

## SPIS TREŚCI NUMERU 2(261)

O aryjskiej geometrii <i>Mieczysław Karpinić</i>	str. 1
Jak wyznaczyć stałą grawitacji <i>Stanisław Bednarek</i>	str. 2
Patrz w niebo	str. 4
Matematyczne miniatury <i>Jarosław Górnicki</i>	str. 5
Czy znamy wiek Wszechświata <i>Tomasz Kwast</i>	str. 6
Mała Delta	str. 8
Zadania	str.10
Klub 44	str.11
Epsilon	str.17

### W następnym numerze:

Nagroda Nobla z fizyki w 1995 r.

„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego, wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej. Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

#### Komitet Redakcyjny:

Andrzej Białynicki-Birula  
 Bogdan Cichoński  
 Jan A. Gaj

Tomasz Hofmokl  
 Marta Kicińska-Habior  
 – przewodnicząca

Krzysztof Maślanka  
 Andrzej Mąkowski  
 – wiceprzewodniczący

Andrzej Pelczar  
 Zbigniew Płochocki  
 Zdzisław Pogoda

Michał Różyczka  
 Konrad Rudnicki  
 Zbigniew Semadeni

Grzegorz Sitarski  
 Mieczysław Subotowicz  
 Andrzej Szymacha

Andrzej Woszczyk  
 Wacław Zawadowski  
 Wiesław Żelazko

#### Redaguje kolegium w składzie:

Wiktor Bartol  
 Krzysztof Biesaga  
 Jan Kalinowski – z-ca red. nac.

Krzysztof Rejmer  
 Anna Rudnik  
 Paweł Strzelecki

Joanna Udalska  
 Adres Redakcji:  
 ul. Smyczkowa 5/7, 02-678 Warszawa

tel. 43-02-43 wewn. 21  
 PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano  
 w Drukarni Naukowo-Technicznej  
 w Warszawie, ul. Mińska 65

Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja

#### WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)

Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące.** Cena jednego numeru w 1996 roku wynosi 2 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1996 r. 4 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

**Uwaga!** Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

#### WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.

2. Cena prenumeraty na II kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.

3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:

– a) jednostki kolportażowe „RUCH” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;

– b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnieść na konto „RUCH” S.A. Oddział Warszawa w PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. 8<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>;

dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską”.

4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH” S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.

5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:

do 20 XI na I kwartał roku następnego,

do 20 II na II kwartał,

do 20 V na III kwartał,

do 20 VIII na IV kwartał.

6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 w. 2442, 2366.

W czasie wojny udało mi się zakupić książkę Theodora Vahlena „Abstrakte Geometrie” – podtytuł „Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Geometrie”.

O ile mogę to ocenić, nie zawiera ona rewelacji naukowych, ale przedmowa do niej jest znamienym śladem niemieckiej „kultury matematycznej” owych ponurych lat.

Autor pisze, że bodźca do nowego wydania (pierwsze było w 1905 r.) dodała mu walka przeciwko teorii względności, niesłusznie wykorzystującej nieeuklidesową geometrię. „Nieeuklidesowa geometria jest nauką matematyczną, toteż różni się od teorii względności swą niepodważalnie ścisłą budową.” – I dalej pisze Vahlen, że „Nieeuklidesowa geometria, jak geometria w ogóle, jest tworem aryjskiego ducha, który, jak żaden inny, ma zdolność jasnego ujmowania skomplikowanych przestrzennych związków.”

A w zakończeniu oznajmia: „Pierwsze wydanie dedykowałem badaczom zasłużonym dla rozwoju nieeuklidesowej geometrii, Fryderykowi Englowi i Pawłowi Stäckelowi. Drugie poświęcam pamięci twórców nieeuklidesowej geometrii, J. Bolyaia i N. Łobaczewskiego, wyrażając tym więź kulturalną naszych narodów, do której przyczyniania się właśnie matematyka jest szczególnie powołana. – Berlin, maj 1940.”

Czytałem te zdania, gdy nadchodziły wieści spod Stalingradu i wciąż żywo pamiętam radość, że tak prędko okazało się, jaka jest to więź i jakim jest zaprzeczeniem kultury.

## Deutsche Mathematik

Im Auftrage der Deutschen Forschungsgemeinschaft herausgegeben von Theodor Vahlen

2. Heft

# Abstrakte Geometrie

Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen  
und Nicht-Euklidischen Geometrie

Von

Theodor Vahlen

Mit 92 Abbildungen im Text  
Zweite, neubearbeitete Auflage

Verlag von S. Hirzel in Leipzig

# Jak wyznaczyć stałą grawitacji?

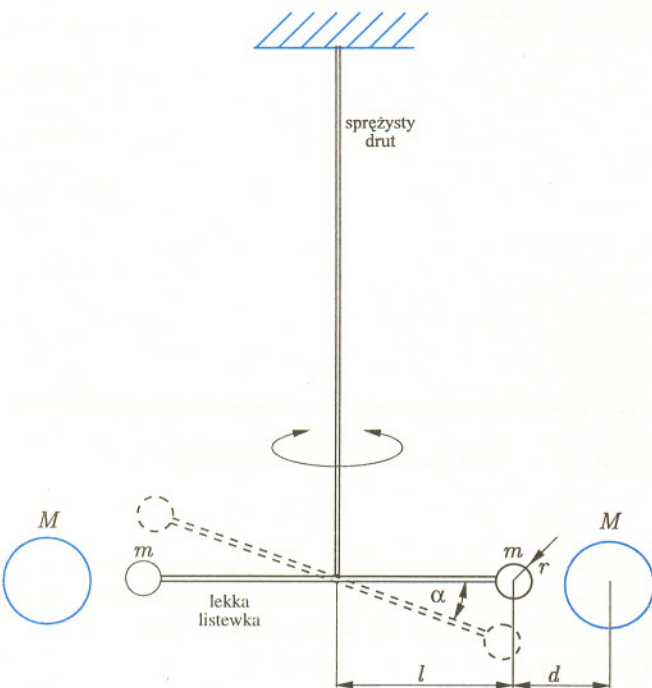
Stanisław BEDNAREK

Oddziaływanie grawitacyjne jest zapewne najbardziej uniwersalnym i tajemniczym oddziaływaniem w przyrodzie. Jego natura i związki z innymi rodzajami oddziaływań są wciąż jeszcze nie do końca wyjaśnione. Z lekcji fizyki pamiętamy, że każde dwa ciała przyciągają się wzajemnie siłą grawitacji. Dla ciał punktowych albo dla ciał o masie rozłożonej kulisto symetrycznie wartość  $F_g$  tej siły wyraża się wzorem podanym przez Newtona

$$(1) \quad F_g = \frac{GMm}{x^2},$$

w którym  $M$  i  $m$  są masami ciał,  $x$  – odległością między ich środkami,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$  – stałą grawitacji. Bardzo mała wartość tej stałej powoduje, że zaobserwowanie skutków działania sił grawitacji między ciałami znajdującymi się w naszym najbliższym otoczeniu, np. między leżącymi na stole książkami, jest bardzo trudne. W ciągu ostatnich 200 lat fizycy poświęcili wiele wysiłku coraz dokładniejszemu wyznaczaniu wartości stałej  $G$ . Okazuje się jednak, że dobierając odpowiednie warunki można prostymi środkami wykonać doświadczenie pozwalające przynajmniej na oszacowanie wartości tej stałej.

Rozpatrzmy w tym celu układ przedstawiony na rysunku 1.



Rys. 1

Dwie jednakowe kulki o masach  $m$  każda umieszczone są na końcach lekkiej i sztywnej listewki zawieszony

w połowie długości na pionowym sprężystym drucie. Układ ten to tzw. wahadło torsyjne. Po skróceniu listewki o niewielki kąt wykonuje ono drgania harmoniczne proste o okresie  $T_1$  danym wzorem

$$(2) \quad T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M_{ks}}}$$

$M_{ks}$  oznacza tutaj moment kierujący zdefiniowany jako stosunek momentu sił sprężystości skręconego drutu  $M_s$  do kąta odchylenia listewki  $\alpha$

$$(3) \quad M_{ks} = \frac{M_s}{\alpha},$$

$I$  jest momentem bezwładności układu względem osi drutu.

Pomijając masę drutu i listewki oraz korzystając ze wzoru Steinera obliczamy moment bezwładności wahadła

$$(4) \quad I = 2m(l^2 + \frac{2}{5}r^2),$$

gdzie  $l$  oznacza odległość środka kulki od osi drutu, a  $r$  – promień kulki.

Jeżeli naprzeciw położenia równowagi kulek zostaną umieszczone dwie nieruchome kulki o masach  $M$  każda, to wskutek ich przyciągania grawitacyjnego z kulkami powstanie dodatkowy moment sił  $M_g$ , a okres drgań  $T_2$  będzie krótszy i wyrazi się wzorem

$$(5) \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M_{ks} + M_{kg}}}$$

w którym

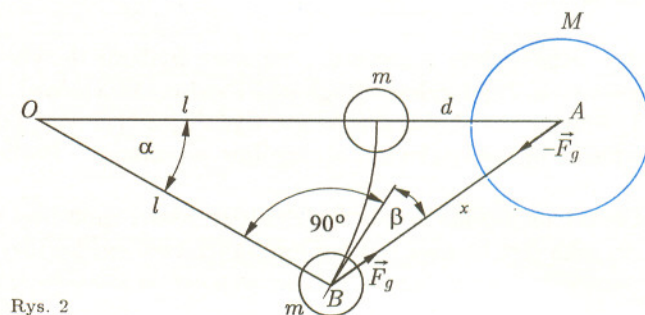
$$(6) \quad M_{kg} = \frac{M_g}{\alpha}.$$

Podnieśmy równania (2) i (5) do potęgi minus drugiej i odejmijmy stronami. Otrzymamy wówczas

$$(7) \quad \frac{M_{kg}}{I} = 4\pi^2 \left( \frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2} \right).$$

W ten sposób uniezależniliśmy się od kłopotliwego wyznaczenia momentu kierującego sił sprężystości drutu  $M_{ks}$ .

