2}$. Kładąc $v = 0$ znajdujemy czas, w którym pocisk maksymalnie oddalił się od armaty, a stąd jego maksymalną odległość od armaty, maksymalną wysokość i zasięg:

$$h_{\text{max}} = y'_{\text{max}} \sin \theta =$$

$$= \frac{v_0}{c} \sin \theta - \frac{g}{c^2} \ln \left(1 + \frac{cv_0 \sin \theta}{g}\right),$$

$$s_{\text{max}} = y'_{\text{max}} \cos \theta = h_{\text{max}} \text{ctg } \theta.$$



Rys. 1

Huśtanie się na huśtawce jest niewątpliwie jedną z najpopularniejszych zabaw okresu dziecięcego. Jest też zajęciem znakomicie relaksującym i to niezależnie od wieku. Najprostsza odmiana huśtawki, czyli trapez, jest wreszcie z powodzeniem wykorzystywana do wykonywania efektownych ewolucji i akrobacji.

Siadając na huśtawce nie zastanawiamy się prawie nigdy nad tym, jaka sekwencja ruchów pozwoli nam huśtawkę rozbijać. Wszystkie ruchy wykonujemy intuicyjnie i zazwyczaj prowadzą nas one do oczekiwanych efektów. Co ciekawe, znakomicie radzą sobie na huśtawce właśnie dzieci nie mające jeszcze żadnych podstaw ku temu, aby zrozumieć mechanizm zjawiska, a następnie świadomie zastosować go w praktyce.

Poczyńmy zatem próbę wyjaśnienia tajemnic huśtawki i skorzystajmy w tym celu z elementarnych praw fizyki. Zaczniemy od stwierdzenia, które może wydać się oczywiste, ale jest na pewno znakomitym punktem wyjścia do wszelkich rozważań. Rozhuśtywanie się huśtawki wraz z jej pasażerem oznacza wzrost energii całego układu. Aby wzrost taki nastąpił, musi zostać wykonana pewna praca, a jest rzeczą oczywistą, że wykonać ją może tylko pasażer. Nie interesuje nas przecież sytuacja, w której huśtawka popychana jest przez inną osobę stojącą z boku.

Zauważmy teraz, że siła działająca na środek ciężkości naszego układu (huśtający się + huśtawka) wzdłuż liny, na której jest on zawieszony, jest sumą składowej siły ciężkości i siły odśrodkowej. Zmienia się ona periodycznie w czasie i może być zapisana w następującej postaci

$$(1) \quad F = Mg \cos \alpha + Mv^2/l,$$

gdzie α oznacza kąt wychylenia z położenia równowagi, v – prędkość środka masy, l – długość huśtawki, g – przyspieszenie ziemskie, M – masę układu, którą z dobrym przybliżeniem możemy utożsamić z masą huśtającej się osoby.

Jak wynika bezpośrednio ze wzoru (1), siła F jest największa przy przechodzeniu huśtawki przez położenie równowagi ($\alpha = 0$, $v = v_{\text{maks}}$), a najmniejsza w położeniach skrajnych ($\alpha = \alpha_{\text{maks}}$, $v = 0$). Spróbujmy wykorzystać powyższą obserwację proponując jako prosty mechanizm rozbijania huśtawki podnoszenie środka ciężkości wtedy, kiedy przechodzi ona przez położenie równowagi, i opuszczanie go w położeniach skrajnych. Praca wykonywana przeciw siłom zewnętrznym (podnoszenie) jest w ten sposób większa niż praca ujemna (opuszczanie) wykonywana przez te siły. Oznacza to, że całkowita praca przypadająca na każdy okres wahań jest dodatnia, czego konsekwencją jest wzrost energii układu, a tym samym amplitudy jego wahań.

Postarajmy się teraz nadać naszym rozważaniom charakter ilościowy. Wprowadźmy w tym celu pewne uproszczenie polegające na potraktowaniu układu huśtawki jako wahadła matematycznego o zmiennej okresowo długości. Przybliżenie takie oznacza, że traktujemy huśtającego się jako punkt materialny zawieszony na nieważkiej nici oraz zaniedbujemy wszelkie opory ruchu (opór powietrza, tarcie w punkcie zawieszenia).

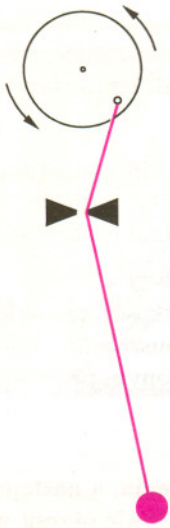
Korzystając z oznaczeń wprowadzonych na rysunku 1, na którym linią ciągłą zaznaczono początkową część toru punktowej masy M , możemy napisać trzy następujące równania:

$$(2) \quad Mg(l + \Delta l)(1 - \cos \alpha) = Mv_B^2/2,$$

$$(3) \quad M(l + \Delta l)v_B = Mlv_C,$$

$$(4) \quad Mv_C^2/2 = Mgl(1 - \cos \beta),$$

gdzie v_B i v_C oznaczają prędkości wahadła w punktach B i C.



Rys. 2

Równania (2) i (4) wyrażają zasadę zachowania energii wahadła przy zmianie jego energii potencjalnej na kinetyczną lub odwrotnie. Pierwsze z nich odnosi się do odcinka toru AB , drugie natomiast do odcinka CD . Równanie (3) wyraża zasadę zachowania momentu pędu względem osi O przy podnoszeniu środka ciężkości na drodze BC . Eliminując z trzech powyższych równań wielkości v_B i v_C , możemy otrzymać po prostych przekształceniach następującą równość

$$(5) \quad \cos \alpha - \cos \beta = (1 - \cos \alpha)[(1 + \Delta l/l)^2 - 1].$$

Jej prawa strona jest zawsze dodatnia, a tym samym w przedziale kątowym od 0 do π musi być spełniona relacja $\alpha < \beta$. Oznacza to, że zaproponowana przez nas technika prowadzi do wzrostu amplitudy, co właśnie chcieliśmy wykazać. Zwróćmy również uwagę na bardzo istotny fakt, że im większe początkowe wychylenie kątowe α z położenia równowagi, tym większy wzrost amplitudy wahań.

