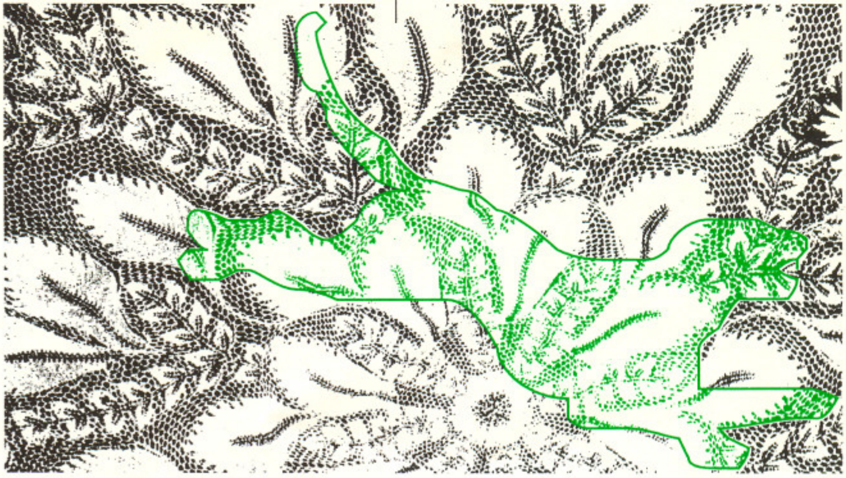
delta
$h=6{,}63\cdot10^{-34}$ J·s $\pi=3{,}141592...$



SPIS TREŚCI

NUMERU 7(266)

W następnym numerze:

Sport a fizyka i matematyka

Okładkę i ilustracje wykonał
Krzysztof BIESAGA

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

Wybór artykułów z *Delty* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem
http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TEX wykonała Redakcja

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1996 roku wynosi 2 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru w 1996 r. wynosi 4 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:
   – a) jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;
   – b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnosić na konto „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 370044-16551-2700-1-06 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8^{00} – 14^{00};
   dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:
   do 5 XII na I kwartał roku następnego,
   do 5 III na II kwartał,
   do 5 VI na III kwartał,
   do 5 IX na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 wewn. 2442, 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł, 20 000 zł

Co to są funkcje tworzące?

Włodzimierz BIELIŃSKI

Dziwne są drogi ludzkich poszukiwań. Rozszerzamy swoją wiedzę na dany temat, badamy go długo i dokładnie. W końcu stwierdzamy, że chyba już nic więcej nie osiągniemy... i wtedy przychodzi nam z pomocą jakaś zupełnie inna, pozornie nie związana z badaną przez nas, dziedzina. W kombinatoryce taką niezwykłą pomocą są właśnie funkcje tworzące – narzędzie rodem z analizy matematycznej.

Funkcją tworzącą dla ciągu $A = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ nazywamy funkcję zmiennej x daną wzorem $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Na funkcjach tworzących można wykonywać różne operacje, np. jeśli $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, to

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n;$$

$$c \cdot A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c a_n x^n;$$

$$A(x)B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{gdzie } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k};$$

$$A'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n .$$

Oczywiście, wszystkie powyższe działania są wykonalne tylko wtedy, gdy szeregi reprezentujące funkcje $A(x)$ i $B(x)$ są zbieżne w pewnym otoczeniu zera. W przeciwnym przypadku trudno w ogóle mówić o funkcjach. W naszych zastosowaniach nie będziemy jednak sprawdzać zbieżności szeregów. Okazuje się bowiem, że jeśli interesują nas tylko współczynniki, to możemy traktować $A(x)$ i $B(x)$ jako tzw. *szeregi formalne*.

Czasem funkcję tworzącą danego ciągu można bez trudu opisać w prostszy sposób korzystając z określonych wyżej działań i znając szereg geometryczny oraz dwumian Newtona. Oto przykłady. Jeśli ciąg a_n jest geometryczny, $a_n = aq^n$, to $A(x) = a\sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n = \frac{a}{1-qx}$. Jeśli $a_n = n$, to $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$. Jeśli wreszcie $a_n = \binom{m}{n}$ – umawiamy się, że $\binom{m}{n} = 0$ dla $n > m$ – to wtedy $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n = \sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n = (1+x)^m$.

Nieco innego podejścia wymagają funkcje tworzące ciągów określonych rekurencyjnie, takich jak np. liczby Fibonacciego ($F_0 = F_1 = 1$, oraz $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geq 2$) czy liczby Catalana ($c_0 = 0$, $c_1 = 1$, i $c_n = \sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}$ dla $n \geq 2$).

Liczby Catalana pojawiają się w kilku zagadnieniach kombinatorycznych, na pozór ze sobą nie powiązanych. Więcej o tym – w *Delcie* za cztery miesiące.

Nietrudno zauważyć, że dla liczb Fibonacciego mamy

$$xF(x) = F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + \ldots,$$

$$x^2 F(x) = F_0 x^2 + F_1 x^3 + \ldots .$$

Co (nie) istnieje w fizyce

Krzysztof REJMER

– Do was mówię, hej paladynie! – powtórzył Karol Wielki. – Jakże to być może, byście nie ukazali twarzy swemu królowi?

Głos, wydostający się spod dolnej przyłbicy, zabrzmiał teraz czysto i mocno.

– Albowiem nie istnieję, sire.

– A to dopiero! – wykrzyknął cesarz. – Teraz mamy więc w wojsku jeszcze i rycerza, który nie istnieje! Pokażcie no się trochę.

Agilulf zdawał się wahać przez krótką chwilę, po czym zdecydowanym, choć powolnym ruchem uniósł przyłbicę. Hełm był pusty. Wewnątrz białej zbroi z tęczowym pióropuszem nie było nikogo. – No, no, a to dziwy! – rzekł Karol Wielki. – I jakże to potraficie służyć, skoro was nie ma?

– Siłą woli i wiarą w naszą świętą sprawę!

– A jakże, a jakże, dobrze mówicie; tak się spełnia swój obowiązek. Jak na kogoś, kto nie istnieje, to zuch z was rycerzu!

Italo Calvino
„Rycerz nieistniejący"
tłum. Barbara Sieroszewska

Problem istnienia lub nieistnienia jest w fizyce i innych naukach przyrodniczych bardzo subtelny. Bo cóż to znaczy istnieć? Jakie kryterium jest decydujące? Przede wszystkim trzeba odpowiedzieć na pytanie, co bada fizyka: otaczający nas świat czy też raczej jego modele. W przypadku eksperymentu sprawa wydaje się na pozór prosta – badamy rzeczywiste obiekty istniejące w przyrodzie. Ale czy na pewno? Badanie elektronów zakłada ich istnienie. W większości przypadków eksperymentator tak naprawdę sprawdza poprawność przyjętego modelu, więc choć związek z jakąś niezależną od nas rzeczywistością wydaje się oczywisty, to jednak zarówno teoretyk, jak i eksperymentator zajmują się raczej modelami rzeczywistości. Nawet przy skrajnie realistycznej postawie nigdy nie można wykluczyć, że ten sam zakres zjawisk może zostać wytłumaczony w ramach całkiem różnych modeli.

To, oczywiście, nie oznacza, że problem istnienia lub nieistnienia wygląda w fizyce tak samo jak w matematyce. Matematyka nie interesuje to (a przynajmniej nie musi), czy pojęciom, którymi się zajmuje, odpowiada jakaś inna rzeczywistość.

Tymczasem fizyk jest zmuszony odrzucić nawet najpiękniejszą i logicznie spójną teorię, jeśli pozostaje ona w rażącej sprzeczności z doświadczeniem. A zatem problem istnienia sprowadza się do użyteczności pojęć zastosowanych do opisu przyrody, a także do tego, czy są one konieczne (może się okazać, że to samo można wytłumaczyć inaczej, na przykład prościej). Pogląd na istnienie lub nieistnienie jakiegoś obiektu w fizyce jest zmienny historycznie ze względu na gromadzenie się wciąż nowych faktów, doskonalenie techniki doświadczalnej czy też gwałtowną zmianę paradygmatu, co wprawdzie niezbyt często, ale także się zdarza. Pamiętajmy również i o tym, że najczęściej nowa teoria zawiera w sobie starą jako pewien przypadek graniczny, nie tyle odrzuca ją, ile ogranicza zakres stosowalności. Całkowite odrzucenie jest raczej rzadkością.

O nieistnieniu można mówić w fizyce na kilku różnych poziomach. Chętnie posługujemy się takimi pojęciami jak gaz doskonały, ciało doskonale czarne, ciało sztywne, punkt materialny, ciecz nieściśliwa czy idealny kryształ, choć w przyrodzie nie istnieje nic, co by im odpowiadało w ścisłym znaczeniu; rzeczywiste obiekty zaledwie przypominają je lepiej lub gorzej i to w zależności od warunków doświadczenia. A oto inny aspekt tytułowego pytania: używamy z jednej strony takich pojęć jak atom i kryształ, z drugiej takich jak ciepło, energia i entropia. Pierwsze dwa mają inny status niż pozostałe trzy. Atom i kryształ to składniki materii, energia i entropia istnieją w inny, bardziej abstrakcyjny sposób niż tamte dwa. Możliwa jest „zmiana kategorii", na przykład przez długi czas wyobrażano sobie, że ciepło jest rodzajem substancji zawartej w ciałach, dziś wiemy, że jest to jeden ze sposobów przekazywania energii, a więc należy do tej drugiej, bardziej abstrakcyjnej kategorii. Tak więc choć ciepło nie istnieje jako substancja, to jednak istnieje jako forma przepływu energii.

Z punktu widzenia użyteczności możemy podzielić „nieistniejące byty fizyki" na dwie grupy: te, które „zanieistniały" i te, które nie zaistniały. Neologizm, którym się posłużyłem, jest chyba dość czytelny. Chodzi tu o pojęcia, których istnienie zostało kiedyś powszechnie zaakceptowane i miało moc wyjaśniania jakiegoś zjawiska przyrody, później jednak zakwestionowano je i odrzucono ich istnienie, na ogół dlatego, że nie wytrzymały konfrontacji z nowymi faktami doświadczalnymi.

Dodając do jedynki sumę prawych stron powyższych równości otrzymujemy

$$1 + xF(x) + x^2F(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(F_{n-1} + F_{n-2})x^n = F(x)\,.$$

Stąd $F(x) = 1/(1 - x - x^2)$. Dla ciągu liczb Catalana mamy

$$\begin{aligned} C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}\right)x^n + c_0 + c_1 x = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} c_i c_{n-i}\right)x^n + c_0 + c_1 x = \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)^2 + x = C^2(x) + x\,, \end{aligned}$$

czyli $C^2(x) - C(x) + x = 0$. Zatem $C(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}$. Jaki znak należy wstawić w liczniku, okaże się już niedługo.

Funkcje tworzące są interesujące i ważne dzięki swym magicznym możliwościom. Poznamy teraz kilka z nich.

1. Wyznaczymy nierekurencyjne wzory na F_n i c_n.

Wiadomo, że jeśli funkcja $f(x)$ rozwija się w szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, to $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. Nie zawsze jest to skuteczna metoda znajdowania wzoru na a_n, gdyż czasem trudno jest znaleźć ogólny wzór na n-tą pochodną funkcji f w zerze.

Aby znaleźć jawny wzór na liczby Catalana, rozwiniemy w szereg potęgowy funkcję $g(x) = \sqrt{1-4x}$. Po kilku pierwszych różniczkowaniach zauważamy, że $g^{(n)}(0) = -\,2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)$ (puryści zechcą ten fakt udowodnić). A ponieważ liczby Catalana są dodatnie, to odpowiedni we wzorze $C(x) = \frac{1\pm g(x)}{2}$ jest znak minus. Zatem $C^{(n)}(0) = -\frac{g^{(n)}(0)}{2} = 2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)$. Stąd, po prostym rachunku, mamy

$$c_n = \frac{C^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\,.$$

Na szczęście wzór na F_n można wyprowadzić przy użyciu prostszych środków. Sprytny Czytelnik łatwo poradzi sobie sam z nietrudnymi obliczeniami, rozkładając wymierną funkcję $F(x)$ na ułamki proste. Gotowy wynik (tzw. wzór Bineta) wygląda tak:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

2. Odkryjemy na nowo proste fakty kombinatoryczne.

Niech $A_n(x) = (1+x)^n$. Wtedy $A_n(x) = (1+x)A_{n-1}(x) = A_{n-1}(x) + xA_{n-1}(x)$. Porównując współczynniki przy x^k po obu stronach, mamy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Obliczając wartości wielomianu $A_n(x)$ dla $x = 1$ i $x = -1$, otrzymujemy znane tożsamości

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n\,,$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0\,.$$

W podobny sposób można znaleźć rozmaite własności liczb Catalana. Na przykład, znając rozwinięcia w szereg Maclaurina funkcji $f(x) = \sqrt{1+4x}$ i $h(x) = 1/f(x)$, można (porównując współczynniki przy x^n po obu stronach tożsamości $h(x)f(x) = 1$) udowodnić, że

$$\sum_{\ell=1}^{k} \ell c_\ell c_{k-\ell+1} = \frac{k+1}{2} c_{k+1}\,.$$

Możliwości tworzenia nowych wzorów przez proste porównywanie współczynników jest jeszcze wiele. Zainteresowanym proponujemy dalsze eksperymenty (warto zwrócić uwagę na rozwinięcie funkcji arcsin).

