

SPIS TREŚCI

NUMERU 3(262)

Przygody matematyki wśród ludzi (III) <i>Marek Kordos</i>	str. 1
Nagroda Nobla z fizyki w 1995 r. <i>Jan Kalinowski</i>	str. 1
Patrz w niebo	str. 3
Zadania	str. 4
Matematyczne miniatury	str. 4
Kącik olimpijski	str. 5
Matematyczny mikroskop <i>Tadeusz Krasieński</i>	str. 6
Wielowymiarowe uogólnienie twierdzenia Bezouta <i>Tomasz Osman</i>	str. 8
Problemy stabilności wybranych układów optycznych <i>Michał Rewieński</i>	str.10
Mała Delta	str.13
Klub 44	str.14
Dwuwymiarowy Wszechświat	str.16
Epsilon	str.17

W następnym numerze:

O tym, czego nie ma

Okladkę i ilustracje wykonał
Krzysztof BIESAGA

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Komitet Redakcyjny:
Andrzej Białynicki-Birula
Bogdan Cichoński
Jan A. Gaj
Tomasz Hofmökł
Marta Kicińska-Habior
– przewodnicząca
Krzysztof Maślanka
Andrzej Mąkowski
– wiceprzewodniczący
Andrzej Pelczar
Zbigniew Płochocki
Zdzisław Pogoda
Michał Różycka
Konrad Rudnicki
Zbigniew Semadeni
Grzegorz Sitarski
Mieczysław Subotowicz
Andrzej Szymacha
Andrzej Woszczyk
Wacław Zawadowski
Wiesław Żelazko

Redaguje kolegium w składzie:
Wiktor Bartol
Krzysztof Biesaga
Jan Kalinowski – z-ca red. nac.
Krystyna Kordos – sekr. red.
Marek Kordos – red. nac.
Tomasz Kwast
Anna Ludwicka
Krzysztof Rejmer
Anna Rudnik
Paweł Strzelecki
Joanna Udalska
Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL
Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TeX wykonała Redakcja

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1996 roku wynosi 2 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1996 r. 4 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

- Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
- Cena prenumeraty na III kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.
- Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:
 - a) jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;
 - b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnieść na konto „RUCH” S.A. Oddział Warszawa w PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8⁰⁰ – 14⁰⁰; dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.
- Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
- Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:
 - do 20 XI na I kwartał roku następnego,
 - do 20 II na II kwartał,
 - do 20 V na III kwartał,
 - do 20 VIII na IV kwartał.
- Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 w. 2442, 2366.

Cena 1 egzemplarza 2 zł, 20 000 zł

Nagroda Nobla z fizyki w 1995 r.

Królewska Akademia Nauk Szwecji zdecydowała przyznać Nagrodę Nobla w 1995 r. dwóm fizykom amerykańskim za „pionierskie osiągnięcia doświadczalne w fizyce leptonów”. Nagrodę otrzymali Martin L. Perl z Uniwersytetu Stanforda za odkrycie leptonu τ i Frederick Reines z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Irvine za bezpośrednią obserwację neutrin. Leptony są cząstkami elementarnymi, które biorą udział w oddziaływaniach słabych, odpowiedzialnych, na przykład, za rozpad β neutronu. Zaliczamy do nich: elektron, mion i lepton τ oraz ich neutrina. Neutrina są obojętne elektrycznie, natomiast elektrony, miony i taony (leptony τ) mają ładunek elektryczny równy -1 . Leptony naładowane biorą też udział w oddziaływaniach elektromagnetycznych. W oddziaływaniach słabych i elektromagnetycznych uczestniczą też kwarki, składniki protonu i neutronu, ale w odróżnieniu od leptonów biorą one też udział w oddziaływaniach jądrowych.

Neutrino zostało wprowadzone do fizyki w 1930 r. przez Wolfganga Pauliego, aby uratować w rozpadzie β jedno z najświętszych praw fizyki – zasadę zachowania energii. Na skutek tego rozpadu jądro atomowe wyrzuca elektron i przechodzi w inne jądro o ładunku o jedną jednostkę większym. Na przykład, neutron rozpada się na proton i elektron, innych cząstek w stanie końcowym się nie obserwuje. Jeśli rozpad β byłby dwuciałowy, to znaczy tylko z dwiema cząstkami w stanie końcowym, to energia elektronu powinna mieć ściśle określoną wartość. Doświadczalnie natomiast obserwuje się pewien rozkład energii od wartości zero do wartości maksymalnej równej wartości energii oczekiwanej dla rozpadu dwuciałowego. Albo więc zasada zachowania energii jest w tym procesie naruszona, albo w stanie końcowym jest więcej cząstek o bardzo małych masach, których się nie obserwuje. Pauli wybrał to drugie rozwiązanie. Wysunął hipotezę, że rozpad β jest trójciałowy: oprócz jądra – produktu rozpadu – i elektronu jest jeszcze emitowana neutralna elektrycznie, lekka cząstka, zwana obecnie antyneutrinem, która bardzo słabo oddziałuje z innymi cząstkami. Dlatego też nie mogła być zarejestrowana w rozpadzie β . Pauli wzdragał się przed wprowadzeniem cząstki, która, według jego słów, nie mogła być odkryta doświadczalnie właśnie ze względu na słabość oddziaływań. Od strony teoretycznej hipoteza istnienia neutrina była natomiast bardzo atrakcyjna, gdyż pozwalała rozwiązać inne zagadki fizyki, na przykład bilans momentu pędu w tym rozpadzie. Korzystając z tej hipotezy Enrico Fermi sformułował model oddziaływań słabych opisujących, między innymi, rozpad β , z którego wynikało, iż do zaobserwowania neutrin powstających w rozpadach β naturalnych radioizotopów potrzeba tarczy o grubości kilku lat świetlnych. Dopiero zbudowanie reaktorów jądrowych, będących bardzo obfitym źródłem neutrin, pozwalało mieć nadzieję na ich obserwację doświadczalną.

W 1953 r. Frederick Reines i Clyde L. Cowan Jr. zaproponowali przeprowadzenie eksperymentu, w którym antyneutrino z reaktora powodowałyby reakcję antyneutrino + proton \rightarrow neutron + pozytron (odwrotny rozpad β). Pomimo bardzo dużej intensywności wiązki neutrin z reaktora liczba oczekiwanych przypadków powyższej reakcji była ciągle bardzo mała – kilka przypadków na godzinę. Dlatego, aby zmniejszyć ryzyko błędnej interpretacji wyników eksperymentu, Reines i Cowan postanowili rejestrować nie tylko pozytron, co jest stosunkowo łatwe, ale i neutron w stanie końcowym. Aparatura doświadczalna składała się z tarczy zawierającej około 400 litrów

Przygody matematyki wśród ludzi (III)

(na podstawie wykładów wygłoszonych na antenie *Radia Bis*)

Początek dzisiejszego świata

Marek KORDOS

Powszechnie przytaczane jest zdanie kanclerza Jana Zamoyskiego: *takie będą Rzeczypospolite, jakie ich młodzieży chowanie*. Zdanie to, wbrew potocznej opinii, nie jest wcale wezwaniem do podnoszenia jakości szkół, a jeśli nawet, to tylko pośrednio. Zamoyski stwierdza po prostu fakt, że jeśli wychowanie młodzieży będzie katolickie, to katolicka będzie Rzeczypospolita, a jeśli protestanckie, to protestancka. Było to zresztą w jego czasach stwierdzenie oczywiste – w pierwszej połowie XVI wieku wśród posłów do sejmu było ponad 30% protestantów, a wśród posłów z Małopolski nawet ponad 60%.

Taki stan rzeczy był wynikiem uruchomienia przez protestantów (w Polsce głównie kalwinów, arian – jak ich nazywano) znacznie nowocześniejszej i sprawniejszej sieci szkół. Protestanci byli w wyniku tego znacznie lepiej wykształceni.

Przypomnijmy – otwarty ruch protestancki rozpoczął się wystąpieniem Martina Lutera 31 października 1517 roku; potem była już lawina protestu przeciw przestarzałej i skorumpowanej strukturze kościoła katolickiego. Jego odpowiedzią był sobór trydencki (1543–1563), który postanowił zaangażować kościół głębiej w życie wiernych (np. ustanowił sakrament małżeństwa), a w szczególności nakazał najwyższą wagę przywiązywać do kształcenia młodzieży. Uznano też dopiero co powstały (1540), założony przez Ignacego Loyolę zakon jezuitów, który brał na siebie obowiązek obrony kościoła, a zwłaszcza troskę o wykształcenie młodego pokolenia. Dziś, gdy trwa w Polsce walka o kształt oświaty, musimy pamiętać, że podobny bój został już raz – w XVI wieku – stoczony.

Data rozpoczęcia soboru trydenckiego jest również datą ukazania się dzieła *O obrotach ciał niebieskich* Mikołaja Kopernika. Trudno o zrobienie czegoś

bardziej nie w porę. W całej Europie płoną stosy z protestantami (inkwizycja), ale i z katolikami (Anglia, Henryk VIII, Elżbieta I). I w takiej chwili ktoś (mniejsza o to, że ksiądz; zresztą Luter też był duchownym katolickim) proponuje restrukturyzację poglądów na budowę Wszechświata. Co za wspaniała okazja, by wpisać w to pomysły na restrukturyzację kościoła, państwa i co by tylko kto zechciał. Giordano Bruno, który spłonął na stosie za ideę Kopernika, nie miał pojęcia o astronomii.

Idea Kopernika nie była jedynym *novum*, z którego wykiełkował nowy sposób pojmowania świata. Reformacji towarzyszy znaczne powiększenie świata poprzez odkrycia geograficzne: 1492 rok to odkrycie Ameryki, 1498 – to opłynięcie Afryki i dotarcie drogą morską do Indii, 1521 – to opłynięcie kuli ziemskiej dookoła. Świat powiększył się zresztą w bardziej zasadniczy sposób. Galileusz w 1609 roku skonstruował teleskop pozwalający stwierdzić, że na Księżycu są góry, a na Słońcu plamy i – co wywołało największą sensację – że Jowisz jest obiegany przez cztery duże ciała niebieskie (nazwane przez niego gwiazdami Medycejskimi). Słowem, na Ziemi się wszystko nie kończy. Ale świat powiększył się jeszcze w jedną stronę – Holender Leeuwenhoek, bracia Jensenowie (Flamandowie) i Anglik Hooke konstruują mikroskop i stwierdzają, że tam, gdzie nic już nie ma – na przykład w kropli czystej wody – żyje mrowie rozmaitych stworzeń (nazywano je, nawet jeszcze w czasach, gdy kończyłem szkołę, wymoczkami).

Za tym wszystkim stała matematyka, a konkretnie rachunki. XV i XVI wiek to zmaganie się wszystkich praktycznie uczonych z problemem uciążliwości rachunków. Dzisiejsi Czytelnicy *Delty* zapewne nie w pełni mogą zrozumieć, o co chodzi – mają przecież do dyspozycji kalkulatory (z którymi każdy przecież sobie poradzi) i komputery (też coraz bardziej dające się ujarzmić). Przeprowadzenie rachunków, choćby takich, by zestawić tablice efemeryd (czyli tych zjawisk na niebie, które nie powtarzają się w rytmie dobowym bądź rocznym, a które w owych czasach były niezbędne do mniej więcej świadomej nawigacji) wymagało nieprawdopodobnie żmudnej i długotrwałej pracy, jeśli trzeba ją było wykonać, jak to się mówi „ręcznie”. Wymyślono cały szereg dziś już zupełnie zapomnianych technik. Kto dzisiaj potrafiłby np. mnożyć za pomocą tablicy kwadratów liczb?

wodnego roztworu chlorku kadmu, umieszczonej między dwoma licznikami scyntylacyjnymi do rejestracji fotonów. Wyemitowany pozytron w odwrotnym procesie β jest spowalniany przez wodę i anihiluje z elektronem z tarczy, co prowadzi do emisji dwóch charakterystycznych fotonów rejestrowanych jednocześnie przez detektory. Neutron też jest spowalniany i po kilku milisekundach jest wychwytywany przez jądro kadmu, czemu też towarzyszy emisja fotonu. Rejestracja trzech fotonów w odpowiedniej sekwencji czasowej dostarczała więc dowodu na to, że w tarczy zaszło oddziaływanie antyneutrino z protonem. Pozytywny wynik eksperymentu Reinesa i Cowana, przeprowadzonego przy reaktorze Savannah River, udowodnił po raz pierwszy, że neutrino jest obiektywnie istniejącą cząstką elementarną, a nie wymysłem umysłu ludzkiego dla, li tylko, ratowania zasad zachowania.

Neutrino w rozpadzie β towarzyszy zawsze elektronowi. W latach sześćdziesiątych stwierdzono, że mionowi (cząstce bardzo podobnej do elektronu, ale około 200 razy cięższej) towarzyszy inny rodzaj neutrino, który dla odróżnienia od elektronowego nazwany został neutrinem mionowym. Na początku lat siedemdziesiątych stwierdzono, że cząstki elementarne można poklasyfikować w dwie rodziny. Pierwsza rodzina składałaby się z dwóch leptonów – elektronu i neutrino elektronowego, i dwóch kwarków, zwanych górnym i dolnym (ang. up i down). Z kwarków górnych i dolnych zbudowane są protony i neutrony, składniki jąder atomowych. A więc w zasadzie wystarczałyby jedna rodzina cząstek do wytłumaczenia budowy materii we Wszechświecie. Druga rodzina składa się też z dwóch leptonów – mionu i neutrino mionowego, i dwóch kwarków – dziwnego i powabnego (ang. strange i charm). Kwark dziwny jest potrzebny do wytłumaczenia budowy cząstek dziwnych – kaonów, barionów lambda, sigma itp., które szybko rozpadają się na cząstki nie zawierające kwarku dziwnego. Kwark powabny, którego odkrycie w 1974 r. zostało uhonorowane Nagrodą Nobla, uzupełniał skład drugiej rodziny. I taki skład cząstek elementarnych też by wystarczył.

