Z przyjemnością informujemy, że od połowy 1995 roku *Delta* jest dostępna również jako kwartalnik w języku angielskim w sieci INTERNET pod adresem: http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/

SPIS TREŚCI

NUMERU 5(264)

W następnym numerze:

CERN

Okładkę wykonał
Krzysztof BIESAGA

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TEX wykonała Redakcja

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Żuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1996 roku wynosi 2 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1996 r. 4 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:
   - a) jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;
   - b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnosić na konto „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 370044-16551 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8^{00} – 14^{00};
   dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:
   do 5 XII na I kwartał roku następnego,
   do 5 III na II kwartał,
   do 5 VI na III kwartał,
   do 5 IX na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 w. 2442, 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł, 20 000 zł

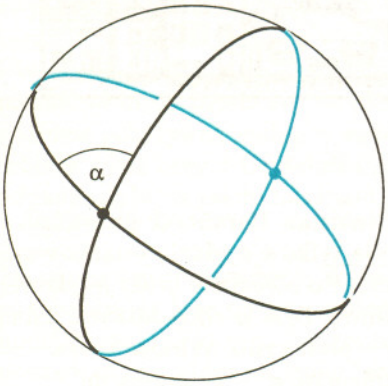
Pole trójkąta sferycznego i wzór Eulera

Marek KORDOS

Na sferze za proste uważa się jej geodezyjne. A geodezyjne jakiejś powierzchni to najmniej krzywe linie na niej. A najmniej krzywymi liniami na sferze (powierzchni kuli) są jej okręgi wielkie. Dwie takie „proste” przecinają się w dwóch antypodycznych punktach (antypodyczne punkty to takie, że łączący je odcinek przechodzi przez środek sfery) i dzielą sferę na cztery dwukąty (tak! na sferze są dwukąty). Dwukąt ma dwa kąty, ale zawsze są one równe.

Pole dwukąta o kącie α jest równe $2\alpha \cdot R^2$, gdzie R to promień sfery. Bardzo łatwo to uzasadnić. Pole dwukąta jest w oczywisty sposób proporcjonalne do jego kąta. Gdy zaś kąt wzrośnie do π, dwukąt stanie się półsferą, czyli będzie miał pole $2\pi \cdot R^2$ i już.

Dla obliczenia pola trójkąta sferycznego wygodnie będzie się zająć sferą jednostkową – wynik pomnożymy przez R^2 i będzie dobrze dla dowolnej sfery, gdyż każda sfera jest podobna do sfery jednostkowej w stosunku R.



Rys. 1

Rys. 2

Niech interesujący nas trójkąt ma kąty α, β, γ. Cała sfera (o polu 4π) to suma sześciu dwukątów – po dwa odpowiadające każdemu z kątów – minus cztery pola trójkątów, bo jest ich dwa (na rysunku 2 jeden jest czarny, a drugi kolorowy) i każdy jest przykryty trzy razy, więc dwa z nich trzeba usunąć. Oznaczając pole trójkąta przez Δ mamy

$$2 \cdot (2\alpha + 2\beta + 2\gamma) = 4\pi + 4\Delta\,.$$

Otrzymaliśmy zatem

$$\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi\,,$$

a dla dowolnej sfery to samo pomnożone przez R^2.

Ponieważ każdy wielokąt składa się z trójkątów, więc pole P n-kąta sferycznego daje się obliczyć ze wzoru

$$P = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - (n-2)\pi\,,$$

ewentualnie pomnożone przez R^2 (α_i to kąty n-kąta).

Wynika stąd bardzo sprawnie wzór Eulera. Trzeba tylko zauważyć, że wielościan wypukły ma tę własność, iż da się tak „nadmuchać”, by stał się sferą. Inaczej: oglądając go z wewnątrz widzimy jego ściany, krawędzie i boki jakby namalowane na jakiejś sferze (tak jak w starożytności na sferze widziano wszystkie gwiazdy).

Twórca współczesnej geometrii – Mikołaj Łobaczewski (1792–1856)

(artykuł zamieszczony w nr. 61 *Trybuny Ludu* z 3 marca 1956 roku przypomniany nam przez Mieczysława Karpińca)

Karol BORSUK

Wśród idei pozostawionych nam w spuściźnie przez świat antyczny, najbardziej pewnymi, i w pewnym stopniu ostatecznymi, wydają się być idee geometrii elementarnej, sformułowane przez znakomitego matematyka wczesnej epoki hellenistycznej – Euklidesa (około r. 300 przed n.e.) w dziele pt. „Elementy”. Od przeszło dwóch tysięcy lat dzieło to zachowuje swą wartość naukową i dotychczas kurs geometrii wykładany w szkole średniej w zasadzie nie wykracza poza jego zakres.

Euklides oparł wykład geometrii na niewielkiej liczbie tzw. aksjomatów przyjętych bez dowodu, starając się wyprowadzić z nich całą resztę rozwiniętej przez siebie teorii. Jak wiadomo, geometria elementarna stanowi podstawę znacznej części przyrodoznawstwa, podstawę niezmiernie pewną, nigdy bowiem bezpośrednie doświadczenie nie doprowadziło do wyników niezgodnych z twierdzeniami geometrii.

Potrzeba było niezmiernej odwagi myślenia, by zdobyć się na pogląd, że koncepcja geometrii przyjęta przez Euklidesa nie jest jedyna, lecz że obok niej postawić można koncepcje innych geometrii, przy czym nie ma pewności, która z nich lepiej opisuje zjawiska świata rzeczywistego. Ten niezmiernie rewolucyjny krok w dziejach myśli ludzkiej dokonany został przez genialnego matematyka rosyjskiego Mikołaja Łobaczewskiego, którego setna rocznica śmierci obchodzona jest w tym roku przez naukę światową.

Mikołaj Łobaczewski urodził się w roku 1792 w Niżnim Nowgorodzie (dziś Gorki) jako syn skromnego urzędnika ziemskiego. Dla czytelnika polskiego interesująca będzie może wiadomość, że ojciec Mikołaja Łobaczewskiego – Jan (Iwan) Łobaczewski pochodził z Polski. Według oświadczenia córki Mikołaja Łobaczewskiego, W. Achłopkowej, Jan Łobaczewski był „katolikiem, architektem, wychodźcą z Carstwa Polskiego”.

Całe życie spędził Mikołaj Łobaczewski w Kazaniu, gdzie ukończył szkołę średnią, a następnie (w roku 1811) uniwersytet ze stopniem magistra nauk matematyczno-fizycznych. W roku 1816, a więc jako 24-letni młodzieniec, został profesorem matematyki uniwersytetu w Kazaniu.

W tym też czasie zainteresowania jego zwracają się ku geometrii elementarnej.

Wśród aksjomatów, na których Euklides zbudował swą geometrię, występuje tzw. „postulat V", zwany też aksjomatem Euklidesa. Aksjomat ten mówi (w sformułowaniu nieco uproszczonym), że o ile w płaszczyźnie dana jest prosta i punkt na niej nie leżący, to przez punkt ten można poprowadzić w tej płaszczyźnie dokładnie jedną prostą, która prostej danej nie przecina (a więc tzw. prostą równoległą do prostej danej). Aksjomat ten był przedmiotem długotrwałych i wszechstronnych badań, przypuszczano bowiem, że jest on dla zbudowania geometrii zbyteczny, gdyż daje się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów przyjętych przez Euklidesa. Liczne próby podania dowodu tego aksjomatu, podjęte przez wielu matematyków poczynając od starożytności (Proklus), a kończąc na znakomitym matematyku francuskim wieku XIX, Legendre, zawiodły.

Również i Mikołaj Łobaczewski próbował początkowo przeprowadzić tego rodzaju dowód, lecz szybko zdał sobie sprawę z daremności tych wysiłków i powziął niezmiernie śmiałą myśl zbudowania nowej geometrii, różnej od geometrii Euklidesa, w której aksjomat Euklidesa nie byłby spełniony. W roku 1826 przedstawił on wyniki swych badań na posiedzeniu Wydziału Matematyczno-Fizycznego Uniwersytetu w Kazaniu, wygłaszając odczyt pt. „Rozważania nad podstawami geometrii". W odczycie tym przedstawił on po raz pierwszy koncepcję nowej geometrii, istotnie różnej od tradycyjnej geometrii Euklidesa. W roku 1829 ukazała się w rocznikach uniwersytetu w Kazaniu rozprawa Mikołaja Łobaczewskiego pt. „O zasadach geometrii", w której wyłożył on zarys stworzonej przez siebie teorii.

Prawdopodobnie znaczna część Czytelników niniejszego artykułu odczuła pewne rozczarowanie, dowiadując się, że wielkie odkrycie Łobaczewskiego polega na zbudowaniu teorii różniącej się od geometrii Euklidesa jedynie zaprzeczeniem jednego z aksjomatów, którego treść wydaje się być interesująca jedynie dla szczupłej liczby specjalistów. Wielu osądzi, że dzieło Łobaczewskiego było przysłowiową „burzą w szklance wody", zupełnie niewspółmierną

Zatem możemy dowodzić wzoru Eulera dla *poligonizacji sfery*, czyli podziału jej na wielokąty. Oznaczmy przez S liczbę wielokątów, przez K liczbę ich boków (pamiętajmy: każdy bok jest bokiem dwóch wielokątów) i przez W łączną liczbę ich wierzchołków (S, K, W to również, odpowiednio, liczba ścian, krawędzi i wierzchołków wielościanu).

Dowiedziemy zatem wzoru Eulera nie tylko dla wielościanów wypukłych, lecz także dla wszystkich tych, które do sfery „rozdmuchać" się dadzą.

Dodając ich pola, obliczone z uzyskanego przed chwilą wzoru, otrzymujemy

$$4\pi = 2\pi \cdot W - 2K \cdot \pi + S \cdot 2\pi .$$

Z lewej strony jest pole całej sfery. Pierwszy wyraz z prawej to suma wszystkich kątów wszystkich wielokątów – w każdym z wierzchołków składają się one na kąt pełny. $2K$ to suma „enów", liczby boków każdego z wielokątów – jest ona dwa razy większa od liczby krawędzi, co już wcześniej zauważyliśmy. Wreszcie S to liczba wielokątów; bierzemy ją 2π razy, bo we wzorze występowała dwójka.

To już koniec, bo dzieląc otrzymaną równość przez 2π otrzymujemy wzór Eulera, czyli

$$W - K + S = 2 .$$

Suplement do Barańczaka

Nie pamiętam, w jakim magazynie Stanisław Barańczak prowadził rubrykę „Książki najgorsze" – znam ją tylko z wydania książkowego. Wyszydzał tam figlarny styl, świadczące o nieuctwie braki językowe, pustosłowie, sztuczność – wszelką szmirę. Dziś ja chcę dorzucić jedną pozycję do tej niezbyt chlubnej listy – podręcznik Włodzimierza Janiaka pod tytułem *Wstęp do „Mathematica" – programu do obliczeń matematycznych*, wydany przez Wydawnictwo PLJ w Warszawie (1994).

Lektura tej książki przypomniała mi wymyśloną przeze mnie postać Profesora Idziego Tyzroba. Idzi Tyzrób zaczął swą edukację od studiów na uniwersytecie w Murzasichlu, gdzie został przyjęty po udzieleniu poprawnej odpowiedzi na pytanie „Kto tam?". Gdy okazało się, że nie umie pisać ani czytać, otrzymał dyplom magistra i zapisano go do szkoły powszechnej. Opowiadał w wiele lat potem, że te kilkanaście lat, jakie spędził w szkole na zgłębianiu elementarza i rachunków w zakresie do 100, należało do najpiękniejszych i najbardziej twórczych okresów jego życia.

Po ukończeniu szkoły powszechnej Idzi, teraz już z tytułem docenta nadzwyczajnego, wyjechał na studia doktoranckie do Milanówka, gdzie kontynuował rozpoczętą w szkole powszechnej naukę. Z biegiem lat doszedł do wspaniałych rezultatów, z których najważniejszy to odkrycie *operatorów leniwych*, znanych też pod nazwą operatorów Tyzroba. Mówimy, że A jest operatorem leniwym, gdy $A(x)$ mogłoby się równać y, gdyby mu się tylko chciało. Wprowadzenie operatorów leniwych zrewolucjonizowało całą matematykę. Gdy bowiem rozwiązujemy dowolne zadanie U, wystarczy znaleźć odpowiadający mu operator leniwy $Len(U)$.

Następnie zaś jasno widzimy, że nie ma najmniejszej potrzeby, by zadanie U miało być rozwiązane jeszcze dzisiaj i odkładamy robotę do następnego dnia. Zachodzi przy tym następujące

Twierdzenie Tyzroba (*Tyzrobian Theorem, Tyzrobische Satz, Thèoréme Tyzrobienne, Tyzrobowskaja Tieorema*): Dla każdego zadania istnieje odpowiadający mu operator leniwy.

Mimo braku wykształcenia humanistycznego (a także jakiegokolwiek innego), braku erudycji i uzdolnień, polotu, sumienności, a także elementarnej przyzwoitości – profesor Tyzrób pisywał artykuły, eseje i książki na tematy socjologiczne, filozoficzne i filatelistyczne. Gazety, w których publikował Profesor, były kupowane już od wczesnych godzin rannych, a jego książki stały się podporą niejednej półki bibliotecznej!

Tu (uwaga, uwaga!) koniec żartów. Program (a raczej *pakiet*) *Mathematica* jest jednym z najlepszych i najbardziej uniwersalnych programów do matematyki teoretycznej, zarówno na poziomie szkolnym, uniwersyteckim, jak i politechnicznym. Został stworzony przez Stephena Wolframa i chyba każdy, kto z tego programu korzysta, zna oryginalny podręcznik Wolframa.

