



## SPIS TREŚCI NUMERU 4(263)

O tym, czego nie ma	str. 1
Wielomian, który nie ma pierwiastków	str. 2
Punkt materialny	str. 3
Ciało doskonale czarne	str. 3
Sfera niebieska	str. 4
Kanały na Marsie	str. 4
Schwytany satelita	str. 4
O kilku zbiorach, których nie ma	str. 5
Wzory na pierwiastki wielomianu stopnia 5	str. 6
Ciepłik	str. 6
Czarna dziura	str. 7
Koronium i nebulium	str. 7
Planeta Wulkan	str. 7
Mała Delta	str. 8
Czy istnieje ładunek elementarny?	str. 9
Szybciej niż światło?	str.10
Dlaczego w przestrzeni trójwymiarowej nie ma przyzwoitego mnożenia?	str.11
Małpie siodło	str.12
Największa liczba pierwsza	str.12
Eter	str.13
Klub 44	str.14
Patrz w niebo	str.16
Zadania	str.16
Epsilon	str.17

### W następnym numerze:

Dlaczego niebo jest błękitne?

Okladkę i ilustracje wykonał  
*Krzysztof BIESAGA*

Wydawca:  
Uniwersytet Warszawski

Z przyjemnością informujemy, że od połowy 1995 roku *Delta* jest dostępna również jako kwartalnik w języku angielskim w sieci INTERNET pod adresem:  
<http://sunsite.icm.edu.pl/~delta/>

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny: Andrzej Białynicki-Birula Bogdan Cichocki – wiceprzewodniczący Jan A. Gaj Tomasz Hofmokr Marta Kicińska-Habior Krzysztof Maślanka Andrzej Mąkowski Andrzej Pelczar Zbigniew Płochocki Zdzisław Pogoda Michał Różyńska Konrad Rudnicki Zbigniew Semadeni Grzegorz Sitarski Mieczysław Subotowicz Andrzej Szymacha Andrzej Woszczyk Wacław Zawadowski Wiesław Żelazko – przewodniczący	Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol Krzysztof Biesaga Jan Kalinowski – z-ca red. nac. Krystyna Kordos – sekr. red. Marek Kordos – red. nac. Tomasz Kwast Anna Ludwicka Krzysztof Rejmer Anna Rudnik Paweł Strzelecki Joanna Udalska Adres Redakcji: ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa tel. 43-02-43 wewn. 21 PAWELST@MIMUW.EDU.PL Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65 Skład systemem $\text{\TeX}$ wykonała Redakcja
--	--

### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)  
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1996 roku wynosi 2 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.  
W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1996 r. 4 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.  
**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.  
Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na III kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:
  - a) jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;
  - b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnieść na konto „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy w PBK S.A. XIII Oddział Warszawa 370044-16551 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>; dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:
  - do 20 XI na I kwartał roku następnego,
  - do 20 II na II kwartał,
  - do 20 V na III kwartał,
  - do 20 VIII na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Krajowej Dystrybucji Prasy, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 w. 2442, 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł, 20 000 zł

Stanisław Lem, „Cyberiada, Wyprawa trzecia, czyli smoki prawdopodobieństwa”:

... Jak wiadomo, smoków nie ma. Prymitywna ta konstatacja wystarczy może umysłowi prostackiemu, ale nie nauce, ponieważ Wyższa Szkoła Neantyczna tym, co istnieje, wcale się nie zajmuje; banalność istnienia została już udowodniona zbyt dawno, by warto jej poświęcać choćby jedno jeszcze słowo. Tak tedy genialny Kerebron, zaatakowawszy problem metodami ścisłymi, wykrył trzy rodzaje smoków: zerowe, urojone i ujemne. Wszystkie one, jak się rzekło, nie istnieją, ale każdy rodzaj w zupełnie inny sposób...

Aby pisać o tym, co nie istnieje – a to właśnie chcieliśmy uczynić (i uczyniliśmy) w tym numerze – najpierw musieliśmy zastanowić się, co też naprawdę znaczy istnieć. Już pierwsze próby określenia, na czym polega istnienie, wykazały niezbicie, że pojęcie to zupełnie inne ma znaczenie w każdej z trzech „flagowych” dyscyplin *Delta*.

Wbrew pozorom najprościej jest określić, co to znaczy *istnieje*, w matematyce (co wcale nie oznacza, że łatwo jest sprawdzić, czy atrybut ten jest należny temu bądź innemu pojęciu). Gdy w matematyce o jakimś obiekcie twierdzimy, że istnieje, oznacza to, iż wykonując zupełnie dowolne manipulacje intelektualne na definiujących go własnościach nigdy nie doprowadzimy do sprzeczności, do przypisania mu przeczących sobie nawzajem cech.

Wypada jeszcze wyjaśnić, że *zupełnie dowolne manipulacje intelektualne* to rozumowania zgodne z logiką, a *przeczące sobie cechy* to takie, że definicję jednej z nich można uzyskać przez postawienie zaprzeczenia przy definicji drugiej. Wyjaśniać zaś, co to znaczy *zgodne z logiką*, już nie będziemy, by nie wpaść w pułapkę zwaną *regressus ad infinitum*, czyli cofanie się z wyjaśnieniami do nieskończoności.

Mimo tej ostatniej wady (to jest faktu, że w końcu i tak trzeba na jakimś poziomie przestać dociekać) matematyczne istnienie jest pojęciem dość prostym: **istnienie to niesprzeczność**. Pozwala to stwierdzić z całą pewnością, np. że podzielna przez 4 liczba nieparzysta nie istnieje. W numerze podane są mniej oczywiste przykłady.

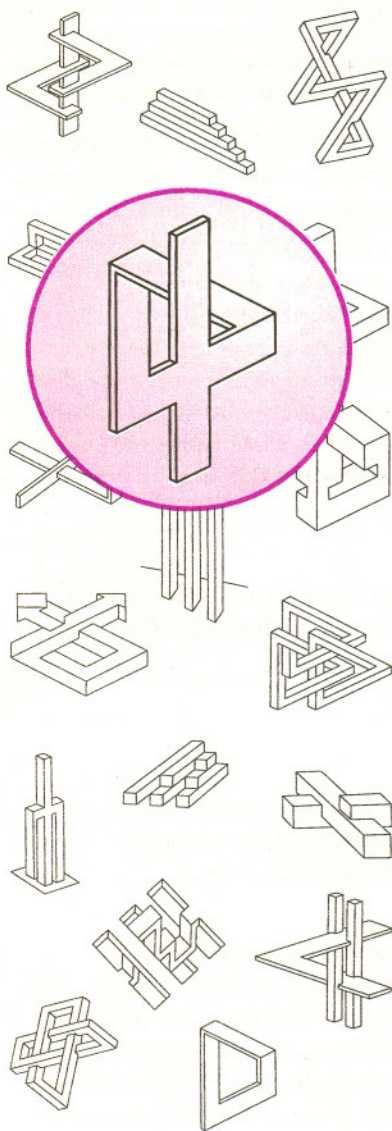
W fizyce jest niby tak samo, ale pojęcie niesprzeczności jest zdecydowanie inne. Obiekt nie istnieje, gdy doświadczenie nie potwierdza jego – wydedukowanych z matematycznego modelu – cech. Jest więc to istnienie znacznie węższe niż w matematyce.

Zbudowanie niesprzecznego w sensie matematycznym modelu jakiejś prawidłowości nie gwarantuje nam, że owa prawidłowość istnieje – potrzebne jest jeszcze, by znane nam fakty nie stały w sprzeczności z żadną spośród własności tego modelu. Jest to trochę tak, jakby matematyczne twierdzenia uznawać za prawdziwe dopóty, dopóki nie zostanie podany kontrprzykład. Daje to jednak bardzo pożyteczne wyniki: nie istnieje w ten sposób np. ani całkowita próżnia, ani absolutne zero, jako stan całkowitego bezruchu, ani gaz doskonały, czyli ten, który spełnia równanie Clapeyrona, choć każdy z tych obiektów ma niesprzeczny model matematyczny.

Jeszcze bardziej restrykcyjna jest astronomia. Tu uznajemy, że dany obiekt istnieje dopiero wtedy, gdy nie dość, że ma niesprzeczny model matematyczny i nie dość, że żadnym jego przewidywaniem nie przeczą obserwacje, ale gdy na dodatek sprawdzimy, że żaden inny znany bądź dający się pomyśleć model matematyczny nie pozwoliłby równie dobrze opisać obserwowanych faktów. Z takich względów z punktu astronomii nie istnieje np. czarna dziura w centrum naszej Galaktyki – mogłaby być i wiele by to wyjaśniało, ale to co widać (a widać niewiele) można wyjaśnić na jeszcze parę innych sposobów.

Mamy więc różne poziomy, na których uznajemy istnienie takich czy innych obiektów, zjawisk, sił czy prawidłowości. Łatwo też stwierdzić, że inne nauki czy dziedziny życia dostarczają jeszcze innych poziomów znaczenia słowa *istnieje*. Warto jednak zauważyć, że w każdej z sytuacji uznanie czegoś za istniejące bądź nie, jest kwestią obowiązującej w danej sferze myślenia arbitralnej umowy, choć potwierdzona jest ona zawsze przez zgodę powszechną.

Co więcej, nie ma dziedziny, choćby tylko czasami penetrowanej przez ludzki intelekt, w której owo pojęcie istnienia nie ewoluowałoby, nie zmieniałoby się. Ale to już inna historia.



## Wielomian, który nie ma pierwiastków

Jak wiele innych ważnych twierdzeń matematyki, zasadnicze twierdzenie algebry, udowodnione przez Carla Friedricha Gaussa w ostatnim roku osiemnastego stulecia, informuje nas, że pewne obiekty nie istnieją. Mianowicie, nie ma takiego, różnego od stałej, wielomianu zmiennej zespolonej, który nie znikałby w żadnym punkcie płaszczyzny zespolonej  $\mathbb{C}$  (kto nigdy nie słyszał o liczbach zespolonych, niech zajrzy najpierw do artykułu Zbigniewa Marciniaka o trójwymiarowym mnożeniu).

Dziś znanych jest wiele dowodów zasadniczego twierdzenia algebry, chciałoby się rzec, *jeden piękniejszy od drugiego*. Żaden, niestety, nie nadaje się do tego, by zwięźle i ze **wszystkimi** niezbędnymi szczegółami przedstawić go Czytelnikom *Delty*. Dla ciekawych – szkic dwóch różnych dowodów nie korzystających wcale z metod algebraicznych.

**Dowód pierwszy** opiera się na dwóch lematach, z których zasadnicze twierdzenie algebry wynika natychmiast.

**Lemat 1.** *Jeśli  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  jest wielomianem, to istnieje taki punkt  $z_0 \in \mathbb{C}$ , w którym funkcja  $|P|$  osiąga swój kres dolny.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że dla punktów  $z$  leżących poza dużym kołem domkniętym  $K(0, R)$  moduł wielomianu jest duży, zatem kresy dolne zbiorów  $\{|P(z)| : z \in \mathbb{C}\}$  i  $\{|P(z)| : z \in K(0, R)\}$  są równe. Funkcja  $|P|$  jest ciągła, więc na zwartym zbiorze  $K(0, R)$  osiąga swój kres dolny.

**Lemat 2.** *Niech  $P$  będzie wielomianem niezerowego stopnia. Jeśli  $z_0 \in \mathbb{C}$  jest takim punktem, że  $|P(z_0)| \leq |P(z)|$  dla wszystkich  $z \in \mathbb{C}$ , to wtedy  $P(z_0) = 0$ .*

Dowód tego lematu jest trudniejszy i znacznie bardziej techniczny, lecz można go przeprowadzić dysponując jedynie elementarną wiedzą o liczbach zespolonych.

Najprościej jest dokonać *reductio ad absurdum* a robi się to tak.

Mnożąc w razie potrzeby wielomian przez stałą i przesuwając jego wykres, można założyć, że  $z_0 = 0$ ,  $P(z_0) = a_0 > 0$ . Przypuśćmy też, że wielomian  $P$  nie zawiera dodatnich potęg  $z$  mniejszych od  $k$ -tej,  $P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_k z^k + a_0$ . Zatem  $a_k = \exp(i\phi)$ . Wtedy, dla  $z = \delta \exp(i(\pi - \phi)/k)$ , mamy  $a_k z^k = -\delta^k < 0$ . Zatem  $|a_k z^k + a_0| < a_0$  dla małych  $\delta > 0$ . Nietrudno teraz wykazać, że dopisanie pod modułem pozostałych wyrazów wielomianu nic nie popsuje: jest ich skończenie wiele i wszystkie są blisko zera nieskończenie mniej ważne niż  $a_k z^k$ . Dokładny dobór  $\delta$  zostawiamy wytrwałym Czytelnikom.