Fakt, że w każdej rodzinie istnieje jeden naładowany lepton (elektron w pierwszej, mion w drugiej), skłaniał fizyków do poszukiwania nowych leptonów. Takie poszukiwania, w których uczestniczył również Martin Perl, były prowadzone w latach sześćdziesiątych, ale wyniki były negatywne. W 1973 r. w Laboratorium SLAC uruchomiono nowe urządzenie SPEAR (zderzające elektrony z pozytronami) otwierające przed łowcami nowych cząstek nowe możliwości. Urządzenie SPEAR było szczególnie przydatne do poszukiwań nowych cząstek, które mogą być produkowane w reakcji elektron + pozytron \rightarrow cząstka + antycząstka. Pierwszym, bardzo istotnym odkryciem, było stwierdzenie istnienia kwarku powabnego, o którym już wspominaliśmy. Z kolei w eksperymencie kierowanym przez M. Perla zaobserwowano już w pierwszym roku od uruchomienia SPEAR kilkadziesiąt przypadków typu elektron + pozytron \rightarrow (elektron + antymion) lub (antyelektron + mion). W obu typach reakcji brakowało energii w stanie końcowym. Jedną z możliwych interpretacji tych przypadków opierała się na hipotezie istnienia nowego, ciężkiego leptonu, nazwanego τ , rozpadającego się szybko na elektron (lub mion) i parę neutrin, które nie są rejestrowane. A więc reakcja mogłaby przebiegać następująco: elektron i pozytron anihilują w parę leptonów τ , które rozpadają się na obserwowane leptony, a towarzyszące im neutrino unoszą brakującą energię. Hipoteza ta była następnie sprawdzana w innych obserwacjach przez kilka lat.

Lepton τ był zwiastunem nowej rodziny cząstek elementarnych. Wkrótce potem odkryto piąty kwark, nazwany pięknym (ang. bottom lub beauty), a na odkrycie jego partnera – kwarku szczytowego (ang. top) musieliśmy czekać aż do ubiegłego roku. Do kompletu trzeciej rodziny brakuje jeszcze neutrino taonowego, którego bezpośrednio jeszcze nie zaobserwowano, chociaż mamy pośrednie dowody jego istnienia.

Tak więc mamy trzy rodziny cząstek elementarnych. Nie jest to jednak proste powielanie się Przyrody. Przy przejściu w modelu cząstek elementarnych od dwóch do trzech rodzin pojawia się istotny nowy element jakościowy, który pozwala wytłumaczyć fakt łamania symetrii kombinowanej CP – symetrii odbicia przestrzennego i sprzężenia cząstka-antycząstka. Ale to już całkiem inna historia.

Jan KALINOWSKI

Patrz w niebo

Aby statek kosmiczny mógł dotrzeć do dalszych planet w miarę szybko i tanio, stosowano już wielokrotnie metodę grawitacyjnego rozpędzania go przy zbliżeniach do kolejnych planet. Korzyść była z tego oczywista: wystarczyło zużyć tylko tyle energii, by statek dotarł do pierwszej planety (zawsze był nią Jowisz), a potem, niejako już przy okazji, odwiedzone były niemal wszystkie dalsze, bo każda planeta kierowała statek ku następnej. Co prawda, wymagało to ogromnej precyzji przy wyborze trasy lotu sondy i sprzyjającego ustawienia planet. Tak wykonały swoje misje oba Pioneerzy i oba Voyagery.

Wszystkie te cztery loty odbyły się, oczywiście, w płaszczyźnie ekliptyki. W 1990 r. z pokładu wahadłowca Discovery wystrzelono ku Jowiszowi sondę Ulysses zbudowaną wspólnymi siłami NASA i ESA (European Space Agency). Sonda ta po przelocie koło Jowisza miała wejść na orbitę prostopadłą do płaszczyzny ekliptyki, tak by przy obieganiu Słońca mogła przelatywać nad jego biegunami. Najbliżej Jowisza Ulysses znalazł się 8 II 1992 r. (w odległości 380 000 km nad powierzchnią jowiszowych chmur) i tak rozpoczęły się badania nietkniętych jeszcze ludzkim przyrządem obszarów Układu Słonecznego. Całe wydarzenie było znacznie słabiej nagłośnione niż wyprawy Pioneerów i Voyagerów – zrozumiałe, eksperymenty takie już spowszedniały.

Tak więc swoją misję okołosłoneczną Ulysses rozpoczął od przebycia magnetosfery Jowisza w kierunku południkowym. Jej granicę wyczuł sześć dni wcześniej w odległości około 8 mln km od planety, tj. znacznie dalej, niż było to w przypadku Voyagerów. Przyczyną takich zmian magnetosfery jest Słońce, mianowicie słaby – podczas lotu Ulyssesa – wiatr słoneczny pozwolił magnetosferze Jowisza swobodnie rozprężyć się do zwiększonych rozmiarów.

Ulysses potwierdził, że Io, najbliższy planecie z satelitów galileuszowych, jest głównym źródłem jonów wypełniających jowiszową magnetosferę. Wulkany tego satelity wyrzucają w przestrzeń tonę dwutlenku siarki i innych gazów na sekundę. Gazy te ulegają szybko jonizacji tworząc na orbicie Io gruby torus plazmy. Torus ten był jednak rzadszy niż za czasów Voyagerów, co dowodziłoby, że aktywność wulkaniczna Io spadła w ostatnich latach. Jony siarki i tlenu Ulysses rejestrował nie tylko w płaszczyźnie orbity Io, lecz – w odpowiednio mniejszym stężeniu – w całym obszarze magnetosfery. Potwierdziło się też, że jony te zbiegają ku biegunom planety wywołując tam zorze dostrzegalne nawet przez teleskop Hubble'a z okołozemskiej orbity.

W sumie, choć Jowisz nie był głównym obiektem badań Ulyssesa, wyprawa sondy już na samym początku przyniosła szereg danych, wprawdzie nie odkrywających, lecz dających naszej wiedzy o Jowiszu solidniejsze podstawy.

Tomasz KWAST

Albo za pomocą tablic funkcji trygonometrycznych? Były to jednak bardzo dobre metody, umożliwiające niesłychany skok do przodu w omawianych stuleciach.

Wynalazki te wielokrotnie wynaleziony (kiedyż by indziej) około 1440 roku druk. Możliwość powielenia informacji w wielu egzemplarzach natychmiast owocowała informacją tej upowszechnieniem. Zaczyna być faktem, że uczeni – nawet w odległych krajach – pracują razem.

Radykalną zmianę sytuacji przynosi wynalazek Burgiego-Nepera-Briggsa-Güntera, czyli logarytmy. Jest to pomysł na to, jak wykonywać mnożenie i dzielenie wielu liczb równocześnie (tak, jak równocześnie dodaje się „w słupek”). Szwajcarski rachmistrz, szkocki lord i angielski matematyk stworzyli metodę, która najwięcej dała ludzkiej cywilizacji. A do tego czwarty z wymienionych – Edmund Günter – skonstruował bajecznie prosty przyrząd realizujący tę metodę: suwak logarytmiczny. Te dwie, przesuwające się względem siebie, deseczki to przyrząd, który dał ludziom parę, elektryczność, samochody, samoloty, radio, telewizję, tranzystor. Słowem – długo jeszcze komputery będą musiały popracować, by mieć takie zasługi, jak te skromne dwie deseczki. Drodzy Czytelnicy: poznajcie choćby jeden suwak logarytmiczny w swoim życiu – jest to na pewno większy bohater ludzkości od każdego z wodzów czy królów.

Gdy ludzkość uzyskała już swobodny dostęp do *Rechenhaftigkeit* – rachunkowej gwarancji przeprowadzanych rozumowań, dla pełnego przełomu potrzebne już było jedynie zerwanie z dotychczasową praktyką nauki, czyli z uniwersytetami. Dokonali tego – co może być zaskoczeniem – oficerowie (będzie mowa jeszcze o jednej interwencji armii w naukę, ale to następnym razem). Byli to oficerowie armii wyzwoleniczych. Trzeba bowiem przypomnieć sobie, że Europa przełomu XV i XVI wieku to Europa podzielona między dwa supermocarstwa: Hiszpanię, której potęgą opierała się na złocie, i Polskę, której potęgą miała swe źródło w zbożu. Hiszpania rządziła Włochami, Austrią, Francją, Anglią (czasów Krwawej Maryi), Holandią; Polska (wraz z Litwą) – Węgrami, Czechami, Szwecją, Rosją, Prusami, a razem utrzymywały te potęgi między sobą łańcuszek podzielonych państweczek niemieckich. W wieku XVII sytuacja jest już skrajnie inna

- to nowo powstałe (jak Prusy) bądź wyzwolone (jak Francja) państwa dyktują warunki. I ci prężni ludzie, którzy wywalczyli dla nich wolność, również układają podwaliny nowej nauki.

Czasem przesadzają, mówią np. *dowody były potrzebne takim mięczakom, jak Grecy; my się dziś bez nich swobodnie obywamy.* Ale formują praktycznie wszystkie gałęzie nauki, jakie my dziś uprawiamy. Powstaje fizyka (Galileusz, Newton), chemia (Boyle), biologia, fizjologia itd., itp.

Oto przykłady. Robert Hooke stwierdził, że gdy potrząsnemy naczyniem z suchym równoziarnistym piaskiem, to zachowuje się on jak płyn - cięższe od piasku przedmioty w nim toną, lżejsze wypływają na powierzchnię, można też skonstruować pływające po takim piasku żaglowce. Jego wniosek: woda i inne płyny to bezustannie drgające jednakowe kuleczki. Tak powstała kinetyczno-molekularna teoria budowy materii.

Inny przykład. Samuel Pepys z kolegami (można o tym przeczytać w jego, dostępnych po polsku, pamiętnikach) u szeryfa Londynu uzyskali prawo do przeprowadzenia na ochotniku (spośród skazanych na śmierć) eksperymentu polegającego na przetoczeniu mu litra krwi owczej (i równoczesnym upuszczeniu mu litra jego własnej krwi) - w przypadku powodzenia miał zostać uwolniony i otrzymać sztukę złota, co zresztą się stało. Jak długo żył - nie wiadomo, bo natychmiast się ułotnił.

Wymieniony przed chwilą Samuel Pepys był później prezesem Royal Society, angielskiej Akademii Nauk. Tak bowiem - Akademiami Nauk - nazywają się instytucje naukowe, które nowi ludzie nauki powołali do walki ze skostniałymi uniwersytetami. Royal Society powstało w 1655 roku, Akademia Paryska w 1666; najstarsza jest neapolitańska Accademia dei Lincei z 1560 roku (rzymska powstała 43 lata później). Zgoda między Akademiami i Uniwersytetami zapanowała dopiero w XIX wieku.

Samuel Pepys jest też osobą, która wyraziła zgodę na opublikowanie w 1687 roku dzieła powszechnie uznanego za najdonioślejsze dla XVII stulecia: *Philosophiae naturalis principia mathematica*, dzieła, w którym wyłożone są zasady dynamiki i udowodnione jest prawo powszechnego ciężenia. Rezultat znacznie bardziej obrazoburczy od prac Kopernika - jest tu jasno powiedziane, że na Ziemi i w Niebie obowiązuje ta sama fizyka.



Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 765. Udowodnić, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest sumą dwóch funkcji okresowych.

(Zadanie zaproponował Jarosław Wróblewski.)

Rozwiązanie na str. 15

M 766. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1, a $\varepsilon_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Udowodnić, że

$$1 + \varepsilon_n + \varepsilon_n^2 + \dots + \varepsilon_n^{k-1} = 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy n jest dzielnikiem k .

Rozwiązanie na str. 15

M 767. Prostopadłościenne pudło o wymiarach $A \times B \times C$ wypełniono jednakowymi prostopadłościanami o wymiarach $a \times b \times c$. Wiedząc, że liczby A, B, C, a, b, c są naturalne, udowodnić, że a dzieli którąś z liczb A, B, C .

Rozwiązanie na str. 8

Redaguje Krzysztof REJMER

F 423. Jednorodna nierozciągliwa nić o gęstości liniowej ρ wisi w równowadze na gładkim pręcie. W pewnej chwili nić zaczyna się zsuwać z pręta. Znaleźć jej prędkość w chwili, gdy oderwie się od pręta. Zaniedbujemy średnicę pręta i grubość nici.

Rozwiązanie na str. 11

F 424. Jak wygląda ruch liny z poprzedniego zadania, kiedy oderwie się ona już od pręta? W jakim czasie lina wyprostuje się? Jakie będą w tym momencie położenia jej końców oraz prędkość?

Rozwiązanie na str. 16

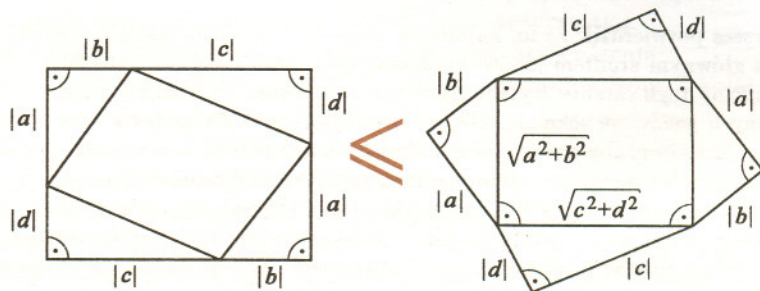
Matematyczne miniatury

Kluczem do wielu własności płaszczyzny euklidesowej jest nierówność Cauchy'ego-Schwarza: dla rzeczywistych a, b, c, d

$$|a \cdot c + b \cdot d| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$$

(inna wersja: $|(a, b) \circ (c, d)| \leq \|(a, b)\| \cdot \|(c, d)\|$, gdzie symbol \circ oznacza iloczyn skalarny, $\| \cdot \|$ długość wektora o danych współrzędnych).