Nie sprawdziłem, ale Włodzimierz Janiak jest chyba jednym z uczniów Idziego Tyzroba. Po pierwsze, wydana pod jego (p. Janiaka) nazwiskiem książka „Wstęp do Mathematica” jest zwykłym plagiatem podręcznika Wolframa. To jest obecnie karalne. Spróbujmy jednak wybaczyć Włodzimierzowi Janiakowi i Wydawnictwu PLJ to naruszenie prawa autorskiego. Akurat to można od biedy przeliczyć na pieniądze i liczę na to, że sprawa znajdzie pozytywny epilog w sądzie. Gorsze jest to, że Autor kpi sobie w żywe oczy z Czytelnika – trudno znaleźć inne określenie na oddanie stylu, w jakim napisana jest ta książka. Stosowne przykłady – niżej.

Jak zły uczeń na klasówce, Włodzimierz Janiak nie rozumie, co przepisuje. A że nie zna matematyki nawet w zakresie szkoły podstawowej, efekt tego ściągania można streścić znanym powiedzeniem, które najlepiej brzmi po rosyjsku: „i smieszno, i straszno”. Wydaje się niewiarygodne, żeby Autor(?) książki o matematyce wyższej miał kłopoty z materiałem VI klasy szkoły podstawowej. A jednak! Wymienię tylko co bardziej pikantne przykłady.

Zamiast „rozłóż liczbę na czynniki pierwsze” pan Janiak używa na stronie 36 zwrotu „zredukuj iloczyn do składników”, a na stronie 157 „podaj listę czynników i ich wykładniki”. Wynik to „podzielniki podstawowe” (str. 301). Obliczenia z dokładnością do iluś tam cyfr po przecinku nazywa „z precyzją do n dekad” (str. 41 i wiele razy dalej), najzwyklejszy czworokąt to „kwadraterala” lub „kwadratela” (str. 127 i dalsze), reszta z dzielenia k przez n nazywana jest „pozostałością” lub „pozostałościami” (str. 155, 302), zamiast „w układzie pozycyjnym” mamy PRL-owsko brzmiący zwrot „na bazie” (str. 155). Ciekawe jest też określenie wieloboków – to „wielonarożne figury geometryczne” (str. 259). W wyrażeniu postaci C_b^a liczba a jest u Włodzimierza Janiaka „nadpisem”, b – „podpisem”. Ciekawe, jak Autor zrobiłby „wykres trójwymiarowy na płaszczyźnie” (str. 179)! Konia z rzędem temu, kto domyśli się, że „wykreśl wszystkie człony między licznikiem i mianownikiem” znaczy „skrócić ułamek”, a „rozłącz człony z najprostszym mianownikiem” to po prostu „rozłóż na ułamki proste”. Zaś pół królestwa i rękę córki oferowałbym temu, kto

z przemawiającymi do wyobraźni odkryciami Kopernika, Newtona, Darwina czy Einsteina. Należy jednak wziąć pod uwagę, że odkrycie Łobaczewskiego wstrząsnęło najbardziej ustalonymi poglądami, uważanymi za prawdy tak bezsporne, że wątpienie o nich wydawało się niedorzecznością.

Obecnie przyzwyczailiśmy się do myśli, że jakkolwiek doświadczenie potwierdza stale prawdziwość tez geometrii Euklidesa, to jednak można przypuszczać, że fakt ten nie tyle jest następstwem absolutnej zgodności tej teorii z rzeczywistością, ile jedynie tego, że odtwarza ona rzeczywistość z tak dobrym przybliżeniem, że odchyleń tych nie dostrzegamy. W czasach jednak Łobaczewskiego myśl, że geometria Euklidesa opisuje jedynie w przybliżeniu własności przestrzeni, w której odbywają się zjawiska świata materialnego, i że może istnieć geometria istotnie różna od geometrii Euklidesa – była niezmiernie rewolucyjna. Wielki matematyk niemiecki Gauss, który w początku XIX wieku, niezależnie od Łobaczewskiego, doszedł do podobnych koncepcji, zrezygnował z ich opublikowania z obawy przed krytyką, którą mogłyby wywołać idee tak różne od ustalonych poglądów.

Obawy Gaussa były uzasadnione. Wystąpienie Łobaczewskiego nie spotkało się z uznaniem współczesnych. Uważano je za dziwactwo i nonsens pozbawiony naukowego znaczenia i przeważnie pomijano je milczeniem lub zbywano złośliwymi docinkami. Podobnie zresztą świat ówczesny odniósł się do opublikowanych w parę lat później prac wybitnego matematyka węgierskiego J. Bolyaia, który niezależnie od Łobaczewskiego zbudował geometrię opartą na zaprzeczeniu aksjomatu Euklidesa. Obojętność współczesnych i złośliwa krytyka zniechęciły Bolyaia do dalszych badań nad geometrią i spowodowały jego odsunięcie się od działalności naukowej. Natomiast Łobaczewski nie załamał się i przez całe swe życie walczył uparcie o zwycięstwo swych idei. Ogłosił on w latach 1829–1855 kilka rozpraw, w których poszerzał i coraz głębiej uzasadniał odkrytą przez siebie nową geometrię, wskazując poza tym na jej zastosowania (w rachunku całkowym). Przypominał Kopernika, pracując w odosobnieniu, daleko od głównych ośrodków myśli naukowej, rozwijając z godnym podziwu hartem ducha swą nową, sprzeczną z ustalonymi poglądami, rewolucyjną koncepcję. Ostatnią swą pracę pt. „Pangeometria” dyktuje u schyłku swego życia (rok 1855) schorowany i prawie niewidomy. Było to w momencie, w którym triumf jego idei był już bliski.

Koncepcja Łobaczewskiego stanowiła pierwszy wielki wyłom w poglądach na istotę geometrii, otwierający nowe, szerokie horyzonty. Po tym wyłomie wkrótce nastąpiły dalsze.

Niech mi będzie wolno zacytować za matematykiem radzieckim W. Kostinem, matematyka angielskiego W. Clifforda, który w następujący sposób charakteryzuje znaczenie dzieła Łobaczewskiego dla naukowej myśli współczesnej: „Czym był Vesale dla Galena, czym Kopernik dla Ptolemeusza, tym był Łobaczewski dla Euklidesa. Między Kopernikiem i Łobaczewskim istnieje ciekawe podobieństwo – obydwaj są z pochodzenia Słowianami, każdy z nich dokonał rewolucji w poglądach naukowych i obie te rewolucje mają równie doniosłe znaczenie, są to bowiem rewolucje w naszym pojmowaniu wszechświata."

W artykule tym nie może być mowy o bliższym wniknięciu w zbudowaną przez Łobaczewskiego geometrię (zwaną czasem hiperboliczną). Poprzestanę tu więc na paru uwagach, które rzucą może trochę światła na różnice oraz na podobieństwa między geometrią Łobaczewskiego a geometrią Euklidesa.

Wspomniałem już, że układ aksjomatów, na którym opiera się geometria Łobaczewskiego, różni się od układu przyjętego przez Euklidesa jedynie zastąpieniem tzw. aksjomatu Euklidesa przez jego zaprzeczenie. Wynika stąd, że wszystkie te twierdzenia geometrii Euklidesa, których dowody nie opierają się na aksjomacie Euklidesa, obowiązują też w geometrii Łobaczewskiego. A więc obie te geometrie mają dość obszerną klasę wspólnych tez, klasę stanowiącą tzw. geometrię absolutną. Do twierdzeń geometrii absolutnej należy np. twierdzenie, że suma dwóch boków w trójkącie jest większa od boku trzeciego. Podobnie jest z tak zwanymi cechami przystawania trójkątów, znanymi z geometrii elementarnej.

By dać przykład twierdzeń geometrii Łobaczewskiego nie występujących w geometrii Euklidesa, wspomnijmy, że z zaprzeczenia aksjomatu Euklidesa wynika już (przy pomocy pozostałych aksjomatów), że w płaszczyźnie przez każdy punkt nie położony na prostej danej przeprowadzić można zawsze, nie jedną, jak w geometrii Euklidesa, ale nieskończenie wiele prostych, które prostej danej nie przecinają. Warto też wspomnieć o niektórych istotnych różnicach obu geometrii w zakresie własności trójkątów. Wiadomo mianowicie, że w geometrii elementarnej (tj. geometrii Euklidesa),

zgadłby, że „długość liczby (liczba pozycji) na bazie b" to po prostu liczba cyfr danej liczby w układzie pozycyjnym o podstawie b. Jeśli przetłumaczymy na język polski zdanie, które w przekładzie pana Janiaka brzmi: „Wartość liczbowa z nie znanego wyniku może być obliczona z zadaną precyzją", otrzymamy po prostu: „Dokładny wynik nie jest znany, można go jednak obliczyć z dowolną dokładnością".

Wreszcie, tzw. wieczny kalendarz (program wyznaczający dzień tygodnia, przypadający w danym dniu roku) opisany jest jako

„zunifikowane obliczenie kalendarza przez założenie, że kalendarz jest ogólniem[!] pierwiastków mieszanych prezentowanych przez listę."

Ponieważ Autor ma kłopoty z matematyką szkoły podstawowej, łatwo sobie wyobrazić, co dzieje się, gdy przechodzi do licealnej i jeszcze wyższej. Czasami, oczywiście, coś się zgadza, ale każda strona tekstu dowodzi, że Autor ma o matematyce takie pojęcie, jak ja o języku hiszpańskim (byłem kiedyś trzy tygodnie w Madrycie i nauczyłem się słów potrzebnych do biologicznego przeżycia: pan, cerveza, mujer, aiuto, domani, pardon, beefsteak, Hände weg, paszoł won ty). A propos – pan Janiak być może zna hiszpański (kastylijski, a może i kataloński), bo stałą Catalana (po angielsku: Catalan constant) nazwał stałą katalońską.

Ale nie tylko z powodu matematyki pan Włodzimierz Janiak nie powinien zostać promowany do VIII klasy szkoły podstawowej. Oto próbki stylu, jakim posługuje się Autor podręcznika dla uczniów, studentów i młodych naukowców:

„Kiedykolwiek zaistnieje x, Mathematica zamieni liczbę x na 5" (str. 29),
„Dobroć dopasowania" (krzywych do danych, str. 201),
„odsłuch" (str. 137),
„Funkcje tego pakietu nie tylko udowadniają istnienie, lecz także tworzą świadectwo, że dana liczba jest liczbą pierwszą (np. odpowiednio krótki zbiór danych), żeby udowodnić primality (bycie liczbą pierwszą)", str. 270,
„Rozwiązując równanie algebraiczne, np.(...), każde rozwiązanie względem x jest liczbą" (str. 62) – uff, to „rozwiązanie rozwiązujące równanie"...,
„Podając inną wartość dla punktu początkowego, wartość minimum lokalnego może być inna" (str. 64),
„Arytmetyka może być osadzona na dowolnej bazie od 2 do 16 i można użyć każdy z kilku schematów" (str. 272).

Autor uważa, że zna język angielski dobrze, a Czytelnicy wcale. I objaśnia: „alpha, beta sigma i lambda oznaczają alfa, beta, sigma i lambda" (str. 197 – zachowałem błędy drukarskie oryginału). I bardzo dobrze, jak mawiał w kabarecie „Owca" Jerzy Dobrowolski.

Takie będą Rzeczypospolite, jakie ich młodzieży chowanie. Potencjalnym odbiorcą podręcznika Włodzimierza Janiaka będzie uczeń lub student. Czego się oni nauczą? Zdobędą trochę wiedzy o programie *Mathematica* – bo przecież dla wielu z nich polskopodobny język, jakim posługuje się pan Janiak, będzie bardziej zrozumiały niż angielski. Zrozumieją, że nie warto niczego robić porządnie, że tzw. dobre imię to wymysł zgniłych intelektualistów, że prawo jest po to, aby sobie z niego kpić, że tylko frajerzy uczą się, bo przecież forsę można zrobić na oszustwach i wyłudzeniach. I tak wejdziemy w XXI wiek. Powodzenia, młodzi! Podziękujcie Włodzimierzowi Janiakowi i wydawnictwu PLJ (Warszawa, ul. Uniwersytecka 1 m. 13, tel. (22)-659-42-83).

Michał SZUREK

Patrz w niebo

Wszystkie planety obiegają Słońce w tym samym kierunku – fakt ten wydaje się tak banalny, że nie poświęca mu się niemal żadnej uwagi. Skoro Układ Słoneczny powstał z jakoś wirującej pierwotnej mgławicy, to nic dziwnego, że nadal wszystko obraca się jak poprzednio.

Ale nie jest tak z rotacją samych planet – trzy rotują w kierunku wstecznym, tzn. przeciwnie do kierunku obiegu wszystkich planet: Wenus, Uran i Pluton. W przypadku Urana jest to akurat dość formalne, bo jego oś obrotu leży niemal w płaszczyźnie orbity.

Nie jest też tak z kierunkiem obiegu satelitów planet. Wprawdzie znaczna ich większość obiega swoje planety ruchem prostym, ale Saturn ma jednego satelitę o ruchu wstecznym (Phoebe), a Jowisz cztery (Ananke, Carme, Pasiphae i Sinope). Nawiasem mówiąc te cztery nazwy dla satelitów Jowisza zostały swego czasu specjalnie dobrane, wszystkie kończą się na „e". W ogólności jednak nie każdy satelita o nazwie kończącej się na „e" ma ruch wsteczny. Przyczyny wstecznego ruchu satelitów planet są do dziś właściwie nie znane.