W przypadku wahadła, którym posłużyliśmy się jako idealizacją huśtawki, podnoszenie i opuszczanie masy zawieszony na nici zrealizować możemy za pomocą bardzo prostego układu przedstawionego na rysunku 2. Dobierając prędkość kątową napędzanego silnikiem koła tak, aby czas pełnego obrotu był dwa razy krótszy od okresu drgań wahadła, możemy amplitudę drgań sukcesywnie zwiększać.

Jest to typowy przykład tzw. parametrycznego wzbudzenia drgań. Tak właśnie określane jest wzbudzenie układu, które następuje pod wpływem zmian wartości parametru (tutaj długości wahadła), od którego zależy okres jego drgań własnych. A zatem huśtawka to nic innego, jak parametryczny wzmacniacz drgań.

Huśtawki mogą różnić się między sobą, mogą też być w różny sposób wykorzystywane. W rozróżnieniu tym chodzi nam przede wszystkim o ich zawieszenie (na linach lub na sztywnych prętach) oraz o pozycję przyjmowaną w trakcie huśtania się (siedzącą lub stojącą). Przy zachowaniu wielu cech wspólnych prowadzi to bowiem także do pewnych różnic. Na przykład, w pozycji stojącej łatwe jest podnoszenie i obniżanie środka ciężkości, a tym samym opisany przez nas mechanizm „pompowania” (takie właśnie określenie jest popularnie używane), może być znacznie efektywniejszy. Zawieszenie huśtawki na sztywnych prętach pozwala z kolei, przy odpowiednich umiejętnościach i odwadze, nawet na zatoczenie pełnego okręgu wokół osi obrotu.

Oszacujmy teraz, jaką pracę wykonuje „pompujący” podnosząc swój środek ciężkości. Wykonana praca jest po prostu iloczynem siły F (wyznaczonej z równania (1) dla $\alpha = 0$) przez drogę środka ciężkości. Mamy zatem

$$(6) \quad L = (Mg + Mv^2/l)\Delta l.$$

Powyższa postać wzoru została otrzymana przy upraszczającym założeniu, że $\Delta l \ll l$, co w większości przypadków jest w pełni uzasadnione. Jeśli teraz, korzystając z tego samego założenia, podstawimy w miejsce v^2 w równaniu (6) wartość v_B^2 z równania (2), to otrzymamy

$$(7) \quad L = [Mg + 2Mg(1 - \cos \alpha)]\Delta l = Mg\Delta l(3 - 2 \cos \alpha).$$

Praca ta w przypadku huśtawki startującej z położenia początkowego określonego przez $\alpha = 20^\circ$ oraz dziecka o masie $M = 50$ kg podnoszącego swój środek ciężkości o 15 cm, jest równa około 84 J. Przy „pompowaniu” ciągłym praca taka wykonana jest dwukrotnie w czasie każdego okresu drgań, który zależy w prosty sposób od długości huśtawki (wahadła) i wynosi

$$(8) \quad T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Dla huśtawki o długości 2,5 m okres wahań jest równy około 3 s, co oznacza, że huśtawka napędzana jest przez „pompujące” dziecko z mocą około 63 watów. Nie jest to więc zabawa męcząca i może dlatego dostarcza tyle radości i satysfakcji.

Wspomnieliśmy już, że rozhuścić się potrafi prawie każdy i to bez żadnej potrzeby wcześniejszego opanowania teorii działania huśtawki ani posiadania



Rozwiązanie zadania F 434. Zgodnie z klasyczną teorią elektromagnetyzmu moc wypromieniowana jest równa

$$P = -\frac{2}{3} \frac{ke^2}{c^3} a^2,$$

gdzie $a = \frac{GM}{r^2}$ (M jest masą gwiazdy) jest przyspieszeniem elektronu. Załóżmy, że tor elektronu jest w przybliżeniu okręgiem. Przekonamy się później, że jest to bardzo dobre założenie. Różniczkując całkowitą energię elektronu $E = -\frac{GMm}{2r}$ względem czasu otrzymujemy

$$\frac{dE}{dt} = \frac{GMm}{2r^2} \frac{dr}{dt}.$$

Porównując oba wzory znajdujemy

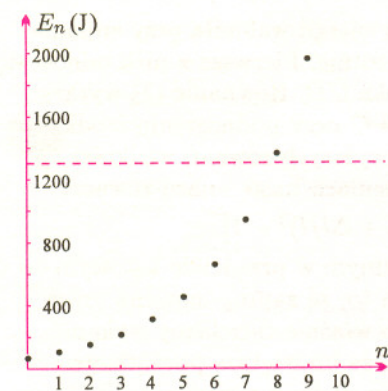
$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4ke^2GM}{3mc^3} \frac{1}{v^2}.$$

Całkując powyższe równanie otrzymujemy

$$T = \frac{3mc^3}{16\pi ke^2G} \frac{\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - 1}{e}.$$

Podstawiając wartości liczbowe znajdujemy

$$T = 3,6 \cdot 10^7 \text{ lat}.$$



Rys. 3

specjalnych ku temu predyspozycji. Jednak w miarę wzrostu amplitudy wahań trudności rosną. Trzeba też wykazywać się coraz większą odwagą. Zastanówmy się więc, jak szybko następuje wzrost amplitudy przy założeniu, że utrzymujemy cały czas rytm „pompowania”.