Ponieważ wśród równoległoboków o ustalonych bokach największe pole ma prostokąt, to zgodnie z rysunkiem mamy



$$(|a| + |d|) \cdot (|c| + |b|) \leq 2 \cdot \frac{1}{2} (|a| \cdot |b| + |c| \cdot |d|) + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2},$$

$$|a \cdot c + b \cdot d| \leq |a| \cdot |c| + |b| \cdot |d| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

Jarosław GÓRNICKI

O pewnej sprytniej metodzie, I

Niech P będzie niepustym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych i funkcja $f: P \rightarrow \mathbf{R}$ spełnia warunek $f(x) \geq 0$ dla każdego $x \in P$. Jeżeli liczby x_1, \dots, x_n należą do P , to $f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq 0$.

To oczywiste stwierdzenie może stać się cennym narzędziem do rozwiązania niektórych, czasami niełatwych, zadań olimpijskich. Cała trudność w tego typu zadaniach polega jedynie na sprytnym dobraniu funkcji f (stąd tytuł). Zaczniemy od następującego przykładu:

1. Wyznaczyć wszystkie ciągi (x_1, \dots, x_n) liczb rzeczywistych, dla których

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3} = \sqrt[4]{x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4}.$$

Rozwiązanie. Niech $a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Rozpatrzmy funkcję $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ daną wzorem $f(x) = x^2(x - a)^2$. Załóżmy, że (x_1, \dots, x_n) jest pewnym ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym dane równości. Ponieważ $f(x) \geq 0$ dla każdego rzeczywistego x , więc również $f(x_i) \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \text{Mamy: } \sum_{i=1}^n f(x_i) &= \sum_{i=1}^n (x_i^4 - 2ax_i^3 + a^2x_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^4 - 2a \sum_{i=1}^n x_i^3 + a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \\ &= a^4 - 2a \cdot a^3 + a^2 \cdot a^2 = 0. \end{aligned}$$

Zatem suma liczb nieujemnych $f(x_1), \dots, f(x_n)$ wynosi 0, a to możliwe jest jedynie wtedy, gdy każda z liczb $f(x_1), \dots, f(x_n)$ równa się 0. A ponieważ wielomian f ma tylko dwa pierwiastki: 0 i a , więc $x_i = 0$ lub $x_i = a$ dla $i = 1, \dots, n$. Stąd łatwo dostajemy, że każde rozwiązanie w liczbach rzeczywistych danego układu ma postać: $x_i = p$, $x_j = 0$ dla każdego j różnego od i , gdzie p jest dowolną liczbą dodatnią.

2. Wyznaczyć wszystkie takie liczby naturalne $n \geq 2$, że nierówność

$$(*) \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$$

zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Rozwiązanie. Ustalmy $n \in \mathbf{N}$ i weźmy funkcję $f(x) = x^2 - a_n x + a_n^2 / (n-1)$. Jeśli dla dowolnej liczby rzeczywistej a_n trójmian f ma co najwyżej jeden pierwiastek rzeczywisty, to dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, \dots, a_{n-1} jest $f(a_1) + \dots + f(a_{n-1}) \geq 0$, czyli $a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2 \geq a_n(a_1 + \dots + a_{n-1})$. Jeśli dla pewnego rzeczywistego a_n trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, powiedzmy α i β ($\alpha < \beta$), to dla dowolnych liczb rzeczywistych $b_1, \dots, b_{n-1} \in (\alpha, \beta)$ jest $f(b_1) + \dots + f(b_{n-1}) < 0$, co jest równoważne nierówności $b_1^2 + \dots + b_{n-1}^2 + a_n^2 < a_n(b_1 + \dots + b_{n-1})$.

Wszystkie hierarchie kościelne odnotowały, że jest to sprzeczne z ich doktryną (inna sprawa, czy jest to pogląd słuszny). I co? I nic. Starcia religijne i tworzenie nowej mapy politycznej już zostały zakończone. Nie było warto rozniecać nowych stosów z powodu jakiegos tam wyniku naukowego.

Ta różnica między losami rezultatu Kopernika i Newtona jest chyba dostatecznie jaskrawym dowodem dla każdego, kto chciałby wątpić w ścisły związek nauki z polityką. Mówię o tym, bo takich pięknoduchów ciągle się jednak spotyka.

Nowy wzorzec nauki, stworzony w XVII wieku, obowiązywał co najmniej do końca XIX stulecia. A czy obowiązuje dziś? Wiele wskazuje na to, że nie. Trudno jednak jest wyrokować kategorycznie, póki nie zrozumie się istoty nowej propozycji. A ja, niestety, na razie zobaczyć jej nie umiem.

Tak więc wtedy nierówność (*) nie jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych. Liczby b_1, \dots, b_{n-1}, a_n stanowią kontrprzykład! Udowodniliśmy w ten sposób, że nierówność (*) zachodzi dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, \dots, a_n wtedy i tylko wtedy, gdy trójmian kwadratowy f ma co najwyżej jeden pierwiastek rzeczywisty. Jeszcze tylko formalność: obliczenie „delty” i zbadanie jej znaku, co pozostawiamy Czytelnikowi.

Jakie funkcje należy dobrać, aby rozwiązać poniższe zadania?

3. Wyznaczyć wszystkie ciągi (x_1, \dots, x_n) liczb rzeczywistych spełniające równanie:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3}.$$

4. Dane są liczby rzeczywiste x_1, \dots, x_n o sumie równej 0. Niech m będzie najmniejszą, M zaś największą z tych liczb. Dowieść, że $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq -nmM$.

5. Liczby rzeczywiste x_1, \dots, x_n spełniają warunki: $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Udowodnić, że spośród tych liczb można wybrać dwie, których iloczyn jest nie większy niż $-1/n$.

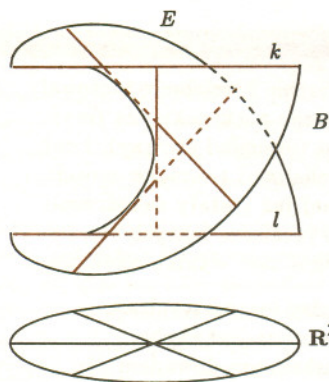
6. Niech $n \geq 4$. Różne liczby rzeczywiste x_1, \dots, x_n spełniają warunki: $\sum_{i=1}^n x_i = 0$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Udowodnić, że spośród tych liczb można wybrać takie cztery różne liczby a, b, c, d , że

$$a + b + c + nabc \leq \sum_{i=1}^n x_i^3 \leq a + b + d + nabd.$$

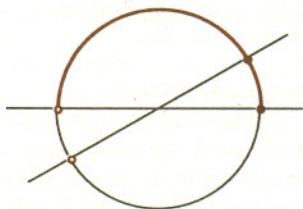
Krzysztof CHEŁMIŃSKI, Waldemar POMPE

Matematyczny mikroskop

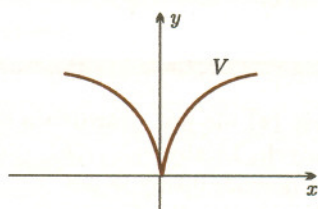
Tadeusz KRASIŃSKI



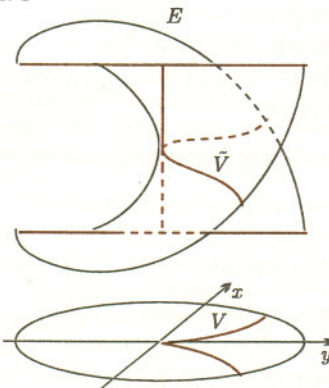
Rys. 1



Rys. 2

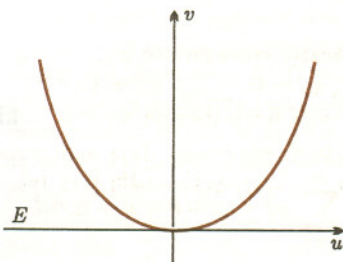


Rys. 3



Rys. 4

W tym artykule pojęcie stycznej rozumiemy nieco szerzej, niż to się zwykle robi. W przykładzie z parabolą półścienną $y^3 - x^2 = 0$ oś Oy jest styczna do krzywej w $(0, 0)$, zaś oś Ox nie.



Rys. 5

Prawie wszystkie nauki ścisłe w swoich badaniach używają urządzeń powiększających. Rola mikroskopu w fizyce, chemii, biologii, teleskopu w astronomii oraz innych narzędzi optycznych w innych naukach jest ogromna i trudno ją podważyć. Wydaje się, że tylko matematyka nie ma ani takiego narzędzia, ani problemów, które można by rozwiązać z jego pomocą.

Okazuje się, że jednak istnieje w matematyce narzędzie (czysto abstrakcyjne, oczywiście), które można uznać za pewien rodzaj mikroskopu. Tym narzędziem jest operacja rozdmuchania punktu w przestrzeni. Mówiąc obrazowo, w danej przestrzeni X (może to być płaszczyzna, powierzchnia, przestrzeń trójwymiarowa itd.) rozdmuchujemy (albo, jeśli kto woli, rozszczepiamy, rozciągamy) jeden z jej punktów, P , do pewnego zbioru punktów tak, by każdy „nowy” punkt odpowiadał jednemu kierunkowi dochodzącemu do punktu P . Wówczas obiekty (figury, podzbiory) wyjściowej przestrzeni X , zawierające punkt P , stają się na ogół prostsze (lub „lepiej widoczne”) w przestrzeni rozdmuchanej.

Przejdźmy do dokładniejszego opisu. Dla prostoty ograniczymy się do rozdmuchania punktu płaszczyzny rzeczywistej \mathbb{R}^2 . Rozdmuchaniem płaszczyzny \mathbb{R}^2 w punkcie $(0, 0)$ nazywamy nową, leżącą nad płaszczyzną, powierzchnię B , która powstaje przez wklejenie okręgu E w miejsce punktu $(0, 0)$ w taki sposób, że B jest powierzchnią bez osłobliwości. (Kto nie wierzy, że to możliwe, niech obejrzy rys. 1).

Można sobie wyobrażać, że aby otrzymać powierzchnię B , podnosimy pewną prostą l do góry i obracamy ją jednocześnie o kąt 180° wokół pionowej osi otrzymując prostą k . Prosta zakreśla podczas tego ruchu pewną powierzchnię. Powierzchnia B powstaje z niej przez utożsamienie skrajnych prostych k i l (patrz rysunek). Łatwo zauważyć, że jest to konstrukcja wstęgi Möbiusa, w której zamiast odcinka używamy całej prostej. Nad każdym punktem płaszczyzny \mathbb{R}^2 , różnym od początku układu współrzędnych, leży dokładnie jeden punkt powierzchni B , a nad punktem $(0, 0)$ zbiór E , zwany fachowo *dywizorem wyjątkowym*, który możemy utożsamić z okręgiem. To ostatnie stwierdzenie stanie się jaśniejsze, gdy przeprowadzimy następujące rozumowanie.

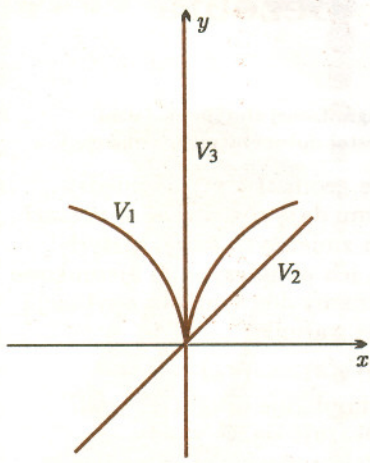
Dowolnej prostej w \mathbb{R}^2 przechodzącej przez $(0, 0)$ odpowiada w B pewna „prosta” leżąca nad nią. Dwoim różnym takim prostym w \mathbb{R}^2 będą odpowiadały dwie „proste” w B – tym razem rozłączne (proszę jeszcze raz spojrzeć na rys. 1). W B następuje więc „rozszczepienie” kierunków w \mathbb{R}^2 dochodzących do $(0, 0)$ – każdemu kierunkowi w \mathbb{R}^2 możemy przyporządkować jeden punkt wklejonego zbioru E . Zatem rzeczywiście zbiór E można utożsamić z okręgiem: zbiór kierunków w \mathbb{R}^2 to inaczej zbiór prostych przechodzących przez $(0, 0)$, ten zaś zbiór nietrudno utożsamić z okręgiem. Istotnie, każdemu kierunkowi odpowiadają dwa antypodyczne punkty na okręgu, po sklejeniu których znów otrzymamy okrąg (rys. 2).

Operacji rozdmuchania używa się głównie do badania osłobliwości krzywych opisanych równaniami wielomianowymi. Jeśli np. rozważymy krzywą V o równaniu $y^3 - x^2 = 0$ w \mathbb{R}^2 o jedynym punkcie osłobliwym $(0, 0)$ (patrz rys. 3), to po rozdmuchaniu punktu $(0, 0)$ będzie jej odpowiadała leżąca na powierzchni B krzywa \tilde{V} bez osłobliwości (patrz rys. 4), zwana *przeciwobrazem właściwym* wyjściowej krzywej. Dokładniej, \tilde{V} jest parabolą w B – za chwilę to uzasadnimy.

Analitycznie przeciwobraz właściwy krzywej opisuje się w następujący sposób: jeśli $f(x, y) = 0$ jest równaniem krzywej V w \mathbb{R}^2 przechodzącej przez $(0, 0)$ i oś Ox (odp. Oy) nie jest styczna do tej krzywej w punkcie $(0, 0)$, to podstawiamy $x = uv$, $y = v$ (odp. $x = v$, $y = uv$) do równania $f(x, y) = 0$. To znaczy, rozważamy równanie $f(uv, v) = 0$ (odp. $f(v, uv) = 0$). Następnie dzielimy to równanie przez możliwie najwyższą potęgę v . Równanie, otrzymane po tych operacjach, jest równaniem krzywej \tilde{V} w przestrzeni rozdmuchanej. Na przykład, dla rozważanej powyżej paraboli półścienną $f(x, y) = y^3 - x^2 = 0$ mamy $f(uv, v) = v^2(v - u^2)$. Zatem krzywa ta po rozdmuchaniu jest parabolą opisaną równaniem $v - u^2 = 0$ (rys. 5).