Okazuje się, że jest też przykład ruchu wstecznego w większej skali. Mianowicie w Warkoczu Bereniki leży galaktyka M64 (a więc dość bliska i jasna, skoro znalazła się w katalogu Messiera), w której obszar centralny o promieniu rzędu 1 kpc rotuje w przeciwną stronę niż cała galaktyka. Stwierdzono to kilka lat temu w wyniku radiowych obserwacji neutralnego wodoru w tej galaktyce, prowadzonych za pomocą sieci radioteleskopów Very Large Array w Nowym Meksyku (USA) oraz w obserwatorium w Westerborku (Holandia). Fala 21 cm, emitowana przez wodór, jest pozornie dłuższa, gdy obszar wodoru oddala się od obserwatora, a krótsza, gdy zbliża – jest to efekt Dopplera powodujący również poczerwienienie lub poniebieszczenie światła widzialnego pochodzącego z ruchomego źródła. Właśnie w M64 owo radiowe poczerwienienie i poniebieszczenie względnie małej części centralnej jest przeciwne niż całości galaktyki. Przypuszcza się, że przeciwbieżna rotacja jest skutkiem tego, że galaktyka M64 powstała z dwóch innych rotujących w przeciwne strony. Co prawda, nikt dotychczas jeszcze tego porządnie nie sprawdził, np. poprzez numeryczne symulacje.

Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania F 427. Czas spadania obliczymy całkując równanie

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

(x jest chwilową odległością Ziemi od Słońca)

$$t = \int_h^R \frac{\mathrm{d}x}{v}.$$

Z zasady zachowania energii

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{x} = -\frac{Gm}{h}$$

otrzymujemy prędkość

$$v = -\sqrt{\frac{2GM(h-x)}{hx}}.$$

Tak więc

$$t = h\sqrt{\frac{h}{2GM}}\int_{R/h}^{1}\sqrt{\frac{y}{1-y}}\,\mathrm{d}y.$$

Po obliczeniu całki otrzymujemy

$$t = h\sqrt{\frac{h}{2GM}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{R}{h}} - \sqrt{\frac{R}{h}\left(1-\frac{R}{h}\right)}\right).$$

Ponieważ stosunek R/h jest bardzo mały, drugi i trzeci wyraz są praktycznie zaniedbywalne, a zatem

$$t \approx \frac{\pi h}{2}\sqrt{\frac{h}{2GM}} \approx 64{,}5 \text{ dnia}.$$

Inne rozwiązanie: Trajektoria spadającej Ziemi jest elipsą zdegenerowaną do odcinka, którego jeden koniec znajduje się na orbicie Ziemi, a drugi w środku Słońca. Czas spadania jest równy połowie okresu ruchu po tej elipsie. Duża półoś tej elipsy jest równa połowie promienia orbity Ziemi. Zgodnie z trzecim prawem Keplera czas spadania wyrażony w latach jest równy

$$t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} \text{ lat},$$

czyli nieco więcej niż dwa miesiące.

suma kątów w dowolnym trójkącie jest równa 180 stopni. W geometrii absolutnej twierdzenie to nie daje się dowieść, można natomiast okazać, że suma kątów trójkąta jest bądź równa 180 stopni, bądź mniejsza od 180 stopni. Zależnie, która z tych ewentualności zachodzi, mamy geometrię Euklidesa lub geometrię Łobaczewskiego.

Jeżeli jednak rozmiary trójkąta są dostatecznie małe, to suma jego kątów staje się bardzo bliska 180 stopniom. Ze wzrostem trójkąta odchylenie to staje się coraz większe. Fakt ten pozwala szukać odpowiedzi doświadczalnej na pytanie, czy świat zbudowany jest według geometrii Euklidesa, czy może według geometrii Łobaczewskiego. W tym celu zmierzmy sumę kątów dowolnego trójkąta. Jeżeli obowiązuje geometria Euklidesa, suma ta powinna wynosić dokładnie 180 stopni, jeżeli obowiązuje geometria Łobaczewskiego – powinna być mniejsza od 180 stopni. Najbardziej jednak precyzyjne pomiary nie są całkowicie dokładne, a więc za ich pomocą nigdy nie możemy stwierdzić, że suma kątów jest dokładnie równa 180 stopniom. Doświadczenie więc tego rodzaju nie pozwoli z całą pewnością stwierdzić, że obowiązuje geometria Euklidesa. Natomiast należy liczyć się z możliwością, że mierząc trójkąty dostatecznie duże (o wymiarach kosmicznych), w sposób bardzo dokładny, będzie można na tej drodze stwierdzić, że geometria Euklidesa w świecie rzeczywistym nie obowiązuje. Nowoczesne koncepcje fizyczne (teoria względności) przyjmują, że geometria Euklidesa daje dobre przybliżenie rzeczywistości jedynie w obszarach niezbyt wielkich. W skali kosmicznej należy posługiwać się inną geometrią. Jakkolwiek nie jest nią geometria Łobaczewskiego, to jednak Łobaczewski był tym, który stwarzając swą geometrię pierwszy wyszedł świadomie i konsekwentnie poza koncepcję przestrzeni pozostawioną nam przez świat antyczny.

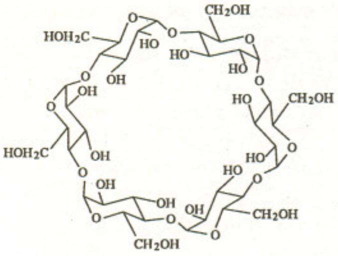
Stworzenie nowej geometrii jest dziełem, które imię Mikołaja Łobaczewskiego ozdobiło blaskiem nieśmiertelnej sławy. Dlatego też w artykule tym mówiłem tylko o tym jego dziele. Warto jednak wspomieć, że w ciągu swego pracowitego życia w skromnym środowisku prowincjonalnego uniwersytetu genialny ten człowiek napisał szereg wartościowych prac również z innych działów matematyki (algebry, teorii szeregów, rachunku całkowego). Ponadto nie uchylał się od prac organizacyjnych i administracyjnych, pełniąc przez blisko 20 lat obowiązki rektora Uniwersytetu w Kazaniu. Umarł 24 lutego 1856 roku.

Kompleksy cyklodekstryn,

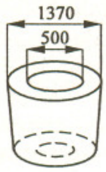
czyli od pojedynczej cząsteczki do układów molekularnych

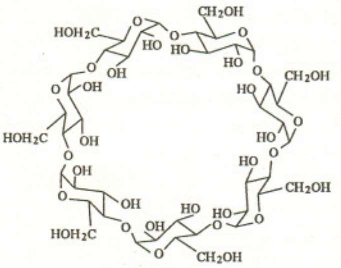
Helena DODZIUK

Obecnie coraz większe znaczenie zyskuje badanie obiektów, które są zbudowane z dwóch lub więcej cząsteczek chemicznych nie związanych standardowym wiązaniem chemicznym. Połączenia takie są obiektem badań nowego, burzliwie rozwijającego się działu – chemii supramolekularnej. Stworzenie podstaw tej dziedziny przez Pedersena, Crama i Lehna zostało w 1987 roku uhonorowane Nagrodą Nobla.

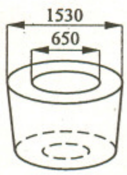


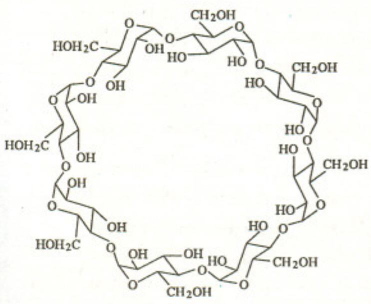
(1)



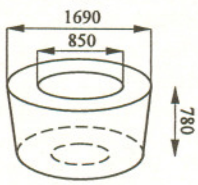


(2)



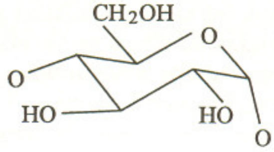


(3)



Rys. 1. Wzory α-, β- i γ-cyklodekstryn oraz ich schematyczna budowa. Na rysunku podano ich wymiary w pikometrach.

Cyklodekstryny (CD) są to makrocykliczne, czyli wielkocząsteczkowe, związki cukrowe otrzymywane przez enzymatyczną degradację skrobi. Najbardziej znane są α-, β- i γ-CD o wzorach (1), (2) i (3) z rysunku 1, zbudowane odpowiednio z 6, 7 lub 8 połączonych jednostek glukozydowych (rys. 2).



Rys. 2. Jednostka glukozydowa.

β-CD (2) jest podstawowym produktem przerobu skrobi przez bakterie *Bacillus macerans*, natomiast α- i γ-CD (1) i (3) to właściwie błędy w sztuce, produkty uboczne tej reakcji. Obecnie potrafimy tak sterować procesem otrzymywania CD dobierając warunki reakcji, że uzyskuje się znaczne ilości α- i γ-cyklodekstryn. Ostatnio otrzymano CD składające się z pięciu jednostek glukozydowych, choć wcześniej uważano, że jest to niemożliwe, natomiast większe niż γ-CD są mniej zbadane i rzadziej stosowane, ponieważ nie są wytwarzane na skalę przemysłową.

Jak widać ze wzorów (1)–(3), związki te mają „wnękę", do której mogą „wchodzić" inne, mniejsze cząsteczki. Tworzą się wtedy tzw. kompleksy inkluzyjne, w których związanie cząsteczki gospodarza, czyli cyklodekstryny, z cząsteczką gościa nie ma charakteru standardowego wiązania chemicznego. Ze względu na łatwość tworzenia kompleksów zarówno z niepolarnymi gazami szlachetnymi i węglowodorami nasyconymi, jak również z silnie polarnymi cząsteczkami (kwasy karboksylowe i sole), związki te mają duże znaczenie teoretyczne i praktyczne. Według ładnego sformułowania Stoddarda są one „uniwersalnymi pojemnikami molekularnymi zarówno dla związków organicznych, jak i nieorganicznych, organometalicznych oraz metalorganicznych, które mogą być obojętne lub występować w postaci kationu, anionu, a nawet rodnika". (Rodnik jest to układ z co najmniej jednym, niesparowanym elektronem.) W zjawisku inkluzji podstawową rolę odgrywa tzw. rozpoznawanie molekularne, ponieważ w tworzeniu kompleksów z CD istotne jest wzajemne dopasowanie kształtów cząsteczek oraz odpowiadających im potencjałów elektrostatycznych. W związku z tym ze względu na przybliżone rozmiary wnęk (przedstawione na rysunku 1), na ogół większe cząsteczki tworzą bardziej trwałe kompleksy z β- niż z α-CD, ich kompleksy zaś z γ-CD są trwalsze niż z β-CD. Kompleksy takie nie są na ogół bardzo trwałe. Dość łatwo rozpadają się one na czynniki składowe, co często wykorzystuje się.

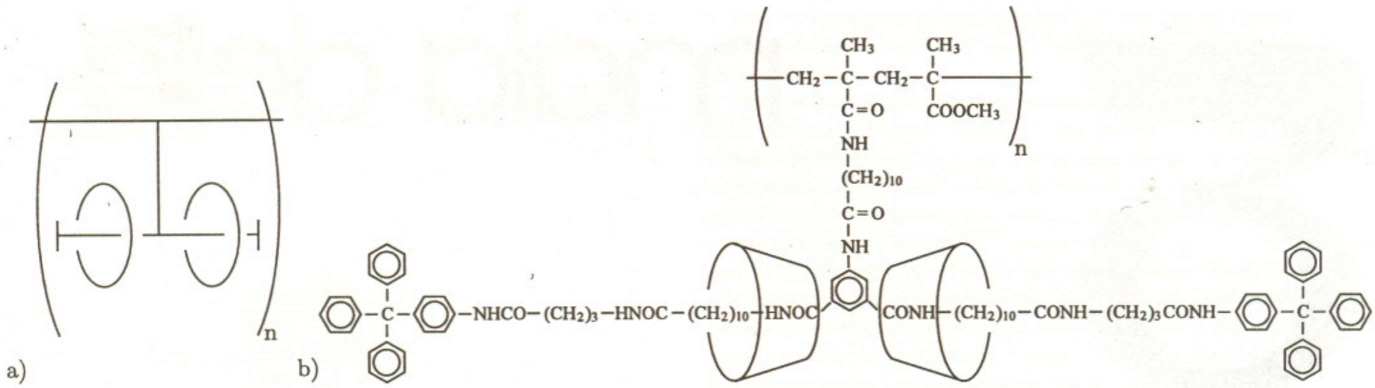
Znaczenie teoretyczne CD oparte jest na zastosowaniu tworzenia kompleksów tych związków do modelowania reakcji enzymatycznych. Natomiast ich burzliwie rozwijające się zastosowania w przemyśle kosmetycznym, farmaceutycznym, agrochemicznym i spożywczym obejmują, między innymi, stosowanie wrażliwych na światło i wpływy atmosferyczne herbicydów oraz leków w postaci kompleksów z CD, wytwarzanie nierozpuszczalnych w wodzie leków w dobrze rozpuszczalnej formie oraz rozdział mieszanin związków. Na przykład, amatorów herbaty Earl Grey zainteresuje zapewne fakt, że substancje aromatyzujące są w niej zawarte w postaci kompleksów cyklodekstrynowych. Podobnie nitroglicerynę (rys. 3), która jest ważnym lekiem nasercowym, a jednocześnie często używanym środkiem wybuchowym, również stosuje się w postaci takich kompleksów.

$$\begin{array}{l} CH_2ONO_2 \\ | \\ CHONO_2 \\ | \\ CH_2ONO_2 \end{array}$$

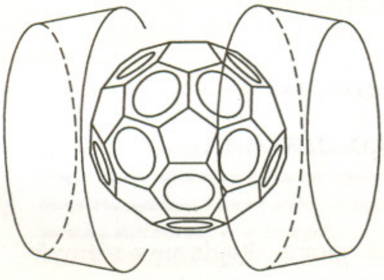
Rys. 3. Wzór chemiczny nitrogliceryny.