3. Obliczymy pewne ciekawe prawdopodobieństwo.

Wyobraźmy sobie, że przed kinem, w którym bilety są po 5 zł, ustawia się kolejka. Prawdopodobieństwo tego, że dowolna osoba ma monetę 5 zł, jest równe p, a banknot 10 zł – równe $(1-p)$. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą numer osoby, na której kolejka po raz pierwszy się zablokuje (wskutek niemożności wydania reszty). Można wykazać, że $P(X = 2n+1) = c_{n+1}p^n(1-p)^{n+1}$.

W artykule „O kolejkach” napisanym wspólnie z K. Parolem (zob. *Delta* 10/1995) udowodniliśmy, że liczba dobrych (tzn. nie powodujących zatrzymania sprzedaży biletów) kolejek długości $2n$, w których n osób ma pięciozłotówki i n osób dziesięciozłotówki, jest równa c_{n+1}. Zdarzenie $\{X = 2n+1\}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsze $2n$ osób tworzy jedną z owych c_{n+1} dobrych kolejek (dzieje się to z prawdopodobieństwem $c_{n+1}p^n(1-p)^n$), a na miejscu $(2n+1)$-szym znajdzie się osoba z dziesięciozłotówką.

Intrygująca jest suma $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(X = 2n+1)$. Jeśli kolejka „musi” się w którymś momencie zatrzymać, to powinno być $S = 1$ (zmienna X nie przyjmuje wartości parzystych). Obliczymy sumę S wykorzystując funkcje tworzące. Ponieważ $c_0 = 0$, więc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1}x^n = C(x)/x = (1-\sqrt{1-4x})/2x$. Wstawmy do tej równości $x = p(1-p)$ i pomnóżmy obie strony przez $(1-p)$. Otrzymamy wtedy

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}p^n(1-p)^{n+1} = \frac{1-|1-2p|}{2p}\,.$$

Zatem dla $p \le \frac{1}{2}$, zgodnie z intuicją, jest $S = 1$. Jednak dla $p > \frac{1}{2}$ mamy $S = \frac{1}{p} - 1 < 1$, co oznacza, że kolejka może się nigdy nie zatrzymać. Prawdopodobieństwem takiego szczęśliwego przypadku jest $1 - S$.

Dla $p < \frac{1}{2}$ możemy obliczyć wartość oczekiwaną EX numeru osoby, na której kolejka się zatrzyma. We wzorze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{n+1}x^n = (1-\sqrt{1-4x})/2x$ wstawmy $x = a^2$, pomnóżmy obie strony przez a, zróżniczkujmy względem a i na koniec wstawmy z powrotem $a^2 = x$. Dostaniemy równość

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)c_{n+1}x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right).$$

Stąd, biorąc $x = p(1-p)$, otrzymamy bez kłopotu $EX = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)c_{n+1}p^n(1-p)^{n+1} = 1/(1-2p)$. Dla $p \to \left(\frac{1}{2}\right)^-$ mamy $EX \to \infty$, czyli blokady kolejki zdarzają się teoretycznie rzadko, co jest chyba faktem pocieszającym.

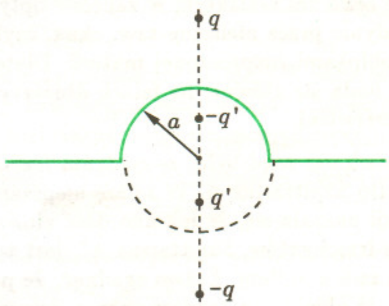
Czytelnik Wnikliwy zechce sprawdzić, że szeregi wyrażające S i EX są zbieżne dla interesujących nas wartości zmiennej $x = p(1-p)$, $p \in (0,1)$.

I tym optymistycznym akcentem pragnęlibyśmy zakończyć rozważania na temat funkcji tworzących z nadzieją, że przydadzą się one Czytelnikom w ich własnych poszukiwaniach.

Zostały one zastąpione innymi pojęciami, które lepiej nadawały się do opisu starych i nowych zjawisk. Do tej grupy należą: flogiston, cieplik, eter, deferenty i epicykle. Druga grupa to obiekty, których istnienia dowodzono bezskutecznie, choć z bardzo różnych przyczyn spodziewano się ich odkrycia. Niektóre z nich (zgodnie z obecnym stanem wiedzy) mogłyby istnieć (na przykład monopole magnetyczne lub tachiony), inne nie istnieją z całą pewnością; w tej grupie mieszczą się: perpetuum mobile (pierwszego i drugiego rodzaju) i słynny kamień filozoficzny. W przypadku obiektów, które mogłyby istnieć, lecz ich nie ma, nigdy nie będziemy mieć gwarancji, że kiedyś, w przyszłości ich istnienie nie zostanie jednak doświadczalnie dowiedzione.

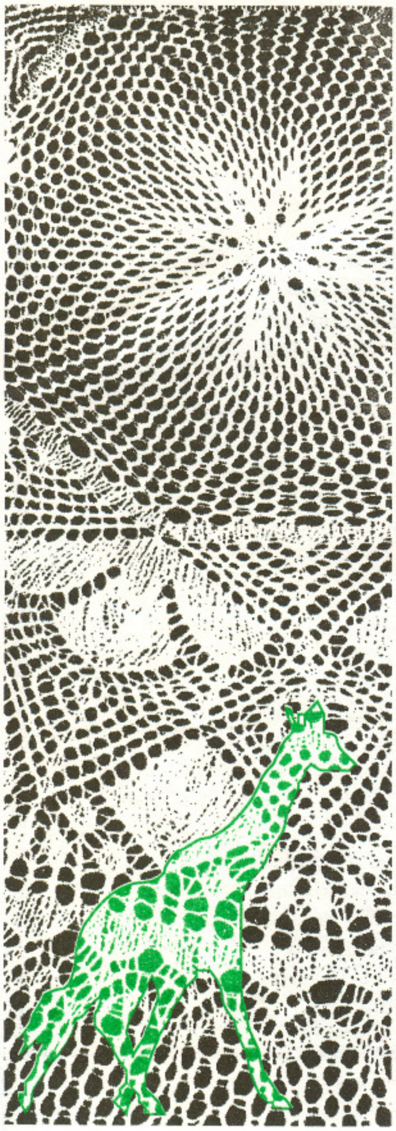
W fizyce, tak jak w każdej ludzkiej działalności, zdarzają się także pomyłki i oszustwa (na przykład promienie N Blondlota, subelektrony czy telepatia). Jednak nauka (ta przez duże N) jest krytyczna w stosunku do samej siebie (czego nie można powiedzieć o wielu innych dziedzinach aktywności człowieka). Tym właśnie nauka różni się od paranauki, o czym niedawno w naszej ankiecie pisał Jerzy Kuczyński (*Delta* 1/1996). Tego rodzaju artefakty są więc szybko eliminowane i dlatego chyba nie warto tu o nich wspominać.

Rozwiązanie zadania F 432. Zadanie rozwiążemy metodą obrazów. Umieszczając ładunek $-q$ na osi symetrii po przeciwnej stronie płaszczyzny oraz ładunki $-q'$ i q', gdzie $q' = \frac{qa}{x}$, w punktach odległych o $x' = \frac{a^2}{x}$ tak, jak to pokazuje rysunek, spełniamy warunek znikania potencjału na powierzchni przewodnika.



Siła oddziaływania ładunku q z przewodnikiem jest równa sile jego oddziaływania z trzema fikcyjnymi ładunkami: $-q$, q' i $-q'$. Jest ona równa

$$F = q^2\left[\frac{xa}{(x^2-a^2)^2} - \frac{xa}{(x^2+a^2)^2} + \frac{1}{4x^2}\right].$$



Mme Marie Smoluchowski

W *Delcie* 12/1995 przeczytałem, jak to przed stu laty: „Dynamiczne panienki z Europy Wschodniej akurat w nauce wiodły prym". Przypomniało mi to o zabawnym nieporozumieniu, opisanym w biografii Mariana Smoluchowskiego:

„... gdy prace Smoluchowskiego weszły do wykładów uniwersyteckich, profesorowie paryscy, zarówno Langevin, jak i Perrin, sądzili, że omawiają prace kobiety, Mme Marie Smoluchowski. Osoba Marii Skłodowskiej, wtedy już sławnej, przyzwyczaiła, jak widać, Francuzów do myśli, że fizycy polscy są płci żeńskiej. Stefan Dąbrowski (późniejszy profesor w Poznaniu), który wówczas pracował u Perrina, miał okazję rozwiać ten mit. Oto jego list do Smoluchowskiego:

Paryż, 8 III 1909 r.

„Zanim obszerniej do Profesora napiszę, muszę go poinformować, iż musiałem tu pod przysięgą złożyć świadectwo, że Profesor należy do płci męskiej. Mianowicie asystent prof. Langevina mówił mi, że o pani Marie Smol. jego szef wykładał w Collège de France w zeszłym roku. Dziś przyznał mi się Perrin, że myślał to samo i tylko moja odpowiedź, w której wyraźnie (mimo woli zresztą) określiłem płeć Profesora, wyprowadziła go z błędu. Fatalna konfuzja wydała się w tych dniach i prof. Langevin, jak i inni dobrze się śmieją z tego. Mimo to Mme Sm. żyje w wyobraźni i pamięci słuchaczy. W jaki chytry sposób Profesor rozszerza za granicą kult dla kobiety polskiej! Muszę jako antyfeminista zaznaczyć, że gdybym tylko tyle zrobił za granicą co to sprostowanie, wyjazd mój już by się opłacił."

[Armin Teske: *Marian Smoluchowski, życie i twórczość* – PWN 1955, s. 19–20.]

Z prof. Stefanem Dąbrowskim spotkałem się w czasie wojny, przepisywałem na maszynie jego prace i pomagałem w obliczeniach chemicznych. Kiedyś powiedziałem, że podobały mi się prace Perrina oceniające rozmiary atomów z pomiarów rozwarstwiania się emulsji gumiguty. Wówczas z ożywieniem powiedział: „Przecież to ja u Perrina ucierałem tę gumigutę". Zrobiło to na mnie wielkie wrażenie. Myślałem – młody – że wspominam zamierzchłe czasy, gdy wysilano się, by udowodnić istnienie atomów, a oto rozmawiałem z człowiekiem, który w tym uczestniczył. Mówiliśmy wówczas o pracach sprzed 34 lat, a teraz wspominam tę – jak gdyby niedawną rozmowę – po 52 latach. Jakże zmieniają się subiektywne miary czasu.

Mieczysław KARPINIEC

Patrz w niebo

Badania centralnych obszarów Galaktyki są wyjątkowo trudne nie z powodu braku środków technicznych. To materia międzygwiazdowa zalegająca w płaszczyźnie Drogi Mlecznej skutecznie utrudnia obserwacje tego interesującego fragmentu naszego układu gwiazdowego. Tradycyjne teleskopy są tu niemal całkiem nieprzydatne – okolice centrum Galaktyki w zakresie optycznym widać jedynie przez nieliczne tzw. okna, czyli dziury między obłokami rozproszonej materii. Dlatego samo centrum bada się głównie na falach dłuższych: radiowych i w podczerwieni.

Od lat wiadomo więc było, że centrum Galaktyki to radioźródło Sagittarius A. W miarę ulepszania metod obserwacji okazało się, że ma ono dość złożoną budowę, a jeden z fragmentów, Sagittarius A*, jest wyjątkowo zwartym radioźródłem. Łatwo zgadnąć, że powstała hipoteza, iż obiekt ten zawiera czarną dziurę, za czym przemawiało np. zaobserwowanie gwałtownych ruchów materii w jego okolicy.

Około trzech lat temu dwie grupy obserwatorów znalazły niezależnie podczerwony odpowiednik centralnego radioźródła. Przyczyniły się do tego przynajmniej trzy osiągnięcia techniczne: opanowanie zakresu podczerwonego, powszechne użycie kamer CCD i zastosowanie tzw. optyki adaptacyjnej (oznacza to teleskop z elastycznym lustrem, tak deformowanym na bieżąco, aby skompensować zniekształcenia obrazu powodowane przez ziemską atmosferę). Jeszcze inna grupa obserwatorów, wykonawszy obserwacje spektroskopowe okolic radioźródła, wykryła dopplerowskie przesunięcia widm świadczące o tym, że gwiazdy w odległości 0,2 pc od domniemanego centrum poruszają się 100 razy szybciej niż w odległości 0,4 pc (żadne wcześniejsze obserwacje nie sięgały tak blisko centrum Galaktyki). Tak gwałtowny wzrost prędkości z maleniem odległości jest, według mechaniki klasycznej, wykluczony, może zaś być spowodowany obecnością czarnej dziury o masie rzędu miliona mas Słońca, a więc efektami mechaniki relatywistycznej.

Co prawda, nadal słyszy się głosy, że te wszystkie obserwacje nie wykluczają obecności w centrum Galaktyki zwyczajnej, a tylko może wyjątkowo gęstej gromady gwiazd. Wydaje się jednak, że są to głosy odosobnione i że nasza Galaktyka, zaliczająca się do „normalnych", jest jednak galaktyką trochę aktywną.