W B zbiór E (dywizor wyjątkowy) opisany jest równaniem $v = 0$, czyli jest osią Ou .

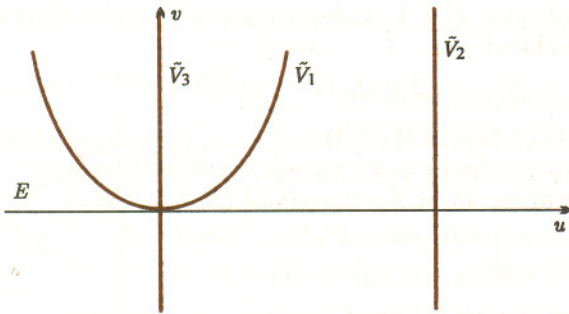
W przypadku, gdy zarówno oś Ox , jak i oś Oy są stycznymi do krzywej (np. dla krzywej $x(y - x^2) = 0$), to tak zmieniamy współrzędne w \mathbb{R}^2 , by nowe osie już tej własności nie miały.



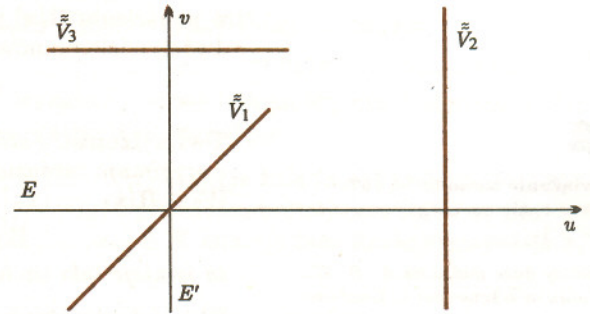
Rys. 6

Ponieważ rozdmuchanie punktu płaszczyzny jest lokalną modyfikacją współrzędnych w \mathbb{R}^2 , a powierzchnia B nie ma osobliwości, to operację tę możemy zastosować następnie do jednego z punktów B . Zatem rozdmuchania możemy iterować, otrzymując kolejne powierzchnie B', B'', \dots itd. Rozważmy, na przykład, krzywą $y^5 - x^2 = 0$ z osobliwością w $(0, 0)$. Po rozdmuchaniu punktu $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ otrzymujemy w B krzywą $v^3 - u^2 = 0$, która nadal ma punkt osobliwy w $(0, 0)$. Następnie, po rozdmuchaniu punktu $(0, 0)$ na powierzchni B otrzymamy krzywą $v' - u'^2 = 0$ na powierzchni B' , która nie ma już punktu osobliwego.

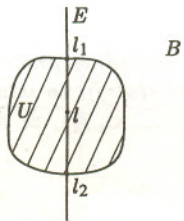
Widzimy więc, że zastosowanie wielokrotnego (w tym przypadku dwukrotnego) rozdmuchania „rozwiązało” osobliwość wyjściowej krzywej. Jest to reguła ogólna. Dla dowolnej krzywej algebraicznej, mającej punkt osobliwy w $(0, 0)$, istnieje taki skończony ciąg rozdmuchań, że po ich wykonaniu otrzymamy krzywą bez osobliwości. Okazuje się również, że końcowa konfiguracja, złożona z układu wklejanych kolejno okręgów oraz układu krzywych, otrzymanych z wyjściowej, niesie bardzo wiele informacji o rodzaju osobliwości pierwotnej krzywej w \mathbb{R}^2 . Bliższe wyjaśnienie tego zjawiska przekracza ramy artykułu w *Delcie*. By jednak odrobinę jeszcze Czytelnika z rozdmuchaniem oswoić, rozważmy jeszcze jeden przykład, tym razem krzywej rozkładalnej, tzn. składającej się z kilku krzywych, które są już nierozkładalne na prostsze krzywe. Mianowicie, niech V będzie krzywą opisaną równaniem $f(x, y) = (y^3 - x^2)(y - x)x = 0$. Jak widać na rysunku 6, V składa się z trzech krzywych: paraboli półściśniennej V_1 o równaniu $y^3 - x^2 = 0$ i dwóch prostych V_2 i V_3 o równaniach odpowiednio $y - x = 0$ oraz $x = 0$. Po pierwszym rozdmuchaniu otrzymamy złożoną z dwóch rozłącznych części konfigurację w B , przedstawioną na rysunku 7.



Rys. 7



Rys. 8

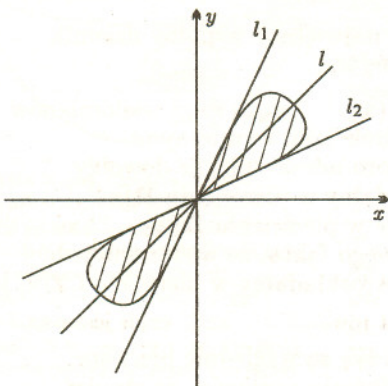


Rys. 9

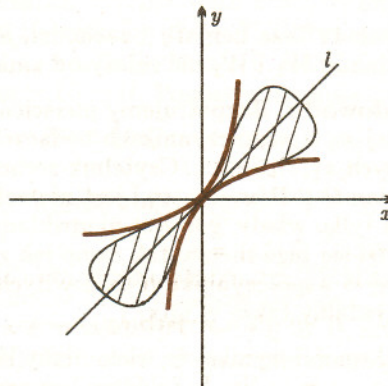
Kolejne rozdmuchanie, tym razem powierzchni B w punkcie $(0, 0)$, daje nam nową konfigurację w B' (patrz rys. 8). Tym razem krzywe wyjściowe nie mają punktów osobliwych i są rozdzielone.

Wszystkie te prościutkie przykłady pokazują, że kolejne rozdmuchania są jak gdyby kolejnymi stopniami „powiększania”. Struktura osobliwości danej krzywej staje się coraz lepiej „widoczna”. Fakt, że iteracje rozdmuchań są kolejnymi stopniami „powiększania”, można jeszcze wyjaśnić w taki sposób. Weźmy dowolny punkt l na wklejonym okręgu E powierzchni B (jak już wiemy, odpowiada on jednemu kierunkowi w \mathbb{R}^2) i jego małe otoczenie U (rys. 9).

W U odzwierciedlony jest tylko kawałek stożka w \mathbb{R}^2 zawarty między kierunkami l_1 i l_2 (rys. 10).



Rys. 10



Rys. 11

Jeśli teraz rozdmuchamy punkt l w B i weźmiemy otoczenie dowolnego punktu $l' \in E'$ w przestrzeni B' , to już w tym otoczeniu odzwierciedlona jest część (krzywoliniowego) stożka stycznego do l w wyjściowej płaszczyźnie \mathbb{R}^2 (rys. 11).

Kolejne rozdmuchania dają nam wgląd w coraz to ostrzejsze stożki (czy też może „dziobki”) dotykające $(0, 0)$ w \mathbb{R}^2 . Zatem wielokrotne rozdmuchanie jest rzeczywiście specyficznym, wielostopniowym mikroskopem matematycznym.

Wielowymiarowe uogólnienie twierdzenia Bezouta

Tomasz OSMAN

(Niniejszy artykuł jest skróconą wersją pracy Autora nagrodzonej złotym medalem w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki. Skróć został dokonany przez redakcję.)

Zdarza się, że rozmaite zależności (o charakterze geometrycznym) między wektorami lub innymi obiektami matematycznymi dają się zapisać w postaci $W(x_1, \dots, x_n) = 0$, gdzie W jest wielomianem n zmiennych rzeczywistych. Na przykład, aby dwie proste były prostopadłe, ich współczynniki kierunkowe muszą spełniać zależność $a_1 a_2 + 1 = 0$. Często mamy do czynienia z sytuacją, że w postaci algebraicznej zapisane są dwa różne warunki:

$$W_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{oraz} \quad W_2(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

i wiadomo skądinąd, że jeden z tych warunków implikuje drugi (tzn. jeśli $W_1(x_1, \dots, x_n) = 0$, to i $W_2(x_1, \dots, x_n) = 0$). Okazuje się, że wtedy, przy pewnych dodatkowych założeniach, zachodzi prosty związek między wielomianami W_1 i W_2 .

Przez $\mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ (odp. $\mathbf{R}[x_1, \dots, x_{n-1}]$) oznaczymy pierścień wielomianów n zmiennych x_1, \dots, x_n (odp. $(n-1)$ zmiennych x_1, \dots, x_{n-1}) o współczynnikach rzeczywistych. W dalszym ciągu będziemy wykorzystywać fakt, że wielomiany z każdego z tych pierścieni można jednoznacznie rozłożyć na czynniki „pierwsze”, tzn. przedstawić w postaci iloczynu wielomianów nierozkładalnych. Wielomian nierozkładalny to taki, który nie jest iloczynem dwóch innych niższego stopnia. Na przykład, dla $n = 1$ nierozkładalny w pierścieniu $\mathbf{R}[x]$ jest wielomian $x^2 + 1$, wielomian zaś $x^4 + 1$ jest iloczynem dwóch wielomianów nierozkładalnych:

$$x^4 + 1 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1) \cdot (x^2 + x\sqrt{2} + 1).$$

Twierdzenie. Załóżmy, że wielomian $W_1 \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ jest nierozkładalny i przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne. Jeśli wielomian $W_2 \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ ma tę własność, że dla wszystkich (x_1, \dots, x_n)

$$W_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \implies W_2(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

to istnieje taki wielomian $G \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$, że $W_2 = G \cdot W_1$.

Dla wielomianów jednej zmiennej powyższe twierdzenie wynika łatwo z twierdzenia Bezouta.

W dowodzie twierdzenia potrzebny będzie następujący

Lemat 1. Jeśli wielomiany $W_1, W_2 \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ są względnie pierwsze (tzn. nie mają wspólnego dzielnika pierwszego różnego od stałej), to istnieją takie wielomiany $T_1, T_2 \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]$ oraz $S \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_{n-1}]$, że dla wszystkich (x_1, \dots, x_n) zachodzi równość

$$T_1(x_1, \dots, x_n)W_1(x_1, \dots, x_n) + T_2(x_1, \dots, x_n)W_2(x_1, \dots, x_n) = S(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Przy tym, $S \neq 0$.

Uwaga: Kto wnikliwie prześledzi szkic dowodu poniżej, spostrzeże, iż można nieco osłabić założenia tego lematu. Mianowicie, prawdziwy jest następujący

Wniosek 1. Teza Lematu 1 zachodzi, jeśli największy wspólny dzielnik wielomianów W_1 i W_2 nie zależy od zmiennej x_n .

Szkic dowodu. Rozpatrujemy pierścień $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_{n-1})[x_n]$ wielomianów zmiennej x_n o współczynnikach będących funkcjami wymiernymi zmiennych x_1, \dots, x_{n-1} . Czytelnik zechce sam udowodnić, że dowolny wielomian $Q \in \mathbf{R}(x_1, \dots, x_{n-1})[x_n]$ jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_{n-1})[x_n]$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_{n-1})$. (Dowodzi się tego niemal tak samo jak znanego faktu, że wielomian jednej zmiennej o współczynnikach całkowitych nierozkładalny w pierścieniu $\mathbf{Z}[x]$ jest nierozkładalny także w $\mathbf{Q}[x]$.)

Z tej własności wynika, że wielomiany W_1 i W_2 są względnie pierwsze w $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_{n-1})[x_n]$. Załóżmy bez ograniczenia ogólności, że stopień (ze względu na zmienną x_n) wielomianu W_1 jest nie mniejszy niż stopień W_2

Według przyjętej w artykule definicji wielomianu nierozkładalnego, każda stała jest takim wielomianem. Nie wpływa to źle na wyniki Autora, ale warto odnotować, że w ten sposób traci się jednoznaczność rozkładu wielomianu na wielomiany nierozkładalne.



Rozwiązanie zadania M 767.

Gdy $a = 1$, nie ma czego dowodzić. Niech więc $a > 1$.

Podzielimy duże pudło na $A \cdot B \cdot C$ sześcianików o krawędzi 1. Każdemu z sześcianików przypiszmy trzy współrzędne (i, j, k) , gdzie $1 \leq i \leq A$, $1 \leq j \leq B$, $1 \leq k \leq C$. W sześcianiku o współrzędnych (i, j, k) wpisujemy liczbę ε_a^{i+j+k} , gdzie $\varepsilon_a = \cos \frac{2\pi}{a} + i \sin \frac{2\pi}{a}$.

Z poprzedniego zadania wynika, że suma liczb w każdym prostopadłościanie o wymiarach $a \times b \times c$ jest równa zeru, bowiem

$$\sum_{i=1}^{i_\ell} \sum_{j=1}^{j_\ell} \sum_{k=1}^{k_\ell} \varepsilon_a^{i+j+k} = \left(\sum_{i=1}^{i_\ell} \varepsilon_a^i \right) \left(\sum_{j=1}^{j_\ell} \varepsilon_a^j \right) \left(\sum_{k=1}^{k_\ell} \varepsilon_a^k \right),$$

a jedna z sum po prawej stronie ma wartość a .

Zatem, suma wszystkich liczb w całym pudle także znika. Skoro jednak

$$0 = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^B \sum_{k=1}^C \varepsilon_a^{i+j+k} = \left(\sum_{i=1}^A \varepsilon_a^i \right) \left(\sum_{j=1}^B \varepsilon_a^j \right) \left(\sum_{k=1}^C \varepsilon_a^k \right),$$

to musi być np. (bez zmniejszenia ogólności) $\sum_{i=1}^A \varepsilon_a^i = 0$. Stąd, ponownie na mocy poprzedniego zadania, a jest dzielnikiem A .

i zastosujemy algorytm Euklidesa poszukiwania największego wspólnego dzielnika. Otrzymamy ciąg równości

$$W_1 = Q_1 W_2 + W_3, \quad W_2 = Q_2 W_3 + W_4, \quad \dots \quad W_{k-2} = Q_{k-2} W_{k-1} + W_k,$$

gdzie wszystkie wielomiany W_j oraz Q_j należą do pierścienia $\mathbf{R}(x_1, \dots, x_{n-1})[x_n]$ oraz

$$\text{st } W_1 \geq \text{st } W_2 > \text{st } W_3 > \dots > \text{st } W_k = 0.$$

Przy tym musi być $W_k \neq 0$, bo w przeciwnym razie wielomian niezerowego stopnia W_{k-1} byłby wspólnym dzielnikiem względnie pierwszych wielomianów W_1 i W_2 . Zatem $W_k \equiv c, c \neq 0$.