**Dowód drugi** wykorzystuje tzw.

**Twierdzenie Liouville'a.** *Załóżmy, że  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  jest funkcją ograniczoną. Jeśli  $f$  jest różniczkowalna w każdym punkcie, tzn. dla każdego  $z_0 \in \mathbb{C}$  istnieje granica*

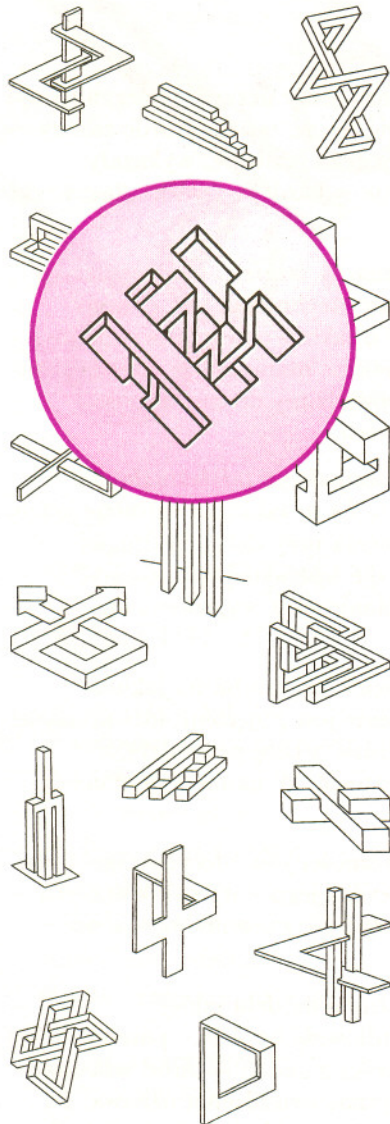
$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

*to  $f$  jest tożsamościowo równa pewnej stałej.*

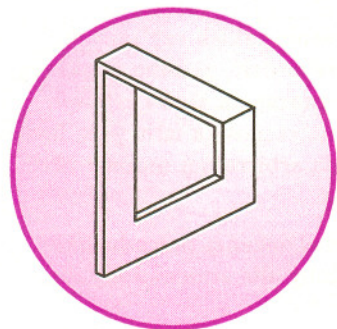
Dowód tego faktu można znaleźć w dowolnym podręczniku teorii funkcji zmiennej zespolonej. Warto zauważyć, że gdy liczby zespolone zastąpić rzeczywistymi, to twierdzenie Liouville'a będzie fałszywe (przykład:  $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ ).

Przypuśćmy teraz, że  $P$  jest takim wielomianem zmiennej zespolonej, że  $P(z) \neq 0$  dla wszystkich  $z$ . Nietrudno wtedy zauważyć, że funkcja dana wzorem  $f(z) = 1/P(z)$  spełnia wszystkie założenia twierdzenia Liouville'a (ograniczoność funkcji  $1/P$  wynika, podobnie jak Lemat 1 w pierwszym dowodzie, z obserwacji, że moduł wielomianu nie może być mały na zewnątrz pewnego dużego koła). Zatem,  $1/P = \text{const}$ , a więc także  $P = \text{const}$ , co kończy dowód zasadniczego twierdzenia algebry.

Paweł STRZELECKI



Mówimy, że funkcja  $f$  jest ograniczona, jeśli istnieje taka liczba  $M$ , że dla wszystkich zespolonych  $z$  mamy  $|f(z)| \leq M$ .



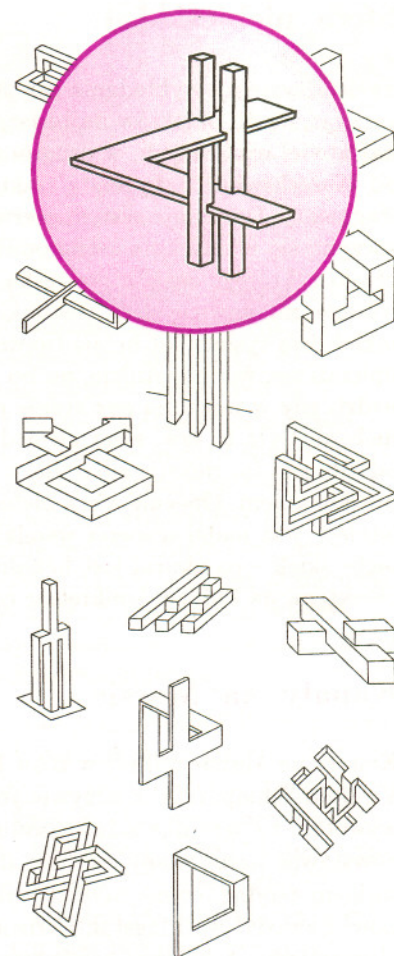
## Punkt materialny

W mechanice często posługujemy się pojęciem punktu materialnego. Rozważając ruch ciała redukujemy je do punktu obdarzonego masą. Ma to proste uzasadnienie w stosunku do gwiazd na niebie i ich ruchów obserwowanych z Ziemi; rozmiary gwiazd są zanedbywalne w stosunku do ogromnej odległości, jaka nas od nich dzieli. Gorzej jest, gdy zastępujemy punktem piłkę, siekierę lub samochód. Czy ma to jakieś uzasadnienie?

Ruch ciała sztywnego (to też pewna idealizacja – ciała absolutnie sztywnych w rzeczywistości nie ma) można złożyć z dwóch prostych rodzajów ruchów: ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego dookoła środka masy. Jeśli nie interesuje nas ruch obrotowy lub go po prostu nie ma, zastępujemy ciało przez jeden punkt, któremu przypisujemy masę całego ciała i piszemy równania ruchu dla tego punktu. Znając jego położenie bez trudu możemy odtworzyć położenia wszystkich innych, rzeczywistych punktów ciała sztywnego. Środek masy może, ale nie musi znajdować się we wnętrzu ciała (na przykład dla obręczy: środek ciężkości nie jest żadnym z jej punktów).

Czy możemy więc powiedzieć, że choć punkty materialne w przyrodzie nie istnieją, to są wygodnym elementem opisu ruchów rzeczywistych, a więc rozciągniętych ciał? To prawda, ale niepełna. Najbardziej elementarne (zgodnie z dzisiejszą wiedzą) obiekty, takie jak elektrony i kwarki, uważamy za pozbawione struktury twory punktowe obdarzone masą. (Z kolei inny elementarny obiekt, jakim jest foton, masy nie ma, a w wielu sytuacjach zachowuje się jak fala, nie jest więc dobrze zlokalizowany w przestrzeni.) Oczywiście, mamy tu do czynienia z dwoma różnymi koncepcjami punktu materialnego. Raz jest to fikcyjny obiekt ułatwiający opis ruchu ciała, drugi raz jest to najbardziej elementarny, rzeczywisty składnik materii. A więc punkty materialne jednak istnieją? Niech za odpowiedź wystarczy fakt, że jeszcze nie tak dawno proton i neutron także uważano za twory punktowe, ale rozwój fizyki wysokich energii sprawił, że obecnie wiemy, iż mają one wewnętrzną strukturę – są zbudowane z trzech punktowych(?) kwarków. A zatem możemy nadal pytać, czy istnieją rzeczywiste punkty materialne, a jedyna odpowiedź na to pytanie brzmi: nie wiadomo.

K.R.



## Ciało doskonale czarne

Ciała doskonale czarne (c.d.cz.) nie ma. Każde bowiem ciało w jakimś stopniu odbija padające na nie promieniowanie, natomiast według definicji, c.d.cz. niezależnie od swojej temperatury, powinno całkowicie pochłaniać padające na nie promieniowanie i to bez względu na jego skład widmowy. Dlaczego więc posługujemy się tym pojęciem? Otóż promieniowanie c.d.cz., tzn. jego natężenie i rozkład widmowy, zależy jedynie od temperatury tego ciała i może być obliczone teoretycznie, dzięki czemu pojęcie to ma szczególne znaczenie w teorii promieniowania.

Własności c.d.cz. najlepiej przybliża duża wnęka z małym otworem i wewnętrznymi ściankami, które mają taką samą temperaturę, nie przepuszczają promieniowania i częściowo je pochłaniają. Promieniowanie padające na otwór wnęki doznaje wewnątrz niej wielokrotnego odbicia i zostaje prawie całkowicie pochłonięte. Jeśli ścianki wnęki mają wysoką temperaturę (np. temperaturę wnętrza pieca), to promieniowanie wychodzące przez otwór z dobrą dokładnością ma charakterystyki zbliżone do promieniowania c.d.cz. – w szczególności nie zależą one od materiału, z jakiego jest wykonana wnęka.

W przyrodzie istnieje jednak promieniowanie, które prawie idealnie pasuje do c.d.cz. Pomiar wykonany w ciągu ostatnich kilku lat przez satelitę COBE wykazały, że tzw. promieniowanie reliktywne, wypełniające cały Wszechświat promieniowaniem elektromagnetycznym nie pochodzące od gwiazd, galaktyk czy też materii rozproszonej, z dokładnością rzędu  $10^{-5}$  zgadza się z promieniowaniem c.d.cz. o temperaturze 2,73 K. Jest ono pozostałością po Wielkim Wybuchu. Na szczęście zaobserwowane odstępstwa widma promieniowania reliktywego od promieniowania c.d.cz. na poziomie  $10^{-5}$  pozwalają na wyjaśnienie pochodzenia galaktyk i gwiazd w teorii Wielkiego Wybuchu.

J.K.

## Sfera niebieska

Są dwa systemy wykładania astronomii: w jednym zaczyna się od obiektów najbliższych i zjawisk najłatwiej widocznych, w drugim zaczyna się od Wszechświata całą resztę traktując jako jego fragmenty. Dominuje system pierwszy. Chyba zawsze zaczyna się wtedy kurs astronomii od wprowadzenia obiektu, którego zasadniczą cechą jest to, że nie istnieje, mianowicie sfery niebieskiej. To znaczy, przez jakieś dwa tysiące lat ludzie (nawet kompetentni) upierali się, że ona istnieje, no bo przecież każdy ją widzi, gdy w pogodną noc stanie pod gwiazdzistym niebem. Była to tzw. sfera gwiazd stałych, jednak od kilkuset lat mówiło się o niej z coraz mniejszym przekonaniem. Obecnie sfera niebieska, choć nie istnieje, jest nadal scenerią wszelkich zjawisk niebieskich – co akurat jest banalne, ale jest też obiektem, na którym konkretnie określa się

współrzędne, uprawia trygonometrię, dzięki czemu można zręcznie przedstawić wszystkie problemy dotyczące wschodów i zachodów, pór roku, precesji, nawigacji itd. – krótko mówiąc, uprawiać astronomię sferyczną.

Sfera niebieska nie jest, oczywiście, jedynym przykładem obiektu nieistniejącego fizycznie, a przy tym bardzo pożytecznego i dlatego istniejącego jako idea. Takimi są przecież niezliczone obiekty wprowadzane w matematyce i w fizyce. Jednak sferze niebieskiej kilka tysięcy lat temu przypisywano autentyczną materialność (co prawda jej budulec miał być „nie z tej ziemi”), z czego zrezygnowano nie tak znowu dawno, nikt nigdy natomiast nie twierdził, że materialne są: prosta, rogata sfera, albo lagranżian czy funkcja falowa. T.K.

## Kanały na Marsie

Kanały na Marsie odkrył w roku 1877 Giovanni Virginio Schiaparelli. Z oczywistych powodów wywołało to ogromne zainteresowanie. Zaczęły powstawać liczne mapy sieci kanałów, zresztą nie całkiem zgodne, co nie przeszkodziło, że Percival Lowell założył we Flagstaff (Arizona, USA) obserwatorium, którego priorytetowym zadaniem miało być właśnie badanie Marsa i innych planet. Badacz ten w tymże obserwatorium odkrył wiele lat później Plutona, on też pierwszy wysunął przypuszczenie, że kanały stanowią sieć irygacyjną zbudowaną przez mieszkańców Marsa. I tak sprawa ciągnęła się praktycznie do lat 70. naszego wieku. W Marsjan mało kto już wtedy wierzył, ale dopiero sondy kosmiczne wysłane ku Marsowi stwierdziły na sto procent, że kanałów po prostu nie ma. Owszem, na zdjęciach przesłanych przez sondy widać puste koryta dawnych rzek, widać różne wąwozy, ale wszystkie

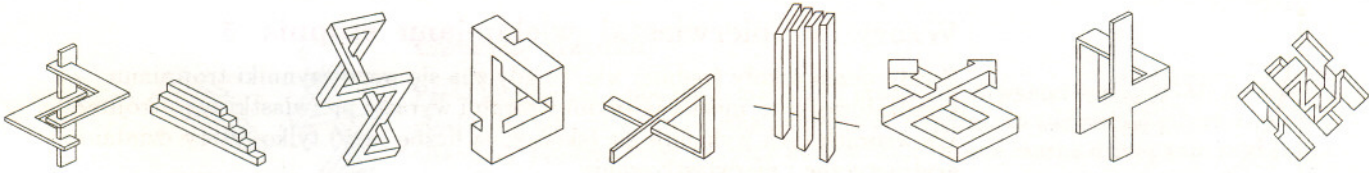
są efektem zwyczajnych procesów geologicznych, nie ma natomiast śladów obiektów sztucznych.

Fenomen kanałów na Marsie nie ma chyba żadnych odpowiedników w historii astronomii. Obecność kanałów przez niemal stulecie nie ulegała właściwie wątpliwości, złudzenie usprawiedliwiała wydawanie dużych pieniędzy na programy naukowe. Bo że było to złudzenie, próbowano dowodzić dużo później. Stwierdzono mianowicie doświadczalnie, że oko człowieka jest skłonne łączyć w regularny wzór plamki nieregularnie rozrzucone na jakimś tle i oglądane w warunkach uniemożliwiających widzenie poszczególnych plamek. Ale może nie jest całkiem źle, że człowiek ma złudzenia. Być może bez tego złudzenia Wells nie napisałby swojej książki o Marsjanach, nie powstałoby słynne obserwatorium i może zainteresowanie laików Wszechświatem byłoby jeszcze mniejsze. T.K.