Zajmijmy się teraz momentem kierującym sił grawitacji  $M_{kg}$ .



Rys. 2

Na podstawie rysunku 2 oraz wzorów (1) i (6) otrzymujemy

$$(8) \quad M_{kg} = \frac{2}{\alpha} \frac{GMm}{x^2} l \cos \beta.$$

Zastosujemy twierdzenie sinusów dla trójkąta  $OAB$

$$(9) \quad \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{l+d}{\sin(90^\circ + \beta)},$$

gdzie  $d$  oznacza odległość między środkami kul ruchomych i nieruchomych w położeniu równowagi. Uwzględniając, że  $\sin(90^\circ + \beta) = \cos \beta$ , ze wzoru (9) otrzymujemy

$$(10) \quad \cos \beta = \frac{l+d}{x} \sin \alpha$$

i podstawiamy to wyrażenie do wzoru (8). Wówczas

$$(11) \quad M_{kg} = \frac{2GMml(l+d)}{x^3} \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Ponieważ kąt  $\alpha$  jest mały, możemy przyjąć przybliżenia  $\sin \alpha \approx \alpha$  oraz  $x \approx d$ , co bardzo uprości dalsze obliczenia. Wtedy

$$(12) \quad M_{kg} \approx \frac{2GMml(l+d)}{d^3}.$$

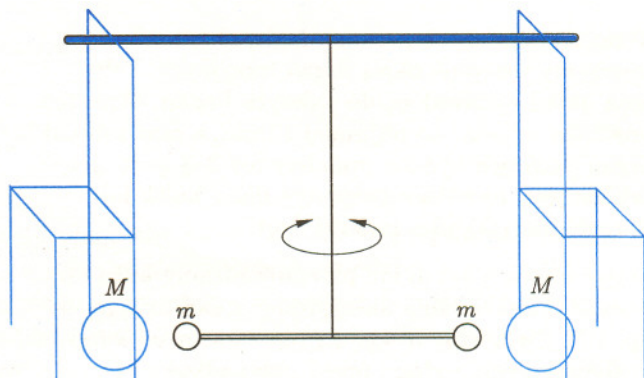
Pozostało nam jeszcze podstawienie otrzymanych wzorów na  $M_{kg}$  oraz  $I$  – wzory (11) i (4) – do równania (7) i wyznaczenie stąd  $G$ . W wyniku tego otrzymujemy

$$(13) \quad G \approx \frac{4\pi^2 d^3 (l^2 + \frac{2}{5} r^2)}{Ml(l+d)} \left( \frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2} \right).$$

Warto zauważyć, że do wyznaczenia  $G$  nie musimy znać wartości mas  $m$  kulek zamocowanych na listewce.

Wygląd układu pomiarowego przedstawia rysunek 3. Kij od szczotki albo inny sztywny pręt o grubości 1,5–2 cm i długości około 1,5 m przywiązujemy do oparć dwóch krzeseł rozstawionych na odległość około 1 m. Drewnianą listewkę o grubości 6–8 mm i długości 50–70 cm przywiązujemy w połowie długości do pręta za pomocą kawałka sprężystego drutu o średnicy 0,3–0,5 mm i długości 60–80 cm. Dobrze nadaje się do tego drut ze starego opornika drutowego albo cienka struna do instrumentów muzycznych. Na końce listewki wciskamy uformowane z plasteliny kule o promieniu 3–4 cm. Jeżeli jeden koniec listewki opada w dół, to dodajemy nieco plasteliny do kuli na przeciwnym końcu, tak żeby listewka przyjęła pozycję poziomą.

Zrównoważoną listewkę pozostawiamy w spokoju, aż ustaną wszystkie drgania układu, w szczególności drgania torsyjne spowodowane przypadkowymi skręceniami drutu. Może to trwać kilkadziesiąt minut, a nawet dłużej. Następnie bardzo ostrożnie skręcamy listewkę w płaszczyźnie poziomej o kąt 15–20°. Jeżeli oprócz drgań torsyjnych wzbudziły się inne drgania, np. wahania w płaszczyźnie pionowej, to czekamy, aż ulegną one wytlumieniu.



Rys. 3

W artykule Stanisława Bednarka „Jak wyznaczyć stałą grawitacji?” omawiany jest problem pomiaru wartości stałej grawitacji. Chociaż upłynęło ponad 300 lat od sformułowania teorii grawitacji przez Newtona, wartość tej stałej nie jest znana ze zbyt dużą dokładnością. Obecnie akceptowana wartość  $G = 6,67259(85) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  (błąd wynosi 0,128 promila) jest oparta na pomiarach przeprowadzonych 15 lat temu przez Gabriela Luthera z Laboratorium w Los Alamos. Dla porównania, stała Fermiego  $G_F$  oddziaływań słabych (odpowiedzialnych np. za rozpad  $\beta$  neutronu) jest znana z lepszą precyzją – jej wartość wynosi  $G_F/(\hbar c)^3 = 1,16639(2) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ , a błąd jest 0,02 promila.

W 1995 r. na konferencji Amerykańskiego Towarzystwa Fizycznego i Amerykańskiego Związku Nauczycieli Fizyki przedstawiono wyniki trzech nowych niezależnych pomiarów stałej grawitacji.

Tim Armstrong i Mark Fitzgerald z Laboratorium Standardów Pomiarowych w Nowej Zelandii uzyskali wynik 6,6659, a więc 0,1% poniżej obecnie akceptowanej wartości. Grupa z Uniwersytetu w Wuppertalu, RFN, kierowana przez Heinricha Meyera, otrzymała wynik 6,6685 – również poniżej obecnej wartości. Trzeci wynik, uzyskany przez grupę pod kierunkiem Winfrieda Michaelisa z Federalnego Instytutu Fizyko-Technicznego w Brunzwicku, jest wyższy i wynosi 6,71540.

Jak na pomiar wartości jednej z fundamentalnych stałych przyrody sytuacja nie jest zadowalająca. Niestety, na razie nie potrafimy wyjaśnić rozbieżności uzyskanych wyników. Być może są one spowodowane wpływem obiektów znajdujących się w otoczeniu układów pomiarowych. Gabriel Luther wspomina, że gdy przeprowadzał pomiar blisko ściany zewnętrznej laboratorium, to padający na zewnątrz deszcz miał wpływ na wynik pomiarów.

Teraz za pomocą stopera, najlepiej elektronicznego, mierzymy wstępnie okres drgań torsyjnych. Żeby nasz układ nadawał się do dalszych badań, okres ten powinien wynosić co najmniej 1 min., a czas zaniku drgań powinien być nie mniejszy niż 2–3 godz. Jeżeli tak nie jest, to należy zwiększyć masy kulek lub długość listewki albo zmienić drut.

Mając odpowiedni układ przeprowadzamy kilka razy pomiar czasu trwania dużej liczby drgań torsyjnych, np. 100. Zwracamy uwagę na powtarzalność wyników i zabezpieczenie układu przed przypadkowymi zakłóceniami – podmuchami powietrza i wstrząsami. Ponieważ pomiary te będą trwały kilka godzin, dobrze jest skorzystać z pomocy innej osoby mierzącej czas na zmianę. Upewniwszy się o powtarzalności wyników i braku zakłóceń, obliczamy średni okres drgań  $T_1$ .

Następnie w pobliżu plastelinowych kul, znajdujących się w położeniu równowagi, należy umieścić na podłodze lub na odpowiednich podstawkach dwa jednakowe ciała o masach co najmniej kilku kg każde.

Najlepiej, żeby były to pojedyncze stalowe kule. Na przykład, kule używane w sporcie mają zwykle masę 5 lub 7,5 kg. Zamiast nich możemy wykorzystać odpowiednie odważniki, a w ostateczności kilka cegieł lub kamieni. Podobnie jak poprzednio, powtarzamy pomiary i obliczamy średni okres drgań  $T_2$ . Jeżeli okaże się on o kilka setnych sekundy krótszy od  $T_1$ , to mamy prawo do umiarkowanego optymizmu.

Pozostaje jeszcze określenie wartości mas  $M$  i zmierzenie występujących we wzorze (13) wielkości  $d$ ,  $l$ ,  $r$  oraz obliczenie wartości  $G$ . Ze względu na przyjęte uproszczenia i niedokładność użytych przyrządów otrzymanie prawidłowego dla  $G$  wyniku rzędu wielkości  $10^{-11}$  możemy uznać za sukces naszego doświadczenia.

Tym, którzy chcieliby dowiedzieć się więcej o metodach i historii wyznaczania stałej grawitacji, warto polecić fragment pasjonującej książki A.K. Wróblewskiego i J.A. Zakrzewskiego *Wstęp do fizyki*, T. 2, cz. 2, s. 317–330.