Stąd już do tezy Lematu niedaleko: z równań $W_j = Q_j W_{j+1} + W_{j+2}$ (spełnionych dla $j = 1, \dots, k-2$) dostaniemy zależność

$$P_1 W_1 + P_2 W_2 = c,$$

gdzie $P_i \in \mathbf{R}(x_1, \dots, x_{n-1})[x_n]$. By otrzymać tezę Lematu, wystarczy teraz pomnożyć obie strony tej równości przez najmniejszą wspólną wielokrotność wielomianów znajdujących się w mianownikach współczynników wielomianów P_1 i P_2 .

Przejdźmy teraz do dowodu twierdzenia.

Założmy, że teza jest fałszywa. Z założenia o nierozkładalności W_1 wynika wówczas, że wielomiany W_1 i W_2 są względnie pierwsze. Z Wniosku 1 wynika, że dla dowolnego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ istnieje (nie znikający tożsamościowo) taki wielomian S_k zależny od $(n-1)$ zmiennych, że

$$T_1(x_1, \dots, x_n)W_1(x_1, \dots, x_n) + T_2(x_1, \dots, x_n)W_2(x_1, \dots, x_n) = S_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Aby otrzymać sprzeczność, wykazemy, że wielomian W_1 ma dostatecznie dużo miejsc zerowych. Dokładniej, zachodzi następujący

Lemat 2. Dla pewnego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ istnieje kula $(n-1)$ -wymiarowa K o środku $(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n)$ i promieniu ε o tej własności, że dla dowolnego $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in K$ istnieje taka liczba rzeczywista x_k , że $W_1(x_1, \dots, x_n) = 0$.

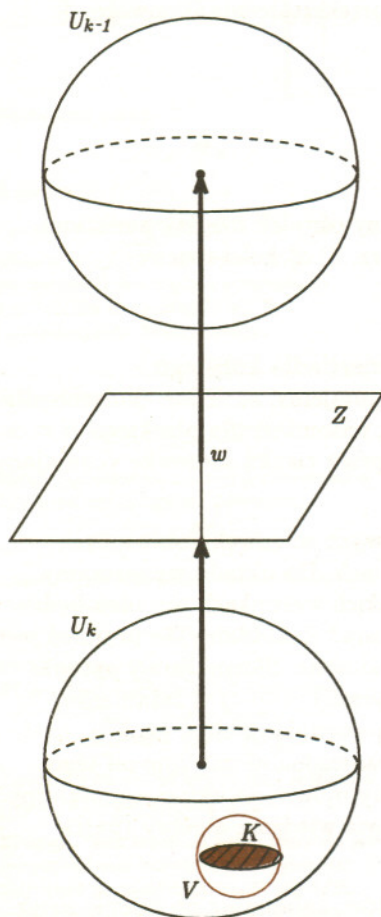
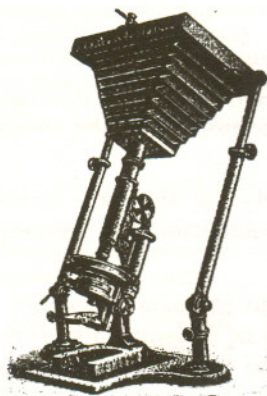
Z tego Lematu twierdzenie wynika natychmiast: ponieważ z założenia W_2 zeruje się wszędzie tam, gdzie zeruje się W_1 , to równość (2) implikuje, że wielomian S_k znika na całej kuli K , a więc $S_k \equiv 0$, sprzeczność.

Szkic dowodu Lematu 2. Niech A (odp. B) oznacza zbiór tych punktów $x \in \mathbf{R}^n$, dla których $W_1(x) > 0$ (odp. $W_1(x) < 0$). Ponadto, oznaczmy przez Z zbiór wszystkich miejsc zerowych wielomianu W_1 . Oczywiście, zbiory A i B są otwarte oraz $A \cup B \cup Z = \mathbf{R}^n$.

Wyberzmy punkty $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ oraz $b = (b_1, \dots, b_n) \in B$. Z otwartości zbioru A wynika, że istnieje takie $r > 0$, iż kula otwarta U_0 o środku a i promieniu r jest zawarta w A . Rozważmy kule otwarte U_1, \dots, U_n o tym samym promieniu r i o środkach odpowiednio w punktach $(b_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, b_3, a_4, \dots, a_n)$, \dots , $(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n)$. Niech k będzie najmniejszą liczbą o tej własności, że kula U_k przecina zbiór B . Z otwartości B wnosimy, że istnieje punkt $c = (c_1, \dots, c_n)$ i liczba $\varepsilon > 0$, takie, że kula V o środku w c i promieniu ε jest zawarta w $U_k \cap B$. Poszukiwaną kulą $(n-1)$ -wymiarową jest zbiór

$$K := \left\{ (x_1, \dots, x_{k-1}, c_k, x_{k+1}, \dots, x_n) : \sum_{j \neq k} (x_j - c_j)^2 < \varepsilon^2 \right\}.$$

Istotnie, wprost z definicji $K \subset V \subset B$. Obraz zbioru K w przesunięciu o wektor $w = (0, \dots, 0, a_k - b_k, 0, \dots, 0)$ zawiera się w kuli U_{k-1} , a ta z kolei zawiera się w zbiorze $A \cup Z$ (bo nie ma punktów wspólnych z B). Wystarczy teraz przypomnieć sobie własność Darboux, by stwierdzić, że przesuwając dowolny punkt z K o wektory $t \cdot w$, $t \in [0, 1]$, musimy natrafić na punkt zbioru Z (patrz rysunek). Ponieważ przesuwanie o wektor $t \cdot w$ to nic innego, jak odpowiedni dobór k -tej współrzędnej punktu, dowód Lematu 2, a więc i całego twierdzenia, jest tym samym zakończony.



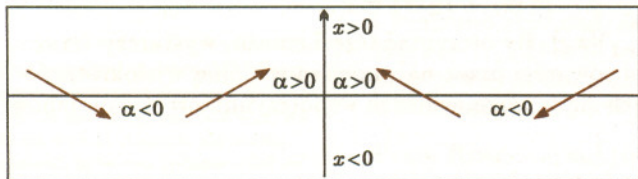
Mała kula V jest zawarta w zbiorze B , na którym wielomian W_1 przyjmuje wartości ujemne, natomiast duża kula U_{k-1} – w zbiorze $\mathbf{R}^n \setminus B = A \cup Z$. Zatem (ponieważ wielomian W_1 jest ciągły na każdej prostej w \mathbf{R}^n) przesuwając każdy punkt „koła wielkiego” K o wektory $t \cdot w$, $t \in [0, 1]$, trafimy dla pewnej wartości t w punkt należący do zbioru Z , na którym wielomian W_1 się zeruje.

Problemy stabilności wybranych układów optycznych

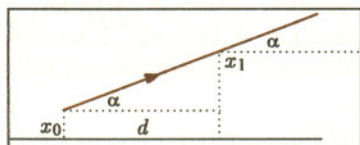
Michał REWIŃSKI

Jest to skrót pracy nagrodzonej w II Ogólnopolskim Konkursie Uczniowskich Prac Naukowych z Fizyki. Autor był wówczas uczniem I LO im. Mikołaja Kopernika w Gdańsku. Obecnie jest studentem Politechniki Gdańskiej.

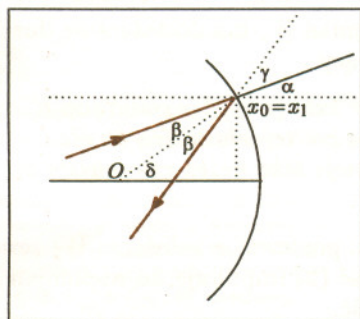
Przechodzenie promieni świetlnych przez układy optyczne złożone z soczewek i zwierciadeł mających wspólną oś optyczną można analizować za pomocą rachunku macierzowego.



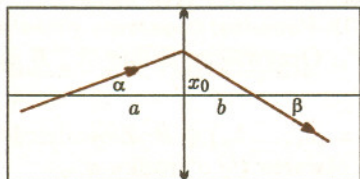
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

W analizie stabilności układów optycznych wygodnie jest skorzystać z podstawowych własności odwzorowań liniowych przestrzeni wektorowych. Niech F będzie macierzą odpowiadającą pewnemu przekształceniu liniowemu w przestrzeni \mathbb{R}^n . Zdefiniujemy wielomian charakterystyczny przekształcenia w następujący sposób

$$F(\lambda) = \det(F - \lambda I).$$

Jeśli wielomian charakterystyczny ma n różnych pierwiastków, to \mathbb{R}^n jest sumą prostą n jednowymiarowych podprzestrzeni niezmienniczych, generowanych przez wektory własne $(f_i)_{i=1}^n$ odpowiadające wartościom własnym $(\lambda_i)_{i=1}^n$, a macierz F przekształcenia jest w tej bazie diagonalna.

W danym punkcie przestrzeni promień będziemy charakteryzować posługując się dwiema zmiennymi: odlegością x od osi optycznej i kątem α , jaki promień tworzy z tą osią. Utwórzmy z tych dwóch wielkości wektor:

$$w = \begin{bmatrix} x \\ \operatorname{tg} \alpha \end{bmatrix}.$$

Konwencję znakową dotyczącą x oraz α przedstawia rysunek 1. Odbicie promienia, przejście przez cienką soczewkę, granicę ośrodków czy też ośrodek jednorodny można opisać za pomocą przekształcenia liniowego, reprezentowanego przez macierz.

Przykłady Macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

odpowiada przejściu promienia przez jednorodny ośrodek między punktami, których rzuty na oś optyczną są odległe o d (rys. 2). Z kolei macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

może być, na przykład, macierzą odbicia od zwierciadła kulistego o promieniu R (rys. 3), wtedy $a = -2/R$ (przyjmujemy, że R jest dodatnie dla zwierciadła wklęsłego i ujemne dla wypukłego, natomiast dla płaskiego $R = \infty$), albo macierzą opisującą załamanie promienia przez cienką soczewkę skupiającą o ogniskowej f (rys. 4), wtedy $a = -1/f$.

Rozważmy układ nieskończonej liczby jednakowych soczewek ustawionych wzdłuż osi optycznej w jednakowych odległościach. Do układu wpuszczamy promień świetlny określony wektorem w . W jakich warunkach promień będzie mógł pozostać dowolnie długo we wnętrzu układu? Zakładamy, że promień jest przyosiowy, a soczewki traktujemy jak nieograniczone. Sformułujmy pytanie inaczej: Niech x_n oznacza odległość od osi optycznej po n -tym załamaniu, a $\operatorname{tg} \alpha_n$ tangens kąta jego nachylenia. W jakich warunkach ciągi $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ oraz $(\operatorname{tg} \alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ są ograniczone? Jeśli ciągi te są ograniczone niezależnie od tego, jaki promień wybraliśmy na początku, będziemy mówić, że układ jest stabilny. Do odpowiedzi na pytanie wystarczy podstawowa wiedza z algebry (patrz marginesy).

Rozważmy jeden cykl złożony z dwóch elementów: załamanie promienia przez soczewkę, a następnie przejście załamanego promienia przez przestrzeń dzielącą dwie kolejne soczewki. Cyklowi temu odpowiada macierz A równa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{f} & d \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}.$$

Wartości własne macierzy A są równe

$$\lambda_1 = \frac{2f - d - \sqrt{d(d - 4f)}}{2f} \quad \text{oraz} \quad \lambda_2 = \frac{2f - d + \sqrt{d(d - 4f)}}{2f}.$$

Są one różne, gdy $d \neq 4f$.



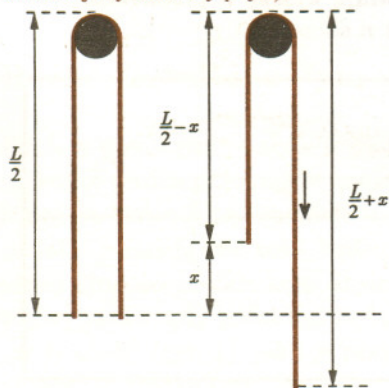
Rozwiązanie zadania F 423.

Równowaga liny jest nietrwała, najdrobniejsze zaburzenie (przesunięcie o x_0 lub nadanie jej prędkości v_0) spowoduje ucieczkę liny z pierwotnego położenia. Równania ruchu mają postać

$$\rho \left(\frac{L}{2} + x \right) \ddot{x} = \rho g \left(\frac{L}{2} + x \right) - T$$

$$\rho \left(\frac{L}{2} - x \right) \ddot{x} = T - \rho g \left(\frac{L}{2} - x \right),$$

gdzie T jest siłą napięcia liny (jednakową po obu stronach pręta, ponieważ zaniedbujemy rozmiary pręta).