## Schwytany satelita

Jeżeli dwa punkty materialne mają rozbiegnąć się do nieskończoności, to ich całkowita energia mierzona w układzie środka masy (tj. suma ich energii kinetycznych i wzajemnej grawitacyjnej) musi być równa zeru lub dodatnia. Podobnie, jeżeli biegną ku sobie z nieskończoności, to ich energia jest nieujemna, tory są krzywymi otwartymi, a więc ciała te spotkać się mogą tylko raz. Jest więc wykluczone złapanie się takich dwóch punktów materialnych na orbity zamknięte. Aby orbity otwarte przeszły w zamknięte, całkowita energia obu ciał musi stać się ujemna, a to jest możliwe, ponieważ realne ciała nie są punktami materialnymi. Np. część energii może przejść

w energię rotacji ciał (wskutek oddziaływania pływowego) albo w ich energię termiczną (powód ten sam); jeden obiekt może zostać zahamowany w atmosferze drugiego (co zresztą też prowadzi do zamiany części energii mechanicznej na termiczną), wreszcie część energii może unieść trzecie ciało, jak zapewne nierzadko dzieje się w gęsto wypełnionych gwiazdami gromadach kulistych. Podejrzewa się, że niektóre satelity w Układzie Słonecznym zostały przez planety schwytane, w szczególności satelity o ruchu wstecznym (tzn. obiegające planetę w kierunku przeciwnym, niż planeta rotuje lub obiega Słońce), jednak problem ten jest daleki od ostatecznego rozwiązania. T.K.



## O kilku zbiorach, których nie ma

Cóż prostszego, jak stworzyć zbiór z dowolnych prawdziwych lub wymyślonych obiektów! Czyż zbiór nie jest po prostu pewną konstrukcją myślową? Wystarczy zatem pomyśleć o owych obiektach jako o elementach jednego zbioru – i już.

Jak pięknie. Niestety, mniej więcej 90 lat temu Bertrand Russell wpadł na pomysł, by rozważyć zbiór (nazwijmy go  $Z$ ), do którego ma należeć każdy taki zbiór, który nie jest sam swoim własnym elementem, i tylko takie zbiory. Inaczej mówiąc,

$$Z = \{X : X \notin X\}.$$

I oto okazało się, że coś jest nie tak jak trzeba. Mianowicie, czy  $Z \in Z$ ? Jeśli tak, to  $Z$  nie może należeć do  $Z$ , bo nie spełnia wymaganego warunku. Jeśli nie, to musi należeć do  $Z$ , bo spełnia wymagany warunek. Ta sprzeczność każe wnioskować, że taki zbiór  $Z$  nie może istnieć.

Mamy tu pierwszy przykład zbioru, który nie jest zbiorem, bo go nie ma. Przykład okazał się zresztą bardzo przydatny, bo matematycy zajęli się budową takich podstaw teorii mnogości, by podobne sprzeczności nie mogły wystąpić.

Swego czasu Georg Cantor udowodnił, że każdy zbiór ma mniej elementów niż podzbiorów. Mówiąc nieco dokładniej, jeśli w jakikolwiek sposób przyporządkujemy każdemu elementowi (dowolnego) zbioru  $A$  pewien podzbiór zbioru  $A$ , to na pewno zostanie jeszcze sporo podzbiorów „bez przydziału”. (Mówiąc jeszcze dokładniej, moc zbioru  $A$  jest ostro mniejsza od mocy zbioru  $P(A)$  wszystkich podzbiorów zbioru  $A$ .) Z tego twierdzenia Cantora (spytajcie dowolnego studenta matematyki po I semestrze studiów, czy słyszał o twierdzeniu Cantora!) wynika kilka ciekawych wniosków pozytywnych, ale także wiele negatywnych, czyli takich, które mówią o tym, że coś nie istnieje.

Po pierwsze, nie istnieje „zbiór wszystkich zbiorów”, czyli taki zbiór, do którego należy każdy zbiór. Istotnie, przypuśćmy, że  $U$  jest takim zbiorem. Wtedy każdy jego podzbiór – będąc zbiorem – jest jednocześnie jego elementem, a zatem  $U$  ma nie więcej podzbiorów niż elementów – sprzeczność z twierdzeniem Cantora.

Widać mieliśmy za duże wymagania. Może uda się utworzyć zbiór wszystkich zbiorów jednoelementowych?

Takich jest przecież dużo mniej niż wszystkich

zbiorów... Niestety. Gdyby taki zbiór, powiedzmy  $J$ , istniał, to dla dowolnego zbioru  $A$  elementem zbioru  $J$  byłby jednoelementowy zbiór  $\{A\}$ . Ale wtedy wzięlibyśmy sumę zbiorów należących do  $J$  (czyli zbiór złożony ze wszystkich takich elementów, które należą do choćby jednego elementu zbioru  $J$ ) – a zgodnie z aksjomatami teorii mnogości, suma zbiorów należących do jednego zbioru jest znowu zbiorem – i okazałoby się, że elementem owej sumy jest każdy zbiór. Rzeczywiście, zbiór  $A$  jest elementem zbioru  $\{A\}$  należącego do  $J$ . A przecież już wiemy, że taki zbiór nie istnieje! Zatem nie istnieje także zbiór wszystkich zbiorów jednoelementowych.

A czy istnieje zbiór ze 149 podzbiorami? Znowu pudło. Nie istnieje też zbiór, który miałby dokładnie 196 albo 245 280 podzbiorów. Uzasadnienie tej tezy nie wymaga sprawdzenia każdego zbioru i policzenia jego podzbiorów. Po prostu liczba podzbiorów skończonego zbioru  $n$ -elementowego (oczywiście, żaden zbiór nieskończony nie ma dokładnie 149 podzbiorów!) jest równa  $2^n$ . Co więcej, ten fakt powinien być znany wielu uczniom szkoły średniej, a w każdym razie tym, którzy widzieli kiedyś następującą równość:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n,$$

traktowaną jako własność kombinatoryczna. A przecież  $\binom{n}{k}$  to nic innego jak liczba  $k$ -elementowych podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego! Zatem  $2^n$  jest liczbą wszystkich (a więc i 0-elementowego i 1-elementowych, ... i  $n$ -elementowego) podzbiorów zbioru  $n$ -elementowego.

Dobrze, jeśli nie 149 i nie 196, i nie 245 280, to może da się znaleźć zbiór, który miałby tyle podzbiorów, ile jest liczb naturalnych (czyli przeliczalnie wiele)? Nie wątpię, że nie spodziewasz się już, drogi Czytelniku, odpowiedzi pozytywnych w tym artykule. I rzeczywiście. Żaden zbiór skończony nie ma tylu podzbiorów, bo ma ich tylko skończenie wiele. Jeśli natomiast  $A$  jest zbiorem nieskończonym, to ma co najmniej tyle elementów, ile jest liczb naturalnych, bo po wyjęciu  $n$  elementów z  $A$  – dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  – możemy jeszcze znaleźć w nim kolejny,  $(n+1)$ -szy element. Jeśli tak, to z twierdzenia Cantora wynika, że  $A$  musi mieć **więcej** podzbiorów niż jest liczb naturalnych!

Po tym wszystkim można zapytać, czy w ogóle istnieją jakieś zbiory. Tak. Na pewno istnieje zbiór pusty.

## Wzory na pierwiastki wielomianu stopnia 5

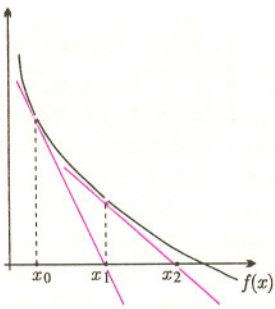
Każdy uczeń szkoły średniej wie, że gdy zna się współczynniki trójmianu kwadratowego, to można jawnymi wzorami wyrazić pierwiastki tego trójmianu. We wzorach tych wykonuje się (skończoną liczbę razy) tylko cztery działania arytmetyczne i pierwiastkowanie.

Podobnie rzecz się ma z wielomianami stopnia trzeciego i czwartego. Są wzory (bardziej zawile niż w przypadku trójmianu kwadratowego) wyrażające pierwiastki takiego wielomianu poprzez jego współczynniki.

Od niemal 200 lat wiadomo (Ruffini, Abel, Galois), że nie ma wzorów pozwalających wyrazić pierwiastki wielomianu stopnia większego od 4 jako funkcje współczynników tego wielomianu, o ile chcemy ograniczyć się do wykonywania (skończoną liczbę razy!) tylko czterech działań arytmetycznych i wyciągania pierwiastków różnych stopni. To twierdzenie o nieistnieniu nie powinno przerażać inżyniera, który przypadkiem natrafi na równanie stopnia piątego. Istnieją bowiem znakomite sposoby (np. metoda stycznych Newtona), które pozwalają na przybliżone znajdowanie pierwiastków takiego równania z dowolną z góry określoną dokładnością.

Kto przeszedł przez podstawowy kurs analizy matematycznej, słyszał zapewne, że całki nieoznaczonej  $\int e^{-x^2} dx$  nie można wyrazić przez funkcje elementarne za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych i składania funkcji, bez stosowania przejścia do granicy. To twierdzenie niewiele różni się od twierdzenia Ruffiniego–Abela–Galoisa, w tym sensie przynajmniej, że oba twierdzenia mają dowody korzystające z tych samych metod.

P.S.



Metoda stycznych Newtona to następujący sposób znajdowania przybliżonych rozwiązań równania

$$f(x) = 0:$$

1. Wybieramy (odgadujemy) początkowe przybliżenie rozwiązania;
2. Gdy mamy już przybliżenie  $x_n$ , to następne przybliżenie znajdujemy ze wzoru

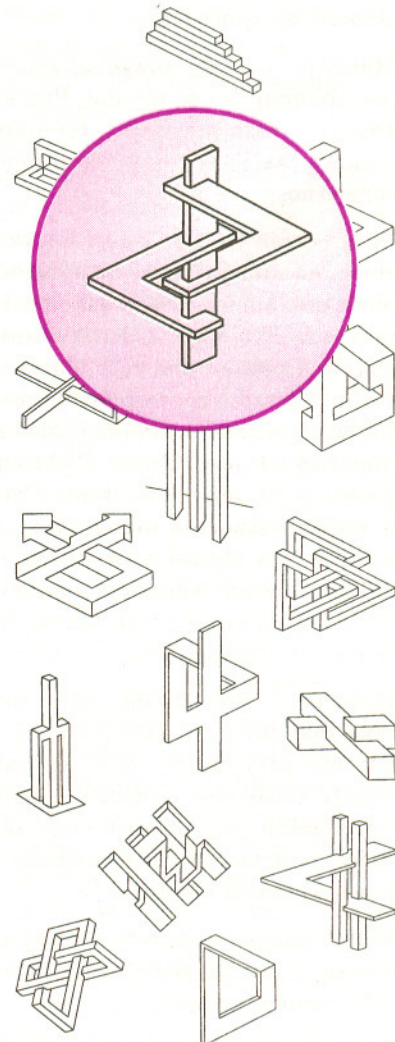
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Czytelnik, który zna definicję pochodnej, zechce sprawdzić, że  $x_{n+1}$  jest miejscem zerowym stycznej do wykresu  $f$  poprowadzonej przez punkt  $(x_n, f(x_n))$  (patrz rysunek). Gdy  $f$  i  $f'$  są monotoniczne, to przybliżenie  $x_{n+1}$  ma z reguły dwukrotnie więcej dokładnych cyfr, niż  $x_n$ .

## Cieplik

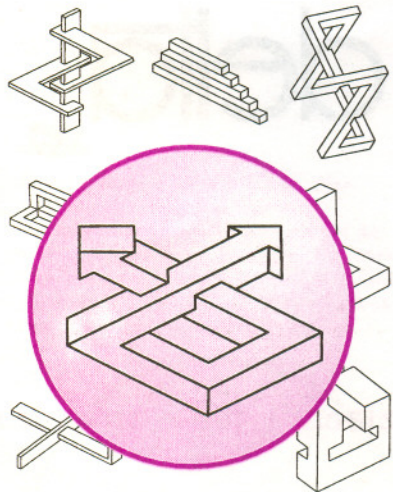
Ponad sto lat badań nad rozszerzalnością cieplną ciał dzieli pierwszy termoskop Galileusza z roku 1592 od termometru rtęciowego skonstruowanego przez Fahrenheita około roku 1715. W tym czasie nauczono się dokładnie porównywać temperatury ciał odkrywając „po drodze” anomalną rozszerzalność termiczną wody, a także obalając starożytne jeszcze przekonanie, że nasze ciało jest chłodniejsze w nocy niż w dzień (Santorio, przed 1634 rokiem). Wyobrażano sobie przy tym, że zmiana temperatury ciała jest związana z pochłanianiem lub oddawaniem otoczeniu subtelnej materii nazwanej cieplikiem. Początkowo sądzono, że składa się ona z małych i bardzo przenikliwych atomów obdarzonych ciężarem. Później (w latach 1760-1780), gdy Lavoisier wykazał, że zmiana ciężaru żarzonych próbek jest związana z reakcjami spalania, cieplik stał się niezniszczalnym i nieważkim płynem. W takiej formie teoria cieplika (po wprowadzeniu pojęć ciepła właściwego i ukrytego ciepła przemiany stanu skupienia) doskonale zgadzała się z precyzyjnymi pomiarami kalorymetrycznymi Blacka i pozwalała przewidzieć temperaturę końcową dowolnej mieszanki ciał stałych i cieczy, o ile tylko znane były masy i temperatury początkowe składników. Wsparta autorytetem Lavoisiera przetrwała niemal do połowy XIX wieku. Jeszcze Sadi Carnot formułując w rozprawie *Réflexions sur la puissance motrice du feu* (1824) twierdzenie o niemożliwości skonstruowania maszyny cieplnej, zamieniającej całe pobrane ciepło na pracę, posługiwał się pojęciem cieplika i działanie maszyn cieplnych tłumaczył pracą wykonaną przez cieplik przepływający od grzejnika do chłodnicy – podobnie jak spadająca woda porusza koło młyńskie. Już koniec XVIII wieku przyniósł jednak obserwacje podważające istnienie cieplika: produkcja ciepła podczas wiercenia luf armatnich nasunęła Benjaminowi Rumfordowi w 1798 roku pomysł o możliwości zamiany pracy mechanicznej na ciepło; w tym samym czasie zaobserwowano też przekaz ciepła przez promieniowanie mające wiele cech światła, a niewiele później produkcję ciepła towarzyszącą przepływowi prądu. Własności cieplika nie dało się już dalej ulepszać, tak aby pogodzić jego istnienie z nowo odkrytymi procesami. Na jego miejsce wprowadzone zostało pojęcie energii, wielkości, której ilość pozostaje stała w każdym układzie izolowanym niezależnie od przebiegających w nim procesów.