## Patrz w niebo

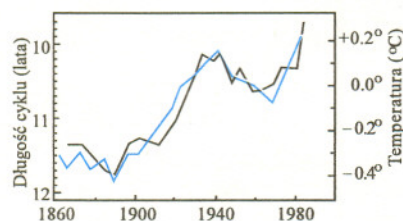
Od dawna podejmowane są próby wykrycia rozmaitych subtelnych oddziaływań Słońca na Ziemię. Najważniejsze oddziaływanie znamy: Słońce nas nieustannie ogrzewa i oświetla. Nasuwają się jednak pytania, np. czy na tym koniec, albo czy to ogrzewanie i oświetlanie jest niezmiennie.

Wiadomo, że na te pytania odpowiedzi są negatywne. Słońce przede wszystkim przechodzi 11-letni cykl aktywności (a jeśli śledzić biegunowość pola magnetycznego w plamach, to 22-letni). Czy wywołuje to jakieś efekty na Ziemi? Oczywiście, np. wyrzucane ze Słońca w okresie maksimum aktywności strumienie szybkich cząstek powodują wzrost występowania zórz polarnych i burz magnetycznych. Prawdopodobnie w rytmie cyklu słonecznego zmienia się też tempo przyrastania pni drzewnych, ale wszystko to są efekty słabo przemawiające do wyobraźni przeciętnego człowieka, który chciałby zapewne wiedzieć, czy plamy słoneczne mają wpływ na klimat lub na zdrowie ludzi. Niestety, aktywność słoneczna śledzona jest zbyt krótko, a dane o klimacie w przeszłości są wysoce niekompletne. Wreszcie nie całkiem na poważnie można doszukiwać się wpływu Słońca na historię powszechną. Na przykład, maksima aktywności były około 1789 r. (Rewolucja Francuska), 1848 r. (Wiosna Ludów), 1917 r. (Rewolucja Październikowa), 1939 r. (wybuch II wojny światowej), ale wybuch I wojny (1914 r.) przypadł na minimum. Szwejk był zdania, że plamy mają jednak znaczenie, bo gdy kiedyś jedna się pojawiła, to jeszcze tego samego dnia został obity w pewnej piwiarni.

Na tym tle wręcz niezwykle jest dokonane kilka lat temu odkrycie duńskich meteorologów. Znaleźli oni mianowicie związek między średnią temperaturą atmosfery a długością cyklu słonecznego. Cykle te bowiem średnio wynoszą 11 lat, ale ich zakres wynosi od 9,7 lat do 11,8 lat. Okazało się, że zachodzi nadspodziewanie silna korelacja: im krótszy cykl, tym jest cieplej (rys.) – przynajmniej w ciągu ostatnich 200 lat. Tu warto przypomnieć, że im bardziej Słońce jest zaplamione, tym więcej wysyła energii, gdyż wprawdzie plamy blokują część emitowanego światła, ale jednocześnie towarzyszące plamom pochodnie pokrywają ten ubytek energii z nadwyżką. Może właśnie dlatego zachodzi odkryta korelacja. Sprawa jest zbyt nowa, by wyciągać ostateczne wnioski, a samo zjawisko może mieć duże znaczenie w badaniach np. ewentualnego efektu cieplarnianego wywołanego działalnością człowieka.

Daty maksimum słonecznych:

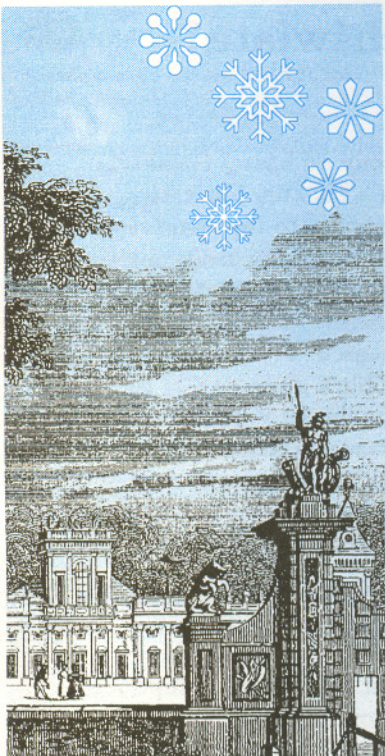
1750  
1760  
1770  
1780  
1790  
1803  
1817  
1829  
1839  
1849  
1860  
1871  
1882  
1893  
1907  
1918  
1929  
1939  
1949  
1959  
1970  
1980  
1991



Korelacja temperatury atmosfery (linia czarna) z długością cyklu słonecznego (linia kolorowa).

Tomasz KWAST

Jarosław GÓRNICKI

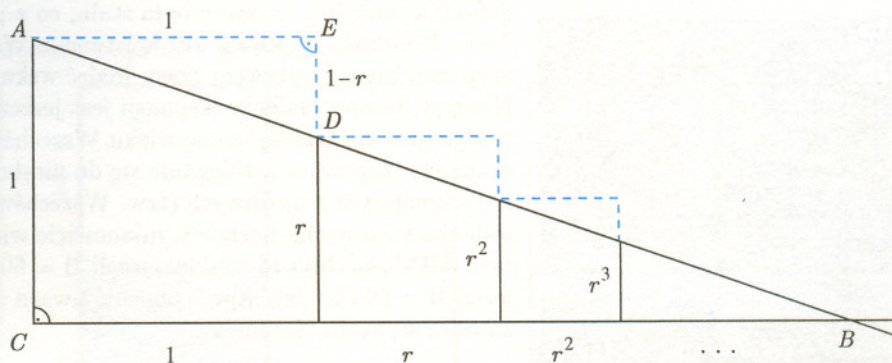


Matematyka jest nauką abstrakcyjną, więc każdy, kto chce się jej nauczyć, stara się ją zrozumieć (wyobrazić) w sobie właściwy sposób. Między innymi dzięki temu z biegiem lat powstają różne interpretacje, uzasadnienia poszczególnych faktów. Niektóre z tych uzasadnień wydają się bardziej przekonujące od innych. Oto kilka przykładów.

## Przykład 1.

Obliczenie sumy wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie  $q \in (0, 1)$  nie nastęrcza trudności. Stosowny wzór znamy ze szkoły. Oto jego geometryczne uzasadnienie (patrz rys. 1). Z podobieństwa trójkątów  $ABC$  i  $DAE$  mamy

$$(*) \quad \frac{1 + r + r^2 + \dots}{1} = \frac{1}{1 - r}, \quad r \in (0, 1).$$



Rys. 1

Korzystając z tego wzoru możemy obliczyć wartość sumy

$$r + 2r^2 + 3r^3 + \dots,$$

gdzie  $r \in (0, 1)$ . W tym celu wystarczy zrózniczkować wzór (\*) stronami... Sumę, o której tu mowa, można obliczyć korzystając z jej geometrycznej interpretacji. Przedstawia ona pola prostokątów z rysunku 2. Na te ostatnie można popatrzeć inaczej – patrz rys. 3. Zrozumiałe stają się wtedy przeliczenia

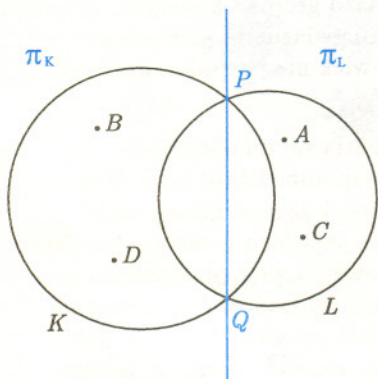
$$\sum_{k=1}^{\infty} k r^k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} r^i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{1 - r} = \frac{r}{(1 - r)^2}.$$



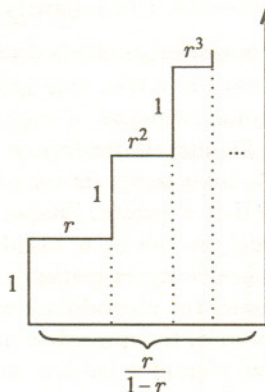
## Rozwiązanie zadania M 762.

Oznaczmy przez  $X$  punkt przecięcia przekątnych czworokąta  $ABCD$ . Koła są figurami wypukłymi, więc odcinki  $\overline{BD}$  i  $\overline{AC}$  są zawarte odpowiednio w  $K$  i  $L$ , a zatem  $X \in K \cap L \neq \emptyset$ .

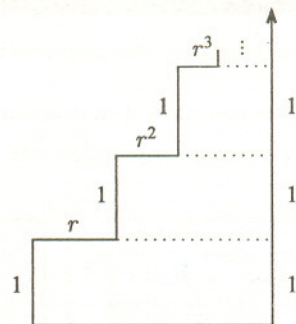
Jeśli  $K = L$ , to teza zadania jest oczywista. Załóżmy przeto, że  $K \neq L$  i teza zadania nie jest spełniona. Oznaczmy przez  $P$  i  $Q$  punkty wspólne okręgów brzegowych kół  $K$  i  $L$ . Następnie rozetnijmy płaszczyznę prostą  $PQ$  na dwie rozłączne półpłaszczyzny otwarte  $\pi_K$  i  $\pi_L$ , w ten sposób, że  $\pi_K \supset K \setminus L \supset \{B, D\}$ , natomiast  $\pi_L \supset L \setminus K \supset \{A, C\}$ .