Oto kilka ciekawych przykładów kompleksów CD:

I. Kompleksy CD mogą mieć postać długich łańcuchów „przeciągniętych" przez środek cyklodekstryny. Przykładem tego typu wielokrotnie skompleksowanego



Rys. 4. Łańcuchy przeciągnięte przez cyklodekstryny; a) schemat, b) wzór.

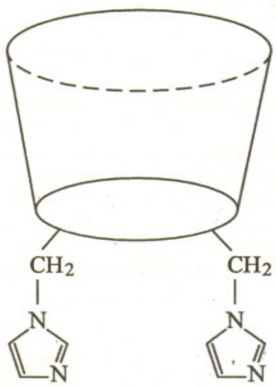


Rys. 5. Kompleks fullerenu z γ-cyklodekstryną.

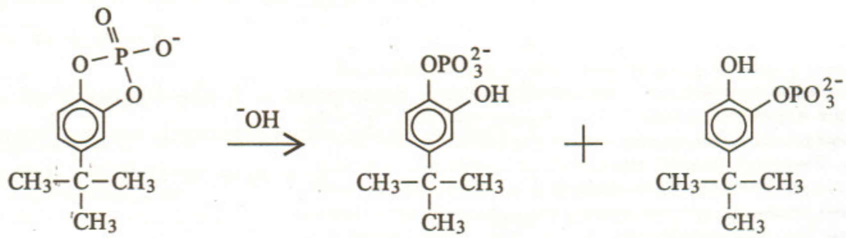
związku jest polimer (przedstawiony na rysunku 4), w którym duże podstawniki na końcu łańcuchów zapobiegają „ześlizgnięciu się" cyklodekstrynowych „obrączek".

II. Jedna cząsteczka gościa może być wspólna dla dwóch CD. Dzieje się tak w przypadku kompleksu przedstawionego na rysunku 5, który to kompleks zbudowany jest z wysokosymetrycznego fullerenu C_{60} z γ-CD.

III. Jak wspomniano, CD i ich pochodne są również używane jako modele enzymów. I tak, na przykład, CD z rysunku 6 wpływa na przebieg reakcji hydrolizy związku z rysunku 7. W nieobecności CD w wyniku tej reakcji powstaje mieszanina związków z rysunków 8 i 9, natomiast po jej dodaniu reakcja ulega przyspieszeniu, przy czym tworzy się jedynie związek z rysunku 9. A więc w tym przypadku CD pełni również rolę katalizatora. Znane są przykłady, gdy użycie CD jako katalizatora zwiększa szybkość reakcji setki tysięcy razy.



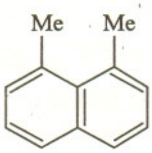
Rys. 6. Cyklodekstryna jako model enzymu.



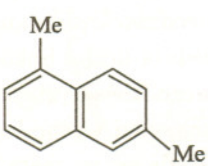
Rys. 7 Rys. 8 Rys. 9

IV. Na ogromną rolę wzajemnego dopasowania cząsteczek gospodarza i gościa w procesie kompleksowania, które nosi nazwę rozpoznawania molekularnego, wskazuje wysoka selektywność kompleksowania różnych dimetylonaftalenów. Okazuje się mianowicie, że kompleks związku z rysunku 10 z β-CD (2) jest około 100 razy silniejszy niż analogiczny kompleks związku z rysunku 11.

Tak więc kompleksy CD stanowią przykład układów supramolekularnych, tzn. układów cząsteczek, które nie są związane kowalencyjnymi wiązaniami chemicznymi. Na przykład, wiązanie w kompleksie CD z takim węglowodorem, jak związek z rysunku 10, powstaje dzięki bardzo licznym, aczkolwiek bardzo słabym, oddziaływaniom dyspersyjnym, które nie mają kierunkowego charakteru. W innych układach supramolekularnych kompleksowanie zachodzi dzięki tworzeniu wiązań wodorowych. Grają one istotną rolę w organizmach żywych. W przypadku układów supramolekularnych zbudowanych z większej liczby cząsteczek mówimy o zjawisku asocjacji. Ich badanie pozwala na lepsze zrozumienie oddziaływań międzycząsteczkowych i roli, jaką pełnią w zjawiskach asocjacji, modelowaniu procesów katalizy enzymatycznej, transportu przez błony biologiczne itp. A więc są one istotne dla zrozumienia molekularnej podstawy wielu procesów życiowych. Jednocześnie, jak wspomniano powyżej, kompleksy CD znalazły również wiele zastosowań praktycznych.



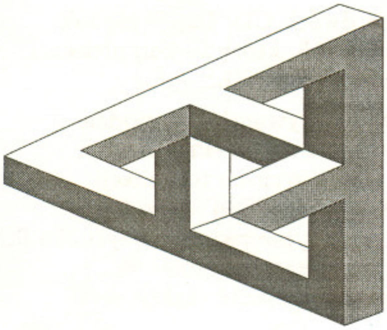
Rys. 10



Rys. 11

Autorka dziękuje wydawnictwu VCH Publishers, New York, za zezwolenie na wykorzystanie rysunku 1 z książki H. Dodziuk „Modern Conformational Analysis. Elucidating Novel Molecular Structures", która ukazała się w 1995 r.

Oto nowy, atrakcyjny *Znajomy Wielościanu O Siedmiu Krawędziach*, o którym to wielościanie była mowa w $\delta 4/1996$. Mianowicie



wielościan bez trójkątnej ściany i bez trójściennego naroża.

Przypominamy, że krąg towarzyski, o którym jest mowa, składa się z różnych matematycznych obiektów, które nie istnieją, bo nie mogą (i spokojnie godzą się z tym faktem).

W tym, o czym będzie mowa dalej, wykorzystamy (raz, ale dobrze) wzór Eulera: jeśli wielościan wypukły ma S ścian, K krawędzi i W wierzchołków, to

$$S - K + W = 2\,.$$

W twierdzeniu Eulera mówi się o wielościanie wypukłym. Z tego wyprowadzamy nieistnienie tytułowego wielościanu. Pozostaje pytanie, czy istnieje wielościan niewypukły nie mający ani trójkątnej ściany, ani trójściennego naroża. Może Czytelnicy znają taki wielościan ?

Oznaczmy teraz przez s_i liczbę i-kątnych ścian rozpatrywanego wielościanu i przez w_i liczbę jego i-ściennych naroży. Wówczas

$$s_3 + s_4 + \ldots = S \quad \text{i} \quad 3s_3 + 4s_4 + \ldots = 2K$$

oraz

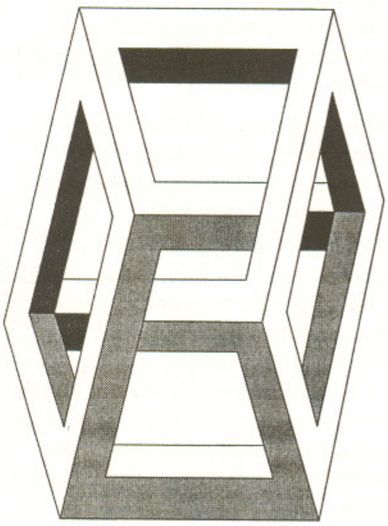
$$w_3 + w_4 + \ldots = W \quad \text{i} \quad 3w_3 + 4w_4 + \ldots = 2K\,.$$

Obliczając stąd $4S$ i $4W$ otrzymujemy

$$s_3 - s_5 - 2s_6 - 3s_7 - \ldots = 4S - 2K$$

i

$$w_3 - w_5 - 2w_6 - 3w_7 - \ldots = 4W - 2K\,.$$



Dodając to stronami i wstawiając, zgodnie ze wzorem Eulera, 8 w miejsce $4S - 4K + 4W$ dostajemy ostatecznie

$$s_3 + w_3 = 8 + (s_5 + w_5) + 2(s_6 + w_6) + 3(s_7 + w_7) + \ldots \geq 8\,.$$

Nie tylko więc nie ma wielościanu wypukłego bez trójkątnej ściany i trójściennego naroża, lecz w sumie musi być takich ścian i takich naroży co najmniej 8. To minimum realizuje czworościan, który ma cztery takie ściany i cztery takie naroża, sześcian (0 i 8) i ośmiościan (8 i 0).

Miłośnikom *Znajomych Wielościanu O Siedmiu Krawędziach* polecamy nowy trop. Poszukiwać można wielościanu, w którym średnia liczba boków ściany przekracza liczbę 6. Podobnie, chyba do tego samego towarzystwa należy wielościan o większej od sześciu średniej liczbie krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Kto wie, może Klub ZWOSKu będzie się rozrastał szybciej niż Klub 44?

Marek KORDOS

Ks.Piotr Tomasik

Warszawa, 13 marca 1996 r.

Szanowny Pan
Marek Kordos,
Redaktor Naczelny
Miesięcznika *Delta*

Szanowny Panie!

W numerze 3/1996 *Delty* ukazał się Pański artykuł pt. *Początek dzisiejszego świata*. W artykule tym znalazło się m.in. następujące stwierdzenie: *Otwarty ruch protestancki rozpoczął się wystąpieniem Marcina Lutra 31 października 1517 roku; potem była już lawina protestu przeciw przestarzałej i skorumpowanej strukturze Kościoła katolickiego. Jego odpowiedzią był sobór trydencki (1543-1563), który postanowił zaangażować Kościół głębiej w życie wiernych (np. ustanowił sakrament małżeństwa), a w szczególności nakazał najwyższą wagę przywiązywać do kształcenia młodzieży.* (s.1). Pomijam fakt, że zdanie to, jak i pozostałe passusy dotyczące Kościoła, mają silne zabarwienie emocjonalne, wszak nie jest Pan historykiem i ma Pan, jak sądzę, prawo do uprawiania emocjonalnej publicystyki. W zdaniu tym znalazły się jednak dwie nieścisłości:

1. Sobór Trydencki został otwarty 13 grudnia 1545 roku[1], zaś jego obrady zostały zamknięte 4 grudnia 1563 roku[2]. Podaje Pan błędną datę rozpoczęcia soboru.
2. Dużo większym błędem jest informacja dotycząca ustanowienia przez Sobór Trydencki sakramentu małżeństwa. Aby podważyć tę informację wystarczy podać „szkolny" przykład: król angielski Henryk VIII ubiegał się u papieża o stwierdzenie nieważności małżeństwa z Katarzyną Aragońską w latach dwudziestych XVI wieku, co zakończyło się odmowną decyzją Klemensa VII z roku 1531[3]. Ostateczny wyrok w procesie małżeńskim króla zapadł w roku 1534, a w parę miesięcy później Henryk VIII zerwał stosunki z Rzymem, zaś parlament ogłosił *Akt supremacji*[4]. Skoro tak, to sakrament małżeństwa istniał już przed rokiem 1545, a więc przed rozpoczęciem Soboru Trydenckiego. A zatem sobór ów nie mógł ustanowić tego sakramentu. Oczywiście, nie jest to jedyny dowód na nieścisłość Pańskiego stwierdzenia. Wystarczy sięgnąć do podstawowego zbioru orzeczeń dogmatycznych Kościoła. O małżeństwie jako ustanowionym przez Boga naucza I Synod w Toledo (400 r.)[5]. Papież Leon I w *Liście do Rusticusa* pisze w roku 458, że *małżeństwo jest świętą rzeczą*[6]. Natomiast Sobór Florencki (1438-1445) w *Dekrecie dla Ormian* przypomina: *Siódmym sakramentem jest małżeństwo, będące obrazem związku Chrystusa z Kościołem*[7].

Wyrażam nadzieję, że powyższe nieścisłości zostały w Pańskim artykule umieszczone pomyłkowo. Zwracam się z prośbą o zamieszczenie sprostowania tych błędów.

Z poważaniem

[1] H.Tuchle, C.A.Bouman, *Historia Kościoła*, tł. J.Piesiewicz, Warszawa 1986, s.117.
[2] Tamże, s.127.
[3] Tamże, s.70-71.
[4] Tamże, s.72.
[5] *Breviarium fidei. Wybór doktrynalnych wypowiedzi Kościoła*, Warszawa 1989, nr 590. Dalej używam skrótu BF.
[6] BF nr 591.
[7] BF nr 593.

Wielebny Księże,

serdecznie dziękuję za list i przepraszam za swoją niedbałość, która go wywołała.

Mam nadzieję, że zechce Ksiądz przyjąć zapewnienie, iż tematem mojego artykułu nie były problemy religii, a tylko dlatego znalazły się tam uwagi dotyczące reformacji i kontrreformacji, że oba te zjawiska miały wielki (sądzę zresztą, iż pozytywny) wpływ na rozwój oświaty. Nie znajduję też w sobie żadnych nagannych emocji związanych z tą problematyką, ale w takiej sprawie można się łatwo pomylić – przepraszam więc.

Rok 1543 zamiast 1545 to zwykła pomyłka przy przepisywaniu, informację o sakramencie małżeństwa znalazłem w popularnej *Historii Polski* Topolskiego.

Jeszcze raz pragnę przeprosić za swoją niesolidność i proszę o wzięcie pod rozwagę, że nie miałem (i nie mam) najmniejszego zamiaru wypowiadać się w sprawach religijnych. Nie sposób jednak nie zauważyć, że pisząc o dziejach jakiejś myśli w Europie nie można obyć się bez choćby wzmiankowania o chrześcijaństwie.