Andrzej MAJHOFER



## Czarna dziura

Prędkość ucieczki z obiektu o masie  $M$  i promieniu  $R$  wynosi  $v = \sqrt{2GM/R}$ . Jeżeli obiekt jest taki, że  $v \geq c$  ( $c$  oznacza prędkość światła), to nazywa się go czarną dziurą. Graniczny promień masy  $M$ , przy którym staje się ona czarną dziurą (np. zapadająca się gwiazda), nazywa się promieniem Schwarzschilda lub promieniem grawitacyjnym  $R_g = \sqrt{2GM/c^2}$ . Jest to nieuczciwe wprowadzenie tego pojęcia, bo zastosowano tu mechanikę klasyczną do zagadnienia relatywistycznego, ale skuteczne, bo wynik jest dokładnie taki, jaki daje teoria względności. Tak czy inaczej, teoria przewiduje, a obserwacje zdają się potwierdzać, że istnieją obiekty niepoznawalne z przyczyn zasadniczych: skoro z czarnej dziury nawet światło nie może uciec, to nie może być mowy o jakiegokolwiek informacji spod promienia grawitacyjnego. Inna sprawa, czy obserwator, który wpadł do czarnej dziury, może odebrać sygnały z „normalnego” Wszechświata. Teoretycznie może, ale on sam z tych samych powodów nie będzie mógł nikogo na zewnątrz o tym poinformować. Czarna dziura, zgodnie z nazwą, jest pułapką, do której wszystko może wpaść, a nic nie może wylecieć – przynajmniej tak tę sprawę widzimy obecnie. Jakież to pole do popisu dla pisarzy science fiction! T.K.

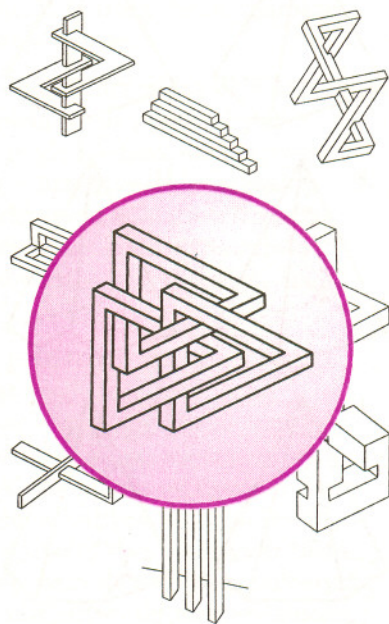


## Koronium i nebulium

Wszystkie normalne gwiazdy mają dość zbliżony skład chemiczny, dlatego o wyglądzie ich widm decyduje temperatura powierzchniowa. Na przykład, w widmie Słońca w zakresie widzialnym najsilniejsze są dwie linie (absorpcyjne) zjonizowanego wapnia, z czego bynajmniej nie wynika, że Słońce jest zbudowane głównie z wapnia. To właśnie warunki panujące na powierzchni Słońca są takie, że minimalna ilość wapnia tak silnie manifestuje swoją obecność.

Gdy zastosowano analizę widmową do światła ciał niebieskich, szybko odkryto w widmie korony słonecznej linie (emisyjne) jakiegoś nieznanego pierwiastka. Z braku lepszego pomysłu nazwano go koronium. Z kolei w widmach mgławic planetarnych znaleziono linie innego nieznanego pierwiastka i nazwano go – no jak? – oczywiście: nebulium. Niestety, dla tych dwóch pierwiastków nie było miejsca w tabeli Mendelejewa, wynik badań mógł więc być tylko jeden: linie pochodzą od pierwiastków znanych, a jedynie znajdujących się w niezwykłych warunkach. I tak okazało się, że koronium to metale kilkunastokrotnie zjonizowane wskutek wysokiej temperatury (ponad  $10^6$  K) korony. A nebulium to też znane cięższe pierwiastki w stanie nieosiągalnego w laboratorium rozrzedzenia. Wtedy bowiem atomy mają szanse emitować tzw. linie wzbronione odpowiadające przejściom między stanami energetycznymi nie występującymi przy większej gęstości gazu, bo niszczone wtedy wskutek częstych zderzeń.

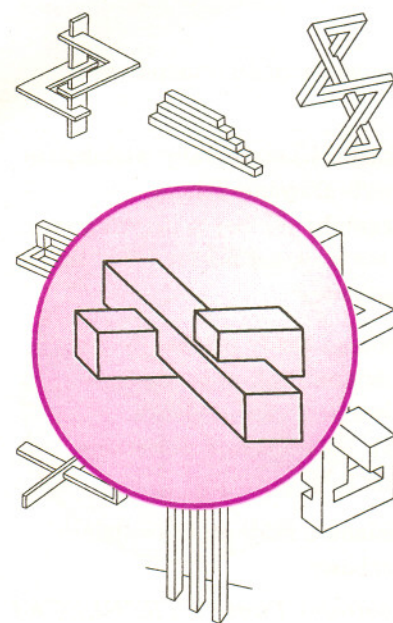
T.K.



## Planeta Wulkan

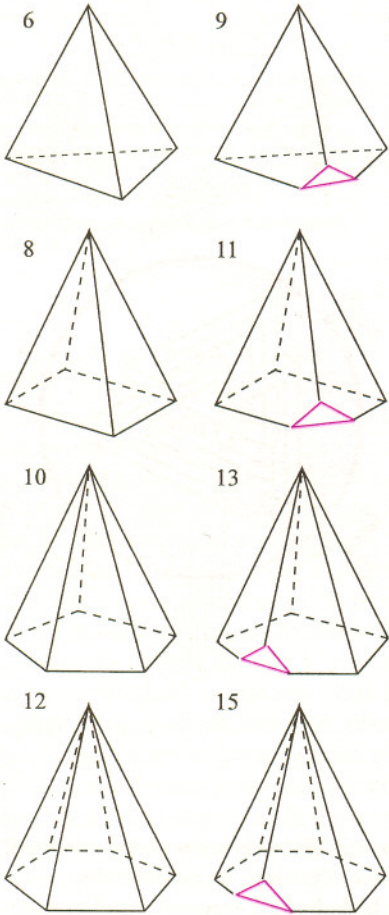
Od dość dawna wiadomo było, że peryhelium Merkurego nie zachowuje stałej orientacji względem Słońca, lecz obiega je w tempie  $573''$  na wiek. Zjawisko to nie miało prawa wystąpić, gdyby Merkury był jedyną planetą Układu Słonecznego. Już Leverrier obliczył, że uwzględnienie oddziaływania ze strony pozostałych planet usprawiedliwia przesuwanie się peryhelium Merkurego, ale nie całkiem w takim tempie, jak dowodzą obserwacje – do zgodności obliczeń z obserwacjami brakowało  $43''$ . Wysunięto więc narzucającą się hipotezę: powinna istnieć jeszcze jedna, nieznaną planetą, zakłócającą ruch Merkurego.

Systematyczne poszukiwania hipotetycznej planety rozpoczęto w 1859 roku. Sprawa nie była łatwa, ponieważ powinna to być planeta obiegająca Słońce wewnątrz orbity Merkurego, a więc bardzo trudna do dostrzeżenia w blasku Słońca. Co jakiś czas pojawiały się doniesienia o jej odkryciu, szybko następnie odwoływane. Niemniej jednak zdążono nadać planecie nazwę – Wulkan. Z biegiem czasu poszukiwania kontynuowane były z coraz mniejszym zapałem i w końcu sprawa wygasła bez ostatecznego rozwiązania. Brakujące  $43''$  wyjaśniła dopiero ogólna teoria względności. Według niej mianowicie zakrzywienie czasoprzestrzeni spowodowane przez samo Słońce powoduje, że orbita planety po jednym obiegu nie całkiem się domyka. Dotyczy to, oczywiście, wszystkich planet, lecz w przypadku Merkurego efekt był najłatwiej widoczny ze względu na jego szybki ruch i stosunkowo silne spłaszczenie orbity. T.K.



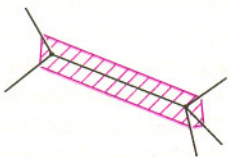


## Wielościan o siedmiu krawędziach i jego znajomi



Rys. 1

Rys. 2



Rys. 3. Gdy płaszczyznę cięcia prowadzimy równolegle do ustalonej krawędzi wielościanu i niedaleko od niej, to na przekroju otrzymujemy wielokąt, który ma przynajmniej dwa boki równoległe.

Dla każdej liczby naturalnej  $n \geq 3$  można, oczywiście, narysować wielokąt, który ma  $n$  boków. A jak to będzie z wielościanami o zadanej z góry liczbie krawędzi?

Po pierwsze, nie uda się nikomu skonstruować wielościanu o  $n$  krawędziach dla  $n$  ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Wielościan bowiem musi mieć przynajmniej cztery wierzchołki (trzy to jeszcze za mało, bo trzy punkty zawsze leżą w jednej płaszczyźnie), a z każdego wierzchołka wychodzi muszą przynajmniej trzy krawędzie. Ponieważ każda krawędź łączy ze sobą dwa wierzchołki, to krawędzi musi być przynajmniej  $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ . Pięć albo mniej – to jeszcze za mało.

Wielościan o sześciu krawędziach, oczywiście, istnieje: to czworościan. Nietrudno także jest wskazać wielościany o  $2k$  krawędziach dla  $k = 4, 5, 6, \dots$ . Będą to ostrosłupy o podstawie czworokąta, pięciokąta, sześciokąta, ... (patrz rys. 1).

Skonstruujemy teraz serię wielościanów o nieparzystej liczbie krawędzi równej odpowiednio 9, 11, 13, ... Wystarczy każdemu z ostrosłupów z rysunku 1 tak obciąć róg przy podstawie, jak pokazuje to rysunek 2. Przybędą wtedy trzy nowe krawędzie (jedna na każdej ścianie przy odcinanym rożku).

Ile by się kto nie męczył, nie uda mu się do katalogu z rysunków 1 i 2 dołożyć wielościanu o siedmiu krawędziach. Gdyby bowiem taki wielościan istniał, to miałby przynajmniej pięć wierzchołków (wielościan o czterech wierzchołkach to czworościan, który ma sześć krawędzi). Z każdego wierzchołka wychodzą przynajmniej 3 krawędzie, każda łączy dwa wierzchołki, więc nasz wielościan miałby krawędzi przynajmniej  $(5 \cdot 3) : 2 = 7\frac{1}{2}$ . To sprzeczność, która dowodzi, że wielościanu o siedmiu krawędziach nie ma.

Rozumując tak samo można udowodnić, że nie ma wielościanu o nieparzystej liczbie ścian, z których każda jest trójkątem.

Nie ma także wielościanu wypukłego, w którym każda ściana byłaby wielokątem o innej liczbie boków. Gdyby bowiem istniał, to wybralibyśmy ścianę o największej liczbie boków, powiedzmy  $n$ . Przylegałoby do niej  $n$  innych ścian, każda o innej liczbie boków, nie mniejszej niż 3 i nie większej niż  $(n - 1)$ . Takich ścian może być jednak co najwyżej  $(n - 3)$ , sprzeczność.

Na koniec udowodnimy, że nie ma wielościanu, którego każdy przekrój byłby trójkątem. Ustalmy dowolną krawędź wielościanu i tak poprowadźmy płaszczyznę przekroju, by była do tej krawędzi równoległa i w dodatku przecinała obie przylegające do niej ściany (rys. 3). Na przekroju powstanie wielokąt o dwóch bokach równoległych – nie będzie to więc trójkąt.

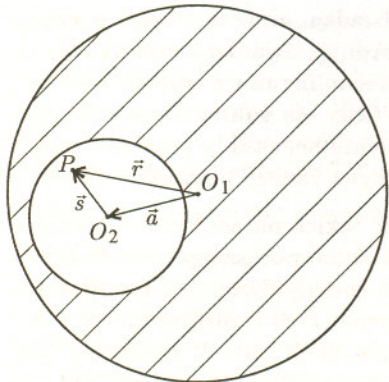
Jeszcze i innych nieistniejących znajomych wielościanu o siedmiu krawędziach można wymyśleć wielu. Polecamy tę pouczającą zabawę.

Małą Deltę przygotował Paweł STRZELECKI

## Czy istnieje ładunek elementarny?



**Rozwiązanie zadania F 425.** Pole pochodzące od wydrążonej kuli możemy obliczyć jako superpozycję pól wytworzonych przez dwie kule. Pierwsza to pełna kula o gęstości  $\rho$ , druga to także pełna kula o gęstości  $-\rho$ , znajdująca się tam, gdzie jest wydrążenie.