Półpłaszczyzny są wypukłe, więc  $\pi_K$  zawiera odcinek  $\overline{BD}$ ,  $\pi_L$  zaś – odcinek  $\overline{AC}$ . Zatem każda z półpłaszczyzn zawiera punkt wspólny obu odcinków,  $X$ . To jednak przeczy rozłączności  $\pi_K$  i  $\pi_L$ , dowodząc jednocześnie słuszności tezy zadania.



Rys. 2



Rys. 3

ciąg dalszy na str. 7

# Czy znamy wiek Wszechświata?

Tomasz KWAST

Odległe galaktyki rozbiegają się we wszystkie strony od naszej Galaktyki z prędkością wprost proporcjonalną do odległości – fakt ten jest treścią tzw. prawa Hubble’a. Nie wynika z tego bynajmniej, że to my znajdujemy się w centrum tego rozbiegania się. To samo zjawisko widziałby każdy mieszkaniec dowolnej innej galaktyki i miałby wrażenie, że znajduje się w jakimś „centrum”. Natomiast wynika z tego, że kiedyś w odległej przeszłości wszystkie galaktyki musiały znajdować się „praktycznie w jednym miejscu” i – co więcej – można łatwo oszacować, kiedy to było. Skoro prawo Hubble’a głosi, że  $v = Hr$  ( $H$  jest tzw. stałą Hubble’a – współczynnikiem proporcjonalności w prawie Hubble’a), to jasne, że na przebycie drogi  $r$  z prędkością  $v$  każda galaktyka potrzebowała  $r/v = H^{-1}$  czasu. Stałą Hubble’a należy wyznaczyć z obserwacji, co zresztą nie jest proste, czego dowodzi fakt, że sam Hubble ocenił ją na 500 (km/s)/Mpc, podczas gdy obecnie przyjmuje się raczej wartość zbliżoną do 50 (km/s)/Mpc.

Tak określony wiek Wszechświata każdy może sobie bez trudu obliczyć, wyczuwamy jednak, że jest to ocena nie najlepsza. Tak by było, gdyby prędkość galaktyki na całej drodze  $r$  była stała, co z pewnością nie może być prawdą. Jeżeli Wszechświat zaczął swoje istnienie Wielkim Wybuchem, tempo jego ekspansji musi z upływem czasu maleć wskutek powszechnej grawitacji. Niestety, tempo malenia ekspansji jest jeszcze trudniej wyznaczyć i dlatego tradycyjnie podaje się ocenę wieku Wszechświata dla sytuacji, w której jego ekspansja zapewnia rozbieganie się do nieskończoności, aczkolwiek w tempie najwolniejszym z możliwych (tzw. Wszechświat płaski). Niewiele to zmienia, jeśli chodzi o wynik liczbowy, mianowicie wiek Wszechświata wynosi wtedy  $t_0 = \frac{2}{3}H^{-1}$ , co daje 13 mld lat, jeżeli  $H = 50$  (km/s)/Mpc, albo 8 mld lat, jeżeli  $H = 80$  (km/s)/Mpc – obecnie uważa się, że w takich właśnie granicach zawiera się stała Hubble’a.

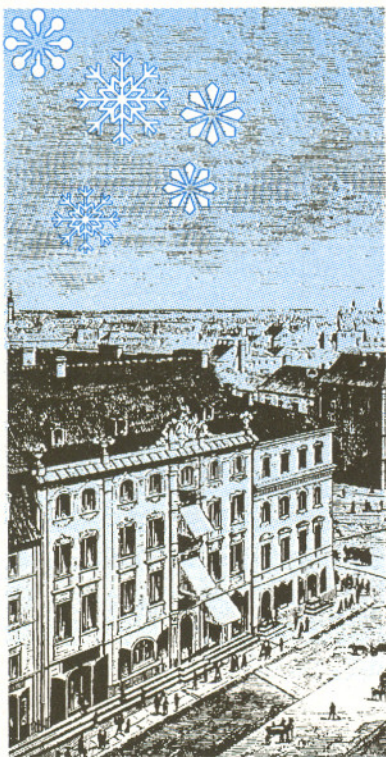
I wszystko byłoby w porządku, gdyby nie nasza wiedza o gwiazdach. Najstarszymi w Galaktyce gwiazdami są te, które tworzą gromady kuliste. Mianowicie, przy Wielkim Wybuchu powstał wodór i hel (teoria określa ich obfitość) i śladowe ilości litu, natomiast wszystkie pierwiastki cięższe zostały wyprodukowane we wnętrzach gwiazd pierwszego pokolenia. Najmasywniejsze z nich, a więc ewoluujące najszybciej, eksplodowały już dawno jako supernowe rozsiewając w przestrzeni produkty własnych przemian jądrowych. Z tak wzbogaconej materii międzygwiazdowej powstały kolejne gwiazdy o bardziej urozmaiconym składzie chemicznym, wśród nich także Słońce. Tak czy inaczej naturalne jest, że podjęto próby oceny wieku gwiazd gromad kulistych, ponieważ ich skład chemiczny dowodzi, że są właśnie owymi gwiazdami pierwszego pokolenia, przy czym – to chyba oczywiste – ich wiek nie powinien być większy od wieku Wszechświata. I tu pojawiły się kłopoty.

Gwiazdy żyjące kosztem „spalania” wodoru układają się na diagramie Hertzsprunga–Russella w tzw. ciąg główny. Jak wspomnieliśmy, najkrócej żyją gwiazdy najmasywniejsze, a więc najjaśniejsze, leżące w górnej części ciągu głównego. Po zużyciu wodoru w centralnych częściach gwiazda puchnie, co prowadzi do spadku temperatury powierzchniowej, a więc przesunięcia się jej na diagramie H–R w prawo. Znając z obserwacji jej jasność i temperaturę, a z teorii jej model, można by w zasadzie już ocenić jej wiek. Niestety, jest to taki właśnie okres w życiu gwiazdy, dla którego wszelkie oceny są bardzo niepewne. Wcześniej też niepodobna wieku gwiazdy ocenić, ponieważ dopóki ma ona w centrum wodór, to wprawdzie dobrze znamy jej model, ale sama gwiazda bardzo długo tkwi niemal w jednym miejscu diagramu H–R. W rezultacie najpewniejszym wskaźnikiem wieku – za to całej gromady – pozostaje punkt, w którym ciąg główny gromady odgina się w prawo, bo odpowiada on zarówno dobrze znanemu modelowi gwiazdy, jak i dobrze określone momentowi jej życia.



## Rozwiązanie zadania F 421.

Równanie (3) jest niepoprawne. Toczenie się bez poślizgu można traktować jako obrót wokół punktu podparcia (chwilowego), gdyż spoczywa on w inercyjnym układzie odniesienia. W naszym przypadku punkt podparcia ślizga się po płaszczyźnie. Jednak nawet wtedy, gdy można mówić o chwilowym obrocie wokół punktu podparcia, ruch obrotowy opisujemy jednym równaniem: albo jako obrót względem środka masy, albo jako obrót wokół punktu podparcia. Ruch pręta poprawnie opisują równania (1) i (2) uzupełnione związkiem  $z = R \cos \theta$ .



## Rozwiązanie zadania F 422.

Ponieważ na oba ciała nie działa siła tarcia, ich prędkości po drugiej stronie doliny są jednakowe i równe  $v_0$  (zasada zachowania energii). Na opadającym fragmencie zbrocza składowa pozioma prędkości ciała staje się większa od  $v_0$ , gdyż siła reakcji podłoża  $N$  ma poziomą składową przyspieszającą ciało. Na stoku podnoszącym się w górę pozioma składowa spowalnia ciało (do prędkości  $v_0$ ). Ponieważ ciało  $A$  w każdej chwili ma składową prędkości większą od (lub co najmniej równą)  $v_0$ , czyli większą lub równą prędkości ciała  $B$ , to ciało  $A$  szybciej znajdzie się po drugiej stronie doliny.



**Rozwiązanie zadania M 763.** Tak. Niech, na przykład,  $P(Z = -2) = P(Z = -1) = P(Z = 1) = P(Z = 2) = 1/4$ . Połóżmy  $f(x) = |x|$  i

$$g(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} x/|x| & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Czytelnik bez kłopotu sprawdzi, że zmienne losowe  $f(Z)$  i  $g(Z)$  są niezależne. Płyńe stąd wniosek, że zdarzenia niezależne mogą mieć wspólną przyczynę.

Należy więc diagram H-R obserwowanej gromady porównać z teoretycznymi diagramami odpowiadającymi rozmaitym wiekom gromady i wybrać najlepiej pasujący. Oczywiście, jest przy tym dużo więcej pracy, trzeba bowiem wyznaczyć odległość gromady, uwzględnić pochłanianie światła w materii międzygwiazdowej, wyznaczyć skład chemiczny gwiazd gromady, powyznaczać ich masy (wszystko po to, by potem wybierać spośród właściwych modeli teoretycznych) itd. Taką dobrze zbadaną gromadą kulistą stała się ostatnio M92. Krótko mówiąc, jej wiek wyznaczony przy całej najlepszej wiedzy okazał się równy  $15,8 \pm 2,1$  mld lat! Nie jest to wynik drastycznie różny od otrzymanego na podstawie stałej Hubble'a, jednak zbyt duży i to na pewno nie da spokoju badaczom. A sprawa jest warta dalszych badań, ponieważ w tej chwili wiadomo, że gdzieś są luki w naszej wiedzy, natomiast uzgodnienie ocen wieku Wszechświata przysporzyłoby tej wiedzy po prostu solidności.