Tomasz KWAST

Neutrony w badaniach materii skondensowanej

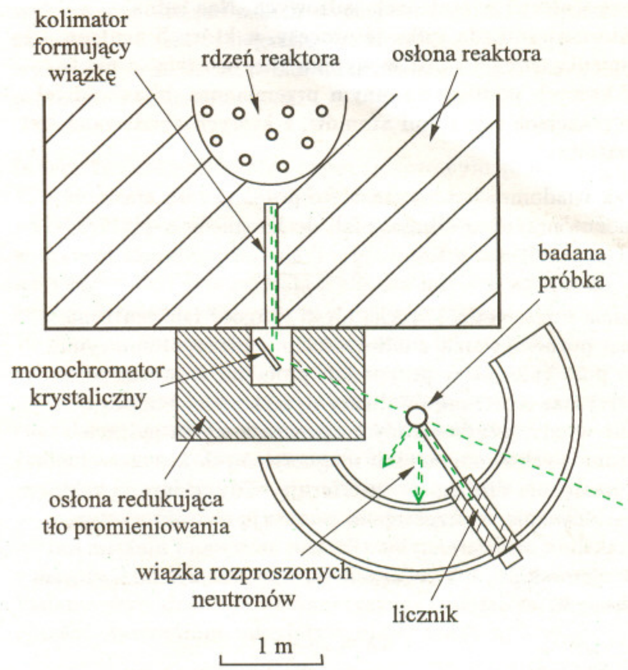
Izabela SOSNOWSKA

Do badania wewnętrznej struktury materii stosuje się wiele różnych rodzajów promieniowania. Poddany testowi materiał „oświetlany" jest promieniowaniem o określonej energii (długości fali), a następnie badana jest absorpcja np. z wykorzystaniem efektu Mössbauera (rezonansowe pochłanianie promieni γ pochodzących z jąder atomów znajdujących się w sieci krystalicznej) lub rozpraszanie promieniowania (na przykład promieni X lub elektronów). Informację o budowie i oddziaływaniach międzyatomowych czerpiemy z pomiaru rozkładu kątowego rozproszonego promieniowania i jego energii.

Za początek nowoczesnych badań strukturalnych uważa się rok 1914, w którym Max von Laue otrzymał Nagrodę Nobla za zastosowanie dyfrakcji promieni X do badania atomowej struktury kryształów. Promienie X oddziałują z elektronami atomów i z tego powodu informacja zawarta w kątowych rozkładach rozproszonego promieniowania X dotyczy rozkładu gęstości elektronów w materii. Innym rodzajem promieniowania przydatnym do badania struktury materii okazały się neutrony powolne (tzn. neutrony o energiach 1–250 meV). Neutrony oddziałują z jądrami i momentami magnetycznymi atomów. W 1994 roku, a więc w 80 lat po Maxie von Laue, Nagrodę Nobla za pionierski wkład w rozwój metody rozpraszania neutronów oraz jej zastosowanie w badaniach materii skondensowanej otrzymali: Bertram N. Brockhouse z Uniwersytetu McMaster w Hamilton (Kanada) i Clifford G. Shull z Massachusets Institute of Technology w Cambridge (USA).

Neutrony i protony są składnikami jąder atomowych. Swobodny neutron jest cząstką nietrwałą, której czas życia wynosi 925 ± 11 s. Aby neutrony mogły zostać użyte w badaniach fazy skondensowanej jako promieniowanie sondujące, konieczne jest istnienie źródeł neutronów: reaktorów jądrowych lub akceleratorów. Pierwszy reaktor został zbudowany w 1942 roku w USA pod kierunkiem Enrico Fermiego, obecnie na świecie pracuje ich bardzo wiele. W Polsce aktualnie działa jeden reaktor MARIA w Świerku pod Warszawą; dtugi reaktor EWA (działający od 1959 roku) w minionym roku został zamknięty. Neutrony szybkie, powstające w wyniku rozszczepienia jąder uranu, są spowalniane w moderatorze, a następnie wyprowadzane z reaktora specjalnymi kanałami, kierującymi je do urządzeń pomiarowych. Spowalniaczami najczęściej są: woda, ciężka woda, parafina lub grafit. Urządzenia, za pomocą których bada się rozkład kątowy rozproszonych neutronów, nazywane są **dyfraktometrami neutronów**.

Urządzenia pozwalające badać nie tylko rozkład kątowy, ale także energię rozproszonych neutronów, noszą nazwę **spektrometrów neutronów**. Energetyczny rozkład neutronów wychodzących z kanałów reaktora i używanych do badań zależy głównie od rodzaju spowalniacza.



Rys. 1. Schemat dyfraktometru neutronów. Wiązka neutronów wychodząca z reaktora pada na kryształ (tzw. monochromator), na którym następuje „odbicie" neutronów o długości fali λ zgodnie ze wzorem Braggów (zobacz str. 6). Następnie monochromatyczna wiązka neutronów pada na badaną próbkę. Rozproszone na próbce neutrony są rejestrowane przez detektor obracający się wokół osi przechodzącej przez środek próbki. Można uzyskać tak zwane neutrony gorące o energiach rzędu 0,5 eV, termiczne o energiach około 40 meV lub zimne o energii rzędu 5 meV. Rodzaj neutronów użytych do badań zależy od badanego procesu.

Średnia energia wzbudzeń sieci krystalicznej jest rzędu 1–100 meV, dlatego właśnie neutrony, których energie są tego samego rzędu, są szczególnie przydatne do badań tych wzbudzeń. Oprócz reaktorów stacjonarnych istnieją również impulsowe źródła neutronów. Do takich źródeł należy reaktor impulsowy w Dubnej oraz źródła spallacyjne w Wielkiej Brytanii, USA i Japonii. W źródłach spallacyjnych neutrony powstają podczas zderzeń wysokoenergetycznych protonów (o energii około 1 GeV) z jądrami pierwiastków ciężkich, takich jak wolfram lub uran.

Neutrony powolne rozpraszają się na jądrach atomów (jonów), z których zbudowana jest materia; dlatego ten typ rozpraszania nosi nazwę rozpraszania jądrowego.

W tabeli przytoczono amplitudy rozpraszania neutronów powolnych dla kilku jąder atomowych.

Atom	Amplituda rozpraszania neutronów b[10^{-12} cm]
^{1}H	– 0,38
$^{2}H = {}^{2}D$	0,67
^{16}O	0,58

Jak widać mogą one być zarówno dodatnie, jak i ujemne. Izotopy tego samego pierwiastka (np. wodór i deuter) mają różne amplitudy rozpraszania neutronów.

Szczególną cechą rozpraszania neutronów jest niezależność amplitudy od kąta rozpraszania. W odróżnieniu od promieni X w przypadku neutronów amplituda rozpraszania nie rośnie monotonicznie wraz z liczbą porządkową pierwiastka. Neutrony mogą również uczestniczyć w reakcjach jądrowych. Nas jednak interesować będą tylko te procesy, w których neutron zmienia energię i pęd w wyniku rozpraszania, a nie te, w których podlega on innym przemianom, biorąc udział w reakcjach z jądrami atomów, z których zbudowana jest materia.

Jak wiadomo, każdej cząstce o prędkości v i masie m można przypisać długość fali de Broglie'a

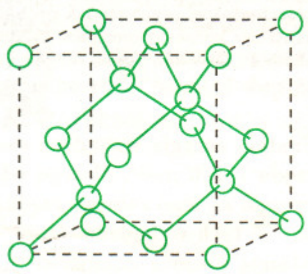
$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

gdzie h jest stałą Plancka. Jeśli długość fali neutronu jest porównywalna z odległościami międzyatomowymi, to podobnie jak w przypadku promieni X można otrzymać neutronowe obrazy dyfrakcyjne. Powstają one wtedy, gdy neutrony rozpraszają się na jądrach atomowych i momentach magnetycznych atomów (jonów), a następnie fale ugięte interferują. Gdy atomy są rozłożone periodycznie w przestrzeni, powstają charakterystyczne maksima interferencyjne. Są one nazywane maksimami braggowskimi; ich położenie kątowe jest opisane wzorem Braggów

$$n\lambda = 2d \sin\Theta,$$

gdzie 2Θ jest kątem rozpraszania, d – odległością międzypłaszczyznową płaszczyzn krystalicznych, a n – rzędem odbicia. Badanie tego rozpraszania pozwala na określenie przestrzennego uporządkowania jąder atomów, z których zbudowana jest badana próbka, czyli na określenie struktury atomowej.

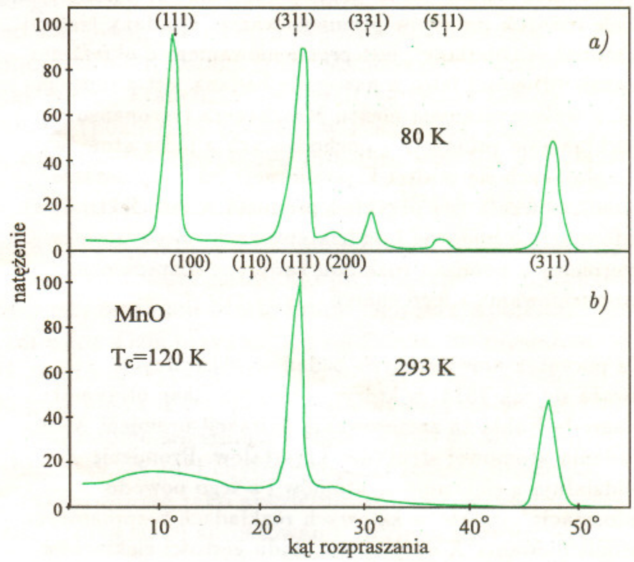
Przykładowo na rys. 2 przedstawiono model struktury krzemu Si. Dzięki temu, że neutron ma moment magnetyczny, który oddziałuje z momentami magnetycznymi atomów (jonów) materii, możemy użyć neutronów do badania struktury magnetycznej.



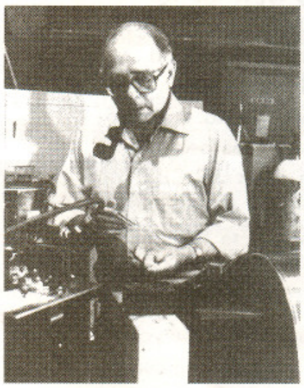
Rys. 2.

Określenie tej struktury polega na wyznaczeniu wielkości, kierunków i zwrotów momentów magnetycznych wszystkich jonów tworzących kryształ. Na przykład tlenek manganu MnO jest antyferromagnetykiem; oznacza to, że istnieją w nim dwie podsieci o przeciwnych magnetyzacjach. Jonem magnetycznym jest jon manganu. Na rysunku 5 przedstawiono uporządkowanie momentów magnetycznych jonów manganu w MnO. C.G. Schull w jednej ze swoich prac określił strukturę MnO, dzięki czemu po raz pierwszy doświadczalnie wyznaczył strukturę antyferromagnetyka, potwierdzając teorię Néela, przewidującą jego istnienie.

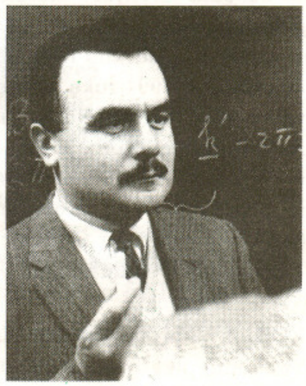
Na rysunku 3a przedstawiony jest neutronogram polikrystalicznego tlenku manganu, widać na nim maksima interferencyjne. Badając ich położenie i natężenie możemy określić zarówno rozmieszczenie jąder atomów w krysztale, jak też ich średnie odchylenia od położeń równowagi (w wyniku drgań termicznych). Otrzymując neutronogramy substancji w różnych warunkach fizycznych, można śledzić zmiany wywołane działaniem czynników zewnętrznych, takich jak temperatura, pole magnetyczne czy elektryczne. Rysunek 3b pokazuje neutronogram polikrystalicznego tlenku manganu powyżej temperatury przejścia fazowego, w którym następuje zanik uporządkowania momentów magnetycznych atomów.



Rys. 3.



Clifford G. Shull



Bertram N. Brockhouse

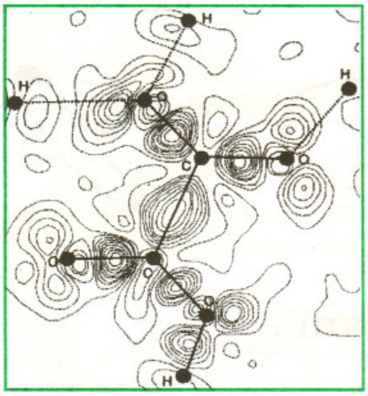
Nagrody Nobla przyznane za badania strukturalne prowadzone metodami dyfrakcji

Rok	Laureaci	Za co przyznano nagrodę
1914	M. von Laue	odkrycie dyfracji promieni X na kryształach (f)
1915	W.H. Bragg W.L. Bragg	analiza struktury krystalicznej za pomocą promieni X (f)
1937	C.J. Davisson G.P. Thomson	eksperymentalne odkrycie dyfrakcji elektronów na krysztale (f)
1962	F.H.C. Crick J.D. Watson M. Wilkins	odkrycie struktury molekularnej DNA (F+M)
1964	D. Crowfort D.M.C. Hodgkin	wyznaczenie za pomocą techniki promieni X struktur ważnych substancji biologicznych (ch)
1985	H.A. Hauptman J. Karle	rozwój metod bezpośrednich stosowanych przy określaniu struktur krystalicznych (ch)
1994	B.N. Brockhouse C.G. Shull	rozwój metody rozpraszania neutronów i zastosowanie jej w badaniach materii skondensowanej (f)

(f) – nagrody w dziedzinie fizyki, (ch) – w dziedzinie chemii, (F+M) – w dziedzinie fizjologii i medycyny.

Temperatura tego przejścia nosi nazwę temperatury Néela. Różnice w obrazie dyfrakcyjnym na obu rysunkach są bardzo wyraźne.