Wprawdzie ujemne masy nie istnieją, ale czasem wygodnie jest posłużyć się w rachunkach takim nieistniejącym obiektem. Natężenie pola w punkcie  $P$  jest równe

$$\vec{\gamma}_P = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2.$$

Z prawa Gaussa wiemy, że ta część pełnej kuli o dodatniej masie, która znajduje się w odległości większej niż  $r$  od środka  $O_1$ , nie daje żadnego wkładu do pola grawitacyjnego w punkcie  $P$ . Analogicznie, ta część kuli o ujemnej masie, która znajduje się w odległości większej niż  $s$  od środka  $O_2$ , też nie daje wkładu do pola w punkcie  $P$ . Stąd

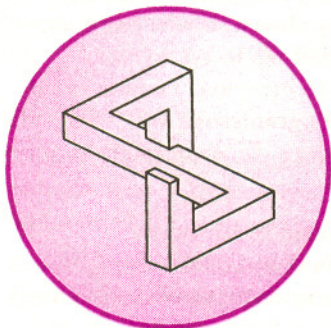
$$\vec{\gamma}_1 = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi \rho \vec{r}$$

i analogicznie

$$\vec{\gamma}_2 = \frac{4}{3}\pi \rho \vec{s}.$$

Natężenie pola wynosi

$$\vec{\gamma}_P = \frac{4}{3}\pi \rho (\vec{s} - \vec{r}) = -\frac{4}{3}\pi \rho \vec{a} = \text{const.}$$



Zapewne każdy pamięta (a przynajmniej powinien) ze szkolnych lekcji fizyki pierwszą zasadę dynamiki Newtona.

*Istnieje taki układ odniesienia, w którym ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym lub spoczywa, jeśli nie działa na nie żadna siła lub działające siły się równoważą.*

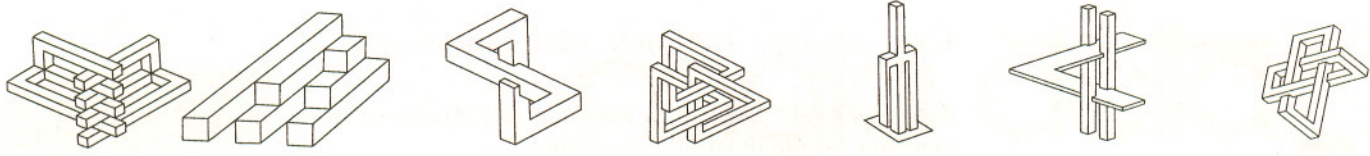
Układów inercjalnych istnieje nieskończenie wiele, gdyż każdy układ odniesienia poruszający się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem układu inercjalnego sam także musi być inercjalny. Pierwsza zasada dynamiki co prawda definiuje układ inercjalny, ale nie mówi nic o jego naturze. Daje jedynie receptę pozwalającą rozstrzygnąć, czy konkretny układ odniesienia jest inercjalny, czy też nie. Receptę zresztą wątpliwą, gdyż pełne zrównoważenie sił w praktyce nie jest możliwe do osiągnięcia. Możemy jedynie mówić o inercjalności z określoną dokładnością. Sytuacja jest dość nieprzyjemna. Jeśli nie możemy rozstrzygnąć, czy w wybranym układzie na ciało działają niezrównoważone siły, to trudno jest napisać równania ruchu wiążące siły z przyspieszeniem. Ale o istnieniu sił orzekamy na podstawie przyspieszenia! Trudność ta ma głównie charakter pojęciowy, gdyż w praktyce mechanika funkcjonuje dobrze.

Według Newtona istnienie inercjalnego układu odniesienia wiąże się z istnieniem absolutnej przestrzeni, jest on pewną jej własnością. O ile prędkość jest względna, to przyspieszenie nie. Ten efektowny pogląd jednak nie przybliżył nas do zrozumienia problemu. Bo cóż to znaczy – przyspieszenie względem absolutnej przestrzeni? Gdyby w pustym Wszechświecie istniało tylko jedno punktowe ciało, to mówienie o jakimkolwiek ruchu tego ciała wydawałoby się nadużyciem. Tymczasem według Newtona absolutne przyspieszenie nadal miałyby sens. A gdyby istniały tylko dwa ciała?

Przeciwny pogląd wyraził Berkeley. Absolutnej przestrzeni nie ma, a więc przyspieszenie, podobnie jak prędkość, także jest względne. Żeby lepiej zrozumieć różnicę stanowisk, wyobraźmy sobie pewien eksperyment myślowy. Zanim jednak do niego przystąpimy, musimy odwołać się do wiedzy wynikającej z eksperymentu realnego. Nieinercjalność ziemskiego układu odniesienia można stwierdzić za pomocą kilku prostych doświadczeń, z których najsłynniejszy jest eksperyment z wahadłem Foucaulta. Inna metoda polega na obserwacji ruchu ciał niebieskich względem horyzontu. Okazuje się, że ruch względem odległych gwiazd (tak zwanych gwiazd stałych) i lokalne odstępstwo od nieinercjalności układu odniesienia są w granicach dokładności obserwacji jednakowe. A teraz powróćmy do eksperymentu myślowego. Jeśli rozkręcimy wiadro z wodą, jej powierzchnia przybierze kształt paraboloidy. A co by było, gdybyśmy zakręcili nie wiadrem, ale gwiazdami? Newton odpowiedziałby, że nie, powierzchnia wody pozostanie płaska, gdyż spoczywa względem układu inercjalnego (tzn. absolutnej przestrzeni). Istnieje jednak pogląd przeciwny, zgodnie z którym powierzchnia wody i w tym przypadku przybierze paraboliczny kształt. Austriacki fizyk i filozof, Ernest Mach, od którego (a także od Berkeleyya) pochodzi idea względności przyspieszenia, uznał, że koincydencja układu odniesienia wyznaczonego z ziemskich pomiarów z układem wyznaczonym przez gwiazdy stałe nie może być przypadkowa, a więc inercjalny układ odniesienia jest przez rozkład i ruch mas we Wszechświecie.

Stąd już blisko do tak zwanej zasady Macha i uogólnionej zasady Macha, zgodnie z którymi nie ma żadnych „wewnętrznych” własności materii (takich jak ładunki czy masy cząstek elementarnych); wszystkie cechy materii są wynikiem dynamicznego sprzężenia z resztą Wszechświata. Koncepcja ta nie została powszechnie zaakceptowana przez fizyków, ale też, jak dotąd, nie została obalona na podstawie jakichkolwiek danych doświadczalnych, więc choć może mówimy tu wyłącznie o folklorze, to jednak naprawdę nie wiemy, czy istnieje stała masa i stały ładunek elektronu.

Krzysztof REJMER



## Szybciej niż światło?

Niezależność prędkości światła od układu odniesienia, czyli jej niezmienniczość, jest fundamentem, na którym zbudowana jest teoria względności. Pojawia się naturalne pytanie, czy mogą istnieć obiekty – zwane tachionami – poruszające się szybciej niż światło? A zatem, czy prędkość światła jest tylko prędkością niezmienniczą, czy też i maksymalną?

Energia cząstki o masie  $m$  wzrasta z jej prędkością  $v$  zgodnie ze wzorem

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

gdzie  $c$  jest prędkością światła. Nie można więc przyspieszyć cząstki do prędkości większej niż  $c$ , gdyż wymagałoby to przejścia przez nieskończenie wysoką barierę energii przy  $v = c$ . Niektórzy wyciągają stąd wniosek, że tachiony istnieć nie mogą. Przypomina to jednak rozumowanie pewnego indyjskiego mędrca, który sądził, że nikt nie żyje na północ od Himalajów, gdyż człowiek nie zdoła przejść przez tak wielkie góry. Mędrzec nie zauważył, że ludy zamieszkujące Azję Środkową bynajmniej nie musiały przeprować się przez Himalaje. Podobnie jest z tachionami, które, jeśli istnieją, zawsze poruszają się prędzej niż światło. Ich energie i pędy określałyby zaś wzory:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad p = \frac{mv}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}, \quad v > c.$$

Przeciw istnieniu tachionów wytoczono jednak bardzo poważny argument. Okazuje się, że tachion poruszający się do przodu w czasie w jednym układzie odniesienia, może poruszać się do tyłu w czasie w innym. Wyobraźmy sobie, że w układzie  $A$  emitowany jest tachion w chwili  $t = 0$  z punktu  $x = 0$ . Tachion podróżuje z prędkością  $v > c$  aż do momentu, kiedy jest absorbowany. Jego czterowektor położenia ma więc postać  $(t, x) = (t, vt)$ .

Popatrzmy na tachion z układu  $B$ , który porusza się względem  $A$  z prędkością  $v_0 < c$ . W chwili początkowej układy pokrywały się. Czasową składową czterowektora położenia tachionu mierzonego w układzie  $B$  otrzymujemy dzięki transformacji Lorentza jako

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v_0}{c^2} x \right) = \gamma \left( 1 - \frac{v_0 v}{c^2} \right) t,$$

gdzie

$$\gamma \equiv \left( 1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{-1/2}.$$

Widzimy, że jeśli  $v_0 v > c^2$ , to  $t' < 0$ , czyli w układzie  $B$  tachion porusza się do tyłu w czasie. To zaś może prowadzić do paradoksów przyczynowych.

Oto jeden z nich.

Zapalony konstruktor buduje karabin strzelający tachionami. Wystrzela pocisk, który lecąc w przeszłość dosięga i zabija jego dziadka, nim ten zdążył począć ojca konstruktora. Mordując dziadka konstruktor unicestwia ojca, więc i sam nie może istnieć. Kto zatem jest mordercą? Cały ten galimatias wynika z pogwałcenia fundamentalnej zasady przyczynowości, która orzeka, że przyczyna zawsze poprzedza skutek.

Znaleziono rozwiązanie takich paradoksów, opierające się na obserwacji, że tachion poruszający się do tyłu w czasie niesie ujemną energię. Dzieje się tak dlatego, że czterowektor położenia  $(t, x)$  transformuje się tak samo jak czterowektor pędu  $(E, p)$ . W związku z tym zaproponowano przyjęcie następującego postulatu, zwanego regułą reinterpretacji: tachion z ujemną energią, poruszający się do tyłu w czasie, jest antytachionem poruszającym się do przodu w czasie. Dzięki niej wszystkie obiekty poruszają się zawsze do przodu w czasie, co pozwala uniknąć paradoksów przyczynowych.

Cena za takie rozwiązanie jest jednak wysoka. Co jest przyczyną, a co skutkiem, można określić jedynie w danym układzie odniesienia. To, co nazywamy przyczyną w jednym układzie, może być skutkiem w innym. Emisja tachionu dla jednego obserwatora jest absorpcją antytachionu dla drugiego. Zasada przyczynowości traci więc swój absolutny charakter. Nie jest to jednak nieszczęście. Wszak teoria względności usunęła z fizyki absolutny czas i absolutną przestrzeń, więc i relatywizacja pojęć przyczyny i skutku wydaje się być w duchu teorii względności.

Niestety, w związku z postulatem reinterpretacji pojawia się poważny problem, tzw. paradoks wolnej woli. Przyjmijmy, że obserwator  $A$ , poruszający się względem obserwatora  $B$ , wysła tachion do  $B$ . Jak już widzieliśmy, można tak dobrać prędkości tachionu ( $v > c$ ) i względną obserwatorów ( $v_0 < c$ ), że obserwator  $B$  będzie sądził, że to on wysłał antytachion do  $A$ , nie zaś, że otrzymał tachion od  $B$ . A zatem, obserwator  $B$  ma ograniczoną wolę – wysłał antytachion do  $A$  tylko dlatego, że  $A$  przesłał do niego tachion.

Trudno taką sytuację pogodzić ze zdrowym rozsądkiem. Tachionów jednak nie udało się dotychczas zarejestrować, więc tymczasem, nie ma się czym martwić.

Stanisław MRÓWCZYŃSKI

# Dlaczego w przestrzeni trójwymiarowej nie ma przyzwoitego mnożenia?

Wszyscy uczyliśmy się w szkole dodawać i mnożyć liczby rzeczywiste. Łatwo wymienić podstawowe własności tych działań:

- dodawanie jest łączne, przemienne i ma element neutralny; dla każdego elementu  $a$  istnieje element przeciwny  $-a$ ;
- mnożenie jest łączne, przemienne i ma element neutralny 1; dla każdego elementu  $a \neq 0$  istnieje element odwrotny  $a^{-1}$ ;
- mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Oprócz zbioru liczb rzeczywistych  $\mathbf{R}$  w szkole poznaliśmy też zbiory liczb naturalnych  $\mathbf{N}$ , całkowitych  $\mathbf{Z}$  i wymiernych  $\mathbf{Q}$ . Chociaż w każdym z nich możemy liczby dodawać i mnożyć, tylko  $\mathbf{Q}$ , obok  $\mathbf{R}$ , spełnia wszystkie wymagania (a)–(c). Matematyk powie krótko, że zbiory  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{Q}$  są *ciałami*, a zbiory  $\mathbf{N}$  i  $\mathbf{Z}$  ciałami nie są.

Czy potrafisz podać przykład ciała zawartego pomiędzy  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ ?

Przykładem ciała większego od  $\mathbf{R}$  jest zbiór liczb zespolonych  $\mathbf{C}$ . Przypomnijmy, że liczbami zespolonymi nazywamy wyrażenia postaci  $a + bi$ , gdzie  $a, b \in \mathbf{R}$ . Liczby te dodajemy i mnożymy podobnie jak wielomiany z wykorzystaniem dodatkowej relacji:  $i^2 = -1$ . Nietrudno sprawdzić, że tak określone działania mają własności (a)–(c), tj.  $\mathbf{C}$  jest ciałem.

Na przykład:  $(2 + 3i) + (4 + 2i) = 6 + 5i$ ;  
 $(2 + 3i) \cdot (4 + 2i) = 8 + 16i + 6i^2 = 2 + 16i$ .

Ponieważ każda liczba zespolona  $a + bi$  jest w istocie parą liczb rzeczywistych  $(a, b)$ , zbiór  $\mathbf{C}$  możemy uznać za płaszczyznę  $\mathbf{R}^2$ , wyposażoną w działania dodawania i mnożenia jej punktów. Przy powyższej interpretacji działania te wyrażają się wzorami  $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$  oraz  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ .

Zauważmy, że powyższe dodawanie można łatwo uogólnić na przestrzeń trójwymiarową  $\mathbf{R}^3$ : należy trójki liczb dodawać jak wektory, tj. „po współrzędnych”  
 $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ .

Powstaje ciekawe pytanie: czy przestrzeń trójwymiarową  $\mathbf{R}^3$  można wyposażyć dodatkowo w działanie mnożenia, które by wraz z takim dodawaniem spełniało warunki (a)–(c)? Chcielibyśmy przy tym, by to mnożenie było też zgodne z istniejącym w  $\mathbf{R}^3$  mnożeniem przez skalary, tj. aby zachodziły równości  $(tv) \cdot w = v \cdot (tw)$  dla dowolnych  $v, w \in \mathbf{R}^3$  oraz  $t \in \mathbf{R}$ . O takim mnożeniu mówimy, że jest *dwulinowe*.

Mnożenie „po współrzędnych” jest niedobre: wtedy iloczyn dwóch elementów różnych od zera może być zerem, np.  $(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ . To w żadnym celu się nie zdarza – dlaczego?

Udowodnimy

**Twierdzenie.** W przestrzeni  $\mathbf{R}^3$  nie istnieje mnożenie, które by wraz z dodawaniem „po współrzędnych” spełniało warunki (a)–(c).

Dowód poprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy, że przestrzeń  $\mathbf{R}^3$  ma takie mnożenie. O elementach  $\mathbf{R}^3$  będzie nam wygodnie myśleć, jak o wektorach zaczepionych w punkcie  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ .

Z warunku (b) wynika, że jeden z wektorów jest jedynką mnożenia – oznaczymy go przez  $\mathbf{1}$ . Niech  $L_1$  będzie prostą naciągniętą na tym wektorze, tj.  $L_1 = \{t \cdot \mathbf{1} : t \in \mathbf{R}\}$ . Dla dowolnego wektora  $v \in \mathbf{R}^3 \setminus L_1$  oznaczymy przez  $P(v)$  płaszczyznę naciągniętą na parze wektorów  $\mathbf{1}, v$ . Najpierw zauważmy, że zachodzi

**Lemat 1.** Niech  $v \in \mathbf{R}^3 \setminus L_1$ . Jeśli jego kwadrat  $v^2$  należy do płaszczyzny  $P(v)$ , to  $P(v)$  jest podzbiorem zamkniętym względem dodawania, odejmowania, mnożenia i brania odwrotności.

W takiej sytuacji mówimy, że podzbiór  $P(v)$  ciała  $\mathbf{R}^3$  jest jego *podciałem*.

**Dowód:** Oczywiście, płaszczyzna zawierająca punkt  $\mathbf{0}$  jest zamknięta względem dodawania i odejmowania wektorów.

Każdy element  $P(v)$  jest postaci  $s \cdot \mathbf{1} + t \cdot v$  dla pewnych  $s, t \in \mathbf{R}$ . Kiedy pomnożymy dwa takie wyrażenia i otworzymy nawiasy, otrzymamy kombinację wektorów  $\mathbf{1}, v, v^2$ . Ponieważ każdy z nich leży w  $P(v)$ , więc iloczyn naszych wyrażeń też tam się znajduje.

Pozostało wykazać, że jeśli  $w \in P(v)$  oraz  $w \neq \mathbf{0}$ , to  $w^{-1} \in P(v)$ . Jeśli  $w = t \cdot \mathbf{1}$ , to  $w^{-1} = t^{-1} \cdot \mathbf{1} \in P(v)$ . W przeciwnym przypadku  $w \in P(v) \setminus L_1$ , a zatem  $P(w) = P(v)$ . Ponieważ wiemy już, że  $P(v)$  jest zamknięte względem mnożenia, to  $w^2 \in P(v) = P(w)$ , tj.  $w^2 = s \cdot \mathbf{1} + t \cdot w$  dla pewnych  $s, t \in \mathbf{R}$ .

Jeśli jest  $s = 0$ , to  $w^2 = t \cdot w$ , a zatem  $w \cdot (w - t \cdot \mathbf{1}) = \mathbf{0}$ . To jest jednak niemożliwe, ponieważ oba czynniki są różne od zera. Mamy więc  $s \neq 0$ , a stąd  $w \cdot (-s^{-1}w - ts^{-1} \cdot \mathbf{1}) = \mathbf{1}$ . Zatem  $w^{-1} = -s^{-1}w - ts^{-1} \cdot \mathbf{1} \in P(v)$ . ■

A teraz zauważmy, że sytuacja z poprzedniego lematu... nigdy nie zachodzi.

**Lemat 2.** Jeśli  $v \in \mathbf{R}^3 \setminus L_1$ , to  $v^2 \notin P(v)$ .

**Dowód:** Przypuśćmy, że  $v^2 \in P(v)$  i weźmy dowolny wektor  $w \in \mathbf{R}^3 \setminus P(v)$ . Wtedy wektory  $\mathbf{1}, v, w$  rozpinają całą przestrzeń  $\mathbf{R}^3$ . W szczególności, wektor  $wv$  może być zapisany jako ich kombinacja:  $wv = r \cdot \mathbf{1} + s \cdot v + t \cdot w$ . Ale wtedy  $w \cdot (v - t \cdot \mathbf{1}) = r \cdot \mathbf{1} + s \cdot v$ , czyli  $w = (r \cdot \mathbf{1} + s \cdot v) \cdot (v - t \cdot \mathbf{1})^{-1}$ . Z Lematu 1 wiemy, że wyrażenie po prawej stronie należy do  $P(v)$ . Zatem  $w \in P(v)$ , wbrew założeniu. ■

**Dokończenie dowodu twierdzenia:** Weźmy dowolny wektor  $v \in \mathbf{R}^3 \setminus L_1$ . Z Lematu 2 wnosimy, że wektory  $\mathbf{1}, v, v^2$  rozpinają przestrzeń  $\mathbf{R}^3$ . Zatem wektor  $v^3$  jest ich kombinacją:  $v^3 = r \cdot \mathbf{1} + s \cdot v + t \cdot v^2$ .

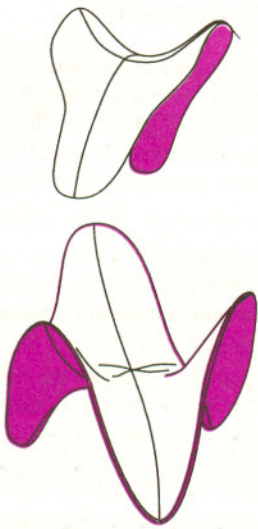
Rozważmy funkcję  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^3 - r - sx - tx^2$ . Ponieważ  $f(x) < 0$  dla wielkich liczb ujemnych oraz  $f(x) > 0$  dla wielkich liczb dodatnich, więc istnieje taka liczba  $\lambda \in \mathbf{R}$ , że  $f(\lambda) = 0$ . Wobec tego mamy tożsamość  $f(x) = (x - \lambda)(\alpha + \beta x + x^2)$ . Podstawiając wektor  $v$  w miejsce zmiennej  $x$  otrzymujemy

$$\mathbf{0} = f(v) = (v - \lambda \cdot \mathbf{1})(\alpha \cdot \mathbf{1} + \beta v + v^2).$$

Z założenia oraz z Lematu 2 wynika, że obydwa czynniki są różne od zera. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Uwaga dla koneserów: w dowodzie nie użyliśmy przemienności mnożenia. A zatem przestrzeń  $\mathbf{R}^3$  nie ma nawet struktury nieprzemiennej *algebry z dzieleniem*.

Zbigniew MARCINIAK



## Małpie siodło

Zwykłe siodło do konnej jazdy ma dwa łęki i dwie kłapy – z przodu i z tyłu jest podniesione do góry, z obu boków opada w dół. Jest przy tym wszędzie krzywe, czyli niepłaskie; dokładniej: płaszczyzna styczna do tego siodła (w dowolnym jego punkcie) nawet w najmniejszym otoczeniu punktu styczności przecina siodło, znajduje się po obu jego stronach.

Gdyby chciał zrobić siodło dla małpy szerokonosej (małpy Nowego Świata), słowem małpy z liczącym się ogonem, musiałyby ono mieć trzy kłapy i trzy łęki. Okazuje się jednak, że zrobienie takiego dobrego siodła jest niemożliwe – zawsze będzie na nim co najmniej jeden punkt, w którym będzie ono lokalnie płaskie.

Bierze się to z faktu, że ekstremalne krzywizny przecięć powierzchni gładkiej prostopadłych do płaszczyzny stycznej i przechodzących przez punkt styczności realizują się w płaszczyznach prostopadłych. Przy potrójnej symetrii powierzchni – a taką ma małpie siodło – jedynym wyjściem jest, by ekstrema te były równe zero, a więc by zero było krzywizną każdego takiego przecięcia.

M.K.

## Największa liczba pierwsza

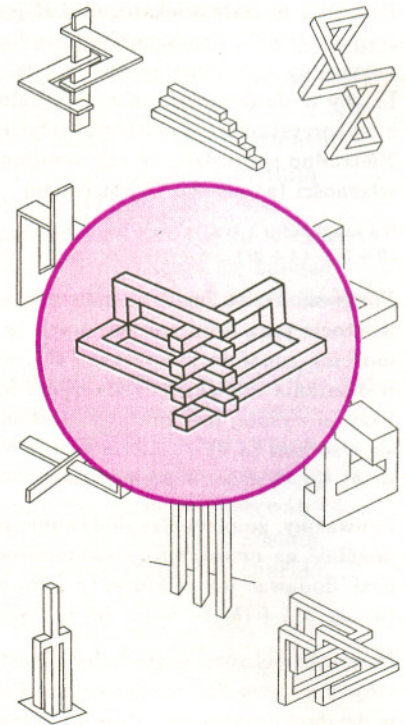
Jeśli liczba naturalna  $q$  jest największą liczbą pierwszą, to istnieje liczb pierwszych tylko skończenie wiele – na pewno nie więcej niż  $q - 1$ . Można je więc wszystkie ponumerować, powiedzmy  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , gdzie, oczywiście,  $m < q - 1$ . Liczba

$$L := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_m \cdot q + 1$$

ma paradoksalne własności. Jako większa od  $q$  nie jest liczbą pierwszą, jako liczba nie dzieląca się przez żadną z liczb  $p_1, p_2, \dots, p_m$ ,  $q$  nie ma dzielników naturalnych różnych od 1 i niej samej – jest więc pierwsza. Dlatego też w jej definicji musiał zostać popełniony błąd. Ale jedynym miejscem niepewnym jest założenie, że istnieje największa liczba pierwsza – ono więc musi być fałszywe.

Jest to pierwsze historycznie spośród twierdzeń matematyki, które postulują, że czegoś jest nieskończenie wiele. Zostało udowodnione 2300 lat temu, najprawdopodobniej przez Euklidesa.

Mimo to, od czasu do czasu, prasa mniej lub bardziej naukowa donosi, że największą liczbą pierwszą jest – żeby podać konkretny przykład ze stycznia 1994 – liczba  $2^{859433} - 1$ . Rzecz jasna, chodzi tu o największą liczbę pierwszą, jaką w danej chwili umielibyśmy konkretnie napisać np. w układzie dziesiętnym. Poszukiwanie takich liczb to dobre zajęcie, bo – jak widać – nigdy się nie skończy.



M.K.

**Rozwiązanie zadania F 426.** Współrzędne wektora indukcji w sferycznym układzie współrzędnych są równe

$$B_r = \frac{2\mu_0 M}{4\pi r^3} \cos \Theta,$$

$$B_\Theta = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sin \Theta,$$

$$B_\phi = 0.$$

$M$  jest momentem magnetycznym Ziemi. Dostajemy stąd

$$B = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \sqrt{3 \cos^2 \Theta + 1}.$$

Indukcja na równiku jest równa

$$B_0 = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}.$$

Stąd

$$B = B_0 \frac{R^3}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \Theta + 1}.$$

Energję obliczamy jako całkę po całej przestrzeni poza objętością Ziemi

$$E_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r \geq R} B^2 d^3r =$$

$$= \frac{B_0^2 R^6}{2\mu_0} \int_R^\infty dr r^2 \frac{1}{r^6} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\Theta \sin \Theta (3 \cos^2 \Theta + 1) = \frac{4\pi B_0^2 R^3}{3\mu_0}.$$

Podstawiając wartości podane w zadaniu dostajemy

$$E_{\text{mag}} = 9,7 \cdot 10^{17} \text{ J}.$$

Energję pola grawitacyjnego obliczymy ze wzoru

$$E_{\text{grav}} = \frac{GM^2}{2R}.$$

Jest ona równa  $3 \cdot 10^{30} \text{ J}$ .



**Rozwiązanie zadania M 768.** Nie. Załóżmy bowiem, że istnieje tylko skończenie wiele liczb pierwszych dających resztę 3 z dzielenia przez 4 i oznaczmy je przez  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Łatwo sprawdzić, że liczby  $p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2$  dają z dzielenia przez 4 resztę 1, a zatem  $N = p_1^2 p_2^2 \dots p_n^2 + 2$  daje z dzielenia przez 4 resztę 3. Gdyby wszystkie dzielniki pierwsze liczby  $N$  były postaci  $4k + 1$ , również  $N$  musiałaby być takiej postaci. Zatem któraś z liczb  $p_j$  jest dzielnikiem  $N$ , więc  $p_j | N = p_1^2 p_2^2 \dots p_n^2$ . Stąd  $p_j | 2$  i wykazana sprzeczność dowodzi, iż nie istnieje największa liczba pierwsza dająca resztę 3 z dzielenia przez 4.