Licząc na wyrozumiałość, z wyrazami szacunku

Marek Kordos

Zadania

Wszystkie zadania z matematyki dotyczą gry w orła i reszkę, w której stawka wynosi 1 zł i do której zasiadło dwóch graczy: I z kapitałem 10 zł i II z kapitałem 20 zł.

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

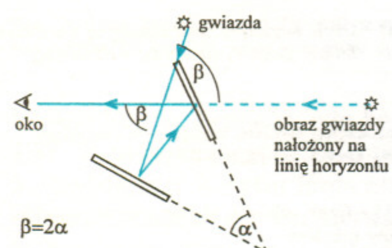
M 771. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem 1 gra zakończy się bankructwem jednego z graczy.
Rozwiązanie na str. 16

M 772. Obliczyć prawdopodobieństwo bankructwa gracza I.
Rozwiązanie na str. 16

M 773. Obliczyć prawdopodobieństwo wygrania przez gracza I pierwszej gry, pod warunkiem, że wygrał całą rozgrywkę, czyli doprowadził gracza II do bankructwa.
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Krzysztof REJMER

F 427. Gdyby Ziemia została nagle zatrzymana w swym ruchu orbitalnym, spadłaby na Słońce. Jak długo trwałoby spadanie? Średnia odległość Ziemi od Słońca $h = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, promień Słońca $R = 7 \cdot 10^{8}$ m, jego masa $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg, stała grawitacji $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$.
Rozwiązanie na str. 5



F 428. Sekstant jest popularnym przyrządem nawigacyjnym służącym do pomiaru wysokości ciał niebieskich. Są to dwa ruchome zwierciadła płaskie (jedno jest półprzezroczyste), zaopatrzone w podziałkę pozwalającą zmierzyć kąt między nimi. Sposób pomiaru jest prosty: obserwując przez półprzezroczyste zwierciadło linię horyzontu i zmieniając kąt między zwierciadłami nakładamy obraz gwiazdy na linię horyzontu. Wysokość gwiazdy jest równa podwojonej wartości kąta między zwierciadłami. Wyjaśnić, dlaczego.
Rozwiązanie na str. 16

Dlaczego niebo jest błękitne?

Henryk DROZDOWSKI

Błękit nieba stanowi najpospolitsze zjawisko, wciąż przez każdego obserwowane. Zazwyczaj nie zastanawiamy się nad jego przyczyną, chociaż jest ono piękne i osobliwe.

Błękitem nieba interesowano się już od najdawniejszych czasów, jednak wyjaśnienie pochodzenia tej barwy nastąpiło stosunkowo niedawno. Starożytni zupełnie nie znali przyczyny błękitu nieba. Leonardo da Vinci, wiedziony znakomitą intuicją, twierdził, że „błękit powietrza powstaje dzięki grubości oświetlonej atmosfery zawartej pomiędzy Ziemią a znajdującą się nad nią ciemnością. Powietrze jako takie jest bezbarwne; ma ono tym piękniejszy błękit, im głębsza jest ciemność poza nim. Z tej samej przyczyny widzi się odległe ciemne góry jako niebieskawe, bliższe zaś i jaśniejsze – w ich naturalnych barwach".

Opinia Leonarda da Vinci nie rozwiązała jednak zagadnienia barwy nieba, gdyż nie wyjaśniła, dlaczego atmosfera ziemska świeci błękitnym światłem, skoro sama jest, według jego słów, bezbarwna i dlaczego nie świeci np. światłem żółtym. Aby uporać się z tym problemem, L. Euler założył, że powietrze składa się z cząsteczek. Uważał, że cząsteczki te mają własną barwę. Był on autorem książki „Listy do pewnej księżniczki niemieckiej dotyczące różnych zagadnień fizyki i filozofii" (tytuł dość ceremonialny!). List XXXII tomu pierwszego z datą 27 lipca 1760 roku ma tytuł: „O błękicie nieba".

„Udowodnię Waszej Wysokości – pisał Euler – że przyczyny błękitu nieba należy szukać w naszej atmosferze, przyjmując że nie jest ona bynajmniej przezroczysta... Powietrze składa się z ogromnej ilości małych drobinek, które są niezupełnie przezroczyste; lecz gdy zostaną oświetlone promieniami światła, zaczynają wykonywać ruchy drgające, pod wpływem których powstają nowe promienie charakterystyczne dla tych drobinek... barwa tych drobinek jest niebieskawa".

Powietrze składa się z cząsteczek azotu, tlenu, argonu, dwutlenku węgla i znikomych ilości innych substancji. Wszystkie one są bezbarwne. A więc azot, tlen i podobne substancje w stanie gazowym nie pochłaniają światła widzialnego i same z siebie wcale nie są niebieskawe. Wbrew słowom Eulera, ich cząsteczki są zupełnie przezroczyste dla światła widzialnego – pochłaniają one jedynie promienie ultrafioletowe.

Euler nie miał więc racji, ale dwieście lat temu o cząsteczkach wiedziano bardzo mało. Jednak główna myśl Eulera o tym, że światło pobudza cząsteczki do swobodnych drgań świetlnych, jest słuszna i dzisiaj.

Zagadnienie było trudne i w dążeniu do jego rozwiązania zakładano też, że atmosfera zawdzięcza błękit swojemu składnikowi – ozonowi, który w stanie płynnym jest niebieski. Ale koncepcja taka była błędna, gdyż mimo wszystko powietrze jest bezbarwne, jak to już przypuszczał Leonardo da Vinci. Najlepszym tego dowodem jest to, że gwiazdy w nocy widzimy jako białe, niektóre nawet jako żółte. Gdyby powietrze lub znajdujący się w nim ozon były niebieskie, to gwiazdy przeświecając przez atmosferę ziemską miałyby kolor błękitny, a Betelgeuse, Antares oraz Mars świeciłyby nie żółto, lecz zielono, czego się jednak nie obserwuje.

Stopniowo zaczęła się szerzyć opinia, że atmosfera jest pewnego rodzaju ośrodkiem mętnym, a będąc nim rozprasza promienie niebieskie. Dowodzą tego doświadczenia. Weźmy pod uwagę dym z papierosa: dym ten wygląda, jak gdyby był błękitny, chociaż nie składa się z niebieskich cząsteczek. Podobnie kropla mleka, wpuszczona do szklanki czystej wody, daje zawiesinę opalizującą kolorem błękitnawym.

M. Faraday (1856) zauważył, że wąska wiązka promieni słonecznych przechodzących przez naczynie zawierające roztwór złota jest dobrze widoczna na ciemnym tle, chociaż roztwór wydawał się zupełnie przezroczysty pod mikroskopem. Przypuszczał, że światło rozprasza się na bardzo małych ziarenkach złota. J. Tyndall badał to zjawisko dokładniej i w 1869 roku dokonał systematycznych obserwacji światła rozpraszanego przez cząsteczki różnej wielkości. Przekonał się, że gdy cząsteczki zawiesiny w gazie są bardzo małe, w świetle rozproszonym przeważają fale krótkie, a światło rozproszone jest prawie całkowicie spolaryzowane (rys. 1). Najczęściej stosuje się stożek promieni zbieżnych. Mówimy wówczas o „stożku Tyndalla"; samo zjawisko rozpraszania nazwano zjawiskiem Tyndalla.

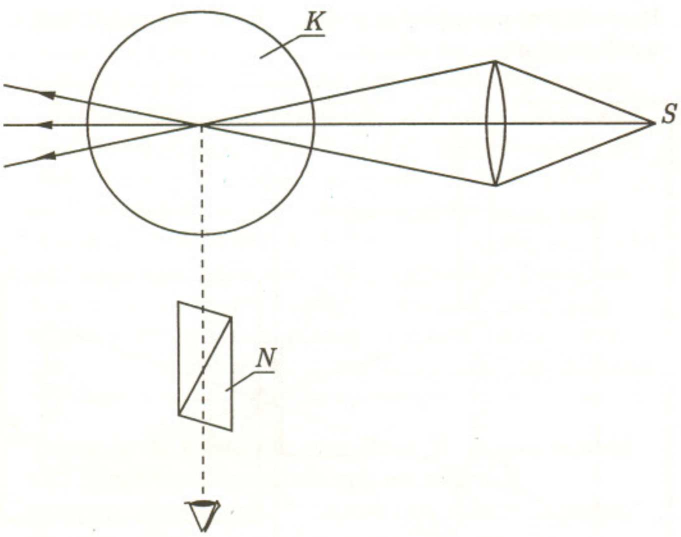
Światło spolaryzowane – światło, w którym drgania odbywają się tylko w jednej płaszczyźnie w przeciwieństwie do światła naturalnego, w którym zachodzą drgania we wszystkich kierunkach.

Michael Faraday (1791–1867) – fizyk i chemik angielski, jeden z najwybitniejszych fizyków XIX wieku. Skroplił szereg gazów, jak chlor, dwutlenek węgla, amoniak. Odkrył prawa elektrolizy oraz zjawisko indukcji elektromagnetycznej i ustalił jej ogólne prawa. Wprowadził pojęcie pola i linii pola elektrycznego i magnetycznego.

John Tyndall (1820–1893) – fizyk angielski. Był następcą Faradaya na uniwersytecie londyńskim. Znany eksperymentator z dziedziny optyki i nauki o cieple.

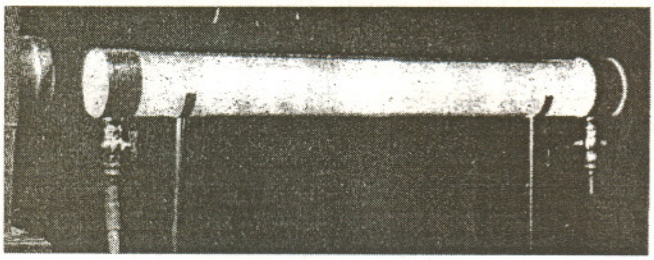
Zjawisko Tyndalla – rozproszenie światła w mętnych ośrodkach o niejednorodnościach nie większych od $(0{,}1 \div 0{,}2)\lambda$.

William Nicol (1768–1851) – fizyk szkocki, skonstruował przyrząd do polaryzacji światła, zwany nikolem.



Rys. 1. Zjawisko Tyndalla w cieczach. S oznacza źródło światła, N – nikol, K – kolbę z badaną cieczą.

Tyndall sądził, że rozpraszanie światła jest spowodowane przez drobne pyłki znajdujące się w gazach i cieczach. Aby się o tym przekonać, wykonał piękne doświadczenie. Przez szklaną rurę metrowej długości, zamkniętą na obu końcach płytkami szklanymi (rys. 2) przepuszczał wiązkę światła. Po opróżnieniu rury z powietrza napełnił ją mieszaniną powietrza, chlorowodoru i parą azotynu butylowego; wskutek zachodzących reakcji chemicznych po paru minutach tworzyła się w gazie zawiesina złożona z bardzo subtelnych cząsteczek. Cząsteczki te miały prawie jednakowe rozmiary. Rozpraszały one światło niebieskie; w miarę ich tworzenia się i stopniowego wzrostu obserwator, spoglądający na rurę z boku, dostrzegał początkowo słabe zabarwienie ciemnobłękitne, którego natężenie zwiększało się stopniowo, przy czym barwa rozjaśniała się wraz ze wzrostem rozmiarów cząsteczek. Zgodnie z opisem Tyndalla „wytwarzamy w ten sposób błękit, który może współzawodniczyć z najczystszym niebem włoskim, jeśli go nie przewyższa".



Rys. 2. Rura, której używał Tyndall w swoich doświadczeniach nad rozpraszaniem światła przez zawiesiny w powietrzu.

Doświadczenie Tyndalla było bodźcem dla J.W. Strutta, znanego później pod imieniem lorda J. Rayleigha (n.b. tytuł lorda otrzymał on za osiągnięcia naukowe). On pierwszy opracował teorię błękitu nieba. Praca jego, ogłoszona w czasopiśmie *Philosophical Magazine* w 1871 roku pod tytułem „O świetle z nieba, jego polaryzacji i barwie" była epokowa w tej dziedzinie, gdyż Rayleigh po raz pierwszy wyjaśnił, dlaczego światło rozpraszane przez ośrodek mętny w ogóle, a przez atmosferę ziemską w szczególności – jest błękitne.

John Rayleigh (1842–1919) – fizyk angielski. W 1904 roku otrzymał Nagrodę Nobla z fizyki za wyznaczenie gęstości kilku najważniejszych gazów i odkrycie argonu. Zajmował się badaniami nad promieniowaniem cieplnym, akustyką i optyką.

Rayleigh opisał rozpraszanie światła w przypadku, gdy pada ono na ośrodek składający się z niewielkich cząsteczek kulistych. Cząsteczki te powinny mieć rozmiary drobin dwuatomowych i znajdować się tak daleko jedna od drugiej, by można było przyjąć, że nie oddziałują wzajemnie. Z założeń takich wynika, że natężenie I promieniowania rozproszonego jest proporcjonalne do natężenia I_0 światła padającego, do kwadratu objętości V cząsteczek, z którymi światło oddziałuje, i do stężenia tych cząsteczek (przez co rozumiemy liczbę cząsteczek rozpraszających, przypadających na jednostkę objętości).

Natężenie promieniowania rozproszonego jest jednocześnie, według teorii Rayleigha, odwrotnie proporcjonalne – co tu jest nadzwyczaj charakterystyczne (!) – do czwartej potęgi długości λ fali padającej.