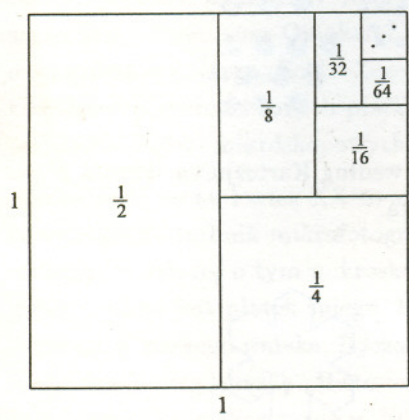
## Matematyczne miniatury

### Przykład 2

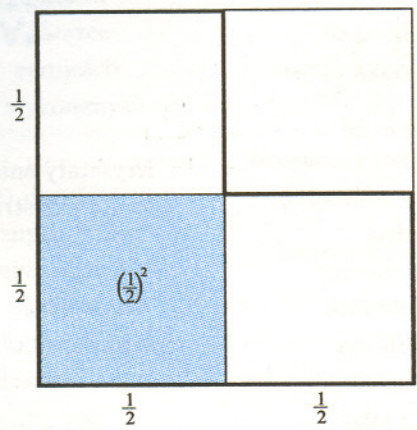
W konkretnej sytuacji nietrudno przekonać się, że

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1.$$

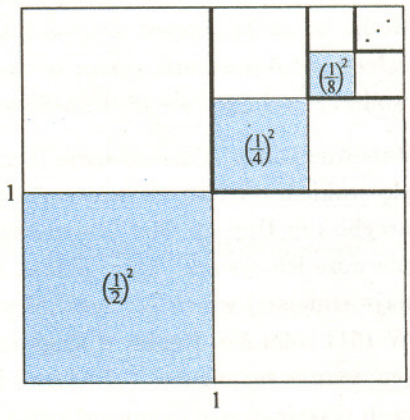
Możemy popatrzeć na rysunek 1.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czy równie prosto możemy obliczyć sumę

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2 + \dots?$$

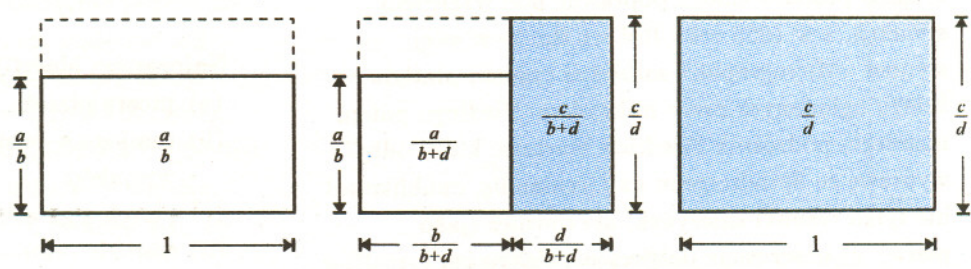
Ależ tak, patrząc na rysunki 2 i 3, z łatwością stwierdzamy, że wynosi ona  $\frac{1}{3}$ .

### Przykład 3

Dla takich dodatnich liczb  $a, b, c, d$ , że  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Można to sprawdzić rachunkowo, ale można też geometrycznie, jak zrobił to w 1484 roku N. Chuquet.



Ciąg dalszy na str. 10.



**Rozwiązanie zadania M 764.** Nie. Płaszczyzna przekroju musiałaby przecinać pięć ścian sześcianu, a wśród dowolnych pięciu ścian sześcianu są dwie pary ścian równoległych. Wynika stąd, że pięciokątny przekrój sześcianu ma dwie pary boków równoległych. Jednak pięciokąt foremny nie ma dwóch równoległych boków.

Czytelnik zechce się zastanowić, czy istnieje przekrój sześcianu będący pięciokątem o wszystkich bokach równej długości.





## Gwiazdka z nieba

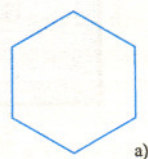
Czasami banalne pytania prowadzą do zaskakujących odpowiedzi, dlatego warto zadawać i takie pytania. Jaki minerał jest najpowszechniejszy na powierzchni Ziemi? Minerałem tym jest... woda! Przeważająca część zasobów wodnych naszej planety to morska woda, bo aż 94 procent objętości, lód i śnieg to zaledwie 1,6 procenta, reszta to woda słodka i para wodna znajdująca się w atmosferze.

Zapewne każdy w dzieciństwie (i nie tylko) zachwycał się urokiem misternych śnieżynek. Około 1550 roku arcybiskup Uppsali Olaf Magnus sporządził pierwsze ich rysunki, które jednak nie oddawały najważniejszej własności: sześciokątnej symetrii. W 1611 roku Jan Kepler w książeczce „Strena seu de nive sexangula” („Podarunek gwiazdkowy, czyli o sześciokątnym śniegu”) opisał ją i jako pierwszy podjął próbę wyjaśnienia. Kepler zauważył, że najgęstsze płaskie ułożenie kul odpowiada przypadkowi, gdy każda z nich styka się z sześcioma sąsiadami; w jego opinii sześciokątna symetria śnieżynki jest „materialną koniecznością” wynikającą z gęstego ułożenia cząsteczek. Wyjaśnienie to nie wytrzymało próby czasu, jest w nim jednak głęboka myśl: symetria kryształu jest konsekwencją cząsteczkowej budowy materii i własności oddziaływań międzycząsteczkowych.

W 1635 roku Kartezjusz opublikował w Amsterdamie rysunki płatków śniegu poprawne pod względem symetrii, a w 1665 roku Robert Hooke w swej słynnej „Micrographii” zamieścił rysunki płatków śniegu oglądanych przez mikroskop. Niedługo potem niemiecki podróżnik Friedrich Martens, który odbył wyprawę ze Spitzbergenu na Grenlandię, opublikował nie tylko rysunki śnieżynki, ale również (jako pierwszy) obserwacje dotyczące związku ich kształtów z warunkami meteorologicznymi.



Kryształy śniegu według Kartezjusza. Forma *F* jest formą przestrzenną.



a)



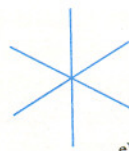
d)



g)



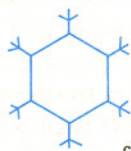
b)



e)



h)



c)



f)



i)

Najprostsza klasyfikacja kryształków śniegu:

- |                                |                                    |
|--------------------------------|------------------------------------|
| (a) prosty płatek              | (f) dendryt                        |
| (b) ramiona w postaci wycinków | (g) paproć                         |
| (c) płatek z gałązkami         | (h) dendryty z płatkami na końcach |
| (d) szerokie ramiona           | (i) płytka z dendrytami.           |
| (e) prosta gwiazdka            |                                    |

Ogólna prawidłowość jest taka, że te najpiękniejsze płatki w postaci rozgałęzionych dendrytów tworzą się, gdy jest dość ciepło, wilgotno i bezwietrznie.

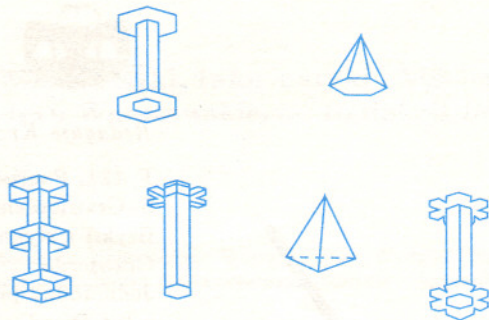
W 1944 roku w Moskwie przy takiej pogodzie obserwowano płatki śniegu o dziesięciocentymetrowej średnicy; podobno starzy mieszkańcy Syberii widywali nawet trzydziestocentymetrowe „śnieżynki”. W 1681 roku włoski matematyk i ksiądz Donat Rossetti z Revomo opublikował rysunki sześćdziesięciu śnieżynek o różnych kształtach i jako pierwszy sklasyfikował je.

W 1820 roku angielski wielorybnik William Scoresby w książce dotyczącej wielorybnictwa w rejonach arktycznych opisał śnieżne kryształki o postaci sześciokątnych kolumn i piramid oraz różne formy złożone. Co prawda, wcześniej opisał je już Kartezjusz, ale zapomniano o tym bardzo szybko i przez prawie dwieście lat powszechnie sądzono, że śnieżynki to twory wyłącznie płaskie. W 1832 roku japoński arystokrata Toshitsura Oinokami Doi w książce o egzotycznym tytule „Sekka Zusetsu” zamieścił kilkadziesiąt rycin śnieżnych płatków, wykonanych na podstawie badań mikroskopowych.