W neutronograficznych badaniach układów biologicznych wykorzystano fakt, że wodór i deuter są inaczej widziane przez neutrony (patrz tabelka). Zastąpienie jonów wodoru jonami deuteru w dużych molekułach organicznych umożliwia badania poszczególnych segmentów tych cząsteczek.


Neutrony widzą inaczej niż promienie X

Rys. 4. Promienie X rozpraszane są przez elektrony atomu, natomiast neutrony – przez jądro atomu. Z tego powodu najłatwiej jest obserwować za pomocą promieni X atomy o wielu elektronach. Trudniejszym obiektem badań jest wodór mający jeden elektron. Dla neutronów natomiast wszystkie atomy są dobrze widoczne. Rysunek przedstawia nałożenie dwóch map dyfrakcyjnych: neutronowej – pokazującej położenia jąder, oraz otrzymanej z dyfrakcji promieni X – pokazującej mapę gęstości elektronowej. Widać wzajemne przesunięcie położeń jąder atomowych w stosunku do mapy gęstości elektronowej obrazującej wiązania chemiczne (według plakatu noblowskiego).

W odróżnieniu od promieni X i elektronów neutrony przez większość substancji są absorbowane tylko w niewielkim stopniu. Z tego powodu absorpcja neutronów stała się metodą diagnostyczną stosowaną do badania dużych obiektów. Prześwietlając je neutronami można wykrywać istniejące w nich wewnętrzne defekty. Technika ta nazywana jest radiografią neutronową. Można ją wykorzystywać do kontrolowania prawidłowości przebiegu procesów technologicznych.

Innym kierunkiem badań, zapoczątkowanym przez Brockhouse'a, jest spektroskopia neutronowa wykorzystująca nieelastyczne rozpraszanie neutronów w materii skondensowanej. Rozpraszaniem nieelastycznym nazywamy taki proces, w którym ma miejsce wymiana energii pomiędzy neutronem a rozpraszającym obiektem. W procesie tym następuje wzbudzenie lub wygaszenie tak zwanego wzbudzenia elementarnego (na przykład fononu). Celem badań spektroskopowych jest wyznaczenie charakterystycznych częstości i pędów wzbudzeń elementarnych; relacje dyspersji fononów są bardzo ważnymi charakterystykami kryształu pozwalającymi na określenie oddziaływań międzyatomowych. Natomiast oddziaływanie momentu magnetycznego neutronu z momentami magnetycznymi atomów (jonów) pozwala na badania wzbudzeń sieci magnetycznej, dzięki czemu można określić wewnętrzne oddziaływania w magnetykach.

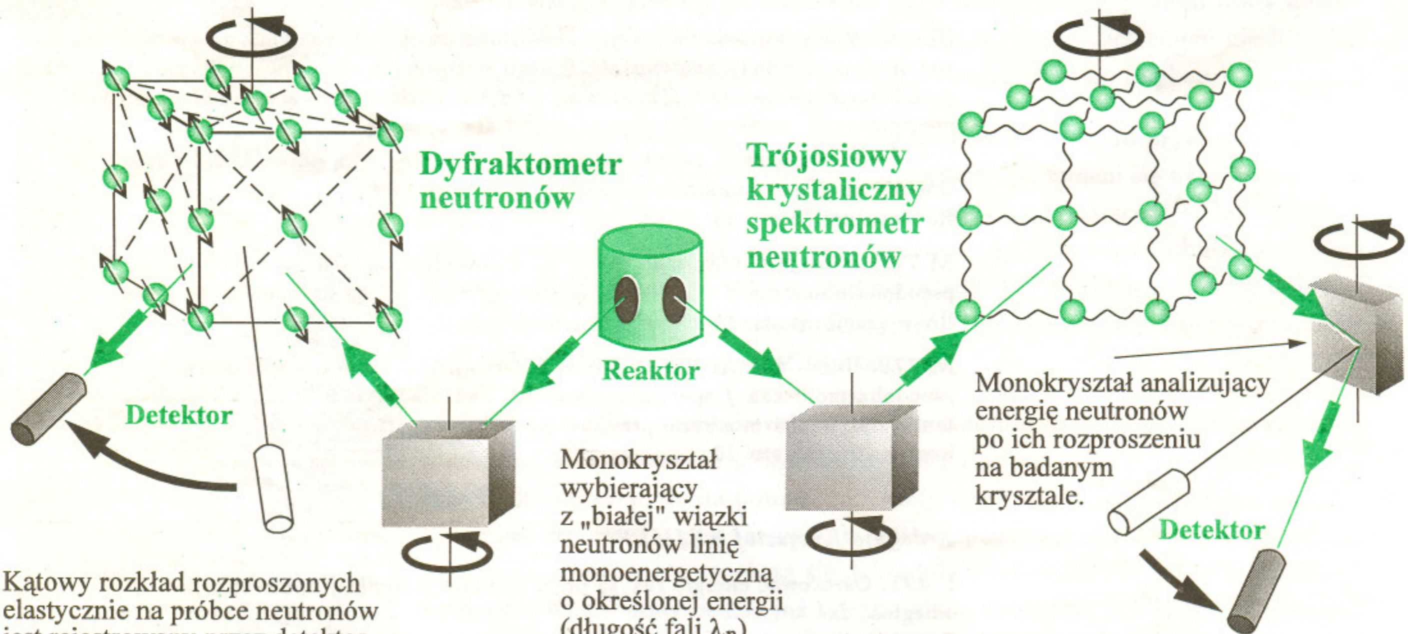
Oddziaływanie neutronów z jądrami i momentami magnetycznymi atomów

Gdzie znajdują się atomy?

Rozpraszanie elastyczne
Neutrony padające na badany kryształ zmieniają swój kierunek nie zmieniając swojej energii.

Co atomy robią?

Rozpraszanie nieelastyczne
Neutrony padające na badany kryształ zmieniają swój kierunek oraz wymieniają z kryształem energię kreując albo anihilując fonony lub magnony.



Kątowy rozkład rozproszonych elastycznie na próbce neutronów jest rejestrowany przez detektor. Otrzymany w ten sposób neutronogram pozwala określić względne położenia atomów oraz wielkości i kierunki ich momentów magnetycznych.

Trójosiowy spektrometr neutronów pozwala mierzyć energię fononów (drgań atomów) i magnonów (fal spinowych). Można również za jego pomocą badać strukturę i dynamikę atomową cieczy.

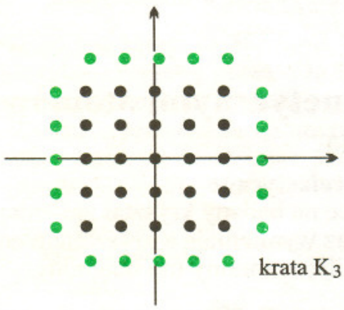
Rys. 5. Na podstawie „Wiedzy i Życia", maj 1995 r.

Neutronografia i spektroskopia neutronowa znalazły szerokie zastosowania w wielu dziedzinach nauk przyrodniczych, począwszy od określania położeń atomów w prostych sieciach krystalicznych, a skończywszy na badaniach skomplikowanych struktur biologicznych. Równie szerokie jest technologiczne zastosowanie tych metod; od badań defektów w masywnych częściach maszyn, aż po subtelne badania w dziedzinie nadprzewodnictwa. Wszystkie te badania są kontynuacją prac Shulla i Brockhausa, z których pierwszy w swych pracach starał się odpowiedzieć na pytanie „gdzie znajdują się atomy” (tzn. jakie są ich wzajemne położenia), a drugi próbował wyjaśnić „co atomy robią” (tj. jak się poruszają).

Obecnie około 3000 osób na świecie pracuje stosując rozpraszanie powolnych neutronów w badaniach fazy skondensowanej. Mają one do dyspozycji wybudowane specjalnie w tym celu źródła neutronów. W Instytucie Laue-Langevin (ILL) w Grenoble we Francji pracuje najlepszy w tej dziedzinie reaktor jądrowy. Najlepszym źródłem spallacyjnym dysponuje Laboratorium Rutherford-Appleton w Wielkiej Brytanii. Nowoczesne dyfraktometry i spektrometry neutronów zainstalowane przy tych źródłach są dostępne dla całej naukowej społeczności świata, w tym także i dla polskich uczonych zajmujących się tą dziedziną.

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ



M 777. Niech N będzie liczbą naturalną. Zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o obu współrzędnych całkowitych o wartości bezwzględnej nie większej niż N, oprócz punktów (N,N), $(-N,N)$, $(N,-N)$, $(-N,-N)$, nazwiemy kratą K_N. O tych punktach kraty, które mają obie współrzędne o wartości bezwzględnej mniejszej niż N, powiemy, że należą do wnętrza kraty W_N. Pozostałe punkty kraty tworzą jej brzeg B_N (patrz rysunek).

Funkcję $f: K_N \to \mathbf{R}$ nazwiemy *pseudoharmoniczną*, jeśli dla dowolnego punktu $(x,y) \in W_N$ zachodzi równość

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\Big(f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1)\Big).$$

(Innymi słowy, wartość funkcji pseudoharmonicznej w dowolnym punkcie wnętrza kraty jest średnią arytmetyczną wartości funkcji w punktach sąsiednich.) Przykładem funkcji pseudoharmonicznej jest $f(x,y) = ax + by + c$, gdzie a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi, a także $f(x,y) = x^2 - y^2$ i $f(x,y) = xy$.

Udowodnić, że funkcja pseudoharmoniczna przyjmuje swą największą i najmniejszą wartość na K_N w punktach należących do brzegu kraty.

Rozwiązanie na str. 13

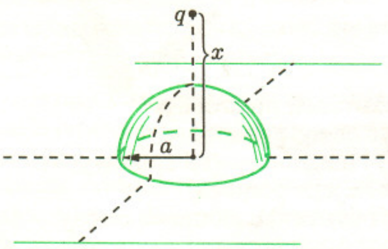
M 778. Dana jest funkcja $g: B_N \to \mathbf{R}$. Udowodnić, że istnieje taka funkcja pseudoharmoniczna $f: K_N \to \mathbf{R}$, że $f(x,y) = g(x,y)$ dla każdego $(x,y) \in B_N$.

Rozwiązanie na str. 15

M 779. Udowodnić, że dla $g: B_N \to \mathbf{R}$ istnieje dokładnie jedna funkcja pseudoharmoniczna f spełniająca warunki zadania **M 778**. Czy istnieją dwie różne funkcje pseudoharmoniczne przyjmujące te same wartości w punktach wnętrza kraty?

Rozwiązanie na str. 16

Redaguje Krzysztof REJMER



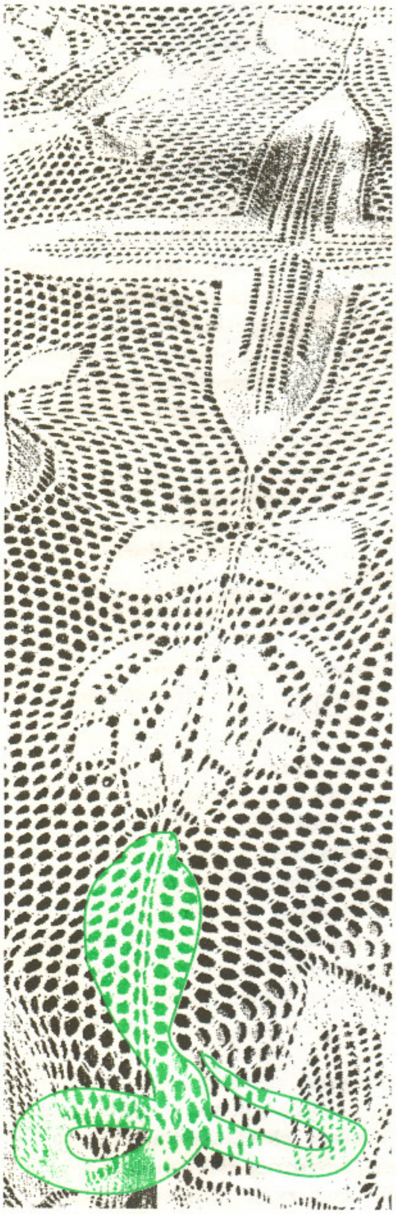
F 431. Oszacować energię zużytą przez samolot o średniej masie m pokonujący odległość L.

Rozwiązanie na str. 16

F 432. Przewodnik, którego potencjał jest równy zeru, ma kształt płaszczyzny z półkolistą wypukłością o promieniu a. Ponad wypukłością w odległości x od płaszczyzny znajduje się ładunek q umieszczony symetrycznie względem przewodnika. Znaleźć siłę przyciągania ładunku i przewodnika.

Rozwiązanie na str. 3

Każdy może się pomylić!



Po jeziorze pływa łódka, a na jej dnie leży kamień. Co stanie się z poziomem wody, jeśli kamień wrzucimy do jeziora?

Intuicja podsuwa natychmiastową odpowiedź: poziom wody podniesie się, ponieważ leżący na dnie jeziora kamień wypiera pewną jej objętość. Jednak jest to odpowiedź błędna, gdyż nie bierze się w niej pod uwagę łódki.