Prawo Rayleigha – odnoszące się do cząsteczek mniejszych niż 0,1 długości fali światła – można zatem zapisać w postaci

$$I \sim I_0 \cdot \frac{d \cdot V^2}{\lambda^4}.$$

Przebieg zjawiska rozproszenia zależy więc od długości fali promieniowania, które pada na ośrodek rozpraszający. Jeśli zatem promieniowanie padające jest złożone, tzn. gdy składa się ono z fal o różnych długościach, możemy oczekiwać, że pewna część tego promieniowania ulegnie rozproszeniu w większym stopniu, inna natomiast straci w wyniku rozproszenia mniejszą część niesionej energii. A więc: jeżeli na cząsteczki ośrodka mętnego pada światło białe, którego promienie poszczególnych długości fal mają jednakowe natężenie, to najsilniej będą rozproszone promienie o najkrótszej fali, w tym więc przypadku niebieskie. Długość fali światła niebieskiego jest dwa razy mniejsza niż światła czerwonego. W części niebieskiej widma natężenie światła rozproszonego będzie $2^4 = 16$ razy większe niż w części czerwonej. Barwa błękitna musi więc dominować w świetle rozproszonym przez atmosferę ziemską.

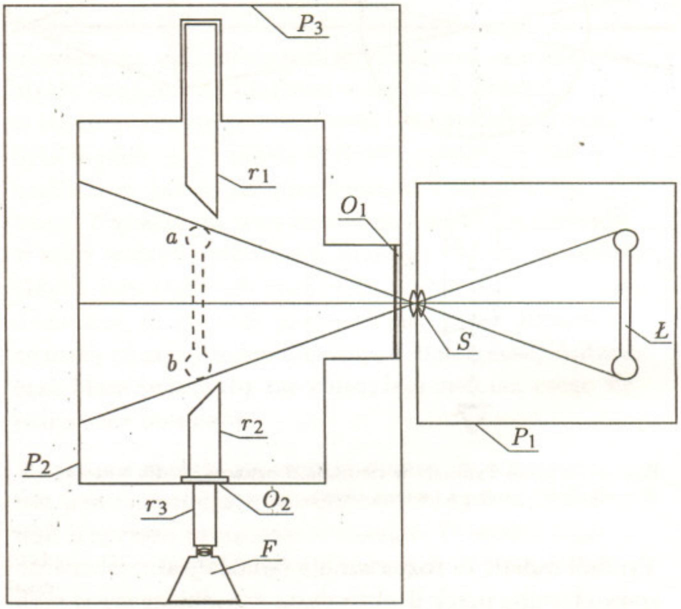
Naturalnie zachodziło pytanie, co za cząsteczki stanowią ośrodek mętny. Początkowo przypuszczano, że cząsteczkami tymi są zanieczyszczenia powietrza w postaci drobnego pyłu. Ale tam, gdzie powietrze jest najczystsze i zawiera najmniej pary wodnej, a więc nad pustyniami, błękit nieba jest najpiękniejszy!

Niebo jest błękitne i w górach, na najwyższych szczytach, zimą, gdy wszystko naokoło jest pokryte śniegiem i atmosfera nie zawiera ani śladu pyłów, w które tak obfituje powietrze wielkomiejskie.

Jeszcze w XX wieku tak wybitny eksperymentator, jak R. Wood, bronił tezy, iż gazy czyste nie rozpraszają światła. Sprawa pozornie wydawała się łatwa do rozstrzygnięcia, w istocie jednak należała do najsubtelniejszych w fizyce doświadczalnej. Z jednej bowiem strony było niezmiernie trudno tak zbudować aparaturę, aby móc ręczyć, że badana substancja nigdzie nie mogła się zanieczyścić najdrobniejszym nawet pyłkiem; z drugiej strony niedostrzeganie światła rozproszonego (rys. 1) niekoniecznie świadczyło o jego nieistnieniu. Ciało badane zawsze musi się znajdować w jakimś zbiorniku. Światło ulega odbiciu od ścianek naczynia. Jeżeli stożek światła rozpraszanego jest bardzo słaby, zginie on w blasku rzucanym przez ścianki naczynia tak, jak na ulicach wielkiego miasta w świetle latarń i reklam ginie dla obserwatora większa część gwiazd naszego nieba.

Trudność realizacji doświadczeń polegała zatem na wyeliminowaniu światła rozpraszanego przez ścianki naczynia. W 1915 roku fizyk francuski J. Cabannes wykazał rozpraszanie światła przez gazy czyste. Umieścił on badany gaz w jedenastolitrowym zbiorniku żelaznym, zaopatrzonym w jedno okienko do wpuszczania światła i w drugie okienko do obserwacji rozpraszania. Ścianki naczynia zostały pokryte czarnym aksamitem, który znacznie skuteczniej pochłania światło niż sadza. A jednak doświadczenia wykazały, że nawet najczarniejszy aksamit, naświetlony potężnym snopem promieni, ma blask 1000 razy silniejszy od przewidywanego świecenia gazu; trzeba było więc światło rozpraszane przez ścianki zupełnie wyeliminować, by móc obserwować zjawisko zasadnicze. Cały wysiłek fizyka był w tę właśnie stronę skierowany.

Na rysunku 3 przedstawiony jest schemat przekroju przyrządu Cabannesa. W pudełku metalowym P_1, zaopatrzonym w soczewki S, znajdowała się lampa łukowa $Ł$. Badany gaz zawarty był w zbiorniku P_2 mającym okienka O_1 i O_2. Pudło metalowe P_3 ochraniało zbiornik od światła zewnętrznego. Soczewka S wytwarzała obraz ab lampy łukowej wewnątrz zbiornika; od tego miejsca (najsilniejszego skupienia światła pierwotnego) najintensywniej wybiegały promienie wtórne, rozproszone. Cabannes obserwował światło fotograficznie, za pomocą aparatu F, lub też okularowo, zastępując aparat fotograficzny okiem. Rury r_1, r_2 i r_3 miały najważniejsze znaczenie dla wyniku doświadczeń. Rura r_1, otwarta od strony a (skośnie ścięta) służyła do wytworzenia czarnego tła, na którym ukazywało się światło rozpraszane. Była ona pokryta wewnątrz (jak i wszystkie inne części) czarnym aksamitem. W głębi tej rury dzięki wielokrotnym odbiciom, ginęło zupełnie światło odrzucane przez ścianki zbiornika P_2. Rury r_2 i r_3 przepuszczały tylko promienie biegnące wzdłuż osi ab.



Rys. 3. Schemat przyrządu Cabannesa.

Po zastosowaniu tych środków ostrożności Cabannes rzeczywiście zaobserwował światło rozpraszane przez różne ośrodki gazowe. Rozpraszanie rosło wraz z gęstością gazu, w powietrzu było 5 razy, a w butanie 110 razy silniejsze niż w wodorze.

Gazy były wyjątkowo starannie filtrowane przez warstwy waty grubości kilkudziesięciu centymetrów. Jednak fizycy sceptycznie usposobieni sądzili, że istnieją pyłki ultramikroskopowe, których wata nie zatrzymała i to właśnie owe ziarenka zawiesiny rozpraszały światło, a nie cząsteczki gazu. Przeciwko takiemu poglądowi przemówiła następująca obserwacja Cabannesa. 28 lutego 1915 roku napełnił przyrząd świeżym gazem i dokonał pomiaru natężenia światła rozproszonego. Z racji wypadków wojennych został jednak zmuszony do zaniechania swoich eksperymentów. Po wojnie, 19 marca 1919 roku, powtórzył pomiar. Przyrząd przez okres czterech lat nie był poruszany! Pomiar rozpraszania dał w obydwu przypadkach identyczne liczby. Gdyby gaz zawierał pyłki, przynajmniej część z nich musiałaby osiąść w ciągu tak długiego czasu i wielkość rozpraszania uległaby zmianie. Cabannes obserwował po raz pierwszy w dziejach nauki błękit powietrza wytworzony w pudełku metalowym, a jego badania potwierdziły teorię Rayleigha. Hipoteza pyłu, jako czynnika wytwarzającego błękit, wydała się zupełnie zbędna. Wystarczy założyć, że to cząsteczki powietrza rozpraszają światło słoneczne, aby zrozumieć barwy nieba. Każda cząsteczka oddzielnie rozprasza niewielką ilość światła, ale warstwa grubości kilku kilometrów uzyskuje stosunkowo dużą jasność z wyraźną nadwyżką fioletu i błękitu (zgodnie z prawem

Rayleigha jest $I \sim \lambda^{-4}$). Rozpraszają też światło i cząsteczki pyłów, sadze, kropelki wody. W tym jednak przypadku zachodzi już zwykłe rozproszenie światła białego, gdyż rozmiary tych cząsteczek są większe od długości fali świetlnej. Tym tłumaczy się fakt, że zanieczyszczone powietrze wielkich miast silnie rozprasza światło, wskutek czego przyjmuje ono w mieście odcień białawy. To samo dotyczy nieba nad oceanem, gdzie obfitość pary wodnej powoduje rozpraszanie światła białego nadając niebu odcień białawy. W wysokich górach i na pustyniach, gdzie pary wodnej jest mało, niebo przyjmuje głęboki kolor błękitny.

Teorię lorda Rayleigha uzupełnili M. Smoluchowski i A. Einstein. Udowodnili oni, że centrami rozpraszającymi światło są nie tylko same cząsteczki ośrodka, którym może być powietrze, ale również przypadkowe „nagromadzenia" cząsteczek, zdarzające się ustawicznie w małych objętościach powietrza (rzędu λ^3), na skutek ich bezładnego ruchu cieplnego. Owe fluktuacje gęstości wytwarzają dodatkową i grubszą „ziarnistość" ośrodka, silniej rozpraszającą światło aniżeli poszczególne cząsteczki. W gazach fluktuacje przejawiają się jako lokalne rozrzedzenia i zagęszczenia zachodzące w czasie. W cieczach występuje podobne zjawisko, z tą tylko różnicą, że fluktuacje w dwu sąsiednich częściach objętości cieczy nie są niezależne, ponieważ cząsteczki w cieczy są związane siłami spójności i jedna cząsteczka pociąga za sobą drugą. Smoluchowski obliczył natężenie światła rozproszonego przez gaz, a Einstein – przez ciecz. Jak wykazały ich obliczenia, rozmiary tych części ośrodka, które mają mniejsze lub większe fluktuacje w normalnych warunkach, są znacznie mniejsze niż długość fali światła widzialnego. Dlatego teoria Smoluchowskiego i Einsteina prowadzi do tych samych wniosków w stosunku do zależności natężenia światła rozproszonego od λ, jak również do charakteru polaryzacji światła rozproszonego, co teoria Rayleigha.

Fluktuacje – przypadkowe odchylenia wartości wielkości fizycznych od ich wartości średnich.

Marian Smoluchowski (1872–1917) – fizyk polski, jeden z największych fizyków początku XX wieku. Stworzył teorię opalescencji, ruchów Browna, roztworów i koagulacji zawiesin. Przyczynił się do powiązania teorii kinetycznej z termodynamiką. Badał granice stosowalności II zasady termodynamiki, pogłębiając przy tym zrozumienie istoty zjawiska fluktuacji.

Prace Smoluchowskiego i Einsteina pozwoliły więc na wyjaśnienie błękitnej barwy nieba jako następstwa rozpraszania światła przez lokalne zaburzenia gęstości (fluktuacje) powietrza.

Fluktuacje powietrza rozpraszają dużo światła fioletowego (na które oko jest mało czułe), dużo światła niebieskiego i błękitnego (na które oko jest bardziej czułe) oraz nieco zielonego i żółtego. Złożenie tych barw daje barwę niebiesko-błękitną.

Na zakończenie warto przypomnieć, że w rozprawie z 1911 roku pt. „Ewolucja teorii atomistycznej" Smoluchowski pisał, że błękit nieba stanowi dowód istnienia atomów dla każdego, kto umie wyciągnąć wnioski z tego pięknego i codziennego zjawiska.

Literatura

M. Minnaert, „Światło i barwa w przyrodzie", PWN, Warszawa 1961.

M. Smoluchowski, „Wybór pism filozoficznych", PWN, Warszawa 1956.

J. Cabannes, „La diffusion moléculaire de la lumière", Paris 1929.

V.F. Weisskopf, „Jak światło oddziałuje na materię", w „Światło", PWN, Warszawa 1973.

Rozwiązanie zadania M 773. Niech p_n oznacza to samo, co w rozwiązaniu zadania **772**; oznaczmy przez A zdarzenie, że gracz I wygrał pierwszą grę, a przez B – że wygrał całą rozgrywkę. Zgodnie ze wzorem Bayesa

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{(1-p_{11}) \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{11}{30} \cdot \frac{3}{2} = \frac{11}{20}.$$

Na marginesie artykułu „Dlaczego niebo jest błękitne?" warto przytoczyć notatkę lorda Rayleigha „Harmonic echoes" zamieszczoną w *Nature* w 1873 roku. Lord Rayleigh omawia w niej przypadek opisany w książce Brewera „On Sound and its Phenomena". Autor książki opisuje miejsca, w których echo powtarza czysty ton w innej tonacji niż ta, w jakiej został nadany. Słynne miejsce o tej właściwości miało się znajdować nad jeziorem Killarney w Irlandii. Rayleigh delikatnie zakwestionował opis Brewera („trudno uwierzyć, że ten opis jest ścisły"), jednak nie odrzucił go jako czystego wymysłu. Sam zaobserwował echo, które odbite od plantacji jodeł, znajdującej się po przeciwnej stronie doliny, podnosiło kobiecy głos o oktawę, nie wpływając na głos męski. Jak pisał Rayleigh „nie miałem pojęcia, że takie zjawisko było kiedykolwiek obserwowane, ani że jest możliwe, ale wkrótce uświadomiłem sobie, że wyjaśnienie jest podobne do wyjaśnienia błękitnego koloru nieba, jakie zaproponowałem rok czy dwa lata wcześniej. W chwili obserwacji miałem w teczce pracę poświęconą zaburzeniom fal dźwiękowych przez obiekty małe w porównaniu z długością fali. W takim przypadku siła odbicia czy też raczej zmiany kierunku fali, charakteryzujące przeszkodę, silnie zależą od czwartej potęgi długości fali. W przypadku dźwięku złożonego, jakim jest ludzki głos, jego składowe w różnym stopniu zostają zaburzone przez przeszkodę. Grupa małych przeszkód może odbić dźwięk wyższy o oktawę od podstawowego tonu relatywnie szesnaście razy silniej niż ton podstawowy."