Dostajemy z nich

$$\ddot{x} = \frac{2g}{L} x.$$

A zatem

$$x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t},$$

gdzie $\omega = \sqrt{2g/L}$. Niech w chwili początkowej lina będzie przesunięta z położenia równowagi o $x_0 \ll L$ i w spoczynku. Mamy wtedy

$$x = x_0 \cos \omega t.$$

Siła napięcia liny wynosi

$$T = \frac{1}{2} \rho g L - \frac{2\rho g x^2}{L}.$$

Niech Δp oznacza zmianę pędu kawałka liny przewijającego się przez pręt

$$2T - F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2\rho \dot{x}^2,$$

gdzie F jest siłą reakcji pręta działającą na linę. Stąd

$$F = 2T - 2\rho \dot{x}^2.$$

Podstawiając T oraz

$$\dot{x}^2 = \omega^2(x_0^2 + x^2) \approx \omega^2 x^2 \text{ dostajemy}$$

$$F = \rho g L \left(1 - \frac{8x^2}{L^2} \right).$$

Lina odrywa się od pręta, gdy znika siła reakcji F , czyli dla $x = \frac{L}{2\sqrt{2}}$.

Uwaga. Gdy średnica pręta dąży do zera, przyspieszenie dośrodkowe fragmentu liny dąży do nieskończoności jak $1/R$, jednocześnie jego masa dąży do zera jak R , tak więc siła pozostaje skończona.

Czas obliczamy podstawiając otrzymaną wartość x do rozwiązania równań ruchu

$$t = \sqrt{\frac{L}{2g}} \operatorname{arccosh} \frac{L}{2\sqrt{2}x_0} =$$

$$= \sqrt{\frac{L}{2g}} \ln \left(\frac{L}{2\sqrt{2}x_0} + \sqrt{\frac{L^2}{8x_0^2} - 1} \right).$$

Na przykład, dla $L = 1$ m oraz $x_0 = 1$ cm mamy $t = 0,96$ s.

Niech V oznacza macierz przejścia od bazy wektorów własnych macierzy A do naszej wyjściowej bazy. Przejściu promienia przez n soczewek, czyli n cyklom, odpowiada macierz A^n , którą można zapisać jako

$$A^n = V \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} V^{-1}.$$

Stąd mamy

$$\begin{bmatrix} x_n \\ \operatorname{tg} \alpha_n \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} V^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ \operatorname{tg} \alpha_0 \end{bmatrix}.$$

Poza trywialnym przypadkiem promienia pokrywającego się z osią optyczną, czyli $x_0 = 0$ i $\operatorname{tg} \alpha_0 = 0$, ciągi $(x_n)_{n=0}^\infty$ oraz $(\operatorname{tg} \alpha_n)_{n=0}^\infty$ są ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\lambda_1| \leq 1 \text{ oraz } |\lambda_2| \leq 1.$$

Sprawdźmy, kiedy pierwszy warunek jest spełniony. Możliwe są trzy przypadki:

a) $d > 4f$

Warunek $\lambda_1 \leq 1$ prowadzi do nierówności

$$\sqrt{d(d-4f)} \leq 4f - d < 0,$$

czyli do sprzeczności.

b) $d < 4f$

W tym przypadku wartości własne macierzy A są liczbami zespolonymi sprzężonymi o module 1, czyli warunek stabilności jest spełniony.

c) $d = 4f$

W tym przypadku macierz A ma postać

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4f \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}.$$

Obie wartości własne tej macierzy są równe minus jeden, a więc nie możemy posłużyć się jak poprzednio rozkładem na podprzestrzenie niezmiennicze.

Zauważmy jednak, że przekształcenie $(A - \lambda I)^2$ jest zerowe. Możemy zatem napisać następującą równość

$$\begin{aligned} A^n &= ((A - \lambda I) + \lambda I)^n = \binom{n}{1} (A - \lambda I) \lambda^{n-1} I^{n-1} + \binom{n}{0} \lambda^n I^n = \\ &= (-1)^{n-1} (n(A + I) - I). \end{aligned}$$

A zatem

$$A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ \operatorname{tg} \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^n ((-2n-1)x_0 + 4fn \operatorname{tg} \alpha_0) \\ (-1)^n ((-n/f)x_0 + (2n-1) \operatorname{tg} \alpha_0) \end{bmatrix}.$$

Widzimy więc, że ciągi $(x_n)_{n=0}^\infty$ oraz $(\operatorname{tg} \alpha_n)_{n=0}^\infty$ wyrażają się wzorami

$$x_n = (-1)^n (n(4f \operatorname{tg} \alpha_0 - 2x_0) - x_0),$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n = (-1)^n \left(n \left(-\frac{x_0}{f} + 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \right) - \operatorname{tg} \alpha_0 \right).$$

Powyższe ciągi są ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{x_0}{\operatorname{tg} \alpha_0} = 2f.$$

A zatem układ soczewek jest stabilny optycznie tylko wtedy, gdy $d < 4f$.

W analogiczny sposób można badać także inne układy optyczne, na przykład złożone z dwóch ustawionych naprzeciw siebie zwierciadeł o wspólnej osi optycznej. W przypadku dwóch zwierciadeł wklęsłych, każde o promieniu krzywizny R , odległych wzajemnie o d , układ jest stabilny, gdy $d < 2R$.

W przypadku dwóch zwierciadeł, z których jedno jest wklęsłe, a drugie wypukłe, układ jest stabilny dla $d < R$.

Dużo ciekawszym zagadnieniem jest analiza stabilności układu soczewek, dla których ogniskowa zależy od odległości x , w jakiej promień pada na soczewkę.

W tym przypadku nie możemy, niestety, posłużyć się rachunkiem macierzy, gdyż załamanie promienia nie jest już liniowym przekształceniem wektora w . Przyjmijmy, że zależność ogniskowej soczewki od odległości x , w jakiej pada na nią promień, opisuje wzór

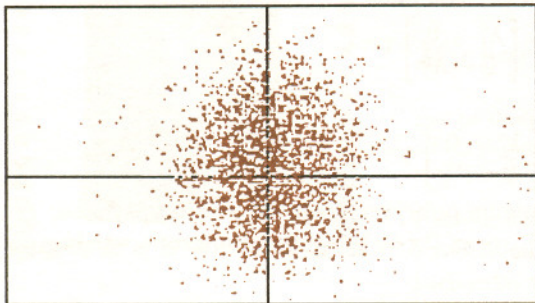
$$f(x) = f_0(1 + kx^2).$$

Transformację promienia podczas przejścia przez soczewkę opisują równania rekurencyjne

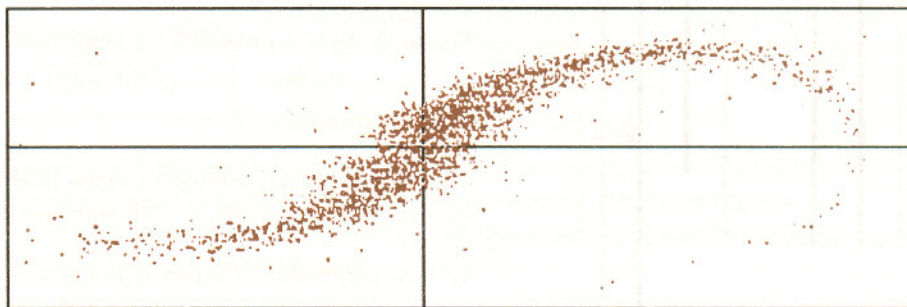
$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{d}{f_0 + kx_n^2}\right) + d \operatorname{tg} \alpha_n,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{-x_n}{f_0(1 + kx_n^2)} + \operatorname{tg} \alpha_n.$$

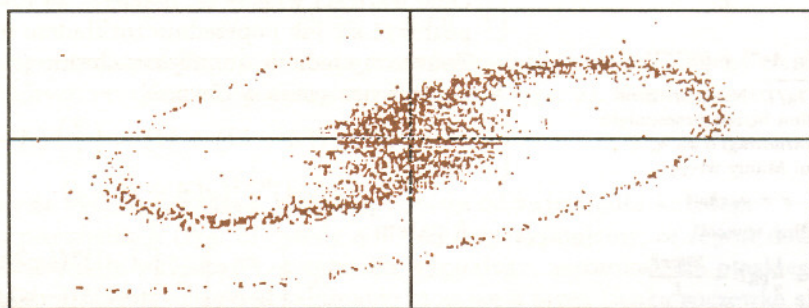
Dzięki symulacjom komputerowym można obliczyć i wykreślić położenie promieni po przejściu przez kolejne soczewki układu. W symulacjach, których wyniki są przedstawione na rysunkach 5–9, badany był nie pojedynczy promień, ale cała ich wiązka (rysunki przedstawiają wiązkę w przestrzeni fazowej $(x, \operatorname{tg} \alpha)$ po przejściu przez n soczewek).



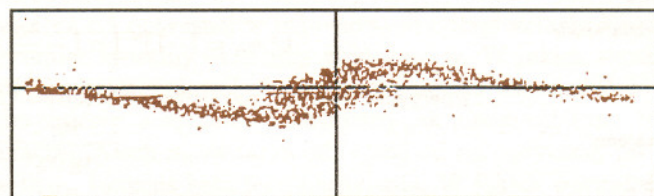
Rys. 5. Kształt wiązki w chwili początkowej ($n = 0$).



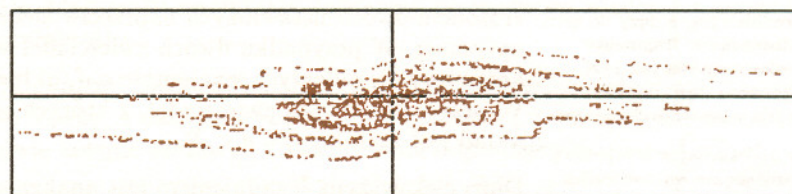
Rys. 6. Czynniki nieliniowy $k = 10^{-6}$, $n = 10$.



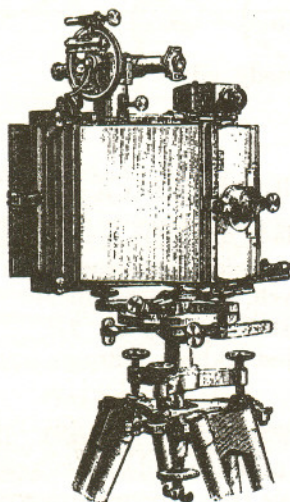
Rys. 7. Czynniki nieliniowy $k = 10^{-6}$, $n = 31$.



Rys. 8. Czynniki nieliniowy $k = 10^{-4}$, $n = 4$.



Rys. 9. Czynniki nieliniowy $k = 10^{-4}$, $n = 11$.



Zbiory początkowych odległości od osi optycznej oraz tangensów kątów podlegały rozkładowi gaussowskiemu. Wprowadzona nieliniowość okazała się źródłem niestabilności. Jako ciekawostkę warto odnotować, że uzyskane kształty bardzo przypominają kształty galaktyk.



mała delta

Różne kawałki o tym samym obwodzie

Jeżeli w dowolnym punkcie średnicy okręgu spotkają się końce dwóch półokręgów mających drugie końce na końcach tej średnicy, to każda z części, na jakie podzielią one koło, będzie miała brzeg tej samej długości co całe koło. Będzie tak zarówno w przypadku, gdy półokręgi będą połączone „w dziobek” (rys. 1), jak i w przypadku, gdy będą połączone gładko (rys. 2).

Sprawdź, jak szybko umiesz to potwierdzić rachunkiem!

Zajmiemy się tutaj przypadkiem gładkim. Stosunek promieni mniejszych półokręgów jest taki sam jak stosunek pól figur, na jakie dzielą one duże koło.

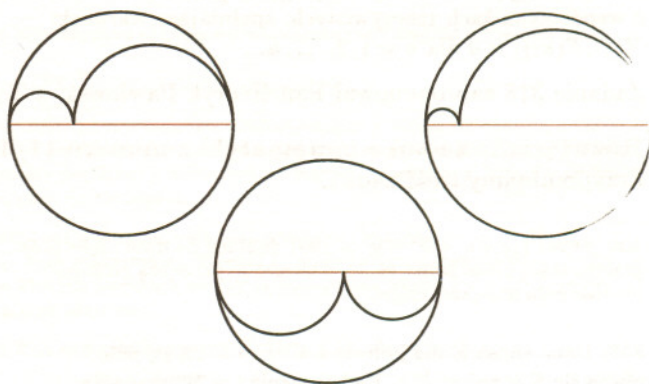
No, a jak szybko teraz?

Z tego już bezpośrednio wynika, że jeśli narysujemy wiele takich gładkich linii dzielących koło i jeśli promienie półokręgów leżących po jednej stronie średnicy, na której spotykają się różne półokręgi, będą równe odpowiednio $\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \dots, \frac{k-2}{k}, \frac{k-1}{k}$ promienia dużego okręgu, to koło zostanie podzielone na k części o równych polach i obwodach (te ostatnie będą wszystkie równe obwodowi dużego koła; na rysunku 3 jest $k = 7$).

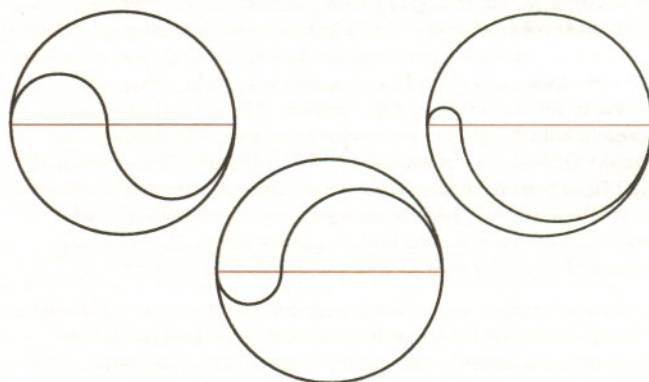
Sprawdzenie tego powinno zająć nie więcej niż 1 minutę!

A teraz sprawa do wykonania nie na czas. Spróbuj ułożyć więcej zadań podobnych do rozwiązywanych przez chwilę. Ułóż analogiczne zadania dla półokręgów łączących się „w dziobek”.