Energia huśtawki (konsekwentnie traktowanej jako wahadło), startującej z położenia początkowego określonego przez kąt α (rys. 1), w chwili przechodzenia przez położenie równowagi wynosi (z równania (2))

$$(9) \quad E_0 = mv_B^2/2 = Mg(l + \Delta l)(1 - \cos \alpha).$$

Energia ta po wykonaniu pracy podnoszenia środka ciężkości wzrośnie o wartość L wyrażoną równaniem (6). Ujemna praca opuszczania środka ciężkości w położeniu maksymalnego wychylenia, określonym przez kąt β , jest równa natomiast

$$(10) \quad L_1 = -Mg\Delta l \cos \beta.$$

A zatem całkowita energia huśtawki w wyniku podniesienia, a następnie opuszczenia środka ciężkości, czyli po czasie równym połowie okresu wahań, wyniesie

$$(11) \quad E_2 = E_0 + L + L_1.$$

Skorzystajmy jeszcze z równania

$$(12) \quad Mgl(1 - \cos \beta) = E_0 + L,$$

wyrażającego, podobnie jak równanie (4), zasadę zachowania energii na drodze CD (rys. 1).

Podstawiając teraz do równania (11) odpowiednie wartości z równań (6), (9) i (10) oraz $\cos \beta$ wyznaczony z równania (12) otrzymujemy (zaniedbując wyrazy kwadratowe względem $\Delta l/l$) następującą zależność

$$(13) \quad E_2 = E_0(1 + 3\Delta l/l).$$

Uogólniając powyższy wzór na n pełnych okresach drgań mamy dalej

$$(14) \quad E_n = E_0(1 + 3\Delta l/l)^{2n},$$

co przy naszym upraszczającym założeniu $\Delta l/l \ll 1$ możemy zapisać w postaci

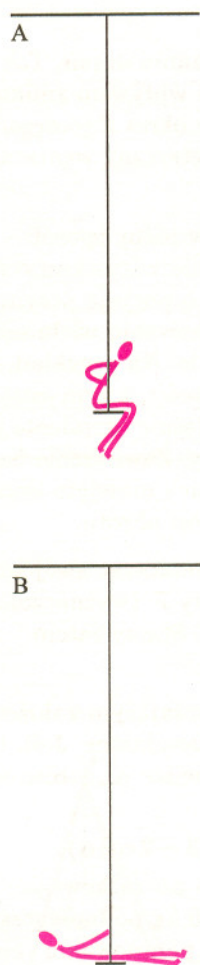
$$(15) \quad E_n = E_0 \exp(6n\Delta l/l).$$

Zobaczmy, jak wygląda graficznie (rys. 3) przebieg powyższej zależności w przypadku naszej huśtawki ($l = 2,5$ m) przy amplitudzie pompowania $\Delta l = 15$ cm i starcie w położeniu początkowym $\alpha = 20^\circ$ odpowiadającym wartości $E_0 = 78$ J. Na wykresie widać wyraźnie wykładniczy charakter wzrostu energii huśtawki z każdym kolejnym okresem jej wahań. Utrzymanie stałego rytmu „pompowania” prowadzi zatem bardzo szybko do wychyleń, przy których obok sympatycznych doznań może pojawić się odczucie strachu. Należy o tym pamiętać i zachować na huśtawce umiar w szybkości pompowania.

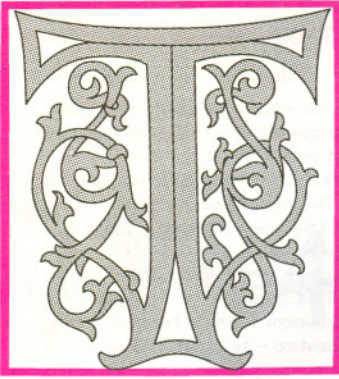
Przerywana linia na rysunku 3 odpowiada wartości energii, jaką huśtawka osiąga wtedy, kiedy jej skrajnym położeniem jest pozycja pozioma. Jak widać, można ją uzyskać już w ósmym okresie wahań. Warto jeszcze zwrócić uwagę na inną własność huśtawki, wynikającą zresztą z równania (15). Otóż szybkość wzrostu energii huśtawki jest niezależna od jej masy.

Zarówno z zasady parametrycznego wzmacniania drgań wahadła, jak również ze wzoru (15) wynika, że przedstawiona wyżej metoda rozbijania huśtawki zawodzi, jeśli w chwili początkowej znajduje się ona w spoczynku. Innymi słowy, potrzebny jest sygnał początkowy, aby móc go wzmocnić. Wprawdzie absolutny bezruch nie istnieje, a najdrobniejsze nawet fluktuacje stanowią w zasadzie wystarczający sygnał początkowy, ale czas potrzebny na wzbudzenie znaczących drgań może być w takim przypadku zniechęcająco długi.

Z powyższych rozważań wynika zatem, że na samym początku powinniśmy huśtawce „pomóc” w inny sposób. Możemy to uczynić, na przykład, odpychając się od ziemi w momencie wsiadania na huśtawkę, ale tym sposobem, jako zbyt prozaicznym, nie będziemy się tu zajmować.



Rys. 4



Mozemy też wprowadzić huśtawkę w ruch nie korzystając z pomocy podłoża. Otóż wyrzucenie nóg do przodu spowoduje, że huśtawka odchyli się do tyłu. Przeciwny manewr, polegający na zgięciu nóg w kolanach w chwili maksymalnego wychylenia, przyspieszy jej powrót w kierunku położenia równowagi. I to w zupełności wystarczy, aby przygotować nasz układ do parametrycznego wzmacniania rozpoczętych drgań.