Tak więc rajlejowskie rozpraszanie odpowiedzialne za błękitny kolor nieba nie jest zjawiskiem wyłącznie optycznym, ale także akustycznym.

K.R.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

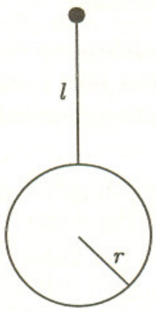
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 1996

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

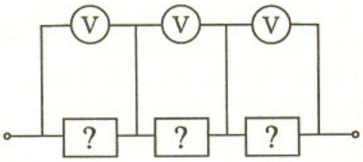
Zadania z fizyki nr 219, 220

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

219. Jeden koniec nierozciągliwej i nieważkiej nitki o długości l jest przymocowany do pewnego punktu na powierzchni bocznej walca o promieniu r, a drugi koniec – do małej kulki znajdującej się w odległości $l+r$ od osi walca (rys. 1). W chwili początkowej kulka była nieruchoma, a walec wprawiono w ruch obrotowy ze stałą prędkością kątową ω wokół jego osi. Gdy nitka się nawinie, z jaką prędkością kulka uderzy w walec? Na kulkę działa tylko siła wywierana przez nitkę (pomijamy siłę ciężkości i opory ruchu).



Rys. 2

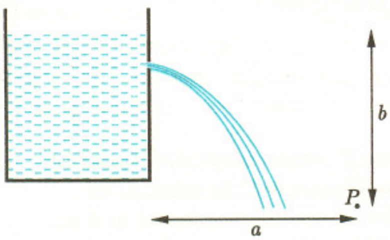
220. Trzy woltomierze mierzą napięcia na trzech „czarnych skrzynkach" połączonych szeregowo (rys. 2). Początkowo napięcia były równe zeru, a gdy do układu przyłożono stałe napięcie 60 V, pierwszy woltomierz wskazał napięcie 10 V, drugi 20 V, a trzeci 30 V. Po pewnym czasie napięcie na pierwszej „czarnej skrzynce" wzrosło do 30 V, na drugiej zmalało do 10 V, a na trzeciej zmalało do 20 V. Po jeszcze dłuższym czasie napięcia wynosiły kolejno: 20 V, 30 V i 10 V. Zaprojektować jak najprostsze wnętrze „czarnych skrzynek", które da taki efekt. Można przyjąć, że woltomierze nie zakłócają mierzonego napięcia (mają bardzo duży opór wewnętrzny).

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1996

Przypominamy treść zadań:

211. Punkt P znajduje się w odległości a od pionowej ścianki naczynia, a różnica wysokości między nim a poziomem cieczy w naczyniu jest równa b (rys. 3). Jaki warunek muszą spełniać a i b, żeby strumień cieczy wytryskującej przez otworek w ściance nie mógł osiągnąć punktu P, niezależnie od położenia otworka?

212. Cewkę umieszczono w zewnętrznym niejednorodnym polu magnetycznym, gdzie płynący przez nią prąd o natężeniu I powoduje wystąpienie wypadkowej siły $\mathbf{F}$. Przyjmijmy założenie, że taka sama siła działa ne cewkę w każdym miejscu pewnego obszaru Ω. Wykazać, że jeśli cewka jest bezoporowa i nie może się obracać (a jedynie przesuwać równolegle), to po jej zwarciu i pchnięciu w kierunku siły $\mathbf{F}$ będzie się ona w obrębie Ω poruszała ruchem drgającym. Znaleźć częstotliwość tych drgań, jeśli masa cewki jest równa m, a indukcyjność L.



Rys. 3

211. Ze wzoru Bernoulliego (tzn. z zasady zachowania energii) wynika, że prędkość strumienia cieczy o gęstości ϱ wypływającego z naczynia pod ciśnieniem p jest równa $v = \sqrt{2p/\varrho}$. Jeśli otwór jest na wysokości h pod poziomem wody, to $p = \varrho g h$, a z drugiej strony wysokość spadku wynosi $b-h$, zatem czas spadku $t = \sqrt{2(b-h)/g}$. Odległość osiągnięta przez strumień w ciągu tego czasu wynosi $vt = 2\sqrt{h(b-h)}$. Wyrażenie to osiąga maksymalną wartość równą b dla $h = b/2$. Zatem punkt P będzie niedostępny dla strumienia cieczy wtedy, gdy $a > b$. Inaczej mówiąc, prosta $a = b$ jest obwiednią rodziny parabol (strumieni wytryskujących przez różne otworki).

212. Siła działająca na obwód w polu magnetycznym jest opisana całką

$$\mathbf{F} = I \oint \mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}\,.$$

Okazuje się, że taka sama całka $\oint \mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ (oznaczymy ją symbolem $\mathbf{C}$) występuje również we wzorze na siłę elektromotoryczną indukcji $\mathcal{E} = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Zauważmy bowiem, że gdy cewka przesuwa się o odcinek $\mathrm{d}\mathbf{r}$, każdy elementarny odcinek obwodu $\mathrm{d}\mathbf{l}$ zakreśla równoległobok o polu $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{l}$ (wektor $\mathrm{d}\mathbf{S}$ jest skierowany prostopadle do równoległoboku). Odpowiednia zmiana strumienia wynosi $\mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = (\mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B} = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot (\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B})$, a dla całego obwodu otrzymujemy $\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\mathbf{r} \cdot \oint \mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{C}$, czyli $\mathcal{E} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C}$, gdzie $\mathbf{v}$ jest prędkością cewki. Dla cewki bezoporowej ta „zewnętrzna" siła elektromotoryczna równoważy się z SEM samoindukcji, czyli

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,.$$

Ponadto spełnione jest równanie ruchu cewki

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} = I\mathbf{C}\,.$$

Biorąc składową $\mathbf{v}$ równoległą do $\mathbf{C}$ i podstawiając jedno równanie do drugiego otrzymujemy równanie ruchu harmonicznego o częstotliwości $\nu = C/(2\pi\sqrt{mL}) = F/(2\pi I\sqrt{mL})$. (Przy okazji sprawdziliśmy, że znaki w równaniach były prawidłowe – inaczej otrzymalibyśmy nieskończone przyspieszenie cewki, niezgodne z zachowaniem energii.)

Zadania z matematyki nr 321, 322

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 303 (WT=3,43) i 304 (WT=1,51) z numeru 8/1995

Lesław Skrzypek	– Rzeszów	45,80
Mirosław Matlęga	– Skoczów	44,04
Adam Czornik	– Bytom	41,29
Piotr Lipiński	– Radom	39,33
Jan Ciach	– Ostrowiec Św.	38,93
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	36,66
Henryk Kornacki	– Augustów	36,45

Pan Skrzypek przekroczył **44** punkty po raz trzeci (i jest siedemnastym Weteranem matematycznym); pan Matlęga: po raz pierwszy.

321. Po nieskończonej szachownicy porusza się (m,n)-koń, czyli figura, która w każdym ruchu przemieszcza się o m pól poziomo i n pól pionowo – lub odwrotnie: n poziomo i m pionowo (tak więc $(2,1)$-koń to zwykły skoczek). Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych $m,n \geq 1$, dla których (m,n)-koń, startując z dowolnego pola szachownicy, może osiągnąć każde inne pole.

322. Dane są liczby naturalne $m,q > 1$ oraz liczba p określona przez równanie $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Obliczyć część całkowitą sumy $1^{-1/p}+2^{-1/p}+\ldots+(m^q-1)^{-1/p}$.

Zadanie **322** zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1996

Przypominamy treść zadań:

313. Ciąg (x_n) jest określony wzorami: $x_0=\pi/3$, $x_{n+1}=x_n\cos x_n$ dla $n=0,1,2,\ldots$. Wykazać, że szereg $\sum x_n^3$ jest zbieżny i że jego suma jest liczbą mniejszą od $7/3$.

314. Na płaszczyźnie dane są dwa kwadraty $A_1B_1C_1D_1$ i $A_2B_2C_2D_2$, jednakowo zorientowane oraz tak położone, że $A_1 \neq A_2$, $C_1 \neq C_2$. Udowodnić, że proste A_1A_2 i C_1C_2 są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $|B_1B_2|=|D_1D_2|$.

313. Funkcja $g(x)=(1-\cos x)/x^2$ ma w przedziale $(0;\frac{1}{2}\pi)$ pochodną ujemną:

$$g'(x)=x^{-4}(x^2\sin x-2x(1-\cos x))=2x^{-3}(\sin x)(\tfrac{1}{2}x-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x);$$

jest więc w tym przedziale malejąca. W takim razie

$$g(x)\geq g(\tfrac{1}{3}\pi)=\tfrac{9}{2}\pi^{-2}\quad \text{dla } x\in(0;\tfrac{1}{3}\pi\rangle,$$

czyli

$$\cos x\leq 1-\tfrac{9}{2}\pi^{-2}x^2\quad \text{dla } x\in(0;\tfrac{1}{3}\pi\rangle.$$

Wszystkie wyrazy rozważanego (malejącego!) ciągu (x_n) leżą w przedziale $(0;\frac{1}{3}\pi\rangle$. Zatem

$$\cos x_n\leq 1-\tfrac{9}{2}\pi^{-2}x_n^2\quad \text{dla } n=0,1,2,\ldots\ ;$$

po pomnożeniu stronami przez x_n (i prostym przekształceniu):

$$x_n^3\leq \tfrac{2}{9}\pi^2(x_n-x_{n+1})\quad \text{dla } n=0,1,2,\ldots\ .$$

Dla sum częściowych badanego szeregu otrzymujemy stąd oszacowanie

$$s_n=x_0^3+\ldots+x_n^3=\tfrac{2}{9}\pi^2(x_0-x_{n+1})<\tfrac{2}{9}\pi^2x_0=\tfrac{2}{27}\pi^3,$$

więc ostatecznie

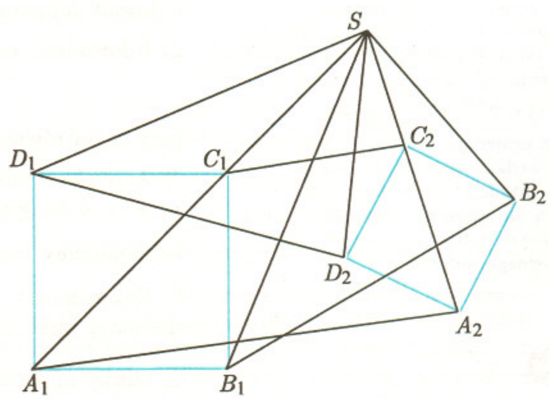
$$\sum_{n=0}^{\infty}x_n^3=\lim_{n\to\infty}s_n\leq\tfrac{2}{27}\pi^3<\tfrac{7}{3}.$$

314. Rozpatrzymy dwa przypadki:

(I) Proste A_1C_1 i A_2C_2 są równoległe. Wtedy kwadrat $A_2B_2C_2D_2$ jest obrazem kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ w przekształceniu, które jest albo przesunięciem, albo jednokładnością o skali $\lambda\neq 1$, o środku w punkcie przecięcia prostych A_1A_2 i C_1C_2. W pierwszym z tych podprzypadków zachodzą oba badane związki ($A_1A_2 \| C_1C_2$ i $|B_1B_2|=|D_1D_2|$), a w drugim nie zachodzi żaden z nich; teza jest spełniona.

(II) Proste A_1C_1 i A_2C_2 nie są równoległe. Oznaczmy punkt ich przecięcia przez S (rysunek; uwaga: punkt S może także leżeć na odcinkach A_1C_1 i A_2C_2, ale dalsze rozumowanie jest prawidłowe i w takiej sytuacji; nieufnym Czytelnikom proponujemy wykonanie rysunku).

Dowód implikacji $(A_1A_2\|C_1C_2)\Rightarrow(|B_1B_2|=|D_1D_2|)$. Jeśli $A_1A_2\|C_1C_2$, to na mocy twierdzenia Talesa $|SC_2|:|SC_1|=|SA_2|:|SA_1|$; oznaczmy wspólną wartość tych stosunków przez λ. Niech f będzie złożeniem jednokładności o środku S i skali λ z obrotem wokół punktu S o kąt skierowany $\varphi=\angle(\overrightarrow{SA_1},\overrightarrow{SA_2})=\angle(\overrightarrow{SC_1},\overrightarrow{SC_2})$. Zachodzą równości $f(A_1)=A_2$, $f(C_1)=C_2$. Przekształcenie f jest podobieństwem; w takim razie również $f(B_1)=B_2$, $f(D_1)=D_2$. Zatem $\angle(\overrightarrow{SB_1},\overrightarrow{SB_2})=\angle(\overrightarrow{SD_1},\overrightarrow{SD_2})$. Ponadto $|SB_1|=|SD_1|$, $|SB_2|=|SD_2|$, skąd wniosek, że trójkąty SB_1B_2 i SD_1D_2 są przystające, i wobec tego $|B_1B_2|=|D_1D_2|$.