Łódka z kamieniem wypiera wodę, której ciężar jest równy sumie ciężaru łódki i kamienia. Jeśli kamień leży na dnie jeziora, wypiera wodę o objętości tej samej co on, podczas gdy łódka wypiera wodę o tym samym co ona ciężarze. Różnica polega na tym, że poza wodą, mającą ciężar łódki, raz zostaje wyparta woda o ciężarze kamienia, drugi raz o jego objętości. Ta objętość jest większa w pierwszym przypadku, ponieważ gęstość wody jest mniejsza od gęstości kamienia. Tak więc łódka z kamieniem wypiera więcej wody niż pusta łódka i kamień osobno, a zatem po wrzuceniu kamienia do jeziora poziom wody musi się obniżyć. Dla wszystkich, których zawiodła intuicja, pocieszeniem niech będzie fakt, że to samo przydarzyło się także kilku bardzo znanym fizykom!

A co będzie, gdy do jeziora wrzucimy nie kamień, lecz coś, co pływa, na przykład kawałek drewna? Wtedy, oczywiście, nie zmieni się nic. W obu przypadkach wypierana jest woda o ciężarze łódki i pływającego ciała. Jeśli wyrzucimy coś z łódki na brzeg, poziom wody, oczywiście, obniży się; w przypadku kamienia nawet bardziej niż wtedy, gdy znajdzie się on na dnie jeziora. Kamień leżący na brzegu nie wypiera nic, jeśli nie liczyć powietrza, które akurat w tym problemie nie jest istotne.

Podobna sytuacja powstanie, gdy łódka z powodu nieszczelnego dna zacznie przeciekać. Zakładamy, że proces ten przebiega powoli, tak że przez cały czas łódka znajduje się na powierzchni wody w równowadze. Tak długo, jak długo jest to prawda, poziom wody w jeziorze pozostaje bez zmian; objętość zanurzonej części łódki zwiększa się dokładnie o tyle samo, ile wody do łódki wpłynęło. Kiedy wody będzie już tyle, że łódka nie będzie już mogła pozostawać w równowadze na powierzchni wody – zacznie tonąć. Woda przeleje się przez jej brzegi i łódka pójdzie na dno. Wtedy poziom wody obniży się; łódka będzie wypierać wodę o objętości tej samej co ona, a nie – jak na początku – o tym samym co ona ciężarze.

Małą Deltę przygotował Krzysztof REJMER

Zrobione w CERN-ie – World Wide Web

Małgorzata LEWANDOWSKA

Jak dostać się do sieci?
Najłatwiejszy dostęp do Internetu mają ci, którzy pracują lub uczą się w placówkach mających własne serwery lub konta na serwerach innych instytucji. Warunki te spełnia znakomita większość wyższych uczelni, kilkadziesiąt szkół średnich (w ramach programu Internet dla Szkół) oraz wiele instytucji państwowych i firm prywatnych na terenie całego kraju. W takim przypadku wystarczy zwrócić się do administratora sieci z prośbą o udostępnienie konta. Innym łatwym sposobem połączenia się z siecią jest wykupienie konta na jednym z wielu serwerów komercyjnych (z ich usług korzystają partie polityczne, prywatni użytkownicy, inne firmy). W tej sytuacji potrzebny będzie (oprócz własnego komputera w domu) modem i linia telefoniczna, umożliwiające łączność z serwerem. Wreszcie możliwe jest bezpośrednie połączenie naszego komputera z siecią, wymagające odpowiedniej karty sieciowej i oprogramowania. Ten przypadek polecamy tylko najbardziej zaawansowanym ze względu na niebezpieczeństwa, jakie czekają niedoświadczonych administratorów serwerów na morzu Internetu.

Światowa pajęczyna (World Wide Web, WWW) jest doskonałym przykładem tego, jak badania podstawowe, w dziedzinach zdawałoby się zupełnie oderwanych od praktyki, mogą doprowadzić do wielkich zmian w naszym życiu w zupełnie nieprzewidywalny sposób. Chociaż jest oczywiste, że wcześniej czy później WWW powstałaby, to jest też prawdą, że to fizycy wysokich energii pracujący w CERN-ie doprowadzili do powstania pajęczyny, która w kilka lat oplotła cały świat. Tak jak na początku inspirowali i wspierali budowę sieci Internet, tak też z zapałem zajęli się wprowadzeniem projektu WWW w życie. Początek WWW datuje się na marzec 1989 r., a przecież już w 1994 r. codzienne gazety były pełne artykułów na jej temat.

Internet

Internet to sieć sieci – za pomocą linii telefonicznych, satelitarnych i naziemnych łączy mikrofalowych oraz kabli światłowodowych pozwala na komunikację między rozsianymi po całym świecie lokalnymi sieciami komputerowymi szkół, bibliotek, firm, szpitali, agencji rządowych i innych organizacji. Fizycy bardzo aktywnie włączyli się w budowę sieci Internet, dzięki której mogli mieć dostęp do wyników doświadczalnych bez konieczności podróżowania. Szybko sieć objęła nie tylko laboratoria naukowe. Obecnie łączy ponad 3 mln komputerów w 70 krajach na wszystkich kontynentach. Co najmniej 16 mln użytkowników Internetu z wielu sfer życia społecznego ma możność bezpośredniego komunikowania się ze sobą, wymiany poglądów, uczestniczenia we wspólnych projektach i korzystania z praktycznie nieograniczonych zasobów informacji zgromadzonych w tysiącach wyspecjalizowanych komputerów na całym świecie.

Nowa struktura informacyjna

Wzrastająca w latach 80. popularność komputerów osobistych wywołała problemy, których wcześniej nie przewidziano. Indywidualne zastosowanie tych urządzeń nie zdawało egzaminu w większych instytucjach i projektach, gdzie – aby przenieść dane z jednego komputera do drugiego – trzeba było wykonać wiele uciążliwych i czasochłonnych czynności: należało je nagrać na dyskietki, dyskietki trzeba było przesłać w pożądane miejsce, w końcu dane z dyskietek skopiować na dysk komputera docelowego. Z tych samych powodów nie można było w pełni wykorzystać drogiego sprzętu (np. drukarek, ploterów, skanerów). Wtedy właśnie narodziła się potrzeba łączenia komputerów w sieci – najpierw lokalne, a potem między firmami, miastami, krajami i wreszcie kontynentami. Większość instytucji posiadała jednak sprzęt komputerowy różnych firm, pracujący w różnych systemach operacyjnych. Aby móc bez przeszkód go połączyć i z niego korzystać, potrzebne były odpowiednie protokoły, które by tłumaczyły języki systemów na jeden, wspólny dla wszystkich. W ich projektowaniu i wdrażaniu w Europie, i w konsekwencji na całym świecie, ogromną rolę spełnili naukowcy, między innymi pracujący w Europejskiej Organizacji Badań Jądrowych. To właśnie ludziom nauki najbardziej zależało na szybkim przekazywaniu danych na duże odległości oraz na jednorodności stosowanego oprogramowania. Ci sami ludzie stali się pomysłodawcami jednej z najlepszych koncepcji, jakie pojawiły się w ramach Internetu, czyli WWW.

Sieć Internet jest zbudowana w architekturze klient-serwer. Oznacza to, że programy są podzielone na te, które obsługują bazy danych (serwer) i te, które umożliwiają analizę (wysłanie pytań i otrzymanie na nie odpowiedzi) tych danych (klient). Zwykle fizycznie rolę serwera pełni jeden lub kilka komputerów (klaster) z dużymi dyskami zawierajacymi dane, oprogramowanie systemowe oraz programy użytkowe, rolę zaś klienta przejmują najczęściej komputery osobiste. Dodatkowym niezbędnym do stworzenia sieci elementem jest tzw. karta sieciowa (*Network Interface Card*). Jest to adapter zapewniający połączenie z określonym typem sieci (jak Ethernet, Token Ring, ARCNET i inne), czyli po prostu fizyczne łącze z właściwym typem kabla.

Jak można korzystać z Internetu?

Nowoczesne systemy operacyjne przeznaczone do zarządzania sieciami komputerowymi potrafią współpracować właściwie z każdym systemem działającym na komputerze – kliencie. Pozwala to często na wykorzystanie dotychczasowych zasobów instytucji przy zakładaniu sieci komputerowej. Dzięki sieci łatwiej i bardziej ekonomicznie wykorzystuje się komputery, bazy danych i urządzenia peryferyjne (drukarki, skanery, plotery); dostęp do nich wymaga jedynie wpisania odpowiedniej komendy. Omówimy niektóre z nich.

Krótka historia WWW
Historia jednego z najlepszych, jak dotąd, pomysłów na multimedialny system informacyjny nierozerwalnie złączona jest z CERN-em.

1989
marzec – Pierwszy projekt Pajęczyny rozprowadzony wśród naukowców z CERN-u wraz z dokumentem „Hipertekst i CERN".

1990
październik – Wprowadzenie nazwy systemu – *World Wide Web*.

1991
marzec – demonstracja pierwszych przeglądarek (browserów).
lipiec – seminarium komputerowe w CERN-ie poświęcone WWW.
grudzień – prezentacja posterowa i demonstracja na wystawie Hypertext '91 w San Antonio w Teksasie, CERN oznajmia o swoim wynalazku całemu światu w specjalnym liście elektronicznym.

1992
styczeń – pierwsza przeglądarka dostępna przez Anonymous FTP.
wrzesień – demonstracja WWW dla całej społeczności fizyków wysokich energii na sesji plenarnej konferencji CHEP'92 w Annecy we Francji.

1993
styczeń – około 50 serwerów HTTP, pierwsza przeglądarka pracująca w trybie graficznym.
wrzesień – 1% ogólnego ruchu pochodzi od hiperłączy WWW.
październik – ponad 100 znanych serwerów.

1994
maj – Pierwsza Międzynarodowa Konferencja WWW w CERN, Genewa, nazywana też „Woodstockiem Pajęczyny" z powodu ogromnego zainteresowania (przysłano 800 zgłoszeń na 400 miejsc).
czerwiec – raport Bangemanna na temat planu Komisji Europejskiej dotyczącego infostrad, ponad 1500 zarejestrowanych serwerów.
lipiec – założenie Organizacji W3 patronującej Pajęczynie.
październik – Druga Międzynarodowa Konferencja WWW w Chicago.

1995
luty – Pajęczyna jest głównym tematem spotkania grupy G7.
kwiecień – Trzecia Międzynarodowa Konferencja WWW w Darmstadt w Niemczech.

Telnet

Dzięki sieci Internet można łączyć się z komputerami nie tylko zza ściany czy z drugiego końca Europy, ale również zza oceanu. Dzieje się to za pośrednictwem programu *telnet*, który pozwala na zdalne rejestrowanie się (logon) na wszystkich urządzeniach włączonych do sieci. Aby dostać się do zasobów danego komputera, trzeba mieć na nim konto, czyli kawałek pamięci zarezerwowany dla siebie i opatrzony imieniem (user id) oraz – dla bezpieczeństwa własnych danych – hasłem (password).

Każde urządzenie włączone w sieć Internetu ma swój własny adres, składający się z czterech liczb oddzielonych kropkami, np. 191.255.15.8, umożliwiający właściwe kierowanie informacji. Zamiast adresu numerycznego można używać jego nazwy składającej się z kilku zestawów liter oddzielonych kropkami, np. smcsun.fuw.edu.pl, przy czym nie muszą to już być dokładnie cztery zestawy. Adres numeryczny (lub nazwę) komputera wystarczy wpisać za komendą *telnet*, aby połączyć się z nim niezależnie od tego, jak daleko się znajduje. Po połączeniu z komputerem można z niego korzystać tak, jakby się przy nim siedziało.

Poczta elektroniczna

Internet udostępnia również użytkownikom pocztę elektroniczną (krócej e-mail), najlepiej chyba poznaną usługę sieci. Główną jej zaletą jest szybkość połączeń, taka jak przy połączeniach telefonicznych. Poza tym nie trzeba czekać na podniesienie słuchawki z drugiej strony – nasza wiadomość będzie czekać na odbiór w specjalnej skrzynce pocztowej. Drogą elektroniczną często przesyła się całe dokumenty w formie plików „przyczepionych" (attached) do listu. Poczta nie zwraca uwagi na format pliku, można więc przekazać list w formie od zwykłych plików tekstowych po obrazki, muzykę czy programy użytkowe.

Chat, czyli pogawędka

Komunikację z innymi użytkownikami sieci zapewniają również programy Chat, które umożliwiają kontakt w czasie rzeczywistym. Wygląda on właściwie jak rozmowa telefoniczna (prowadzona za pomocą klawiatury i ekranu) pomiędzy dwiema (program *talk*) lub więcej (IRC – *Internet Relay Chat*) osobami. IRC pozwala nie tylko na rozmowę, ale również na bierne przyglądanie się konwersacji. Można uczestniczyć w ogólnej dyskusji lub wybrać sobie jednego lub kilku użytkowników i prowadzić rozmowę tylko z nimi na wybrany przez siebie temat. Organizowane są sesje i grupy dyskutujące o różnych problemach (polityka, nauka, lotnictwo, komputery, religia), do których każdy może się włączyć.

Tropienie informacji

Jedną z najistotniejszych cech Internetu jest możliwość wyszukiwania i pozyskiwania informacji istotnych dla użytkowników. Z wielu programów służących temu celowi najbardziej popularny jest FTP (File Transfer Protocol). Jest to usługa dostępna dla każdego użytkownika sieci Internet i polega na transferze plików pomiędzy komputerami. W typowym przypadku użytkownik (klient) ściąga potrzebny plik ze zdalnego serwera, ale możliwa jest również komunikacja między dwoma klientami. FTP pozwala na korzystanie z zasobów informacyjnych serwerów nie włączonych do danej sieci lokalnej. Rozszerzeniem FTP umożliwiającym powszechne korzystanie z zasobów serwerów Internetu jest Anonymous FTP. Anonymous to nazwa pseudokonta, na które każdy może się zalogować podając jako hasło swój adres e-mail. Zwykle z takich kont istnieje dostęp do bezpłatnego oprogramowania lub archiwów.