Jest też inny, skuteczniejszy sposób wyprowadzenia huśtawki z położenia równowagi. Możemy mianowicie odchylić się do tyłu, przechodząc z pozycji *A* do pozycji *B* na rysunku 4. Taki obrót ciała oznacza, że uzyskuje ono moment pędu względem środka masy. Zachowanie zerowego momentu pędu całego układu (huśtawka+pasażer) wymaga, aby nastąpił równoczesny obrót (w przeciwnym kierunku) huśtawki wokół punktu jej zawieszenia. Powtarzając w odpowiednim momencie podobny manewr w przeciwną stronę, kontynuujemy „napędzanie” huśtawki powracającej do położenia równowagi. Technika taka może być zresztą samowystarczalna i pozwala na rozbijanie się, choć znacznie wolniej, bez konieczności „pompowania”. Mamy tu układ dwóch oddziałujących oscylatorów, z których jeden (huśtawka) sterowany jest odpowiednimi ruchami drugiego (huśtający się pasażer).

Do takiego samego wniosku moglibyśmy również dojść rozwiązując dosyć skomplikowane równania ruchu przy niezbędnych zresztą (dla tak złożonego układu) upraszczających założeniach. Rachunków tych nie będziemy tu, oczywiście, przytaczać, a wspomnieliśmy o nich tylko po to, aby uświadomić Czytelnikowi, że huśtawka to nie tylko zabawa i rozrywka, ale także wcale niebanalny problem fizyczny.



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 780. W zagubionym pośród imperialistycznej prerii miasteczku Milky Cow 100 kowbojów nawiedza wieczorami 100 lokalnych całodobowych saloonów mlecznych. Każdy z kowbojów wybiera (losowo i niezależnie od kolegów po fachu) lokal, w którym spędzi resztę nocy nad kufelkiem mleka. Szeryf miasteczka próbuje zakazać w Milky Cow handlu artykułami mlecznymi pod pretekstem, że przez większość nocy 3/4 saloonów i tak świeci pustkami. Miłujący mleko Czytelniku, wykaż, że szeryf rozmija się z prawdą!

Rozwiązanie na str. 9

M 781. W chorym z braku mleka umyśle szeryfa załęgły się nowe urojenia. Tym razem stróż prawa twierdzi, że większość kowbojów pije samotnie, co pogłębia nałóg. Czy ma rację?

Rozwiązanie na str. 7

M 782. Szeryf wprowadził nowe drakońskie prawa, aby zmniejszyć podaż mleka w Milky Cow. Odtąd odległość między dwoma saloonami musi przekraczać 250 m, a ich odległość od jedynego w mieście więzienia ma być mniejsza niż 1 km. Czy miasteczko pomieści 100 legalnych saloonów?

Rozwiązanie na str. 2

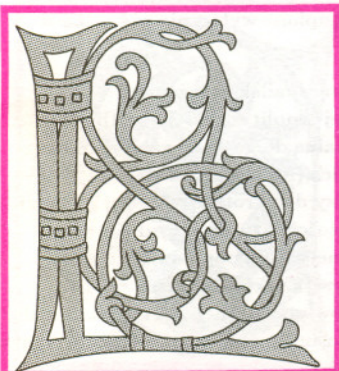
Redaguje Krzysztof REJMER

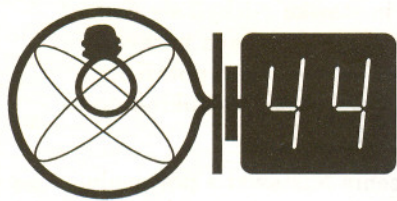
F 433. Z armaty wystrzelono pocisk o prędkości początkowej v_0 , który ponownie trafił w armatę. Pod jakim kątem wystrzelono pocisk, jeśli wiadomo, że wieje wiatr z prędkością u_0 (skierowaną poziomo)? Przyjąć, że siła oporu powietrza jest proporcjonalna do prędkości pocisku. Znaleźć maksymalną wysokość i maksymalną (poziomą) odległość, na jaką pocisk oddalił się od armaty.

Rozwiązanie na str. 10

F 434. Elektron krąży wokół gwiazdy neutronowej o średniej gęstości $\rho = 2 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$ po orbicie kołowej o promieniu $R_0 = 1,5R$, gdzie R jest promieniem gwiazdy. Po jakim czasie elektron spadnie na powierzchnię gwiazdy? Promieniowanie elektronu należy potraktować klasycznie.

Rozwiązanie na str. 11





Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Uwaga: W związku z terminowym ukazywaniem się *Delty* na rozwiązania zadań ligowych czekamy do końca miesiąca

$$n + 2.$$

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1996

Przypominamy treść zadań:

217. Bardzo długa jednorodna pozioma belka opiera się na wielu równo odległych podporach. Jeśli pada śnieg obciążając belkę równomiernie, to pierwsze złamanie belki nastąpi w jednym z punktów podparcia czy w jednym z punktów środkowych między podporami? Zakładamy, że: a) odchylenie belki $y(x)$ w punkcie x od prostej poziomej jest niewielkie, b) belka podlega prawu Hooke'a, tzn. w każdym punkcie jej krzywizna (zgodnie z punktem a) równa drugiej pochodnej $y''(x)$ jest proporcjonalna do momentu siły zginającej.

218. Głośnik zamknięto pod kloszem pompy próżniowej. Ile powinno wynosić ciśnienie pod kloszem, aby dźwięk dobiegający na zewnątrz był o 20 dB słabszy niż przy ciśnieniu normalnym? Temperatura powietrza jest ustalona.