Dowód implikacji $(|B_1B_2|=|D_1D_2|)\Rightarrow(A_1A_2\|C_1C_2)$. Odwracamy poprzednie wnioskowanie. Z równości $|B_1B_2|=|D_1D_2|$, $|SB_1|=|SD_1|$, $|SB_2|=|SD_2|$ wynika, że trójkąty SB_1B_2 i SD_1D_2 są przystające. Teraz określamy przekształcenie (podobieństwo) f jako złożenie jednokładności o środku S i skali $\lambda=|SB_2|:|SB_1|=|SD_2|:|SD_1|$ z obrotem wokół punktu S o kąt skierowany $\varphi=\angle(\overrightarrow{SB_1},\overrightarrow{SB_2})=\angle(\overrightarrow{SD_1},\overrightarrow{SD_2})$. Zachodzą równości $f(B_1)=B_2$, $f(D_1)=D_2$, z których wnosimy, że także $f(A_1)=A_2$, $f(C_1)=C_2$. Stąd $|SA_2|:|SA_1|=|SC_2|:|SC_1|$, i na mocy (odwrotnego) twierdzenia Talesa: $A_1A_2\|C_1C_2$.

Kącik olimpijski (16)

O pewnej sprytnej metodzie (część II)

W poprzednim kąciku olimpijskim *O pewnej sprytnej metodzie* (I) przedstawiliśmy kilka zadań. By je rozwiązać, należało „sprytnie" dobrać pewną funkcję i skorzystać z dosyć oczywistego stwierdzenia:

Niech P będzie niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych i funkcja $f\colon P \to \mathbf{R}$ spełnia warunek $f(x) \geq 0$ dla każdego $x \in P$. Jeżeli liczby $x_1, \ldots, x_n$ należą do P, to $f(x_1) + \ldots + f(x_n) \geq 0$.

Po prześledzeniu przykładów i zadań z poprzedniego kącika rodzi się oczywiste pytanie: jak znaleźć taką funkcję, która praktycznie rozwiązuje całe zadanie? W poniższym przykładzie spróbujemy „wyprowadzić" wzór definiujący odpowiednią funkcję.

1. Liczby nieujemne $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunek: $x_1 + \ldots + x_n = 1/2$. Dowieść, że

$$(*) \qquad \frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3}.$$

Kiedy zachodzi równość?

Możemy dodatkowo założyć, że $x_i \in [0, 1/2]$, gdyż liczby nieujemne spełniające warunek $x_1 + \ldots + x_n = 1/2$ należą do przedziału $[0, 1/2]$. We wszystkich nierównościach dowodzonych przez nas poprzednim razem mieliśmy do czynienia z sumą $f(x_1) + \ldots + f(x_n)$, a nie z iloczynem $f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n)$. Przekształćmy więc lewą stronę w nierówności $(*)$ tak, aby doprowadzić ją do postaci sumy n składników. W tym celu zlogarytmujmy obie strony nierówności:

$$\ln\left(\frac{1-x_1}{1+x_1}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{1-x_n}{1+x_n}\right) \geq -\ln 3.$$

Funkcja, której szukamy, będzie zatem miała postać:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + Ax + B.$$

Zastanówmy się teraz, kiedy zachodzi równość w nierówności $(*)$. Nietrudno zgadnąć, że na przykład wtedy, gdy jedna z liczb x_i jest równa $1/2$, pozostałe zaś są zerami. Zatem nasza funkcja f powinna mieć miejsca zerowe w punktach 0 i $1/2$. Mamy więc $0 = f(0) = \ln 1 + B$ oraz $0 = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 3 + \frac{1}{2}A + B$, skąd $A = 2\ln 3$, $B = 0$. Tak więc

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + (2\ln 3)x$$

i funkcja gotowa. Sprawdzenie, czy owa funkcja faktycznie „rozwiązuje" zadanie, pozostawiamy Czytelnikowi.

W kolejnym przykładzie podamy jedynie wskazówkę, jak uprościć zadanie (chodzi o dowód dobrze znanej *nierówności o średnich*).

2. Udowodnić, że dla liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

przy czym równość ma miejsce jedynie wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Wskazówka: Podstawiając $x_i = a_i / \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$ dostajemy do udowodnienia nierówność $x_1 + \ldots + x_n \geq n$ przy założeniu $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$.

Proponujemy rozwiązać jeszcze kilka podobnych zadań.

3. Każda z liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ należy do przedziału $[-1, 1]$. Liczby te spełniają warunek $x_1^3 + \ldots + x_n^3 = 0$. Dowieść, że $x_1 + \ldots + x_n \leq n/3$.

4. Liczby a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ należą do przedziału $[0, 2]$, przy czym $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq n$. Wykazać, że

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^4\right) - n \leq 11\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) - n\right).$$

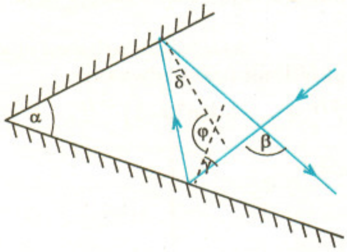
5. Liczby $x_1, \ldots, x_n$ należą do przedziału $[a, b]$, przy czym $a + b > 0$. Dowieść, że

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \frac{ab}{a+b} + \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n(a+b)}.$$

6. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 2$, wyznaczyć maksymalną wartość sumy liczb naturalnych $k_1, k_2, \ldots, k_n$ spełniających warunek $k_1^3 + k_2^3 + \ldots + k_n^3 \leq 7n$.

Krzysztof CHEŁMIŃSKI
Waldemar POMPE

Rozwiązanie zadania F 428. Rozważmy zwierciadlany kąt dwuścienny α. Niech kąt padania promienia na pierwsze zwierciadło będzie równy γ, na drugie δ.



Zaznaczony na rysunku kąt β jako kąt zewnętrzny trójkąta wyznaczonego przez promienie jest równy $2(\gamma + \delta)$. Jednocześnie $\gamma + \delta = \alpha$, ponieważ, jak widać z rysunku, zarówno $\gamma + \delta$, jak i α dopełniają kąt φ do π. Ostatecznie $\beta = 2\alpha$.
Wielką zaletą sekstantu jest prostota jego budowy i zasady działania; pomiaru można dokonać na kołyszącym się pokładzie (np. statku).

Rozwiązanie zadania M 771. Ponieważ łączny kapitał znajdujący się w grze to 30 zł, więc gdy jeden z graczy wygrałby 30 razy z rzędu, drugi musiałby zbankrutować. Gdyby zatem bankructwo miało nie nastąpić aż do $30n$ rzutów, wyniki gier o numerach od 1 do 30 nie mogłyby być takie same, ani wyniki gier o numerach od 31 do 60, ani o numerach od 61 do $90, \ldots$, ani o numerach od $(30n - 29)$ do $30n$ nie mogłyby być takie same. Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest, oczywiście, równe

$$(1 - 2^{-30} \cdot 2)^n = (1 - 2^{-29})^n.$$

Zatem prawdopodobieństwo tego, że gra trwać będzie nieskończenie długo, jest równe granicy tego wyrażenia przy n dążącym do nieskończoności, czyli 0. Stąd prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego jest równe 1.

Rozwiązanie zadania M 772. Jeśli p_n oznacza prawdopodobieństwo tego, że gracz o kapitale n zł zbankrutuje grając z graczem o kapitale $(30 - n)$ zł, to

$$p_n = \frac{p_{n-1} + p_{n+1}}{2}.$$

Istotnie, gracz ma w pewnej chwili n zł, gdy w poprzedniej miał $(n-1)$ zł i (z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$) wygrał, lub gdy miał $(n+1)$ zł i (także z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$) przegrał. Zatem (p_n) jest ciągiem arytmetycznym. Ponieważ $p_0 = 1$ i $p_{30} = 0$, więc łatwo ustalić, że $p_{10} = 1 - \frac{10}{30} = \frac{2}{3}$.

epsilon

5/96
(62)

Zbieżność rozbieżnych

Ile wynosi suma $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$? Wydaje się, że takie pytanie może zadać tylko ktoś, kto nie ma zielonego pojęcia o szeregach. Powszechnie przecież wiadomo, że jest to szereg rozbieżny i jego suma nie istnieje. Bardziej precyzyjnie, ciąg sum cząstkowych nie ma granicy, bowiem sumy te są na przemian równe 1 lub 0. My to wiemy, ale czy zawsze tak było?

Próby badania sum nieskończonych podejmowano już w starożytności, ma to swoje odbicie w paradoksach Zenona. Zainteresowanie szeregami wzrosło, gdy zaczął się rozwijać rachunek różniczkowy i całkowy. Na przełomie XVII i XVIII wieku oraz w wieku XVIII uzyskano wiele ciekawych i ważnych rezultatów. Matematycy tego okresu dobrze sobie radzili z szeregami, chociaż pojęcie to nie było precyzyjnie określone – polegano głównie na wyczuciu i intuicji. Wśród wielu problemów spore emocje wzbudziło nieskończone dodawanie na przemian jedynek i minus jedynek, czyli ile wynosi suma

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Jeśli szereg ten zapiszemy w postaci

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots),$$

to mamy równość $S = 1 - S$, co daje $S = 1/2$. Rozumowanie to obecnie jest nie do przyjęcia. W wieku XVII i XVIII taki sposób dowodzenia był jednak zupełnie naturalny. Poprawność „wyniku” potwierdzały inne fakty. Badany szereg można uznać za szereg geometryczny o ilorazie -1, a więc suma będzie równa $\frac{1}{1-(-1)}$, czyli znów $1/2$. Albo inaczej: znane jest rozwinięcie

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$$

Po wstawieniu za x jedynki mamy jeszcze jedno potwierdzenie badanej zależności. Tak, między innymi, rozumował Guido Grandi na przełomie XVII i XVIII stulecia. Wnioskował on również, ustawiając odpowiednio nawiasy, że suma $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$ musi być równa 0. Grandi nie widział w tym żadnej sprzeczności: „równość” $0 = 1/2$ miała uzasadniać fakt, iż świat powstał z niczego.

Tym problemem zajął się również Leibniz w 1713 roku. Wypisał on kolejne sumy cząstkowe otrzymując $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$. Leibniz uznał, że ostateczna suma musi być średnią arytmetyczną cząstkowych rezultatów, czyli będzie to $1/2$. Rozumowanie Leibniza akceptowali: Jacob, Johann i Daniel Bernoulli, a nawet Lagrange.

Czytając te uzasadnienia pewnie uśmiechamy się z wyrozumiałością – nie było poprawnej definicji, stąd cały zamęt. Należy jednak pamiętać, że zbieżność szeregu to sprawa umowna; umówiliśmy się, że pewne szeregi będziemy nazywać zbieżnymi, inne zaś nie.

Dlaczego tak, a nie inaczej? Bo takie podejście wydaje się najlepiej odpowiadać naszej intuicji. Ale czy zawsze? Jeśli przyjmiemy inne kryterium, to będziemy mieć inne warunki zbieżności, czasem zupełnie odległe od wyobrażeń. Lecz takie „dziwne” podejście może mieć bardzo ważne zastosowania praktyczne; intuicja lub przyzwyczajenia nieraz już zwodziły i dopiero praktyka musiała to weryfikować.

Moglibyśmy, na przykład, sumować szeregi według następującej zasady.

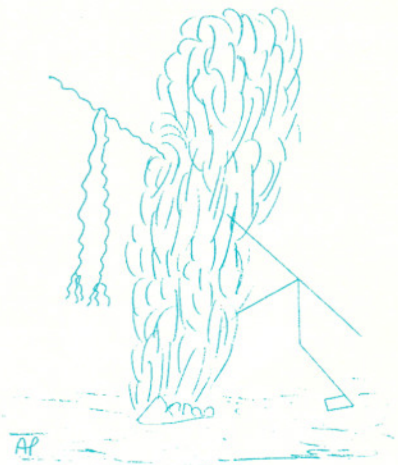
Dla danego szeregu liczbowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ tworzymy szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Jeśli szereg ten jest zbieżny dla $0 < x < 1$, a jego suma $f(x)$ ma dla $x \to 1^-$ granicę g, tj. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = g$, to liczbę g nazywamy uogólnioną sumą szeregu wyjściowego. Przy takiej definicji szereg $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ ma sumę uogólnioną $1/2$. Tak więc intuicja idąca w tym kierunku daje się uzasadnić formalnie.

Opisana metoda, nazywana czasem metodą szeregów potęgowych, jest jedną z wielu metod rozszerzenia pojęcia zbieżności szeregów. Ciekawe, że w każdej z nich przemienny szereg jedynkowy ma zawsze sumę $1/2$.

Musimy więc być bardzo ostrożni, gdy zechcemy krytykować pomysły i intuicję naszych poprzedników...

Zdzisław POGODA

WIZUALIZACJA MATEMATYKI



Prosta przechodzi przez ognisko

Koło Matematyków Studentów UJ organizuje konkurs na cytat miesiąca i cytat roku. Odbywa się to w ten sposób, że oryginalniejsze stwierdzenia, wypowiedziane przez wykładowców i prowadzących ćwiczenia, są zapisywane przez studentów na specjalnej, ogólnodostępnej kartce. Po zakończeniu miesiąca studenci (stawiając krzyżyki przy odpowiednim cytacie) wybierają CYTAT MIESIĄCA. Po zakończeniu roku akademickiego w analogiczny sposób wybiera się CYTAT ROKU.

Miło nam zakomunikować, że cytatem roku 1994/95 zostało wybrane zdanie wypowiedziane przez członka redakcji *EPSILONA*! Główną nagrodę otrzymał Marcin Poźniak, który, wręczając studentowi poprawioną pracę pisemną, powiedział:

– *To nie jest znak zapytania, to jest... obawiam się... ocena.*

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.