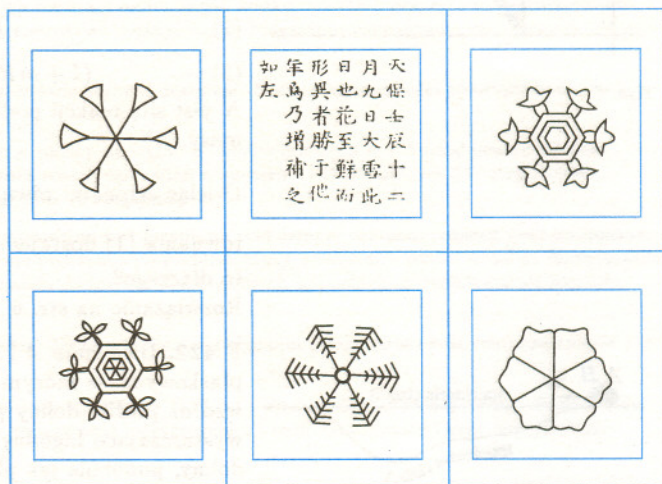
Koniec XIX wieku i wiek XX to szybki rozwój meteorologii i technik mikrofotograficznych, które wzbogaciły wiedzę o tym mikroskopijnym cudzie natury, jakim jest płatek śniegu. Przy okazji warto wspomnieć naszego rodaka, Ryszarda Dobrowolskiego i jego znakomitą książkę „Historia naturalna lodu”, wydaną w Warszawie w 1922 roku, oraz amerykańskiego farmera V.A. Bentley’a ze stanu Vermont, który przez pięćdziesiąt lat za pomocą aparatu fotograficznego sprzężonego z mikroskopem wykonał kilka tysięcy fotografii; znaczną ich część opublikował w książce wydanej w 1931 roku.

Pomimo symetrii płatków śniegu jak dotąd nie znaleziono dwóch identycznych, różnorodność ich kształtów jest wprost niebywała. Ocenia się, że dwa jednakowe mogą pojawić się raz na  $10^{5-10^6}$  przypadków; dla porównania warto wiedzieć, że liczba śnieżynek, jaka spadła na Ziemię w całej jej historii, szacuje się „zaledwie” na  $10^{35}$ . Powróćmy jeszcze do symetrii śnieżnych płatków, czyli ich podstawowej własności. W 1964 roku w ZSRR wydano z okazji Zimowych Igrzysk Olimpijskich w Innsbrucku serię znaczków opatrzonych rysunkami śnieżynek o symetrii pięciokątnej, czyli takiej, jaka w naturze w świecie kryształów nie istnieje. Ten lapsus powinien stać się atrakcją dla kolekcjonerów.

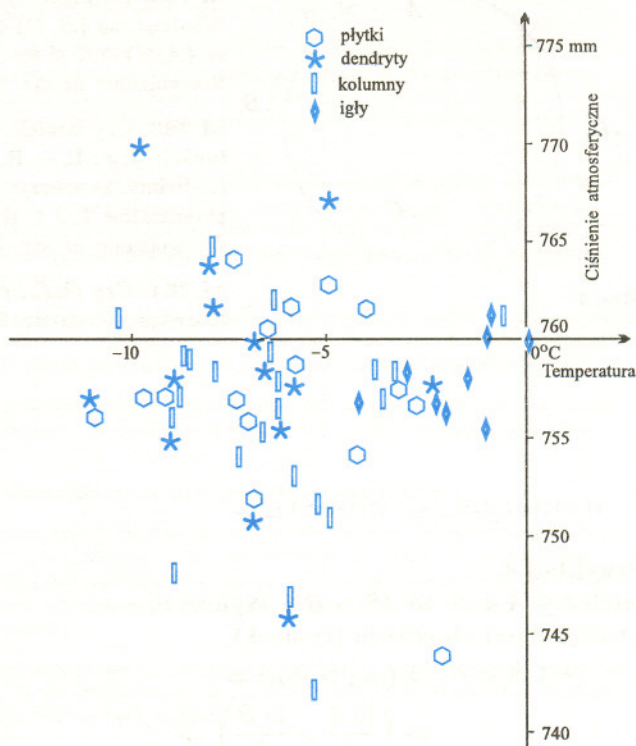
*Małą Deltę przygotował Krzysztof REJMER*



Kryształki śniegu według Scoresby’ego.



Kryształki śniegu – ilustracja z „Sekka Zusetsu”.



Związek warunków atmosferycznych z postacią kryształków śniegu.



# Zadania

Redaguje Krzysztof REJMER

**F 421.** Poniższy problem stał się przedmiotem zakładu pomiędzy Frankiem S. Crawfordem (autorem znakomitego podręcznika „Fale” z berkeleyowskiego kursu fizyki) a słynnym fizykiem, który pozostał anonimowy. Zakład został wygrany przez Crawforda.

Jednorodny pręt o masie  $m$  i długości  $2R$  postawiono na gładkim podłożu odchylając o kąt  $\Theta_0$  od pionu, a następnie puszczono swobodnie. Środek masy pręta porusza się z przyspieszeniem o stałej składowej pionowej. Oto dowód. Równania ruchu mają postać (rys. 1):

$$(1) \quad m\ddot{z} = N - mg, \quad \text{pionowa składowa przyspieszenia};$$

$$(2) \quad I\ddot{\Theta} = NR \sin \Theta, \quad \text{obrót wokół środka masy};$$

$$(3) \quad (I + mR^2)\ddot{\Theta} = mgR \sin \Theta, \quad \text{obrót wokół punktu podparcia}.$$

$N$  jest siłą reakcji podłoża,  $I = \frac{1}{3}mR^2$  momentem bezwładności względem środka masy.

Dzieląc stronami równania (2) i (3) dostajemy  $N = \frac{1}{4}mg$ , podstawiając to do równania (1) dostajemy  $\ddot{z} = -\frac{3}{4}g$ . Czy powyższy dowód jest poprawny? Jeśli nie, to dlaczego?

Rozwiązanie na str. 6

**F 422.** Dwa ciała  $A$  i  $B$  startują z prędkością  $v_0$  każde i poruszają się bez tarcia po płaskowyzu, w którym znajduje się dolina (rys. 2). Pierwsze ciało ( $A$ ) porusza się wzdłuż profilu doliny pod działaniem siły grawitacji. Zakładamy, że profil doliny jest wystarczająco łagodny, by ciało  $A$  nie podskakiwało i nie zahaczało o nierówności. Dno doliny, podobnie jak płaskowyz, jest gładkie. Drugie ciało ( $B$ ) porusza się prostoliniowo ze stałą prędkością. Które ciało szybciej znajdzie się po drugiej stronie doliny?

Rozwiązanie na str. 6

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

**M 762.** Na płaszczyźnie dane są koła  $K$  i  $L$  oraz czworokąt wypukły  $ABCD$  (rys. 3). Wiedząc, że  $\{B, D\} \subset K$  oraz  $\{A, B, C, D\} \cap L = \{A, C\}$ , udowodnić, że  $\{A, C\} \cap K \neq \emptyset$ .

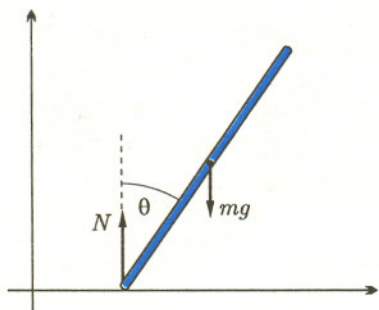
Rozwiązanie na str. 5

**M 763.** Czy istnieje zmienna losowa  $Z$  o wartościach rzeczywistych i takie funkcje  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że zmienne losowe  $f(Z)$  i  $g(Z)$  są niezależne, lecz nie stałe? (Mówimy, że rzeczywiste zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są niezależne, jeśli dla dowolnych przedziałów  $I, J \subset \mathbb{R}$  zachodzi równość  $P(X \in I \wedge Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$ .)

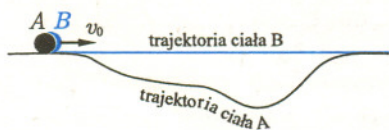
Rozwiązanie na str. 7

**M 764.** Czy płaski przekrój sześcianu może być pięciokątem foremnym?

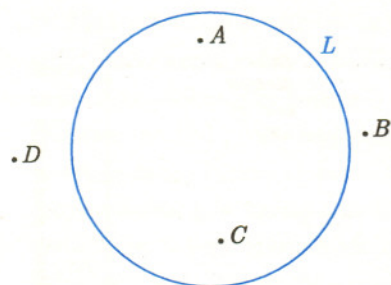
Rozwiązanie na str. 7



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

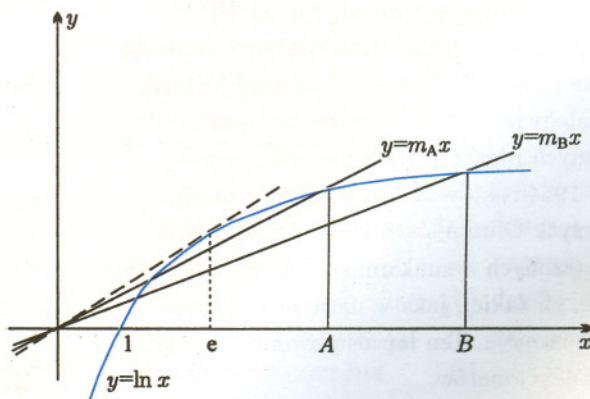
## Matematyczne miniatury

### Przykład 4

Jeżeli  $e \leq A < B$ , to  $A^B > B^A$ . Wynika to z następującej obserwacji (rysunek)

$$\begin{aligned} (e \leq A < B) &\Rightarrow (m_A > m_B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \frac{\ln A}{A} > \frac{\ln B}{B} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (A^B > B^A). \end{aligned}$$

Stąd, na przykład,  $e^\pi > \pi^e$ .



Ciąg dalszy na str. 16.