217. Przyjmijmy, że odległość między podporami wynosi $2a$, a obciążenie (siłę) na jednostkę długości belki oznaczmy przez f . Niech x będzie współrzędną wzdłuż belki, a $x = 0$ – jednym z punktów podparcia. Dalej oznaczmy odchylenie pionowe jako $y(x)$, a moment siły wyginającej jako $M(x)$, przy czym dodatnia wartość M odpowiada dodatniej drugiej pochodnej y'' (taki jest ten znak w okolicy punktu $x = a$). Rozważmy mały odcinek belki od punktu x do $x + dx$, a dla ustalenia uwagi przyjmijmy $0 < x < a$. Działa na niego z lewej strony prawoskrętnie moment $M(x)$, a z prawej lewoskrętnie $M(x + dx)$; ponadto łatwo wyliczyć wartość siły pionowej $F_{\text{pion}} = f(a - x)$ działającej między elementami belki. Moment tej siły wynosi w odniesieniu do naszego małego odcinka $f(a - x)dx$ („małe wyższego rzędu” zostały pominięte), a zwrot jest prawoskrętny. Warunek równowagi przybiera więc postać

$$M(x + dx) = M(x) + f(a - x)dx.$$

Całkując to równanie znajdujemy funkcję $M(x)$

$$M(x) = M_0 + fax - fx^2/2.$$

Zgodnie z założeniem M jest proporcjonalne do y'' . Całkując ponownie (z uwzględnieniem warunków początkowych $y(0) = y'(0) = 0$) otrzymujemy

$$y(x) = \text{const}(M_0x^2/2 + fax^3/6 - fx^4/24).$$

Należy jeszcze wykorzystać warunek $y(2a) = 0$ (albo $y'(a) = 0$). Stąd wynika $M_0 = -fa^2/3$, a dalej w środku między podporami znajdujemy $M(a) = fa^2/6$. Bezwzględna wartość M jest więc dwukrotnie większa w punktach podparcia i tam złamanie belki jest najbardziej prawdopodobne.

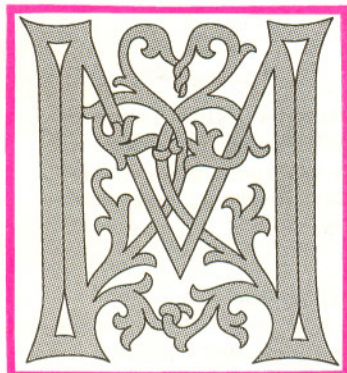
Powyższy dowód można uogólnić na przypadek dowolnego (niekoniecznie równomiernego) rozkładu obciążenia wzdłuż belki – byle tylko nie było ono skupione wyłącznie w środkach między podporami.

218. Obniżenie poziomu natężenia o 20 dB oznacza 100-krotny spadek natężenia (tzn. 100-krotny spadek mocy fali dźwiękowej). Przy ustalonej amplitudzie i częstotliwości drgań membrany głośnika moc fali jest natomiast proporcjonalna do gęstości gazu. Dokładny dowód tego faktu można znaleźć w podręcznikach akademickich (np. *Fale* Crawforda), ale do naszych celów wystarczy następujące proste rozumowanie: przy dwukrotnie większej gęstości membrana wprowi w ruch z tą samą prędkością element objętości gazu mający dwukrotnie większą masę, zatem nada mu dwukrotnie większą energię kinetyczną; ponieważ energia kinetyczna stanowi dokładnie połowę energii fali, więc i całkowita energia ulegnie wtedy podwojeniu. Zatem w naszym problemie gęstość powietrza powinna zmniejszyć się stukrotnie, a z równania Clapeyrona wnioskujemy, że w takim samym stosunku obniży się ciśnienie – czyli wyniesie ono około 1000 Pa.

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 209 ($WT=1,86$) i 210 ($WT=2,20$)
z numeru 12/1995

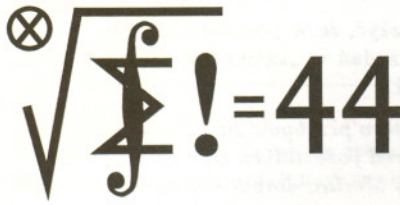
Aleksander Surma	- Myszków	35,53
Jarosław Łazuka	- Warszawa	35,16
Przemysław Gworys	- Częstochowa	30,61
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	26,68
Artur Gawryszczak	- Dubeczno	16,36



Przypominamy treść zadań:

319. Rozwiązać układ równań:

$$(1+x^2)y = x, \quad 12y^3 + z = 3y + 2, \quad |3z - 5| = 1 - x.$$



319. Załóżmy, że liczby rzeczywiste x, y, z spełniają ten układ. Liczba $y = x/(1+x^2)$ ma moduł nie większy od $1/2$, a zatem $1 - 4y^2 \geq 0$.

Przypuśćmy, że $x > 0$. Wtedy także $y > 0$, więc $z = 2 + 3y - 12y^3 = 2 + 3y(1 - 4y^2) \geq 2$; stąd $3z - 5 \geq 1$, wobec czego $x = 1 - |3z - 5| \leq 0$. Sprzeczność.

Przypuśćmy z kolei, że $x < 0$. Wtedy $y < 0$, więc $z = 2 + 3y(1 - 4y^2) \leq 2$. Nierówność między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną trójki liczb $\frac{1}{2}(1 - 4y^2)$, $\frac{1}{2}(1 - 4y^2)$, $4y^2$ prowadzi do oszacowania $y^2(1 - 4y^2)^2 \leq \frac{1}{27}$. Stąd $|y|(1 - 4y^2) \leq \frac{1}{9}\sqrt{3} < \frac{2}{9}$, czyli $y(1 - 4y^2) > -\frac{2}{9}$, i w konsekwencji $z = 2 + 3y(1 - 4y^2) > \frac{4}{3}$. Z uzyskanych oszacowań wynika, że $-1 \leq 3z - 5 \leq 1$; zatem $x = 1 - |3z - 5| \geq 0$. Sprzeczność.

Pozostała możliwość, że $x = 0$. Wtedy $y = 0, z = 2$. Ta trójka liczb istotnie spełnia podany układ równań i jest jego jedynym rozwiązaniem.

320. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby dodatnie x, y, z , że $a = y + z, b = z + x, c = x + y$. Promienie r i R (okręgów: wpisanego i opisanego) oraz pole S takiego trójkąta wyrażają się wzorami:

$$r = \sqrt{\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}},$$

$$S = \frac{r(a+b+c)}{2} = r(x+y+z),$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{4r(x+y+z)} = \frac{yz+zx+xy}{4r} - \frac{r}{4},$$

z których wyznaczamy wartości podstawowych form symetrycznych zmiennych x, y, z :

$$(1) \quad x+y+z = S/r, \quad yz+zx+xy = 4Rr+r^2, \quad xyz = Sr.$$

Liczby x, y, z są więc pierwiastkami wielomianu

$$(2) \quad P(t) = t^3 - (S/r)t^2 + (4Rr+r^2)t - Sr.$$

Na odwrót, jeśli ten wielomian ma (dla danych parametrów $S, R, r > 0$) trzy pierwiastki rzeczywiste x, y, z , to spełnione są związki (1) (z których wynika, że $x, y, z > 0$) oraz spełnione są wszystkie poprzednie równości, a zatem trójkąt o bokach $y+z, z+x, x+y$ ma pole S i promienie okręgów opisanego i wpisanego odpowiednio R i r .

Podstawienie $t = z + S/(3r)$ przeprowadza wielomian $P(t)$ do postaci

$$(3) \quad Q(z) = z^3 + Az - B,$$

gdzie

$$(4) \quad A = \frac{3r^4 + 12Rr^3 - S^2}{3r^2}, \quad B = \frac{2S(9r^4 - 18Rr^3 + S^2)}{27r^3}.$$

Z teorii równań sześciennych (Tartaglia-Cardano) wiadomo, że wielomian (3) ma trzy pierwiastki rzeczywiste (z uwzględnieniem krotności) wtedy i tylko wtedy, gdy $4A^3 + 27B^2 \leq 0$. Dla współczynników A, B danych wzorami (4) nierówność ta jest równoważna następującej:

$$S^4 + (2r^4 - 20Rr^3 - 4R^2r^2)S^2 + (r^8 + 12Rr^7 + 48R^2r^6 + 64R^3r^5) \leq 0.$$

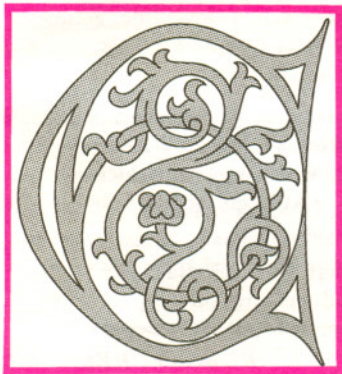
Parametry R i r są ustalone ($R \geq 2r > 0$); chcemy wyznaczyć zbiór liczb dodatnich S spełniających otrzymaną nierówność dwukwadratową. Rutynowe obliczenia prowadzą do odpowiedzi: szukanym zbiorem jest przedział $\langle S_1; S_2 \rangle$ o końcach

$$S_1 = r\sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2} - \frac{2d^3}{R} = \frac{(R+d)(R+r-d)^{3/2}}{\sqrt{2R}},$$

$$S_2 = r\sqrt{2R^2 + 10Rr - r^2} + \frac{2d^3}{R} = \frac{(R-d)(R+r+d)^{3/2}}{\sqrt{2R}},$$

gdzie $d = \sqrt{R^2 - 2Rr}$ (interpretacja geometryczna liczby d : jest to odległość między środkami okręgów opisanego i wpisanego). W myśl wcześniejszych stwierdzeń, znalezione wartości S_1 i S_2 są ekstremalnymi wartościami pól trójkątów o zadanych promieniach R i r .

[Inna metoda: zbiór trójkątów o zadanych parametrach R i r można utożsamiać z pewnym zwartym podzbiorem przestrzeni euklidesowej, przyjmując jako zmienne na przykład długości boków; zatem wartość pola, które jest funkcją ciągłą owych zmiennych, osiąga na tym zbiorze minimum oraz maksimum. Jeżeli wielomian (2) ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, to po niewielkiej zmianie S (w którymkolwiek kierunku) powstały wielomian także będzie miał trzy pierwiastki rzeczywiste. Stąd wniosek, że dla ekstremalnych wartości S wielomian (2) musi mieć pierwiastek podwójny. Podstawiając we wzorach (1) $x = z$, a następnie eliminując x i y , dostajemy równanie wiążące R, r i S ; nieprzyjemnych rachunków i tak się nie uniknie. Otrzymane równanie daje się rozwiązać względem S ; pierwiastkami są liczby S_1 i S_2 , znalezione powyżej.]

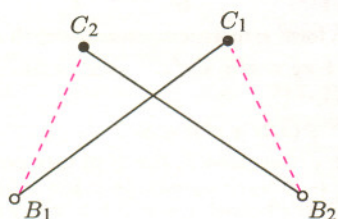


Niezmienniki i półniezmienniki (II)

W poprzednim Kąciku zajmowaliśmy się zadaniami, w których opisany był pewien proces. Szukaliśmy wtedy niezmienników (czyli czegoś, co nie ulegało zmianie podczas wykonywania procesu) bądź półniezmienników (czyli czegoś, co się zmieniało, ale w sposób dla nas wygodny) i to już wystarczyło, aby rozwiązać częstokroć niełatwe zadanie. Okazuje się, że metodę tę można również stosować w niektórych zadaniach, gdzie na pozór nie występuje żaden proces. Oto przykład.

1. Danych jest $2n$ punktów na płaszczyźnie (żadne trzy nie są współliniowe) – n białych i n czarnych. Udowodnić, że punkty te można tak połączyć n odcinkami, aby każdy odcinek miał końce różnych kolorów oraz żadne dwa odcinki nie miały punktów wspólnych.