Szybkie odnalezienie informacji to zadanie programu Archie. Wykorzystuje on właśnie Anonymous FTP do przeszukiwania ponad 1000 serwerów na całym świecie.

Temu samemu celowi służą również systemy Gopher (Świstak) i WAIS (*Wide Area Information System*).

World Wide Web

Najnowocześniejszy obecnie system wyszukiwania i udostępniania informacji to właśnie *World Wide Web* (WWW, W3), czyli światowa pajęczyna. Jest to system rozsianych po całym świecie serwerów Internetu, pozwalających na dostęp do ogromnej ilości dokumentów, programów, obrazów, a nawet dźwięków i filmów za pomocą jednego kliknięcia myszką. Takie możliwości daje niezwykły pomysł – hipertekst. Opracowany przez naukowców z CERN-u nowy typ tekstu prawie nie różni się od innych, spotykanych w książkach i innych publikacjach. Oba rodzaje dokumentów

Kilka serwerów WWW

Polska

plearn.edu.pl – Uniwersytet Warszawski
www.icm.edu.pl – Interdyscyplinarne Centrum Modelowania Matematycznego (ICM)
www.agh.edu.pl – AGH
www.uj.edu.pl – Uniwersytet Jagielloński
www.amu.edu.pl – Uniwersytet Poznański
www.pg.gda.pl – Politechnika Gdańska
www.pwr.wroc.pl – Politechnika Wrocławska
www.cyfronet.krakow.pl – Cyfronet–Kraków
www.kbn.gov.pl – Komitet Badań Naukowych
www.nask.org.pl – NASK
www.pap.waw.pl – Polska Agencja Prasowa
www.ibspan.waw.pl – PAN
www.atm.com.pl – ATM
www.radio.com.pl – Polskie Radio
info.fuw.edu.pl/poland.html – Polskie serwery WWW
info.fuw.edu.pl/pl/Miasta.html – Miasta w Polsce
www.gumbeers.elka.pg.gda.pl/WA/ – Wirtualna Akademia

Świat

www.cern.ch – CERN
science-mag.aaas.org/science/ – SCIENCE on-line
www.wri.com/mathsource/ – Mathematica
www.yahoo.com/ – browser Yahoo
www.nba.com – NBA
www.nasa.gov – NASA
wings.buffalo.edu – The Virtual Tourist
www.kodak.com – Kodak
www.sony.com – SONY Music
www.ibm.com – IBM
www.microsoft.com – Microsoft
www.sun.com – SUN
www.hp.com – Hewlett Packard
www.sgi.com – Silicon Graphics

Przypominamy, że:
wybór artykułów z *Delty* ukazuje się w języku angielskim w sieci Internet pod adresem **http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/**

zawierają odsyłacze i odnośniki, z tym że w zwykłym tekście trzeba szukać wyjaśnień na dole strony lub wręcz na końcu dokumentu. Hipertekst zawiera w sobie połączenia (links) z innymi dokumentami, wyjaśniającymi dane słowo lub kojarzącymi się z nim tematycznie. W hipertekście, klikając myszką na odpowiednio podświetlone słowa lub wyrażenia, możemy ściągnąć inne dokumenty skojarzone z tymi słowami. Mogą one zawierać wyjaśnienia lub rozszerzenia przeglądanych tematów, mogą też zawierać w sobie kolejne połączenia do jeszcze innych dokumentów i tak dalej, i tak dalej. W ten sposób połączenia między tekstami tworzą wirtualną pajęczą sieć dostępną z każdego komputera w Internecie.

Naturalnym rozszerzeniem hipertekstu są hipermedia. Są to dokumenty umożliwiające nie tylko połączenie z innymi tekstami, ale również udostępniające inne formy przekazu informacji – obrazy, dźwięki czy filmy. Dzięki hipermediom możemy, klikając myszką w odpowiednim miejscu w dokumencie, obejrzeć najsłynniejsze dzieła malarstwa, a dysponując odpowiednim oprogramowaniem posłuchać ulubionej muzyki lub obejrzeć film wideo. Już w tej chwili niektóre serwery udostępniają swoim klientom bieżące programy nadawane przez lokalne stacje radiowe. W planach są koncepcje ogólnoświatowej (dostępnej właśnie dzięki WWW) rozgłośni radiowej, z której sygnał rozpowszechniany byłby po łączach Internetu. Jednocześnie wielkie firmy handlowe i produkcyjne znalazły w WWW znakomity środek reklamy i dystrybucji swoich produktów. Już nie tylko czyta się o nowych produktach na rynku, wiele z nich można zamówić właśnie za pośrednictwem pajęczyny.

Początek WWW datuje się na marzec 1989 roku. Projekt systemu hipertekstów przedstawił Tim Berners-Lee z CERN-u. Pomysł był doskonały. Ukrywając adresy internetowe dokumentów za podświetlonymi słowami na ekranie, można było stworzyć szybki i bardzo wygodny system dostępu do informacji. Dla naukowców pracujących w tym centrum naukowym taki system był bardzo potrzebny i dlatego zajęli się jak najsprawniejszym wprowadzeniem tego projektu w życie. W ciągu kilku lat WWW ogarnęło swoją siecią cały zasięg Internetu, a liczba serwerów udostępniających usługi pajęczyny ciągle wzrasta. Ta popularność jest zasługą przejrzystego systemu dostępu do informacji, opartego na modelu serwer–klient. Chcąc uzyskać jakąś informację należy uruchomić specjalny program – tzw. browser (przeglądarka), który będzie pełnił rolę klienta. To właśnie za jego pomocą użytkownik wysyła prośbę o poszukiwany dokument i ogląda go następnie na ekranie. Użytkownik nie musi wiedzieć, i zwykle nie wie, gdzie tak naprawdę jest przechowywany plik, którego zawartość właśnie ogląda.

Język, jakim komunikują się ze sobą serwery i klienci, to HTTP (*HyperText Transmission Protocol*), a język, w którym zwykle pisze się dokumenty hipertekstowe, to HTML, czyli *HyperText Markup Language*. Jest on bardzo popularny dzięki swojej prostocie i łatwości oraz dzięki możliwościom graficznego opracowania dokumentów. Połączenia z innymi plikami są reprezentowane przez tzw. URLs (*Uniform Resource Locators*). W tej chwili, dzięki swej strukturze, URLs mogą reprezentować właściwie każdy dokument dostępny w serwerach WWW oraz jego poprzedniczek, a więc FTP, Gophera i WAIS. Duży wybór dostępnych na rynku przeglądarek o przeróżnych możliwościach, dostosowanych do większości stosowanych systemów operacyjnych zarówno serwerów, jak i klientów, zapewnia pracę zgodną z preferencjami użytkownika.

WWW stworzył zupełnie nowe zjawisko w skali światowej – sieć hiperłączy opasujących cały glob. Dzięki prostocie, nowoczesności i olbrzymim możliwościom zmienił spojrzenie ludzi na Internet jako system przekazywania informacji. To właśnie ta pajęczyna może w przyszłości pozwolić na realizację snu pierwszych jej konstruktorów o multimediach: o komputerze, telefonie, telewizorze, radiu, wideo i domowej biblioteczce w jednym.

Internet w Polsce

W Polsce dostęp do Internetu zapewnia NASK – Naukowa i Akademicka Sieć Komputerowa. NASK dzierżawi łącza telekomunikacyjne od innych operatorów sieci, przede wszystkim od Telekomunikacji Polskiej S.A. Podstawowym zadaniem NASK jest utrzymanie i administracja siecią szkieletową, łączącą 24 ośrodki miejskie, w ramach których łączy się ze światem Internetu ponad 60 wyższych uczelni i około 100 placówek naukowo-badawczych. Abonentami sieci są także urzędy państwowe, instytucje samorządowe, prywatne firmy. Sieć NASK ma około 80 000 użytkowników; pracuje w niej około 15 000 komputerów. Dzięki NASK użytkownicy Internetu w Polsce mają dostęp do pełnej gamy usług świadczonych przez Internet.

Naukowa i Akademicka Sieć Komputerowa powstała 14 grudnia 1993 roku jako jednostka badawczo rozwojowa KBN. Było to konsekwencją rozwoju sieci komputerowych w Polsce po roku 1990, w którym uzyskaliśmy dostęp do zasobów Internetu. Tak jak i na świecie, naukowcy pierwsi zdali sobie sprawę z istoty i konieczności wprowadzenia sieci do codziennego życia społeczeństwa. Jej obecność uznali za warunek konieczny dalszego rozwoju nie tylko badań naukowych w Polsce, ale również przyszłych kontaktów polskich firm i instytucji ze współpracownikami z zagranicy. NASK nieustannie się rozwija i łączy coraz to nowe, nie tylko naukowe ośrodki w całej Polsce. Nie jest to zadanie łatwe, jeśli ma się do dyspozycji tylko łącza telefoniczne dzierżawione od jednego z najpotężniejszych monopolistów w kraju. Tłok w polskim Internecie od dawna zakłócał współpracę naukową z ośrodkami zagranicznymi, od dawna też mówi się o konieczności rozbudowy sieci i położenia nowych linii o wielkiej przepustowości (tzw. infostrad).

Jedną z interesujących, nowych inicjatyw jest ruch pod nazwą Internet dla Szkół (IdS), umożliwiający polskim szkołom korzystanie z podstawowych usług międzynarodowej sieci. Projekt powstał jesienią 1994 roku na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Instytucja ta jako jedna z pierwszych polskich placówek uzyskała połączenie z Internetem w 1990 roku. Fizycy, z racji specyfiki swoich badań, szybko uzyskali doświadczenie w korzystaniu i administrowaniu siecią. Jednocześnie docenili jej zalety nie tylko jako środka transferu danych i łącznika z odległymi centrami obliczeniowymi, ale również jako źródła informacji i wiedzy. To właśnie na Wydziale Fizyki został uruchomiony pierwszy polski serwer WWW, tu również powstał pierwszy krajowy dziennik elektroniczny *Donosy*, ukazujący się do dziś. Aby przygotować młodych ludzi do pracy w międzynarodowym środowisku i umożliwić im dostęp do niezgłębionych zasobów Internetu, postanowiono pójść śladem innych krajów i skonstruować sieć modemowych połączeń szkół średnich z istniejącymi serwerami. Jako pierwszy został udostępniony szkołom warszawskim serwer Wydziału Fizyki. W tej chwili istnieje już 11 serwerów w różnych punktach kraju, rozpatruje się możliwość rozszerzenia systemu na szkoły polskie na Ukrainie. IdS zbiera niezwykle pochlebne opinie specjalistów z kraju i zagranicy, wielu bardzo zdolnych młodych ludzi jest już zafascynowanych możliwościami i ogromem zasobów intelektualnych Internetu.

Świetlana przyszłość

Internet rozwija sie niesłychanie żywiołowo – co roku liczba komputerów w sieci podwaja się, a co 30 minut przyłączana jest nowa sieć lokalna – od kilku do kilkuset komputerów. Szacuje się, że jeśli utrzyma się tempo rozwoju Internetu i rozwoju demograficznego ludzkości, w roku 2000 liczba komputerów włączonych do sieci zrówna się z liczbą mieszkańców Ziemi. Tak dynamiczny rozwój Internetu ma swoje źródła we współpracy ludzi na całym świecie. Angażują się w nią nie tylko specjaliści, którzy zawodowo mają z siecią styczność (programiści, producenci sprzętu, uczeni), ale również hobbyści i amatorzy. To przede wszystkim oni są motorem napędzającym rozbudowę sieci. Dzięki nowym systemom pozyskiwania i operowania informacją, takim jak WWW, świat już teraz stał się globalną wioską i dąży do jeszcze większej integracji.

Rozwiązanie zadania M777. Ponieważ zbiór K_N jest skończony, w jakimś punkcie (być może więcej niż jednym) funkcja f przyjmuje swą wartość największą. Jeśli punkt ten należy do brzegu kraty, teza zadania jest prawdziwa.

W przeciwnym razie z warunku pseudoharmoniczności wynika, że we wszystkich sąsiednich punktach kraty funkcja f przyjmuje swą największą wartość (średnia arytmetyczna jest mniejsza od którejś z uśrednionych liczb, chyba że wszystkie są jej równe). Postępując dalej w podobny sposób, przez indukcję wykazujemy, iż funkcja f jest stała, a więc spełnia warunki zadania.

Podobnie wykazujemy, że f swą wartość najmniejszą przyjmuje na brzegu kraty.

Nagroda Steinhausa za *Deltę*

Polska Fundacja Upowszechnienia Nauki oraz Towarzystwo Popierania i Krzewienia Nauk przyznają Nagrodę im. Hugona Steinhausa w dziedzinie upowszechnienia nauki. Za rok 1995 przyznano dwie równorzędne nagrody pierwsze:
Prof. Markowi Kordosowi – człowiekowi wszechstronnej inicjatywy, obdarzonemu talentem organizacyjnym i niezwykłą umiejętnością współpracy z ludźmi – za stworzenie popularnonaukowego miesięcznika Delta skierowanego do nauczycieli, uczniów i studentów, który na bardzo wysokim poziomie i w sposób oryginalny popularyzuje matematykę, fizykę i astronomię, oraz za utworzenie Ośrodka Kultury Matematycznej w Mordach;
Dyr. Ryszardowi Rakowskiemu – człowiekowi niezwykłego entuzjazmu i niewyczerpanej energii – za wybitną działalność organizacyjną w Krajowym Funduszu na Rzecz Dzieci, w tym dar przyciągania do pracy z młodzieżą uzdolnioną najwybitniejszych uczonych i artystów krajowych i zagranicznych.