Lista uczestników  
ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań  
zadań 301 ( $WT=2,03$ ) i 302 ( $WT=2,14$ )  
z numeru 5/1995

Mirosław Matlega	-	43,59
Tomasz Wietecha	-	2-42,33
Lesław Skrzypek	-	2-41,36
Adam Czornik	-	2-41,29
Piotr Lipiński	-	37,82
Jan Ciach	-	4-37,72
Tadeusz Józefczyk	-	2-36,66
Henryk Kornacki	-	2-36,45
Krzysztof Zapisek	-	35,10
Tomasz Kulpa	-	1-34,45
Marek Karaś	-	31,81
Piotr Żmijewski	-	29,84
Jerzy Witkowski	-	28,97
Mikołaj Rotkiewicz	-	1-25,42
Wojciech Maciak	-	22,27
Krzysztof Parol	-	21,26
Jarosław Łazuka	-	21,23
Kazimierz Serbin	-	3-20,69
Andrzej Dudek	-	20,69
Konrad Patkowski	-	20,69

Legenda (przykładowo): stan konta  
4-37,72 oznacza, że uczestnik już  
czterokrotnie zdobył 44 punkty,  
a w kolejnej (piątej) rundzie ma 37,72  
punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich  
uczestników ligi, którzy spełniają  
następujące dwa warunki:

- stan ich konta (w aktualnie  
wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej  
20 punktów;

- przysłali rozwiązanie co najmniej  
jednego zadania z rocznika 1993, 1994  
lub 1995.

Nie drukujemy więc nazwisk tych  
uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy  
lata temu (lub dawniej); oczywiście, jeśli  
ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić  
do naszych matematycznych lamigłówek,  
jego nazwisko automatycznie wróci na  
listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani **Klubu 44 M** (w kolejności  
uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5),  
M. Galecki (5), J. Uryga (4),  
A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał,  
T. Rawlik, M. Mazur, A. Bonk,  
K. Serbin, J. Ciach (4), M. Prauza,  
P. Kumor, P. Gadziński (4), K. Jedziniak,  
J. Olszewski

(jeśli uczestnik przekroczył barierę  
44 punktów więcej niż trzy razy,  
sygnalizuje to cyfra w nawiasie).

Pozostali członkowie **Klubu 44 M**  
(alfabetycznie; nie powtarzamy nazwisk  
figurujących na liście powyżej):

„dwukrotni”: Z. Bartold, P. Jędrzejewicz,  
H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza,  
D. Kurpiel, J. Małopolski, J. Mikuta,  
E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Pióro,  
S. Soleccki, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: T. Biegański,  
W. Boratyński, M. Czerniakowska,  
P. Figurny, M. Fiszer, Z. Galias,  
L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak,  
K. Hryniewiecki, K. Jachacy,  
M. Kasperski, J. Kraszewski,  
A. Krzysztofowicz, P. Kubit,  
A. Langer, R. Latała, P. Lizak,  
J. Mańdziuk, M. Marczak, R. Mazurek,  
H. Mikołajczak, M. Mikucki,  
J. Milczarek, R. Mitraszewski,  
W. Olszewski, W. Pompe, M. Roman,  
A. Ruszel, J. Siwy, A. Smolczyk,  
Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk,  
K. Trautman, P. Wach, K. Witek,  
A. Wyrwa, M. Zajęc, Z. Zaus,  
K. Zawislawski.

# Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,  
Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

## Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 7 i 8 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delta*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru  $n$  należy nadsyłać do końca miesiąca  $n + 3$  (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1995 upływa 29 lutego 1996). W numerze  $n + 4$  podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednoprzemiennie rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli  $N$  oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a  $S$  oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności  $WT = 4 - 3S/N$ . Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przysłał zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delta* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. 10, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.

16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delta* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy zbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy uczestnik wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka.

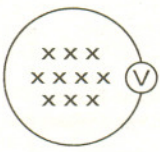
19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na spotkania **Klubu 44**.

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możliwość zmian regulaminu.

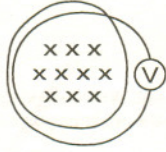


Rys. 1

213. Dwa krążki połączone cieńszą ośką, na którą nawinięta jest nitka (rys. 1), tworzą znaną zabawkę „jo-jo”. Krążki zjeżdżając w dół obracają się coraz szybciej, a potem wspinają się po nitce do góry i zatrzymują się. Aby zwiększyć wysokość osiąganą przez „jo-jo” (albo wyrównać straty energii), grający może wykonywać ruchy pionowe ręką trzymającą górny koniec nitki. a) Załóżmy, że w czasie przejścia krążków przez dolne położenie (gdym nitka jest całkowicie rozwinięta) górny koniec nitki jest nieruchomy i w kolejnych przejściach znajduje się na jednakowym poziomie. Czy można tak nim poruszać w czasie wspinania się i opadania krążków, aby je rozpędzić, tzn. aby zwiększyć prędkość kątową w dolnym położeniu? Jeśli tak, to opisać prawidłową metodę. b) Opisać najskuteczniejszą metodę rozpędzenia zabawki, jeśli w jej dolnym położeniu górny koniec nitki nie musi być nieruchomy. Dla uproszczenia można przyjąć, że wytrzymałość nitki jest dowolnie duża.

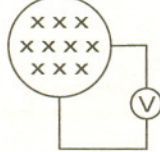


Rys. 2

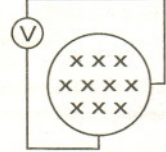


Rys. 3

214. W ograniczonym obszarze przestrzeni występuje zmienne pole magnetyczne wytworzone przez zewnętrzne źródło, tak że woltomierz włączony w obwód opasujący ten obszar (zob. rys. 2; na rysunkach pole zostało oznaczone krzyżykami) wskazuje przez pewien czas 1 V. Jakie napięcie wskaże w takiej sytuacji:



Rys. 4



Rys. 5

a) woltomierz włączony w podwójną pętlę (rys. 3), b) woltomierz dołączony do pętli z drutu oporowego według rysunku 4, c) woltomierz dołączony do pętli z drutu oporowego według rysunku 5, d) woltomierz dołączony do pętli z drutu nadprzewodzącego według rysunku 4? W razie potrzeby można przyjąć upraszczające założenia co do ułożenia przewodów. W przypadkach b) i c) należy pominąć własne pole magnetyczne pętli w porównaniu z polem zewnętrznym.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1995

Przypominamy treść zadań:

205. Małe naładowane ciało krąży po okręgu o promieniu  $r_0$  w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B_0$ . Jeśli pole magnetyczne nie zmieniając kierunku bardzo powoli wzrośnie lub zmaleje do wartości  $B_1$ , to ciało nadal będzie krążyć po okręgu. Znaleźć wzór na promień  $r_1$  nowego okręgu.

205. Oznaczmy masę ciała przez  $m$ , a jego ładunek przez  $q$ . Załóżmy, że pole  $B$  wzrasta; wtedy, jak wynika z reguły Lenza, wirowe pole elektryczne będzie rozpędzało krążące ciało (niezależnie od znaku jego ładunku). W czasie jednego okrążenia możemy przybliżyć tor ciała przez okrąg, a przyrost jego energii kinetycznej jest niewielki i równy pracy pola elektrycznego  $q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ . Występująca tu całka jest – zgodnie z prawem Maxwella – równa  $\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$ . Ponieważ czas zakreślenia przez ciało jednego okrążenia wynosi  $\frac{2\pi r}{v}$ , więc otrzymujemy równanie

$$q \cdot \pi r^2 \frac{dB}{dt} \cdot \frac{v}{2\pi r} = \frac{d\mathcal{E}_{kin}}{dt} = mv \frac{dv}{dt}$$

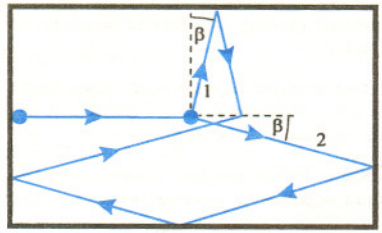
Korzystając ze wzoru na promień  $r = \frac{mv}{qB}$  dochodzimy do tożsamości

$$\frac{dB}{B} + 2 \frac{dr}{r} = 0,$$

czyli  $B r^2 = \text{const}$ . Rozwiązaniem jest wyrażenie  $r_1 = r_0 \sqrt{(B_0/B_1)}$ .

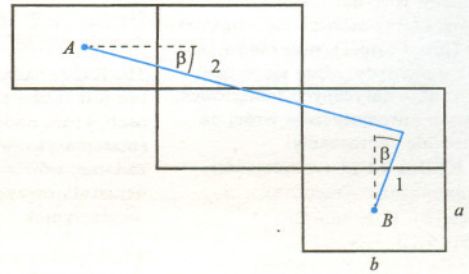
206. Efekty wynikające z tarcia, niepełnej sprężystości odbić i zderzeń, a także z ruchu obrotowego bil mają wpływ na prawidłowy kierunek uderzenia początkowego, ale ich znaczenie dla wymaganej dokładności tego kierunku jest prawdopodobnie niewielkie. Dlatego – zwłaszcza przy przybliżonej ocenie – możemy te efekty pominąć. Oznaczmy przez  $v$  prędkość początkową, przez  $v_1$  prędkość bili odbitej w stronę dłuższego boku, a przez  $v_2$  – w stronę krótszego. Stosując do zderzenia zasady zachowania pędu i energii nietrudno dojść do wniosku, że bile po zderzeniu pobiegą wzajemnie prostopadle; jeśli przez  $\beta$  oznaczymy kąt między kierunkiem pierwszej bili a krótszym bokiem (rys. 6), to  $v_1 = v \sin \beta$ , a  $v_2 = v \cos \beta$ .