Oznaczmy punkty białe i czarne odpowiednio przez $B_1, \dots, B_n, C_1, \dots, C_n$. Skonstruujemy pewien proces, który doprowadzi nas po skończonej liczbie kroków do celu. Na początek połączmy odcinkami punkt B_1 z C_1, B_2 z C_2, \dots, B_n z C_n . Jeśli żadne dwa odcinki nie mają punktów wspólnych, zadanie rozwiązaliśmy. Przypuśćmy więc, że na przykład odcinki B_1C_1 i B_2C_2 przecinają się. Wówczas zamiast tych odcinków narysujmy odcinki B_1C_2 i B_2C_1 :



Jeśli w dalszym ciągu pewne dwa odcinki się przecinają, postępujemy z nimi analogicznie, itd. Pozostaje odpowiedzieć na pytanie, dlaczego po skończonej liczbie kroków żadne dwa odcinki nie będą się przecinały? Poszukajmy więc jakiegoś niezmiennika lub półniezmiennika. Konstrukcja naszego procesu narzuca nam następujący „półniezmiennik”: *liczba punktów przecięcia wszystkich narysowanych odcinków*. Nasz ruch polegał przecież na pozbyciu się jednego z punktów przecięcia. Jednak pozbywając się w ten sposób tego jednego punktu, możemy uzyskać niechcący całą masę innych. Wtedy liczba punktów przecięcia zamiast maleć i przybliżać nas do celu, może wzrastać. Mimo wszystko jednak cel jest bliski – należy zauważyć, że po każdym ruchu *suma długości wszystkich odcinków maleje*. Ponieważ suma ta może przyjmować jedynie skończenie wiele wartości, więc proces nasz po skończonej liczbie kroków musi się zakończyć.

Powyższe rozwiązanie można zredagować w następujący, bardziej elegancki sposób:

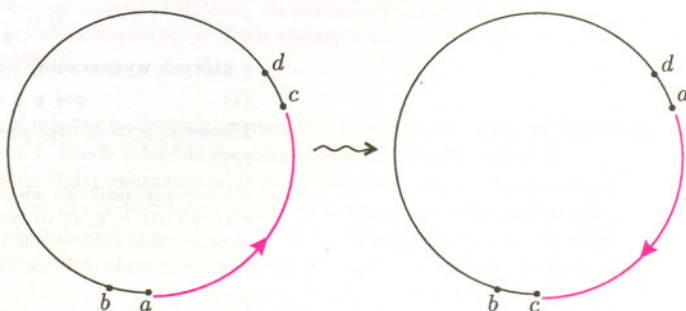
Połączmy tak punkty białe B_1, \dots, B_n z czarnymi C_1, \dots, C_n , aby suma długości otrzymanych odcinków była najmniejsza (tak zawsze da się zrobić, gdyż punkty białe można połączyć z czarnymi na skończenie wiele sposobów, a w dowolnym skończonym zbiorze liczb rzeczywistych istnieje liczba najmniejsza). Przypuśćmy, że wśród otrzymanych odcinków $B_1C_1, B_2C_2, \dots, B_nC_n$ odcinki B_1C_1 i B_2C_2 przecinają się. Wtedy łączymy punkty odcinkami $B_1C_2, B_2C_1, B_3C_3, \dots, B_nC_n$.

Suma długości tych odcinków jest mniejsza niż suma długości odcinków B_1C_1, \dots, B_nC_n , co przeczy wyżej uczynionemu założeniu. Zatem odcinki B_1C_1, \dots, B_nC_n nie mają punktów wspólnych.

Czytelnik zechce zauważyć, że w podobny sposób rozwiązaliśmy jedno z zadań w „kąciku” w *Delcie* 1/1995. Oto następujący przykład.

2. Na dworze króla Artura przebywa $2n$ rycerzy ($n \geq 2$), z których każdy ma wśród pozostałych co najwyżej $n - 1$ wrogów. Udowodnić, że Merlin, doradca Artura, może tak rozsadzić rycerzy za Okrągłym Stołem, aby żaden rycerz nie siedział obok swojego wroga.

Niech na początku rycerze usiądą dowolnie. Pokażemy jak zmniejszyć liczbę par rycerzy, którzy są wrogami i siedzą obok siebie. Niech rycerz a siedzący z prawej strony rycerza b będzie jego wrogiem. Rozpatrzmy zbiór D wszystkich rycerzy nie siedzących obok a , którzy nie są wrogami a . Jest ich co najwyżej $n - 1$. Rycerz b ma co najwyżej $n - 1$ wrogów, w tym a , istnieje więc rycerz c , który nie jest wrogiem b i który siedzi z lewej strony pewnego rycerza d ze zbioru D . Przesadźmy teraz rycerzy tak jak pokazują strzałki na rysunku:



Teraz każdy zdoła sam dokończyć dowód.

Na koniec tradycyjnie kilka zadań do samodzielnego rozwiązania.

3. Na płaszczyźnie danych jest n punktów A_1, \dots, A_n , z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej oraz n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe. Udowodnić, że proste te można oznaczyć przez l_1, l_2, \dots, l_n oraz tak wybrać na nich odpowiednio punkty B_1, B_2, \dots, B_n , aby dla każdego $i, 1 \leq i \leq n$, prosta $A_i B_i$ była prostopadła do l_i oraz odcinki $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n$ były parami rozłączne.

4. Danych jest $n \geq 3$ miast. Połączenie między każdą parą miast obsługuje inna linia lotnicza. Pewnego dnia zastrajkowało $n - 3$ linii lotniczych. Udowodnić, że mimo to można w tym dniu odbyć taką podróż lotniczą, by w każdym z miast być dokładnie raz.

5. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, które połączono siecią dróg jednokierunkowych. Wiadomo, że każde dwa miasta łączy pewna droga jednokierunkowa. Wykazać, że istnieje miasto, z którego można odbyć podróż do każdego z pozostałych miast.

6. Dany jest wypukły wielokąt W o tej własności, że nie można nim pokryć żadnego trójkąta o polu $1/4$. Udowodnić, że wielokąt W można pokryć pewnym trójkątem o polu 1.