Ponadto przyznano dwa równorzędne wyróżnienia honorowe prof. Zdzisławowi Liberze, poloniście z Uniwersytetu Warszawskiego, i red. Aleksandrze Frykowskiej z Telewizji Edukacyjnej.

Jury konkursu stanowili: dr Andrzej Biernacki, prof. Andrzej Szczepan Białynicki-Birula, dr Tadeusz Dobrowolski, prof. Krzysztof Jakubowski, prof. Jerzy Jasiński, prof. Janusz Haman i prof. Witold Karczewski.

Nagroda to statuetka w kształcie szyszki wpisanej w czworościan, dyplom i 6.000,- zł.

Uroczystość wręczenia nagród odbyła się 22 marca 1996 roku w Pałacu Staszica w Warszawie. Osobę Marka Kordosa przedstawił zgromadzonym Andrzej Białynicki-Birula. Wypada wierzyć, że nagroda taka będzie pomagała *Delcie* – przynajmniej przez jakiś czas.

Redakcja

Klub 44

Uwaga: W związku z terminowym ukazywaniem się *Delty* na rozwiązania zadań ligowych czekamy do końca miesiąca

$n+2.$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1996

Przypominamy treść zadań:

317. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n, dla której istnieją wielomiany drugiego stopnia F, G, H spełniające warunek: $H(G(F(k))) = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

318. Dowieść, że dla każdej pary liczb naturalnych $m, n \ge 2$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right] = \sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right].$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 307 (WT=1,27) i 308 (WT=3,22) z numeru 10/1995

Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	44,76
Piotr Lipiński	– Radom	41,89
Henryk Kornacki	– Augustów	39,01
Jerzy Witkowski	– Wodzisław Śl.	38,66
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	37,54

Serdeczne gratulacje przyjmuje pan Jan Ciach, który w efektownym stylu po raz piąty zdobywa sumę czterdziestu czterech punktów!

317. Przypuśćmy, że $H(G(F(k))) = 0$ dla $k = 1, \ldots, 7$. Funkcja F (trójmian kwadratowy) jest ściśle monotoniczna w co najmniej jednym z przedziałów $(-\infty; 4)$, $\langle 4; \infty)$. Przyjmijmy w pierwszym przypadku

$$a = F(1),\quad b = F(2),\quad c = F(3),\quad d = F(4), \tag{1}$$

a w drugim –

$$a = F(4),\quad b = F(5),\quad c = F(6),\quad d = F(7). \tag{2}$$

Liczby a, b, c, d tworzą ciąg monotoniczny. Wartości $G(a)$, $G(b)$, $G(c)$, $G(d)$ są pierwiastkami trójmianu kwadratowego H, a więc muszą być parami równe. Zatem zarówno liczby a i d, jak i liczby b i c, muszą leżeć symetrycznie względem punktu, w którym trójmian kwadratowy G osiąga swą wartość ekstremalną. Tak więc $a + d = b + c$. Ale jeśli $F(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha \neq 0$), to

$$r = (a+d) - (b+c) = \begin{cases} \alpha(1^2 + 4^2 - 2^2 - 3^2) & \text{w przypadku (1),} \\ \alpha(4^2 + 7^2 - 5^2 - 6^2) & \text{w przypadku (2);} \end{cases}$$

w każdym przypadku $r \neq 0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że podany w zadaniu warunek nie może być spełniony dla $n = 7$.

Natomiast dla $n = 6$ warunek ten jest spełniony, na przykład, przez wielomiany

$$F(x) = (2x-7)^2,\quad G(y) = (y-5)^2,\quad H(z) = (z-16)(z-400).$$

Zatem $n = 6$ jest największą liczbą o wymaganej własności.

318. Oznaczmy przez d największy wspólny dzielnik danych liczb m i n oraz przyjmijmy $a = m/d$, $b = n/d$. Zachodzi równość

$$s := \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right] = \left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{2m}{n}\right] + \ldots + \left[\frac{(n-1)m}{n}\right] = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{(n-k)m}{n}\right]. \tag{1}$$

Zatem

$$s = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[\frac{km}{n}\right] + \left[\frac{(n-k)m}{n}\right]\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\left[\frac{ka}{b}\right] + \left[\frac{(n-k)a}{b}\right]\right). \tag{2}$$

Oczywiście,

$$\frac{ka}{b} + \frac{(n-k)a}{b} = \frac{na}{b} = m. \tag{3}$$

Liczby a i b są względnie pierwsze, więc składniki sumy (3) są liczbami całkowitymi wtedy i tylko wtedy, gdy k dzieli się przez b. Wobec tego

$$\left[\frac{ka}{b}\right] + \left[\frac{(n-k)a}{b}\right] = \begin{cases} m & \text{dla } k \text{ podzielnych przez } b, \\ m-1 & \text{dla } k \text{ niepodzielnych przez } b. \end{cases}$$

W zbiorze $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ jest $d-1$ liczb podzielnych przez b oraz $n-d$ liczb niepodzielnych przez b. Równość (2) przybiera zatem postać

$$s = \frac{1}{2}\Big((d-1)m + (n-d)(m-1)\Big) = \frac{1}{2}\Big(mn - m - n + d\Big).$$

Otrzymane wyrażenie jest symetryczne względem m i n. To znaczy, że ta sama liczba jest też wartością sumy $s' := \sum_{k=1}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right]$. Równość $s = s'$ jest właśnie tezą zadania.

Całkiem niedawno do naszej świadomości dotarła wiadomość, że na 36 Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej (Kanada '95) aż dwa zadania konkursowe (Zadanie 4 i zadanie 6) były autorstwa **Marcina E. Kuczmy**. Rzadko się zdarza, żeby na Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej zostały wykorzystane dwa zadania spośród propozycji jednego kraju – a co dopiero jednego autora!

Warto przy okazji wspomnieć, że już dwukrotnie wcześniej M.E. Kuczma był autorem zadania użytego w Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej. Mamy nadzieję, że wśród uczestników **Klubu 44**, którzy rozwiązywali przecież całe krocie zadań autorstwa Marcina Kuczmy (może ktoś policzy, ile ich było), znajdą się kiedyś jego godni następcy.

Redakcja

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1996

Przypominamy treść zadań:

215. Kwadrat zbudowany jest ze sztywnych prętów o długości a połączonych w wierzchołkach przegubowo i sprężyście. Zmiana kąta w wierzchołku o α (tak, że staje się on równy $90° + \alpha$ lub $90° - \alpha$) powoduje wystąpienie momentu siły równego $k\alpha$ o zwrocie przywracającym kąt $90°$. Obliczyć okres małych drgań deformujących kwadrat do rombu, jeśli:

a) w wierzchołkach znajdują się masy punktowe m, a poza tym pręty są nieważkie,

b) w środkach prętów znajdują się masy punktowe m, a poza tym pręty są nieważkie,

c) każdy pręt ma masę m rozłożoną jednorodnie.

216. Ocenić minimalną wielkość liter na powierzchni Ziemi pozwalającą odczytać w świetle widzialnym napis z satelity krążącego na wysokości 400 km, przy użyciu przyrządów optycznych o rozmiarach nie przekraczających 1 m.

Uwaga. Istnieją metody komputerowego przetwarzania obrazów, które zmniejszają nieostrość i poprawiają zdolność rozdzielczą. W rozwiązaniu należy to pominąć.

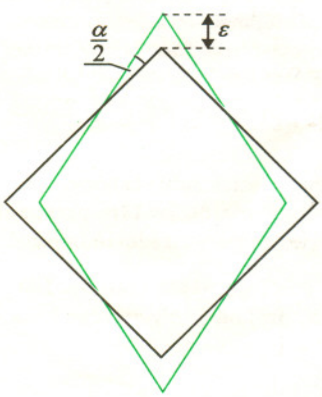
Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 207 (WT=3,03) i 208 (WT=2,13) z numeru 11/1995

Aleksander Surma	– Myszków	33,64
Jarosław Łazuka	– Warszawa	31,54
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	26,68
Przemysław Gworys	– Częstochowa	26,55

W czołówce wydrukowanej w *Delcie* 3/1996 chochlik drukarski zmazał gratulacje dla 21. członka Klubu – pana Artura Gawryszczaka.

215. Załóżmy, że jedna z przekątnych rombu wynosi $a\sqrt{2} + 2\varepsilon$, gdzie ε jest małą wielkością – wtedy, jak łatwo wykazać, druga przekątna jest z dokładnością do pierwszego rzędu w ε równa $a\sqrt{2} - 2\varepsilon$, a kąt wierzchołkowy różni się od $90°$ o $\alpha = 2\sqrt{2}\varepsilon/a$. Energia sprężystości w każdym wierzchołku jest równa $k\alpha^2/2$ (analogicznie do znanego wzoru na energię „zwykłej" sprężyny), zatem łącznie mamy

$$E_{\text{spręż}} = 2k\alpha^2 = 16k\varepsilon^2/a^2 \,.$$



Energię kinetyczną najprościej wyznaczyć dla przypadku a), kiedy jest ona równa $4mv^2/2 = 2mv^2$ (gdzie $v = \mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$). W przypadku b) potrzebne nam będzie przesunięcie środka pręta. Wynosi ono $\varepsilon/2$ wzdłuż każdej osi, czyli jego bezwzględna wartość jest równa $\varepsilon/\sqrt{2}$, prędkość środka pręta – $v/\sqrt{2}$, a energia kinetyczna całości – $2m(v/\sqrt{2})^2 = mv^2$. W przypadku c) do energii ruchu środka masy (takiej, jak w b)) należy dodać energię ruchu obrotowego, która dla pojedynczego pręta jest dana wyrażeniem

$$\frac{1}{2}\frac{1}{12}ma^2\left(\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{12}mv^2 \,.$$

Po dodaniu energii ruchu środka masy i pomnożeniu przez 4 otrzymujemy $E_{\text{kin}} = (4/3)mv^2$. Okres drgań zależy od współczynnika przy kwadracie przesunięcia w energii potencjalnej A i współczynnika przy kwadracie prędkości w energii kinetycznej B poprzez wzór $T = 2\pi\sqrt{B/A}$. Stąd w przypadku a) mamy $T = 2\pi a\sqrt{m/8k}$, w przypadku b) $T = 2\pi a\sqrt{m/16k}$, a w przypadku c) $T = 2\pi a\sqrt{m/12k}$.

216. Zdolność rozdzielcza przyrządów optycznych jest ograniczona przez efekty dyfrakcyjne. Kąt ugięcia fali na otworze o rozmiarach d (np. na soczewce) wynosi w przybliżeniu λ/d (gdzie λ – długość fali) i tyle wynosi kątowa zdolność rozdzielcza przyrządu. Dla satelity na wysokości h oznacza to liniową zdolność rozdzielczą równą $\delta \approx h\lambda/d$, czyli po podstawieniu $\lambda \approx 0{,}5$ μm i pozostałych danych otrzymujemy $\delta \approx 0{,}2$ m. Aby można było odczytać napis, wielkość liter zapewne musi być około 3 razy większa, czyli równa około 0,6 m.

Rozwiązanie zadania M778. Trzeba określić funkcję f wewnątrz kraty. Niech $(x,y) \in K_N$. Rozważymy cząstkę błądzącą losowo po kracie. Startuje ona z punktu (x,y) i odtąd w każdym ruchu zmienia swoje położenie o wektor $[0,1]$, $[0,-1]$, $[1,0]$ lub $[-1,0]$ (o każdy z nich z prawdopodobieństwem równym $1/4$). Poszczególne ruchy są niezależne. Gdy cząstka znajdzie się po raz pierwszy w punkcie należącym do brzegu kraty, zatrzymuje się. Czytelnik zechce samodzielnie wykazać, że zdarzy się to z prawdopodobieństwem 1 (pomocne może być rozwiązanie zadania **M 771** z *Delty* 5/1996 o grze w orła i reszkę).

Niech $Z_{x,y}$ oznacza wartość funkcji g w punkcie, w którym cząstka startująca z punktu (x,y) się zatrzymała (jest to, oczywiście, pewna zmienna losowa). Połóżmy $f(x,y) = \mathrm{E}Z_{x,y}$. Oczywiście, $f(x,y) = g(x,y)$ dla $(x,y) \in B_N$ (bo wtedy cząstka od razu się zatrzymuje).

Pozostaje sprawdzić warunek pseudoharmoniczności. Niech $P_{x,y;a,b}$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że cząstka startująca z punktu (x,y) zatrzyma się w punkcie (a,b). Na mocy twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym

$$f(x,y) = \sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)P_{x,y;a,b} = \sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)\left(\frac{1}{4}P_{x+1,y;a,b} + \frac{1}{4}P_{x-1,y;a,b} + \frac{1}{4}P_{x,y+1;a,b} + \frac{1}{4}P_{x,y-1;a,b}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)P_{x+1,y;a,b} + \sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)P_{x-1,y;a,b} + \sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)P_{x,y+1;a,b} + \sum_{(a,b)\in B_N} g(a,b)P_{x,y-1;a,b}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathrm{E}Z_{x+1,y} + \mathrm{E}Z_{x-1,y} + \mathrm{E}Z_{x,y+1} + \mathrm{E}Z_{x,y-1}\right) = \frac{1}{4}\Big(f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1)\Big),$$

co kończy dowód.