**Rozwiązanie zadania M 769.** Nie. Załóżmy, że jest przeciwnie. Wprowadźmy na płaszczyźnie układ współrzędnych. Niech  $P$  będzie pewnym punktem naszego podzbioru. Dla kąta  $\alpha \in [0, \pi]$  przeprowadźmy następującą operację: obróćmy podzbiór w kierunku ruchu wskazówek zegara wokół punktu  $(0, 0)$  o kąt  $\alpha$  i po obrocie zrzućmy prostopadłe na oś  $OX$ . Otrzymamy zbiór będący sumą dwóch rozłącznych przedziałów  $(a(\alpha), b(\alpha)) \cup (c(\alpha), d(\alpha))$ , gdzie  $a(\alpha) < b(\alpha) < c(\alpha) < d(\alpha)$ . Dla prostoty zapisu rozważmy przedziały otwarte pozostawiając Czytelnikowi uściślenie rozumowania. Obraz punktu  $P$  w tej operacji oznaczmy przez  $P(\alpha)$ . Łatwo zauważyć, że  $b(\alpha), c(\alpha)$  i  $P(\alpha)$  są ciągłymi funkcjami kąta  $\alpha$ , a ponadto  $b(\pi) = -c(0)$ ,  $c(\pi) = -b(0)$ , natomiast  $P(\pi) = -P(0)$ . Zdefiniujmy  $\phi : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$  przez  $\phi(\alpha) = 2P(\alpha) - b(\alpha) - c(\alpha)$ .  $\phi$  jest funkcją ciągłą, więc skoro  $\phi(0) = -\phi(\pi)$ , to istnieje taki kąt  $\alpha \in [0, \pi]$ , że  $\phi(\alpha) = 0$ , czyli

$$P(\alpha) = \frac{b(\alpha) + c(\alpha)}{2} \notin \mathcal{G} \cap (a(\alpha), b(\alpha)) \cup (c(\alpha), d(\alpha)).$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi, iż nie istnieje podzbiór płaszczyzny spełniający warunki zadania.



**Rozwiązanie zadania M 770.** Gdyby istniała taka para, to mielibyśmy

$$5^m + 2 = 17^n,$$

a więc

$$(5^m + 2) \pmod{4} \equiv 17^n \pmod{4},$$

czyli

$$1 + 2 = 1.$$

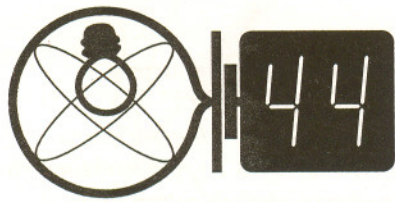
Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

O eterze mówili już starożytni Grecy, miał to być piąty, najsubtelniejszy z żywiołów, budulec gwiazd. W czasach nowożytnych Kartezjusz wokółsłonecznym wirem eteru tłumaczył ruchy planet. Kiedy doświadczalnie potwierdzono istnienie fal elektromagnetycznych (Hertz, 1888 r.), przewidzianych w ramach elektrodynamiki Maxwella, jednym z najważniejszych pytań stało się zagadnienie ośrodka, w którym te fale się propagują; wszystkie znane wcześniej fale zawsze jakiegoś ośrodka potrzebowały. Naturalnym kandydatem, oczywiście, stał się kosmiczny eter (o eterze jako materialnym podłożu zjawisk świetlnych mówił już Huyghens). Z eterem związane także inercjalny układ odniesienia – to taki, w którym eter spoczywa. Ponieważ eter miał wiele niezwykłych cech (m.in. miał być przezroczysty i nieważki), jego eksperymentalne odkrycie było dla fizyków nie lada wyzwaniem, któremu mogły sprostać jedynie wyrafinowane metody interferometryczne. Fale elektromagnetyczne wyobrażano sobie jako sprężyste odkształcenie eteru. Zgodnie z teorią spoczywającego eteru (Fresnel) ciała ważkie miałyby przenikać przez eter bez żadnego oporu, natomiast zgodnie z teorią unoszonego eteru (Stokes i Hertz) miałyby go ciągnąć za sobą. Wobec ruchów powolnych, takich jak ruchy planet, eter miałby się zachowywać jak lepka ciecz, wobec ruchów szybkich, jakimi są drgania pól – jak ciało sprężyste. Problem doświadczalny sprowadzał się do stwierdzenia, czy wieje wokół nas wiatr eteru.

Elektrodynamika Maxwella była teorią niemechaniczną, jednak interpretowano ją w tym właśnie duchu. Sam Maxwell wyobrażał sobie linie pola jako cieniutkie rurki – wypełnione nieściśliwą cieczą – eterem. Dużą rolę w tworzeniu tego obrazu odegrało formalne podobieństwo wzorów elektrostatyki do opisu bezwirowego ruchu nieściśliwej cieczy. Autorem ciekawej koncepcji budowy materii wykorzystującej eter był nie kto inny jak lord Kelvin. Wyobrażał on sobie atomy jako zawężone wiry eteru, spodziewając się, że klasyfikacja węzłów może odtworzyć układ okresowy pierwiastków Mendelejewa. Cząsteczki chemiczne w myśl tej koncepcji miały być łańcuchami zbudowanymi z takich ogniw – węzłów. Słabością pomysłu Kelvina była stabilność atomów; podróżujące w eterze wiry nie byłyby stabilne.

Tymczasem eksperymenty optyczne obaliły teorię unoszonego eteru i choć niektóre z nich w granicach swej dokładności były niesprzeczne z teorią spoczywającego eteru, to jednak koncepcję eteru odrzucono. Doświadczenie Michelsona–Morleya pokazało, że prędkość światła jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, co wprawdzie dałoby się pogodzić z koncepcją eteru, jednak taka teoria byłaby nieprzejrysta i najeżona wieloma nowymi trudnościami. Trochę to przypomina historię teorii Ptolemeusza. W miarę jak rosła precyzja obserwacji, rozdzźwięk między modelem a danymi doświadczalnymi stawał się coraz większy. Ptolemeuszowski model układu planetarnego można było ratować rozbudowując go o dodatkowe epicykle, ale byłyby to proces bez końca, a sam model stałby się absurdalny i pozbawiony podstawowego waloru, przestałby cokolwiek tłumaczyć i nie pozwalałby na przewidywania. Podobny los wisi nad poprawioną teorią eteru.

Prostszy i skuteczniejszy w wyjaśnianiu świata okazał się pogląd, że eteru nie ma, fale elektromagnetyczne mogą poruszać się w próżni, natomiast struktura czasu i przestrzeni jest inna, niż ta, którą lansowała fizyka newtonowska. Nowy obraz świata, który narodził się wraz z teorią względności, zaoferował nauce znacznie więcej niż teoria eteru i choć nie pozbawiony paradoksów okazał się bardziej elegancki i prostszy.



Termin nadsyłania rozwiązań:  
31 VII 1996

Czołówka ligi zadaniowej  
**Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 203 ( $WT=3,03$ ) i 204 ( $WT=1,90$ )  
z numeru 9/1995

Aleksander Surma	- Myszków	30,79
Przemysław Gworys	- Częstochowa	25,49
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	24,43
Jarosław Łazuka	- Warszawa	21,66

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 3$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

### Zadania z fizyki nr 217, 218

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**217.** Bardzo długa jednorodna pozioma belka opiera się na wielu równo odległych podporach. Jeśli pada śnieg obciążając belkę równomiernie, to pierwsze złamanie belki nastąpi w jednym z punktów podparcia czy w jednym z punktów środkowych między podporami? Zakładamy, że: a) odchylenie belki  $y(x)$  w punkcie  $x$  od prostej poziomej jest niewielkie, b) belka podlega prawu Hooke'a, tzn. w każdym punkcie jej krzywizna (zgodnie z punktem a) równa drugiej pochodnej  $y''(x)$ ) jest proporcjonalna do momentu siły zginającej.

**218.** Głośnik zamknięto pod kloszem pompy próżniowej. Ile powinno wynosić ciśnienie pod kloszem, aby dźwięk dobiegający na zewnątrz był o 20 dB słabszy niż przy ciśnieniu normalnym? Temperatura powietrza jest ustalona.

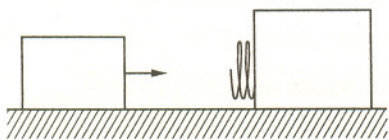
### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1995

Przypominamy treść zadań:

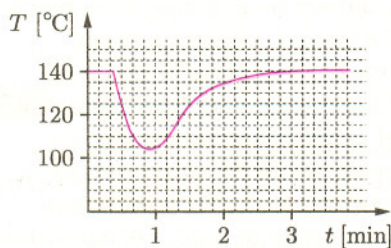
**209.** Klocek o masie  $m$  uderzył w klocek o masie  $M$  zaopatrzony w sprężynowy zderzak o stałej sprężystości  $k$  (rys. 1). Współczynnik tarcia  $f$  o podłoże jest jednakowy dla obu klocek i ma taką samą wartość dla tarcia statycznego, co dla kinetycznego. Po ściśnięciu sprężyna rozprostowała się, a kločki rozłączyły, przy czym drugi klocek pozostawał cały czas w spoczynku. Jaki warunek muszą spełniać masy  $m$  i  $M$ , aby takie zdarzenie mogło zajść? Zakładamy, że długość swobodna sprężyny jest wystarczająco duża, aby nie uległa „ściśnięciu do zera”, tzn. oddziaływanie między klocek jest opisywane przez prawo Hooke'a.

**210.** Pojemnik zawiera element grzejny o mocy  $P = 200$  W i termometr mierzący temperaturę zewnętrznej powierzchni pojemnika.

Pojemnik umieszczono w pokoju o temperaturze  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  i włączono grzejnik, w wyniku czego po dłuższym czasie termometr wskazał temperaturę  $T_k = 140^\circ\text{C}$ . Wtedy wrzucono do pojemnika metal o masie  $m = 100$  g i temperaturze  $T_0$  i szybko zamknięto pojemnik. Ile wynosi ciepło właściwe tego metalu, jeśli przebieg wskazań termometru jest dany przez rysunek 2?



Rys. 1



Rys. 2

**209.** W chwili zatrzymania pierwszego klocka sprężyna ulega ściśnięciu o wielkość  $x$ , która musi spełniać dwa warunki:

- $kx \leq fMg$  (drugi klocek nie rusza z miejsca),
- $\frac{1}{2}kx^2 > fmgx$ , czyli  $kx > 2fmg$  (energia sprężyny jest większa od pracy siły tarcia na drodze powrotnej).

Stąd szukany warunek ma postać  $M > 2m$ .

**210.** Przyjmijmy, że tempo odpływu ciepła do otoczenia jest proporcjonalne do różnicy temperatur. W stanie równowagi, gdy temperatura pojemnika jest równa  $T_k$ , bilans energii ma postać

$$P = \alpha(T_k - T_0).$$

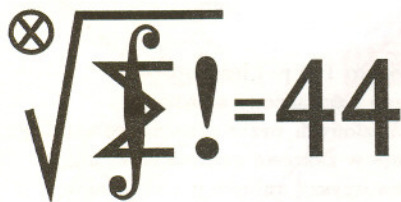
Z tego równania otrzymujemy wartość stałej proporcjonalności  $\alpha = 1,67$  W/ $^\circ\text{C}$ . Po wrzuceniu metalu należy uwzględnić w bilansie ciepło oddane metalowi  $dQ_m$  i ciepło pobrane od samego pojemnika  $dQ_p$  (w późniejszej fazie, gdy pojemnik z powrotem się ogrzewa, to ciepło jest ujemne)

$$P dt + dQ_p = \alpha(T - T_0) dt + dQ_m.$$

Podstawmy tu  $P = \alpha(T_k - T_0)$  i scałkujemy. Całkowane ciepło  $Q_p$  jest równe zeru, gdyż pojemnik wraca do początkowej temperatury. Stąd

$$\alpha \int (T_k - T) dt = Q_m.$$

Należy zatem obliczyć pole zawarte między podanym wykresem a prostą  $T = T_k$ . Wynosi ono w przybliżeniu  $2230^\circ\text{C}\cdot\text{s}$ , więc  $Q_m \approx 3720$  J, a ciepło właściwe  $c \approx 310$  J/(kg $\cdot^\circ\text{C}$ ).



## Zadania z matematyki nr 319, 320

Redaguje Marcin E. KUCZMA

319. Rozwiązać (w liczbach rzeczywistych) układ równań:

$$\begin{cases} (1+x^2)y = x \\ 12y^3 + z = 3y + 2 \\ |3z - 5| = 1 - x. \end{cases}$$

320. Dla danych liczb dodatnich  $R$  i  $r$ , spełniających warunek  $R \geq 2r$ , obliczyć kres dolny oraz kres górny pól trójkątów wpisanych w koło o promieniu  $R$  i (jednocześnie) opisanych na kole o promieniu  $r$ .

Zadanie 320 zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

## Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1995

Przypominamy treść zadań:

311. Znaleźć wszystkie funkcje niemalejące  $f$ , określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające warunek:

$$(1) \quad 2f(x^2 + y^2) = f(x)^2 + f(y)^2 \quad \text{dla } x, y = 0, 1, 2, \dots$$

312. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne  $n \geq 3$ , dla których istnieje  $n$ -kąt foremny o wierzchołkach w punktach kratowych przestrzeni trójwymiarowej.

311. Przyjmując w równaniu (1)  $x = y = 1$  dostajemy równość

$$(2) \quad f(2) = f(1)^2.$$

Przyjmując zaś  $x = y = 0$  widzimy, że  $f(0) = 0$  lub  $f(0) = 1$ .