Krzysztof CHELMIŃSKI
Waldemar POMPE

Skąd się wzięły pewne liczby

Pytają uczniowie, czemu tak się dzieje
że aż tyle różnych dziwnych liczb istnieje.
Ułamki, pierwiastki, liczby urojone,
ujemne, ... Do czego przydadzą się one?
Otóż, przede wszystkim, gdy coś zliczyć chcemy,
na naturalnych liczbach operujemy.
Dobrze się je mnoży i dobrze dodaje,
lecz od mniejszej większej odjąć się nie daje.
Mamy na to radę – sposób znakomity:
Po to wprowadzamy zbiór liczb całkowitych.
Dolączamy liczby, co dla wielu dziwne –
ujemne, czyli do dodatnich przeciwnie.
Ale jest z tym zbiorem jeszcze jakaś bieda,
bo się ilorazu obliczyć w nim nie da.
Dlatego ułamki wszystkie dolączamy
i do liczb wymiernych nasz zbiór rozszerzamy.
Gdy uporządkować liczb wymiernych ciałem,
widać, że coś jeszcze by nam brakowało.
Między uławkami są jak gdyby dziury.
Nie każdy podzbiór ograniczony od góry
posiada kres górny w liczb wymiernych zbiorze.
Dalsze rozszerzanie jednak pomóc może.
Liczby rzeczywiste więc konstruujemy
i ciało zupełne tak otrzymujemy.
Ale jest w tym ciele jeszcze jedna wada:
nie każdy wielomian pierwiastek posiada.
By temu zaradzić, były wprowadzone
do matematyki liczby zespolone.

Ludolfina

Nota bibliograficzna.

Wiersz powyższy został przez Ludolfinę (nie wiadomo, kto ukrył się pod tym pseudonimem) przekazany Kołu Matematyków Studentów UJ jesienią 1984 roku.

Książka Iana Stewarta „Does God Play Dice?” („Czy Bóg gra w kości?”) jest popularnym wprowadzeniem w matematyczną teorię chaosu. W ciągu pięciu lat od pierwszego wydania (1989) sprzedano około 120 000 egzemplarzy w języku angielskim (co, jak na książkę popularnonaukową, jest wynikiem rewelacyjnym). Książkę przetłumaczono na 13 języków, w tym na polski (gorąco polecamy!).

W jednej z największych krakowskich księgarni książkę umieszczono w dziale: „Religia”. Zobaczył to pewien matematyk i zwrócił ekspedientce uwagę, że książka dotyczy matematyki i powinna się znaleźć gdzie indziej. Na to usłyszał:

– Proszę mi nie gadać bzdur, ja się znam na matematyce, to nie jest żadna książka matematyczna! To jest książka z filozofii religii i powinna tu leżeć, a poza tym ona się stąd bardzo dobrze sprzedaje!

Powtarzające się jedyнки

Liczby naturalne stanowią niewyczerpane źródło rozmaitych ciekawostek, które mogą niespodziewanie przekształcić się w beznadziejnie trudne problemy. Rozpatrzmy na przykład takie oto pytanie: czy z jednakowych cyfr można zbudować liczbę pierwszą? Z wyjątkiem 11, powinny to być liczby zbudowane z nieparzystej liczby jedynek (dlaczego?).

W porządku, ale które zestawy jedynek ułożą się w liczbę pierwszą? I tu zaczyna się problem. Sprawdzając kilka początkowych przykładów 11, 111, 11111, 1111111 przekonujemy się, iż tylko 11 jest liczbą pierwszą. Wykazanie, że ostatnie dwie przytoczone liczby są złożone, wymaga trochę zachodu. Może więc nie ma wśród takich liczb innych liczb pierwszych?

Liczbami jedyńkowymi, bo tak dalej będziemy je nazywać, zainteresował się Johann III Bernoulli, wnuk wielkiego Johanna Bernoulliego. Próbował on sporządzić tablicę liczb jedyńkowych wraz z rozkładem na czynniki pierwsze. Przedstawił te liczby aż do 31 cyfr, niestety, nie dla wszystkich znalazł rozkład, ponadto dla niektórych przedstawienie było błędne. Niemniej jednak podziw budzi gigantyczna praca wykonana przez Johanna III. Nie udało mu się też znaleźć żadnej (różnej od 11) liczby pierwszej wśród liczb jedyńkowych.

Dopiero w 1918 roku stwierdzono, że liczba składająca się z 19 jedynek jest pierwsza. Jedenaście lat później okazało się, że 23 jedynek układają się w liczbę pierwszą. Następną jedyńkowa liczba pierwsza ma już 317 cyfr i została znaleziona w roku 1978. Kolejną liczbą jedyńkową, podejrzaną o bycie pierwszą, była składająca się z 1031 jedynek; w 1985 roku zweryfikowano to pozytywnie (chyba ostatecznie). I to wszystko. Więcej pierwszych liczb jedyńkowych nie znamy. Nie wiadomo też, czy jest ich nieskończenie wiele, może ktoś kiedyś znajdzie największą.

Istnieje pewien związek między liczbami jedyńkowymi a uławkami okresowymi. Zależności takie zauważył już Johann III tworząc tablicę okresów dla rozwinięć dziesiętnych odwrotności niektórych liczb pierwszych. Czytelnikom zostawiamy do udowodnienia nietrudne twierdzenie.

Jeśli liczba p nie jest podzielna przez 2 i 5, to można znaleźć liczbę jedyńkową podzielną przez p .

Nieco trudniej dowodzi się następującego faktu:

Jeżeli liczba naturalna p nie jest podzielna przez 2, 3 i 5, to długość okresu rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{1}{p}$ jest równa liczbie jedynek w pierwszej liczbie jedyńkowej podzielnej przez p .

W języku angielskim liczby jedyńkowe noszą krótką nazwę „repunits”, jest to zbitka słów „repeated units” (powtarzana jedynka). W języku polskim nie ma na określenie tych liczb zgrabnego terminu. Może Czytelnicy zaproponują coś ciekawego?

Z.P.