Kącik olimpijski (17)

Niezmienniki i półniezmienniki (I)

Rozważmy następujące zadanie:

1. *Na stole leży pięć kawałków papieru. Dowolnie wybrany kawałek rozrywamy na cztery części. Proces ten kontynuujemy, tzn. za każdym razem wybieramy jakiś kawałek i rozrywamy go na cztery części. Czy w ten sposób, po pewnej liczbie kroków naszego procesu, możemy uzyskać dokładnie 1996 kawałków papieru?*

Kluczem do rozwiązania tego typu zadań – takich, w których opisany jest pewien proces, jest znalezienie odpowiedniego niezmiennika, tzn. czegoś, co się nie zmienia podczas wykonywania danego procesu. Gdyby na przykład udało nam się wykazać, że w zadaniu 1 parzystość liczby kawałków się nie zmienia, zadanie byłoby rozwiązane – startujemy z pięciu kawałków, nie możemy więc dojść do 1996. Ale niestety, parzystość się zmienia! Liczba kawałków w kolejnych krokach wynosi: 5, 8, 11, 14, 17, ... Nietrudno jednak dostrzec, że po każdym ruchu liczba kawałków wzrasta nam o 3. Mamy więc niezmiennik: reszta z dzielenia liczby kawałków przez 3. Stąd, że liczby 5 i 1996 dają z dzielenia przez 3 różne reszty, odpowiedź na pytanie w powyższym zadaniu jest negatywna.

W niektórych zadaniach sytuacja bywa bardziej skomplikowana – trudno jest znaleźć niezmiennik, łatwiej natomiast tzw. półniezmiennik. Pojęcie to przybliżymy Czytelnikowi posługując się następującym przykładem.

2. *W tablicę o wymiarach* 8×8 *wpisano 64 liczby rzeczywiste. W jednym ruchu możemy zmienić znaki wszystkich liczb stojących w pewnej kolumnie lub w pewnym wierszu. Udowodnić, że wykonując tylko takie ruchy można spowodować, aby sumy liczb stojących w każdym wierszu i w każdej kolumnie były nieujemne.*

Wybierzmy wiersz lub kolumnę, w której suma liczb jest ujemna (jeśli jest to niemożliwe – zadanie jest rozwiązane). Zmieńmy wszystkie liczby tam stojące na przeciwne. Jeśli po tym ruchu nie osiągnęliśmy celu, to postępowanie kontynuujemy, tzn. wybieramy wiersz lub kolumnę o ujemnej sumie wyrazów, itd. Zauważmy, że po każdym ruchu suma wszystkich liczb stojących w tablicy wzrasta. Jasne jest, że może ona przybierać jedynie skończenie wiele różnych wartości (nie więcej niż 2^{64}). Zatem proces nasz musi się zakończyć, co rozwiązuje zadanie.

Półniezmiennikiem w naszym rozumowaniu była suma wszystkich liczb tablicy. Wielkość ta co prawda się zmieniała, ale w pewien określony sposób (w tym przypadku w każdym kroku wzrastała) i to już doprowadziło do rozwiązania naszego zadania.

Mamy nadzieję, że powyższe przykłady w miarę trafnie ilustrują użytą metodę. Dla osób pragnących uzyskać biegłość w tego typu zadaniach, proponujemy jeszcze kilka podobnych problemów.

3. Rozważmy sytuację taką, jak w zadaniu 2. Czy niezależnie od konfiguracji początkowej można, używając jedynie powyżej zdefiniowanych ruchów, otrzymać po pewnej liczbie kroków tablicę zawierającą same liczby nieujemne?

4. Na okręgu napisano n liczb naturalnych. Między każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik, po czym wcześniej napisane liczby ścieramy. Z nowo otrzymanymi n liczbami postępujemy analogicznie. Udowodnić, że po skończonej liczbie takich ruchów wszystkie liczby na okręgu będą równe.

5. Danych jest n kartoników, każdy z jednej strony pomalowany na czerwono a z drugiej na niebiesko. Kartoniki te rozkładamy dowolnie na okręgu. Jeden ruch polega na odwróceniu dowolnych trzech leżących obok siebie kartoników na drugą stronę. Wyznaczyć wszystkie takie wartości n, dla których z dowolnego początkowego układu kolorów da się dojść do każdego innego.

6. Napisano jedna za drugą 1996 liczb: $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/1996$. Spośród nich wybieramy dowolne dwie np.: a i b. Następnie ścieramy je i zamiast nich piszemy liczbę $a + b + ab$. Po 1995 krokach na tablicy zostanie tylko jedna liczba. Czy jej wartość nie zależy od kolejności ścieranych liczb? (Jeżeli tak, obliczyć ją.)

7. Na tablicy napisano w rzędzie n liczb – każda z nich równa -1 lub 1. W i-tym ruchu możemy zmienić znak r_i stojących obok siebie liczb (nie wszystkie r_i muszą być równe). Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, które należy wykonać, aby niezależnie od konfiguracji początkowej można było (wykonując jedynie powyższe ruchy) dojść do konfiguracji złożonej z samych jedynek?

Krzysztof CHEŁMIŃSKI
Waldemar POMPE

Rozwiązanie zadania M779. Załóżmy, że warunki zadania **M 778** spełniają dwie funkcje pseudoharmoniczne f_1 i f_2. Wówczas, co łatwo sprawdzić, funkcja $f = f_1 - f_2$ jest pseudoharmoniczna, przy czym $f(x, y) = 0$ dla dowolnego $(x, y) \in B_N$. Na mocy zadania **M 777** funkcja f przyjmuje zarówno swą największą, jak i najmniejszą wartość na brzegu kraty, a zatem jest tożsamościowo równa zeru. To oznacza, że $f_1 \equiv f_2$, a więc warunki zadania **M 778** spełnia dokładnie jedna funkcja pseudoharmoniczna.

Funkcje pseudoharmoniczne mogą nieznacznie różnić się na brzegu i być identyczne wewnątrz kraty (przykład na rysunku poniżej).

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{ccccc} & -1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & -1 & \end{array}$$

Rozwiązanie zadania F 431.
Na skrzydła samolotu działa siła wynikająca ze zderzeń cząsteczek powietrza z ich powierzchnią. Niech θ będzie kątem pomiędzy prostą prostopadłą do powierzchni skrzydła a kierunkiem pionowym. Pionowa składowa tej siły $F_y = F \sin\theta$ jest siłą nośną, musi ona równoważyć ciężar mg samolotu. Pozioma składowa $F_x = F \cos\theta$ jest siłą oporu, którą musi zrównoważyć siła ciągu silników. Siła F standardowo jest równa

$$F = 2\varrho v^2 A \cos^2\theta\,,$$

gdzie v jest prędkością samolotu, A – powierzchnią skrzydeł, ϱ – gęstością powietrza. W przypadku nowoczesnych samolotów siła nośna jest trzykrotnie większa od siły oporu. Wynika stąd, że energia zużyta przez samolot podczas przelotu na odległość L wynosi

$$\frac{1}{3} mgL\,.$$

Przykładowo podajemy dane dotyczące samolotu Lockheed L1011-500 Tri Star, który 19 marca 1995 r. przeleciał na trasie Monachium–Nowy Jork (linia DELTA):

Masa przy starcie	$2{,}19 \cdot 10^5$ kg
Masa przy lądowaniu	$1{,}40 \cdot 10^5$ kg
Średnia masa m	$1{,}79 \cdot 10^5$ kg
Energia uzyskana ze spalonego paliwa	$3{,}64 \cdot 10^{12}$ J
Odległość	$6{,}49 \cdot 10^6$ m
$\frac{1}{3}mgL$	$3{,}8 \cdot 10^{12}$ J

Jak widać, wynik powyższego prostego oszacowania zgadza się bardzo dobrze (przy założeniu 100% sprawności silników) z danymi dotyczącymi przelotu.

epsilon

7/96

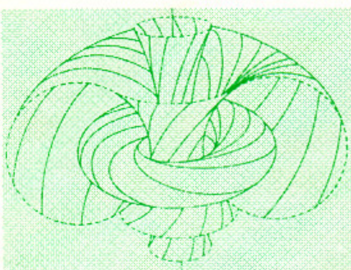
(64)

Twistory – opowieść matematyka (2)

Streszczenie poprzedniego odcinka.
Narrator uczestniczy w konferencji na temat spinorów i twistorów; pewnego dnia rezygnuje z jednego wykładu i w oczekiwaniu na przerwę rozmawia z innym uczestnikiem; świadkiem rozmowy jest jedynie pani robiąca herbatę. Rozmówca zadaje zaskakujące pytanie: „co to jest twistor?". Podczas prób tłumaczenia stopniowo okazuje się, że ów pan nie zna rozmaitych pojęć matematycznych z liczbami zespolonymi włącznie. I wtedy narrator zadaje pytanie, w efekcie którego dowiaduje się, że jego interlokutor jest dziennikarzem.

Gdy zacząłem się zastanawiać, jak dziennikarzowi wytłumaczyć, co to jest twistor, do rozmowy wtrąciła się pani robiąca herbatę:
– A ja wiem, co to jest twistor!
– ???
– Tu! Tu jest narysowany!

I pani pokazała palcem na wiszące na ścianie ogłoszenie konferencyjne. Na ogłoszeniu był tytuł konferencji i jej emblemat (przedstawiający równoległe Clifforda wypełniające sferę trójwymiarową):



Facet miał wyraźnie zadowoloną minę. Ja też.

ANEGDOTY EGZAMINACYJNE

W Oksfordzie obowiązują rozmaite, bardzo stare przepisy, niejednokrotnie sprzed paru wieków. O wielu takich przepisach niemal nikt nie pamięta; oczywiście, nie są one egzekwowane. Niemniej jednak ich znajomość może być przydatna...

Podobno ongiś pewien student nie przygotował się na czas do egzaminu. Chcąc uratować się przed oceną negatywną, studiował w przeddzień przepisy i odkrył, że ma prawo podczas egzaminu zażądać piwa do picia. Egzaminatorzy piwa nie mieli i trzeba było egzamin odwołać.

Dwa tygodnie później ów student przyszedł na egzamin znakomicie przygotowany. Nie został jednak wpuszczony na salę egzaminacyjną, bo nie miał ze sobą ceremonialnego miecza i oblał z powodu nieobecności.

Kwadrat magiczny po raz drugi

W latach siedemdziesiątych w każdy czwartek do *Życia Warszawy* dołączony był dodatek *Życie i Nowoczesność*. Tu właśnie swój dział prowadził Lech Pijanowski.

Pijanowski (zmarły przedwcześnie, w 1974 roku) był chyba najlepszym w Polsce znawcą gier i łamigłówek umysłowych. Jego dział w *Życiu i Nowoczesności* nosił tytuł „Rozkosze Łamania Głowy". Było to coś pokrewnego Klubowi 44; co tydzień publikowane były (z reguły trzy) zadania, czytelnicy na ich rozwiązanie mieli dwa tygodnie. Rozwiązania można było wysyłać pod adresem redakcji – i robiły to tysiące ludzi. Zadania były punktowane, zazwyczaj w jednym tygodniu można było zdobyć maksymalnie 6–9 punktów. Po zdobyciu 13 punktów uzyskiwało się tytuł Specjalisty Łamania Głowy, po 39 ($= 3 \times 13$) – tytuł Eksperta, po 273 ($= 7 \times 39$) – tytuł Mistrza (wraz z dyplomem) i wreszcie za 819 punktów ($= 3 \times 273$) tytuł Arcymistrza Łamania Głowy, wraz z legitymacją i odznaką zaprojektowaną przez Szymona Kobylińskiego. Łatwo obliczyć, że zdobycie tytułu Arcymistrza musiało trwać ładnych parę lat.

Liga cieszyła się ogromną popularnością, jakby na przekór popularnym poglądom, że logiczne myślenie i matematyka są wstrętne przeważającej większości Polaków. Po śmierci Lecha Pijanowskiego dział prowadzony był przez jego syna, Wojciecha.

I właśnie w *Rozkoszach Łamania Głowy* w roku 1973 pojawiło się zadanie, o którym pisaliśmy w zeszłym miesiącu:

Na polach kwadratu 3×3 należy umieścić różne cyfry (bez zera), przy czym te same cyfry nie mogą się pojawić w różnych kwadratach; ponadto na środkowym polu już jest postawiona piątka. Pola należy wypełnić w ten sposób, by suma liczb zawartych na polach położonych na jednej prostej równała się piętnaście; można uzyskać dziesięć piętnastek.

Wycenione ono zostało aż na sześć punktów! Ligowcy wykazali się jednak klasą: wystarczyła informacja, że można przeprowadzić dziesięć odpowiednich prostych, by wielu z nich zauważyło, iż proste mogą przechodzić nie tylko przez trzy, ale przez cztery kwadraty, co pozwala znaleźć dwie dodatkowe możliwości otrzymania sumy 15.

Nie o takie rozwiązanie chodziło jednak autorom zagadki (przypomnijmy: ogłoszonej w USA w XIX wieku, przez nikogo nie rozwiązanej). Rzecz w tym, że rozważane proste, przechodząc przez kwadraty, miały przechodzić przez ich środki.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Tego założenia nie uczyniono jednak także i w Stanach Zjednoczonych...

Zadanie z dodatkowym założeniem pozostawiamy do rozwiązania. Miłośnicy łamigłówek mają na to kolejny miesiąc.

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.