Jeżeli  $f(0) = 1$ , to podstawiając w (1)  $y = 0$  otrzymujemy

$$(3) \quad 2f(x^2) = f(x)^2 + 1 \quad \text{dla } x = 0, 1, 2, \dots$$

Stąd  $f(1) = 1$ , więc  $f(2) = 1$  (wzór (2)), i ogólnie:

$$f(2^{2^n}) = 1 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

(dowód indukcyjny z wykorzystaniem wzoru (3)); z monotoniczności funkcji  $f$  wynika więc, że (w tym przypadku)

$$(4) \quad f(x) = 1 \quad \text{dla } x = 0, 1, 2, \dots$$

Zajmiemy się teraz przypadkiem, gdy  $f(0) = 0$ . Wówczas z równania (1) mamy

$$(5) \quad 2f(x^2) = f(x)^2 \quad \text{dla } x = 0, 1, 2, \dots$$

Zatem  $f(1) = 0$  lub  $f(1) = 2$ .

Jeśli  $f(1) = 0$ , to  $f(2) = 0$  (równość (2)). Stąd

$$f(2^{2^n}) = 0 \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

(indukcja z wykorzystaniem wzoru (5)) i wobec monotoniczności:

$$(6) \quad f(x) = 0 \quad \text{dla } x = 0, 1, 2, \dots$$

Jeśli natomiast  $f(1) = 2$ , to  $f(2) = 4$  (równość (2)). Stąd

$$(7) \quad f(2^{2^n}) = 2^{2^{n+1}} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

(znów indukcja z wykorzystaniem wzoru (5)). Ze wzoru (5) widać ponadto, że wszystkie wartości funkcji  $f$  są liczbami parzystymi. Kładąc w (5)  $x = t + 1$  dostajemy nierówność

$$f(t+1)^2 = 2f(t^2 + 2t + 1) \geq 2f(t^2 + 1) = f(t)^2 + 4 > f(t)^2,$$

skąd (wobec parzystości porównywanych liczb):

$$f(t+1) \geq f(t) + 2, \text{ i ogólnie (indukcja):}$$

$$(8) \quad f(t+k) \geq f(t) + 2k \quad \text{dla } t, k = 0, 1, 2, \dots$$

Weźmy dowolną liczbę naturalną  $x > 1$ ; dobierzmy tak wykładnik  $m$ , by  $2^{2^m} \leq x < 2^{2^{m+1}}$ . Tak więc

$$(9) \quad x = 2^{2^m} + u = 2^{2^{m+1}} - v,$$

gdzie  $u \geq 0$ ,  $v > 0$  oraz

$$(10) \quad u + v = 2^{2^{m+1}} - 2^{2^m} \quad (= 2^{2^m}).$$

Podstawiając w (8)  $t = 2^{2^m}$ ,  $k = u$  mamy, zgodnie ze wzorem (7),

$$(11) \quad f(x) \geq 2^{2^m+1} + 2u;$$

a podstawiając  $t = x$ ,  $k = v$  dostajemy

$$(12) \quad 2^{2^{m+1}+1} \geq f(x) + 2v.$$

Ale ze związku (10) wynika, że suma lewych stron nierówności (11) i (12) jest równa sumie ich prawych stron. Nierówności te są więc faktycznie równościami; a każda z nich oznacza (w myśl (9)), że  $f(x) = 2x$ . Zatem, wobec dowolności wyboru  $x$ ,

$$(13) \quad f(x) = 2x \quad \text{dla } x = 0, 1, 2, \dots$$

Trzy znalezione funkcje, dane wzorami (4), (6) i (13), stanowią ogólne rozwiązanie rozważanego równania (1).

312. Ustalmy liczbę naturalną  $n \geq 3$  i przypuśćmy, że  $n$ -kąt foremny, o jakim mowa, istnieje. Spośród wszystkich takich  $n$ -kątów wybieramy  $n$ -kąt o najkrótszym boku (jest to możliwe, bo długości boków są pierwiastkami z liczb naturalnych). Niech  $A_1 A_2 \dots A_n$  będzie wybranym  $n$ -kątem. Każdy z trójkątów  $A_{i-1} A_i A_{i+1}$  uzupełniamy do równoległoboku  $A_{i-1} A_i A_{i+1} B_i$  (wskaźniki  $i \pm 1$  należy odczytywać modulo  $n$ ). Punkty  $B_1, B_2, \dots, B_n$  są punktami kratowymi. Gdy  $n \notin \{3, 4, 6\}$ , są one także wierzchołkami niezdegenerowanego  $n$ -kąta foremnego, mniejszego od  $A_1 A_2 \dots A_n$  – wbrew wyborowi tego ostatniego. Zatem  $n$  musi być jedną z liczb 3, 4, 6; a dla każdej z tych trzech wartości  $n$  bez trudu znajdujemy żądany  $n$ -kąt.



## Patrz w niebo

W przybliżeniu  $3/4$  stopnia od centrum Galaktyki (około 100 pc) leży obiekt będący m.in. źródłem promieniowania rentgenowskiego i oznaczony symbolem 1E1740.7-2942 w katalogu źródeł rentgenowskich znalezionych przez sztucznego satelitę Einstein. Oprócz promieniowania X obiekt ten emituje w zakresie gamma silną linię o energii kwantów 511 keV. Takie promieniowanie towarzyszy anihilacji elektronów i pozytronów, wynikałoby więc z tego, że tajemniczy obiekt – oprócz rozmaitych rodzajów promieniowania – jest także źródłem antymaterii! Nic dziwnego, że nazwano go też Wielkim Anihilatorem.

Model źródła przewiduje, że w jego centrum znajduje się czarna dziura o masie kilku mas Słońca pochłaniająca okoliczną materię. W wyniku tej akrecji czarną dziurę otacza gęsty obłok mieszanki fotonowo-plazmowej o rozmiarach rzędu 1000 km. W tak gęstym polu promieniowania kwanty gamma o dostatecznie wysokiej energii kreują pozytrony, a właściwie pary elektronowo-pozytronowe.

Pozytrony spotykają się następnie z elektronami dając w efekcie charakterystyczną linię anihilacyjną. Linia ta jest dość wąska, co dowodzi, że anihilacja zachodzi w ośrodku stosunkowo chłodnym – w tego rodzaju zjawiskach oznacza to temperaturę nie przekraczającą 100 000 K. Wygląda na to, że pozytrony opuszczają miejsce swojego powstania i anihilują z elektronami gdzieś znacznie dalej. I rzeczywiście, obserwacje radiowe ukazują w miejscu Wielkiego Anihilatora obłok o rozmiarach rzędu 3 pc.

Oprócz samej linii 511 keV Wielki Anihilator emituje silne promieniowanie z zakresu od 250 do 750 keV. Ono z kolei pochodzi najprawdopodobniej z samego źródła i jest również promieniowaniem anihilacji, tylko poczerwienionym i poniebieszczonym dopplerowsko wskutek gwałtownych ruchów materii w pobliżu czarnej dziury. Obrazu dopełniają dwie strugi emitujące synchrotronowe promieniowanie radiowe i rozciągające się na ponad parsek w obie strony od źródła. W sumie, jak na tak drobną czarną dziurę, dzieje się wokół niej bardzo dużo.

Tomasz KWAST

## Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

**M 768.** Czy istnieje największa liczba pierwsza dająca resztę 3 z dzielenia przez 4?  
Rozwiązanie na str. 13

**M 769.** Czy istnieje podzbiór płaszczyzny, którego rzut prostopadły na dowolną prostą jest sumą dwóch rozłącznych odcinków?  
Rozwiązanie na str. 13

**M 770.** Udowodnić, że nie istnieje para liczb naturalnych  $(m, n)$ , która spełniałaby równanie  $5^m + 2 = 17^n$ .  
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Krzysztof REJMER

**F 425.** Jeśli jednorodna kula ma współśrodkowe z nią kuliste wydrążenie, to we wnętrzu tego wydrążenia natężenie pola grawitacyjnego jest równe zero (jest to prosta konsekwencja prawa Gaussa). Jakie będzie natężenie pola grawitacyjnego gdy wydrążenie nie jest współśrodkowe z kulą? Dana jest gęstość  $\rho$  kuli i odległość  $|a|$  pomiędzy jej środkiem i środkiem wydrążenia.  
Rozwiązanie na str. 9

**F 426.** Pole magnetyczne Ziemi z dobrym przybliżeniem można uważać za pole dipola magnetycznego. Obliczyć energię tego pola zawartą w obszarze ponad powierzchnią Ziemi, jeśli wiadomo, że indukcja ziemskiego pola magnetycznego ma wartość  $1/3$  gaussa na równiku i  $2/3$  gaussa na biegunach. Promień Ziemi ma wartość  $R_0 = 6,4 \cdot 10^6$  m;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Vs/Am. Porównać wynik z energią pola grawitacyjnego Ziemi.  
Rozwiązanie na str. 12

Trzy lata temu (w *EPSILONIE* 12/1992), po setnej rocznicy narodzin Stefana Banacha pisaliśmy o informacjach o Banachu w XV edycji *Encyclopaedia Britannica*. Przypomnijmy – hasło zaczynało się od słów:

**Banach, Stefan** (b. March 30, 1892, Kraków, Austria-Hungary – d. Aug. 31, 1945, Lvov, Ukrainian S.S.R.), Soviet mathematician who founded modern functional analysis and...

Potem jeszcze dwukrotnie w tekście wspomniany był „Lvov” jako miejsce pracy Banacha, o Polsce nie było ani słowa. W kolejnym wydaniu XV edycji początek został zmieniony! Jak?

**Banach, Stefan** (b. March 30, 1892, Kraków, Pol. – d. Aug. 31, 1945, Lvov, Ukrainian S.S.R.), mathematician who founded modern functional analysis and...

Czytelnik mógł więc wywnioskować, że co prawda Banach urodził się w Pol., ale matematykiem był radzieckim.

Chcemy poinformować (a akurat niedawno minęła 50. rocznica śmierci Banacha), że ewolucja hasła w *Encyclopaedia Britannica* trwa! Oto, jak ono wygląda w kolejnym wydaniu:

**Banach, Stefan** (b. March 30, 1892, Kraków, Austria-Hungary [now in Poland] – d. Aug. 31, 1945, Lvov, Ukrainian S.S.R.), Polish mathematician who founded modern functional analysis and...

W dalszym ciągu notki istotnych zmian nie wprowadzono.

Przypomina to słynną matematyczną metodę kolejnych przybliżeń, używaną m.in. w dowodzie twierdzenia Banacha o punkcie stałym. W kolejnych wydaniach hasło jest coraz lepsze, co nie znaczy, że dobre. Skąd Czytelnik w USA ma wiedzieć coś o Lwowie, a w szczególności, kiedy Lwów został zagarnięty przez Związek Radziecki? Dalej może myśleć, że Banach (choć już matematyk polski) swoich dokonań, o których mowa w hasle w encyklopedii, dokonywał pracując na wyższych uczelniach w Ukraińskiej SSR (tak jak, na przykład, szwajcarski matematyk Euler w Rosji, w Petersburgu).

Ciekawe, czy będą jeszcze kolejne przybliżenia, czy też już został osiągnięty punkt stały?

### Podsluchane na zajęciach

Wykład (prowadzony na podstawie skryptu napisanego przez wykładowcę):

– Proszę państwa, w skrypcie jest napisane, że to jest trywialne, ale jakoś w tej chwili nie widzę, dlaczego.

Ćwiczenia (inny prowadzący):

– Pan mówi, że to widać, ja mówię, że nie widać, a na razie to ja decyduję o tym, czy coś widać, czy nie.

## Wyznacznik Vandermonde’a

Wyznacznikiem Vandermonde’a stopnia  $n \geq 2$  nazywamy wyznacznik (który oznaczmy przez  $V_n(a_1, \dots, a_n)$ ) macierzy

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie  $a_1, a_2, \dots, a_n$  są liczbami rzeczywistymi. W książce „Elementy algebry wyższej” jej Autorzy, Andrzej Mostowski i Marceli Stark, dowodzą, że

$$(2) \quad V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{k=2}^n (a_k - a_1)(a_k - a_2) \dots (a_k - a_{k-1}).$$

Tutaj podamy inny, krótki i bardzo elegancki, sposób wyprowadzenia wzoru (2). Mianowicie, oznaczmy  $P(x) = V_n(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$ .

$P$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $n-1$ ; nietrudno zauważyć, że liczby  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  są jego pierwiastkami. Wielomian  $P$  można zatem zapisać w postaci

$$P(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{n-1}),$$

gdzie  $A$  jest współczynnikiem wielomianu  $P$  stojącym przy  $x^{n-1}$ . Ale ten współczynnik to po prostu wyznacznik macierzy powstałej z macierzy (1) przez skreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny, czyli  $V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$ . Stąd  $V_n(a_1, \dots, a_n) = P(a_n) = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})(a_n - a_1)(a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$ . A ponieważ  $V_2(a_1, a_2) = a_2 - a_1$ , więc przez łatwą indukcję dostajemy wzór (2).

Do czego służy wyznacznik Vandermonde’a? Wzór (2) znajduje, między innymi, zastosowanie w rozwiązaniu klasycznego problemu interpolacyjnego Newtona:

*Dane są liczby rzeczywiste  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  przy czym liczby  $a_1, \dots, a_n$  są parami różne. Jak wyznaczyć (i czy w ogóle istnieje) wielomian  $P$ , możliwie najniższego stopnia, o współczynnikach rzeczywistych, dla którego  $P(a_i) = b_i (i = 1, \dots, n)$ ?*

Zagadnienie to, jako łatwe ćwiczenie „na wyznacznik Vandermonde’a i wzory Cramera” pozostawiam Czytelnikowi. Proponuję również zastosować podobną metodę, jak w dowodzie wzoru (2), do obliczenia wyznacznika

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix},$$

gdzie  $a, b, c, d$  są liczbami rzeczywistymi.

Waldemar POMPE