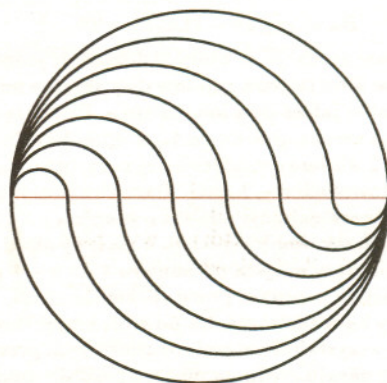
Na początek może być np. takie: wykazać, że suma długości stycznych zewnętrznie okręgów jest równa długości najmniejszego okręgu, do którego są one styczne wewnętrznie.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1996.

Zadania z matematyki nr 317, 318

317. Wyznaczyć największą liczbę naturalną n , dla której istnieją wielomiany drugiego stopnia F, G, H , o współczynnikach rzeczywistych, spełniające warunek: $H(G(F(k))) = 0$ dla $k = 1, 2, \dots, n$.

Zadanie 318 zaproponował Pan Henryk Pawłowski z Torunia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1995

Przypominamy treść zadań:

309. Elipsę $\{(x, y): 49x^2 + y^2 \leq 100\}$ dzielimy na dwie części prostą przechodzącą przez punkt $(1, 1)$. Obliczyć najmniejszą możliwą wartość pola mniejszej części.

309. Dana elipsa E ma półośie $a = \frac{10}{7}$, $b = 10$; jej pole równa się $S = \pi ab = \frac{10}{7}\pi$. Podstawienie $t = 7x$ wyznacza przekształcenie afiniczne $f: (x, y) \mapsto (t, y)$, przeprowadzające elipsę E na koło $K = \{(t, y): t^2 + y^2 \leq 100\}$ (o promieniu $r = 10$), a punkt $P = (1, 1)$ - na punkt $Q = (7, 1)$, którego odległość od środka $O = (0, 0)$ koła K wynosi $\sqrt{50}$, czyli $r/\sqrt{2}$. Cięciwa AB koła K , prostopadła do odcinka OQ , jest więc bokiem kwadratu $ABCD$ wpisanego w to koło. Obszar G zawarty między cięciwą AB a łukiem AB jest najmniejszą częścią koła K , jaką może odciąć prosta przechodząca przez punkt Q ; jego pole równa się $(\pi - 2)/(4\pi)$ pola koła. Stosunek pól figur jest niezmiennikiem przekształceń afinicznych. Wobec tego zbiór $f^{-1}(G)$ jest najmniejszą częścią elipsy E , jaką może odciąć prosta przechodząca przez punkt P , a pole tej minimalnej części wynosi $S \cdot (\pi - 2)/(4\pi)$, czyli $\frac{25}{7}(\pi - 2)$.

310. Rozważamy analogiczne zagadnienie dla n par małżonków. Niech A_n będzie liczbą tych rozsadzeń, przy których żaden mąż nie sąsiaduje za swoją żoną, i niech B_n będzie liczbą tych rozsadzeń, przy których dokładnie jedno małżeństwo zajmuje sąsiednie miejsca. Udowodnimy dwie zależności rekurencyjne:

$$(1) \quad B_n = A_n + 2nA_{n-1},$$

$$(2) \quad B_n = 2n[(2n-1)A_{n-1} + B_{n-1}].$$

Możliwe są dwie sytuacje, w których dokładnie jedna para jest nierozdzielona: albo ta para zajmuje dwa skrajne miejsca od lewej strony, albo jakieś dwa inne miejsca. Pierwszą z tych sytuacji można zrealizować na $2nA_{n-1}$ sposobów (n możliwości wyboru pary, 2 warianty usadzenia tej pary, oraz A_{n-1} rozsadzeń pozostałych $n-1$ par). Teraz druga sytuacja: nierozdzielona para zajmuje miejsca k i $k+1$, gdzie $k \geq 2$. Przesadzamy osobę z miejsca k na lewy skraj rzędu, a wszyscy zajmujący miejsca od numeru 1 do $k-1$ przesuwają się o jedno miejsce w prawo; powstaje konfiguracja, w której wszystkie pary są rozdzielone. Na odwrót, mając dowolne rozsadzenie z wszystkimi parami rozdzielonymi, przesuwamy osobę z lewego skraju rzędu na miejsce bezpośrednio z lewej strony jej/jego małżonka, a grupę osób, która ich rozdzielała przesuwamy o jedno miejsce w lewo.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

318. Dowieść, że dla każdej pary liczb naturalnych $m, n \geq 2$ zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{km}{n} \right] = \sum_{k=1}^{m-1} \left[\frac{kn}{m} \right].$$

310. Sześć par małżeńskich zasiada w rzędzie teatru. Ile jest możliwości rozsadzenia, przy których żaden mąż nie zajmuje miejsca obok swej żony?

Te operacje (wzajemnie odwrotne) ustalają bijekcję między zbiorem rozsadzeń z jedną parą nierozdzieloną (ale nie na lewym skraju rzędu!) a zbiorem rozsadzeń z wszystkimi parami nierozdzielonymi - czyli zbiorem o liczności A_n .

Obie rozpatrzone sytuacje odpowiadają dwóm składnikom po prawej stronie wzoru (1) i dowodzą jego słuszności.

Weźmy ponownie pod uwagę układ, w którym dokładnie jedno małżeństwo („państwo Nowakowie”) siedzi na sąsiednich miejscach. Wyobraźmy sobie, że przyszli oni jako ostatni, zastając $n-1$ par już siedzących w jakiejś kolejności. Albo wszystkie te pary były rozdzielone (A_{n-1} możliwości), a państwo Nowakowie siedli na lewym skraju, na prawym skraju, bądź między dwiema już siedzącymi osobami (razem $2n-1$ możliwości) - albo też dokładnie jedna spośród $n-1$ par była nierozdzielona (B_{n-1} możliwości), a państwo Nowakowie wcisnęli się właśnie pomiędzy tych małżonków. To daje wyrażenie w nawiasie kwadratowym we wzorze (2). Przed nawiasem mamy czynnik $2n$ biorący się stąd, że w roli „państwa Nowaków” może wystąpić każda spośród n par i że pan Nowak może usiąść z lewej lub z prawej strony swej żony. W ten sposób dostajemy równość (2).

Przyrównując prawe strony (1) i (2) oraz podstawiając w miejsce B_{n-1} prawą stronę wzoru analogicznego do (1) (z n zastąpionym przez $n-1$) otrzymujemy - po uporządkowaniu - rekurencję drugiego rzędu:

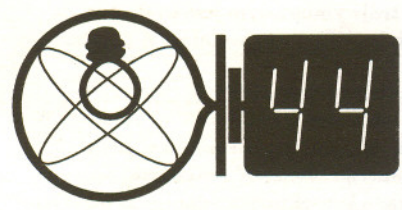
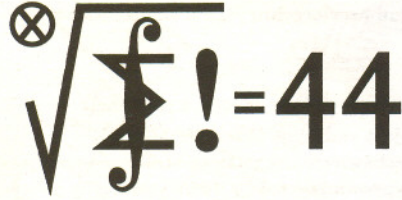
$$(3) \quad A_n = 2n[(2n-1)A_{n-1} + (2n-2)A_{n-2}] \quad (\text{dla } n \geq 3).$$

Oczywiście, $A_1 = 0$, $B_1 = 2$; stąd $B_2 = 8$ (wzór (2)), $A_2 = 8$ (wzór (1)), i stosując kilkakrotnie wzór (3) znajdujemy szukaną wartość $A_6 = 168422400$.

Uwaga. Można udowodnić (korzystając ze wzoru (3) lub stosując inne rozważania kombinatoryczne), że

$$A_n = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (2n-k)! (-2)^k;$$

pytanie, czy tę sumę da się „zwinąć”...



215. Kwadrat zbudowany jest ze sztywnych prętów o długości a połączonych w wierzchołkach przegubowo i sprężysto. Zmiana kąta w wierzchołku o α (tak, że staje się on równy $90^\circ + \alpha$ lub $90^\circ - \alpha$) powoduje wystąpienie momentu siły równego ka o zwrocie przywracającym kąt 90° . Obliczyć okres małych drgań deformujących kwadrat do rombu, jeśli:

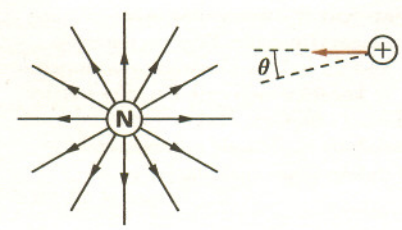
- a) w wierzchołkach znajdują się masy punktowe m , a poza tym pręty są nieważkie,
- b) w środkach prętów znajdują się masy punktowe m , a poza tym pręty są nieważkie,
- c) każdy pręt ma masę m rozłożoną jednorodnie.

216. Ocenic minimalną wielkość liter na powierzchni Ziemi pozwalającą odczytać w świetle widzialnym napis z satelity krążącego na wysokości 400 km, przy użyciu przyrządów optycznych o rozmiarach nie przekraczających 1 m.

Uwaga. Istnieją metody komputerowego przetwarzania obrazów, które zmniejszają nieostrość i poprawiają zdolność rozdzielczą. W rozwiązaniu należy to pominąć.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1995

Przypominamy treść zadań:



Rys. 1

207. Monopol magnetyczny jest hipotetyczną cząstką wytwarzającą pole magnetyczne opisane wzorem

$$\mathbf{B} = g \frac{\mu_0 \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (g - \text{ładunek magnetyczny}).$$

Załóżmy, że do unieruchomionego monopola o ładunku magnetycznym g zbliża się cząstka o masie m i ładunku elektrycznym q . W chwili początkowej cząstka ma prędkość v , jej odległość od monopola jest równa r , a kąt między wektorem prędkości i wektorem wodzącym \vec{r} wynosi θ (rys. 1). Obliczyć minimalną odległość zbliżenia cząstki do monopola.

208. Aby belka podparta w środku nie przełamała się pod własnym ciężarem, jej długość nie powinna przekraczać wartości l_1 . Jaką maksymalną długość l_2 może osiągnąć bez złamania belka podparta w dwóch punktach i w których punktach należy ją podeprzeć? Wymiary poprzecznego przekroju belek i rodzaj materiału są ustalone.

207. Podstawmy do równania $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ siłę Lorentza $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Otrzymujemy

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{qg\mu_0}{4\pi m} \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Podobnie jak dla każdego innego pola magnetycznego, wynika stąd wniosek, że $\mathbf{v} \cdot (d\mathbf{v}/dt) = 0$, czyli $|\mathbf{v}| = \text{const}$. Dodatkowo mamy $\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{v}/dt) = 0$, zatem $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{v} = v^2 = \text{const}$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = v^2 t + c$. Odpowiednio przesuwając początek osi czasu możemy położyć stałą c równą 0 - wtedy w chwili początkowej mamy $t = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} / v^2$. Dalej $\frac{d}{dt} r^2 = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 2v^2 t$, $r^2 = v^2 t^2 + d$ (d - stała). Widzimy, że minimalna wartość r jest równa \sqrt{d} , a podstawiając wartości r i t w chwili początkowej uzyskamy rozwiązanie

$$r_{\min} = \sqrt{r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 / v^2} = r \sin \theta.$$

Ciekawe, że chociaż pole monopola wpływa na ruch cząstki odchylając go od linii prostej, to zależność r i $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ od czasu jest taka, jak dla ruchu jednostajnego prostoliniowego.

208. Złamanie belki w danym punkcie zależy od momentu siły wywieranego przez jedną część belki na drugą. Dla belki podpartej w środku największy moment zginający występuje w punkcie podparcia, natomiast dla belki z rysunku 3 oprócz punktów podparcia należy też wziąć pod uwagę punkt środkowy (nie trudno wykazać, że w innych punktach moment jest mniejszy). Na granicy wytrzymałości wszystkie te momenty są równe, skąd wynika że:

- a) punkty podparcia z rysunku 3 leżą w odległości $l_1/2$ od końców belki,
- b) spełnione jest równanie

$$\frac{\rho l_1 g l_1}{2} \frac{1}{4} = \frac{\rho l_2 g}{2} \left(\frac{l_2}{4} - \frac{l_1}{2} \right),$$

gdzie ρ - masa belki na jednostkę długości. Otrzymujemy $l_2 = l_1(1 + \sqrt{2})$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 201 (WT=1,12) i 202 (WT=3,16)
z numeru 8/1995

Artur Gawryszczak	- Dubeczno	45,78
Aleksander Surma	- Myszków	30,79
Przemysław Gadziński	- Środa Śl.	24,43
Przemysław Gworys	- Częstochowa	24,39
Jarosław Łazuka	- Warszawa	20,14



Rys. 2



Rys. 3



Rozwiązanie zadania M 765. Załóżmy, że $f = g + h$, przy czym funkcja g jest okresowa o okresie $T \neq 0$, a funkcja h - okresowa o okresie $S \neq 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} 0 \neq 2ST &= (x+T+S)^2 - (x+T)^2 - (x+S)^2 + x^2 = \\ &= (g(x+T+S) + h(x+T+S)) - (g(x+T) + h(x+T)) - \\ &\quad - (g(x+S) + h(x+S)) + (g(x) + h(x)). \end{aligned}$$

Gdy skorzystamy z okresowości funkcji g i h , to okaże się natychmiast, że wyrażenie po prawej stronie jest równe 0. Wykazana sprzeczność dowodzi tezy zadania.



Rozwiązanie zadania M 766. Ponieważ $\epsilon_n \neq 1$, więc $1 + \epsilon_n + \epsilon_n^2 + \dots + \epsilon_n^{k-1} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1 - \epsilon_n)(1 + \epsilon_n + \epsilon_n^2 + \dots + \epsilon_n^{k-1}) = 0,$$

czyli wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 - \epsilon_n^k = (1 + \epsilon_n + \epsilon_n^2 + \dots + \epsilon_n^{k-1}) - (\epsilon_n + \epsilon_n^2 + \dots + \epsilon_n^k) = 0.$$

Na mocy wzoru de Moivre'a $\epsilon_n^k = (\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n})^k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$. Zatem, $\epsilon_n^k = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\cos \frac{2k\pi}{n} = 1$, zaś $\sin \frac{2k\pi}{n} = 0$, czyli gdy k jest całkowitą wielokrotnością n , co było do udowodnienia.

Dwuwymiarowy Wszechświat

Otoczająca nas przestrzeń jest wprawdzie trójwymiarowa, nic jednak nie stoi na przeszkodzie w rozważeniu modelu dwuwymiarowego Wszechświata, najprostszego z możliwych, to znaczy newtonowskiego. Ponieważ o makroskopowej budowie Wszechświata decydują siły grawitacji, zastanówmy się nad dwuwymiarowym prawem powszechnego ciążenia.

Najpierw znajdziemy potencjał grawitacyjny masy punktowej. Jest on rozwiązaniem równania Laplace'a

$$\Delta V(r) = 0$$

dla $r > 0$ (r oznacza odległość punktu od masy punktowej m). Jest to prawda niezależnie od wymiaru przestrzeni, natomiast rozwiązanie tego równania już od wymiaru zależy. Zamiast rozwiązywać równanie różniczkowe możemy sformułować problem w równoważnej, lecz prostszej postaci. Natężenie pola grawitacyjnego, $\vec{\gamma} = -\nabla V$, spełnia prawo Gaussa mówiące, że strumień pola grawitacyjnego przez zamkniętą powierzchnię jest proporcjonalny do całkowitej masy znajdującej się wewnątrz tej powierzchni. W przypadku, gdy istnieje symetria, pozwala to niekiedy obliczyć natężenie pola. Jako zamkniętą powierzchnię wybierzmy sferę o promieniu r , w środku której znajduje się masa m . Strumień pola przez powierzchnię tej sfery jest równy γS , gdzie S jest polem powierzchni. Możemy więc zapisać prawo Gaussa w postaci

$$\gamma S = km,$$

gdzie k jest pewną stałą. W dwuwymiarowym przypadku

tą sferą jest okrąg, a polem powierzchni jego długość. Tak więc

$$\gamma = \frac{km}{2\pi r}$$

w dwóch wymiarach, oraz $\gamma = \frac{km}{4\pi r^2}$ w trzech wymiarach. Kierunek natężenia pola jest radialny. Wielkość $G = \frac{k}{4\pi}$ w trójwymiarowym Wszechświecie nosi nazwę stałej grawitacji. Przez analogię możemy wprowadzić także dwuwymiarową stałą grawitacji. Znając natężenie pola, możemy łatwo znaleźć potencjał. W przypadku trójwymiarowym jest to doskonale wszystkim znany potencjał $-\frac{Gm}{r} + c$, natomiast w przypadku dwuwymiarowym otrzymujemy

$$V(r) = Gm \ln \frac{r}{r_0}.$$

Obie stałe c i r_0 są określone przez wybór miejsca, gdzie potencjał znika. Logarytmiczna zależność potencjału od odległości ma nieoczekiwaną konsekwencję; ponieważ logarytm jest funkcją nieograniczoną, druga prędkość kosmiczna w dwuwymiarowym Wszechświecie jest nieskończona. Tak więc każde ciało obdarzone masą jest laplasowską czarną dziurą!

Także potencjał elektrostatyczny w dwuwymiarowym Wszechświecie zmienia się logarytmicznie. Energia jonizacji dwuwymiarowego atomu wodoru byłaby nieskończona, zupełnie inne byłoby jego widmo. W konsekwencji całkiem inna byłaby dwuwymiarowa fizyka, chemia i biologia. Takie dwuwymiarowe życie (gdyby istniało) musiałoby rządzić się odmiennymi prawami. Ale to już zbyt daleko idące spekulacje...

Krzysztof REJMER



Rozwiązanie zadania F 424. Kiedy lina już się oderwie od pręta, prędkość i przyspieszenie tego jej fragmentu, który porusza się w górę, stają się większe od prędkości i przyspieszenia fragmentu poruszającego się w dół. W konsekwencji punkt zgięcia liny zaczyna się poruszać w górę. Równania ruchu mają postać

$$\frac{1}{2}\rho(L+x_1+x_2)\ddot{x}_1 = \frac{1}{2}\rho g(L+x_1+x_2) - T,$$

$$\frac{1}{2}\rho(L-x_1-x_2)\ddot{x}_2 = T - \frac{1}{2}\rho g(L-x_1-x_2).$$

Zgięcie liny możemy potraktować jako impuls falowy poruszający się z prędkością $\frac{1}{2}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$. Prędkość fali rozchodzącej się w strunie o gęstości ρ i naprężeniu T jest równa $\sqrt{T/\rho}$, zatem

$$T = \frac{1}{4}\rho(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2.$$

Przepiszmy równania ruchu w postaci

$$(L+R)\ddot{x}_1 = g(L+R) - \frac{1}{2}\dot{R}^2,$$

$$(L-R)\ddot{x}_2 = g(L-R) + \frac{1}{2}\dot{R}^2,$$

gdzie $R = x_1 + x_2$. Pierwsze równanie mnożymy przez $L-R$, drugie przez $L+R$ i dodajemy je stronami, skąd

$$(L^2 - R^2)\ddot{R} = \dot{R}^2 R,$$

co jest równoważne równaniu

$$(L^2 - R^2)\dot{R}^2 = \alpha^2 = \text{const}.$$

Wartość stałej α wyznaczamy z warunku początkowego

$$x_1 = x_2 = \frac{L}{2\sqrt{2}} \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{Lg}.$$

Stąd

$$\alpha = \sqrt{\frac{gL^3}{2}}.$$

Całkując równanie

$$\sqrt{L^2 - R^2}\dot{R} = \sqrt{\frac{gL^3}{2}}$$

od $t_0 = 0$ do t_k (czyli do chwili, gdy lina jest wyprostowana, a więc $R = L$) dostajemy

$$t_k = \sqrt{\frac{L}{8g}} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

(jeśli $L = 1$, to $t_k = 0,43$ s).

Położenie środka masy jest równe

$$x_{CM} = \frac{R^2}{4L} - \frac{1}{2}(x_2 - x_1),$$

czyli

$$\ddot{x}_{CM} = \frac{1}{2L}(\dot{R}^2 + R\ddot{R}) - \frac{1}{2}(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1).$$

Z równań ruchu otrzymujemy

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -2g + \frac{1}{L}(\dot{R}^2 + R\ddot{R}),$$

czyli

$$\ddot{x}_{CM} = g$$

(środek masy spada swobodnie).

Zatem

$$x_{CM} = \frac{1}{8}L + \sqrt{\frac{gL}{8}}t + \frac{1}{2}gt^2$$

(w chwili gdy lina odrywa się od pręta $x_{CM} = \frac{1}{8}L$,

$\dot{x}_{CM} = \frac{R\dot{R}}{2L} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gL}{2}}$). Znając x_{CM} oraz R wyznaczamy x_1 oraz x_2

$$x_1 = x_{CM} + \frac{R}{2} - \frac{R^2}{4L} \quad x_2 = -x_{CM} + \frac{R}{2} + \frac{R^2}{4L}$$

W chwili t_k mamy $x_{CM} = \frac{L}{16} \left(\frac{\pi^4}{4} + 1 \right) \approx 0,217L$

$$x_1 = \frac{L}{16} \left(5 + \frac{\pi^2}{4} \right) \approx 0,467L \quad (0,967L \text{ poniżej pręta})$$

$$x_2 = \frac{L}{16} \left(11 - \frac{\pi^2}{4} \right) \approx 0,533L \quad (0,033L \text{ powyżej pręta}).$$

Z równania względem x_1 oraz x_2 , a także z równania

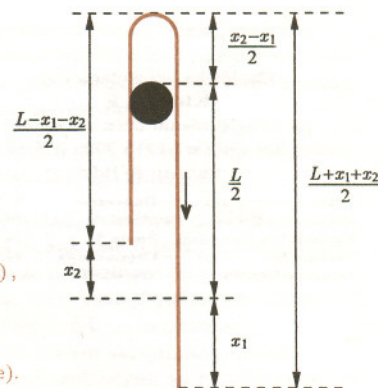
$\sqrt{L^2 - R^2} = \sqrt{\frac{gL^3}{2}}$ dostajemy

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_{CM} + \sqrt{\frac{gL}{8} - \frac{L-R}{L+R}}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_{CM} + \sqrt{\frac{gL}{8} - \frac{L+R}{L-R}},$$

gdzie $x_{CM} = \sqrt{\frac{gL}{8}} + gt$. Podstawiając wartości t_k oraz L

w miejsce R dostajemy, że \dot{x}_1 w końcowej chwili jest $\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{gL}{2}}$. Warto zauważyć, że gdy $t \rightarrow t_k$ ($R \rightarrow L$), to prędkość końca poruszającego się do góry dąży do nieskończoności, jednocześnie maleje jego masa, tak że energia kinetyczna pozostaje skończona.



Cyrkiel, linijka i Australia

Dedykuje Jerzemu Sawie

Na flagach wielu państw widnieją gwiazdy. W Australii są to gwiazdy siedmioramienne tworzące Krzyż Południa. Wydaje się to osobliwe, jako że siedmiokąta foremnego nie da się skonstruować za pomocą cyrkla i linijki. W rozmaitych książkach autorzy dowodzący niekonstruowalności siedmiokąta foremnego najczęściej odwołują się do raczej zaawansowanego twierdzenia Gaussa. Tymczasem można tę niekonstruowalność wykazać znacznie bardziej elementarnie. Spróbujemy się o tym przekonać.

Niech \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{C} oznaczają odpowiednio zbiór liczb wymiernych, rzeczywistych, zespolonych. Zbiór $K \subset \mathbf{C}$ jest *ciałem*, jeśli każde z działań $+$, $-$, \cdot , $:$ wykonane na dowolnych dwóch liczbach z K ma wynik w K (pod warunkiem, że dzielnik jest różny od zera). Na przykład, \mathbf{Q} jest ciałem. Proste ćwiczenie wykazuje, że jeśli $K \subset \mathbf{R}$ jest ciałem, $c \in K$, $c > 0$, $\sqrt{c} \notin K$, to $K(\sqrt{c}) = \{a + b\sqrt{c} : a, b \in K\}$ też jest ciałem. Opiszemy teraz, na czym polega konstrukcja za pomocą cyrkla i linijki. Na początku dane są dwa punkty, które oznaczmy jako $(0, 0)$ i $(1, 0)$. Punkty te uważamy za skonstruowane, wyznaczają one pewien standardowy układ współrzędnych na płaszczyźnie. Przypuśćmy indukcyjnie, że skonstruowaliśmy pewien skończony zbiór P punktów płaszczyzny. Nowy punkt konstruujemy przecinając dwie linie, z których każda jest prostą prowadzoną przez dwa różne punkty z P lub okręgiem o środku w zbiorze P i o promieniu równym odległości między dwoma różnymi punktami zbioru P .

Powiemy, że liczba rzeczywista jest konstruowalna, jeśli można skonstruować punkt, który ma ją za współrzędną. Fakt, że układ dwóch równań, z których każde jest liniowe lub kwadratowe, można rozwiązać przy użyciu czterech działań i $\sqrt{\quad}$, znajduje odzwierciedlenie w następującym stwierdzeniu: *Jeśli liczba rzeczywista x jest konstruowalna, to istnieje taki skończony ciąg ciał*

$$(*) \quad K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n,$$

że $K_{i+1} = K_i(\sqrt{c_i})$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$, $K_0 = \mathbf{Q}$, $x \in K_n$. Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne, które jednak tu nie będzie nam potrzebne. Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie. *Jeśli wielomian $x^3 + px + q$ ($p, q \in \mathbf{Q}$) nie ma pierwiastków wymiernych, to żaden jego pierwiastek rzeczywisty nie jest konstruowalny.*

Dowód. Przypuśćmy, że jest przeciwnie i równanie

$$(**) \quad x^3 + px + q = 0$$

Wizualizacja matematyki



ma pewne rozwiązanie rzeczywiste, konstruowalne i że K_n w ciągu (*) jest najmniejszym ciałem zawierającym jakiegokolwiek takie rozwiązanie. Oznaczmy je przez $x = a + b\sqrt{c}$, gdzie $a, b, c \in K_{n-1}$, $c > 0$, $\sqrt{c} \notin K_{n-1}$. Równanie (**) przepiszemy w postaci

$$A + B\sqrt{c} = 0,$$

gdzie $A = a^3 + 3ab^2c + pa + q$, $B = 3a^2b + b^3c + pb$. Oczywiście, $A, B \in K_{n-1}$. Gdyby $B \neq 0$, to $\sqrt{c} = -\frac{A}{B} \in K_{n-1}$. Zatem (i) $B = 0$ oraz (ii) $A = 0$. Z (i) wyznaczamy $b^2c = -3a^2 - p$ i podstawiamy do (ii) otrzymując $-8a^3 - 2pa + q = 0$. Liczba $y = -2a$ należy do K_{n-1} i spełnia równanie (**), co przeczy minimalności K_n .

Powróćmy teraz do Australii. Założymy, że wierzchołki naszego siedmiokąta są pierwiastkami wielomianu $z^7 - 1$ w \mathbf{C} . Jeśli $z^7 = 1$ oraz $z \neq 1$, to

$$0 = \frac{z^7 - 1}{z - 1} = \sum_{k=0}^6 z^k = 1 + \sum_{k=1}^3 (z^k + \bar{z}^k) = -1 - 2r + r^2 + r^3,$$

gdzie $r = z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$. Podstawiając $r = \frac{x-1}{3}$ otrzymujemy, że $x^3 - 21x - 7 = 0$. Dzielniki wyrazu wolnego wielomianu z lewej strony tego równania nie są jego pierwiastkami, więc nie ma on pierwiastków wymiernych. Z Twierdzenia 1 wynika, że liczba x nie jest konstruowalna, a zatem $\text{Re}(z) = \frac{x-1}{6}$ też nie jest konstruowalna (dlaczego?) i punktu z nie można skonstruować.

Dariusz MIKLASZEWSKI