Cały tor obu bil najlepiej jest zobrazować „sklejając” pięć rysunków stołu i przechodząc na sąsiedni rysunek zamiast odbicia – wtedy, jeśli kąt padania równa się kątowi odbicia, to obraz toru na następnym rysunku leży na tej samej prostej.



Rys. 6

206. Na prostokątnym stole bilardowym o wymiarach  $a \times b$  ( $a = 1 \text{ m}$ ,  $b = 2 \text{ m}$ ) znajdują się dwie jednakowe bile o średnicy  $d = 6 \text{ cm}$  – jedna na środku stołu, a druga przy środku krótszego boku. Chcemy tak uderzyć w drugą bilę, aby trafiła ona w środkową, dalej jedna z bil odbiła się od dłuższego boku stołu, a druga kolejno od krótszego, dłuższego i znów krótszego, po czym zderzyły się ponownie. Oceń niezbędność do tego dokładność kierunku uderzenia początkowego (w stopniach).



Rys. 7

Widzimy, że rysunek 7 jest równoważny rysunkowi 6. Jeśli chwilowo pominiemy średnicę kul, to zderzenie zajdzie wtedy, gdy wektor prędkości względnej  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = [v_2 \cos \beta - v_1 \sin \beta, -v_2 \sin \beta - v_1 \cos \beta] = v[\cos 2\beta, -\sin 2\beta]$  będzie równoległy do wektora  $\overline{AB} = [2b, -2a]$ . Takie „doskonałe” zderzenie nastąpi więc dla  $\beta = \beta_0$ , gdzie  $\text{tg } 2\beta_0 = a/b$  (przy podanych wartościach  $a$  i  $b$  mamy  $\beta_0 = 13,3^\circ$ ). Przyjmijmy teraz, że  $\beta \neq \beta_0$ ; wtedy, jak można wykazać, minimalna odległość środków bil będzie równa  $2|a \cos 2\beta - b \sin 2\beta|$ . Gdy przyjmiemy, że ta minimalna odległość jest równa  $d$  (bile ledwie się musną) oraz podstawimy  $\beta = \beta_0 + \delta$  (gdzie  $\delta$  jest małe), otrzymujemy po przekształceniach równanie  $d = 4\delta \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Pozostaje nam wyznaczyć związek między  $\delta$  a szukaną niedokładnością kierunku początkowego, którą oznaczmy przez  $\epsilon$ . Ponieważ bile znajdowały się początkowo w odległości  $b/2$ , więc zmiana kąta o  $\epsilon$  pociąga za sobą boczne przesunięcie przy pierwszym zderzeniu o  $\epsilon b/2$ . To zaś z kolei – jak można się przekonać z odpowiedniego rysunku – zmienia kąt  $\beta$  o  $\delta = \epsilon b / (2d \cos \beta_0)$  lub też o  $\delta = \epsilon b / (2d \sin \beta_0)$ , przy czym pierwszy wzór obowiązuje wtedy, gdy lewa bila (rys. 6) biegnie dalej torem 1, a środkowa torem 2, natomiast drugi wzór – gdy jest na odwrót. W pierwszym przypadku mamy więc wzór

$$\epsilon = \frac{2d\delta \cos \beta_0}{b} = \frac{d^2 \cos \beta_0}{2b\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Wielkości  $a$  i  $b$  w tym wzorze należy jeszcze zastąpić przez  $a - d$  i  $b - d$  (wielkość bil powoduje zmniejszenie „efektywnych wymiarów stołu”). Po podstawieniu danych liczbowych  $\epsilon \approx 0,00042 \text{ rad} = 0,024^\circ = 1,4'$ . W drugim przypadku zamieniając cosinus na sinus otrzymujemy  $\epsilon = 0,34'$ .

Artur Gawryszczak	- Dubeczno	43,40
Andrzej Borowski	- Aleksandrów K.	1-38,48
Zbigniew Galias	- Kraków	36,75
Aleksander Surma	- Myszków	2-30,79
Dariusz Wilk	- Rzeszów	25,57
Przemysław Gadziński	- Środa Śląska	23,31
Przemysław Gworys	- Częstochowa	2-22,32
Jarosław Łazuka	- Warszawa	17,03
Paweł Perkowski	- Szczecin	2-13,02
Roman Wencel	- Komprachcice	11,60
Stanisław Świątek	- Kłodzko	11,12
Piotr Wasylczyk	- Warszawa	9,73
Sławomir Oszałdowski	- Grudziądz	9,70
Andrzej Rostworowski	- Kraków	9,27

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 1993-1995 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 9 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Pozostali członkowie **Klubu 44 F** (alfabetycznie; liczby w nawiasach oznaczają wielokrotność przekroczenia 44 punktów): Piotr Bała (3), Anna Gluza (1), Wiesław Kacprzak (1), Jerzy Lipkowski (2), Dzierżysław Lipniacki (3), Bogusław Mikieliewicz (1), Leszek Motyka (1), Roman Musiał (1), Andrzej Nowogrodzki (1), Tomasz Rawlik (1), Robert Repucha (1), Adam Sikorski (3), Jacek Stelmach (1), Leszek Szalast (1), Piotr Wach (1), Tomasz Wietecha (2).



Dwieście zadań! To znaczy sto numerów *Delty* albo dziesięć lat (uwzględniając przerwy wakacyjne). Piękny jubileusz obchodzi liga fizyczna w tym roku! Przypomnijmy: inauguracja nastąpiła w styczniu 1985 roku i do końca 1990 roku redagował ligę p. Andrzej Nadolny, po czym przejął ją obecny autor. W ciągu tego dziesięciolecia przewinęło się przez ligę ponad 220 uczestników, ale zaledwie 4 panie. Członków Klubu mamy obecnie dwudziestu, w tym trzech trzykrotnych, którzy uzyskali w ten sposób tytuł Weterana.

Niestety, w ciągu ostatnich lat otrzymujemy znacznie mniej listów niż początkowo. I choć najniższy poziom sprzed 2-3 lat został ostatnio nieco przekroczony, to wciąż ponad 10 rozwiązań w jednej serii zdarza się tylko wyjątkowo. Gorąco zapraszamy więc do udziału i spróbowania sił - przede wszystkim młodzież, ale też chętnie znów powitamy tych, którzy kiedyś już uczestniczyli w naszej zabawie, a potem się wycofali. W tym roku - jak Czytelnicy może zwrócili uwagę - odnotowaliśmy powrót do ligi po 7-letniej przerwie! Czekamy na pomysły nowych, oryginalnych i ciekawych zadań (za „kadencji” obecnego autora tylko jedno zadanie pochodziło od Czytelnika) - może ktoś zaprojektuje, na przykład, dalszy ciąg przygód inspektora Wnikliwego albo dr. Falsegranta? Prosimy też o uwagi krytyczne na temat organizacji ligi, zasad punktacji, doboru zadań, stopnia ich trudności i wszystkich innych kwestii mogących wpływać na atrakcyjność ligi fizycznej.

Przejdźmy teraz do omówienia ciekawszych zadań z ostatniego roku.

**Zadanie 181.** [Naładowana powłoka kulista rozpryskuje się; znaleźć prędkość fragmentów] (współczynnik trudności  $WT = 2,50$ , liczba poprawnych rozwiązań  $LPR = 4$ ). Bezblędne rozwiązania nadesłali **A. Rostworowski**, **A. Surma** i **S. Świątek**, a poprawne (obarczone tylko nieścisłością uzasadnienia) - **P. Gadziński**. Kilku Czytelników uwzględniło obok energii potencjalnej oddziaływania elektrostatycznego także energię oddziaływania grawitacyjnego! Hm... niby racja, rzeczywiście o tym nie pomyślałem... ale wpływ tej poprawki ujawniłby się tylko przy niezbyt realnych danych liczbowych. Częstym błędem było obliczanie energii potencjalnej powłoki ze wzoru  $E_{pot} = Q \cdot V$ , z pominięciem czynnika  $1/2$ .

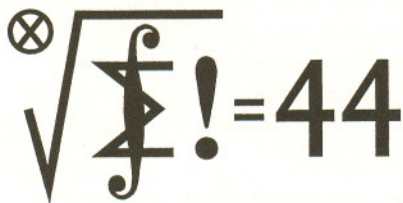
**Zadanie 182.** [Udowodnić, że jeśli stała sprężystości sprężyny maleje ze wzrostem temperatury, to temperatura spada przy rozciąganiu adiabatycznym] ( $WT = 3,78$ ,  $LPR = 1$ ). Jest to typowy przykład tzw. związku krzyżowego, wynikającego z II zasady termodynamiki. Na poziomie akademickim istnieją standardowe techniki różniczkowe, pozwalające wyprowadzać związki między odpowiednimi pochodnymi cząstkowymi - ale trudno oczekiwać od naszych Czytelników znajomości takich specjalistycznych metod, dlatego dowód podany w *Delcie* 12/1994 był dłuższy i bardziej elementarny. Jedynym z uczestników ligi, który wziął się za bary z tym problemem, był **T. Wietecha**. Posłużył się on - skutecznie, choć nie bezbłędnie - zaawansowanym rachunkiem różniczkowym. Może należałoby unikać w przyszłości takich zadań, aby nie premiować Czytelników o wyższym od przeciętnego poziomie przygotowania? A może od czasu do czasu jednak zamieszczać zadanie, na którym pozostali nauczą się czegoś nowego?

**Zadanie 186.** [Rozpędzanie się pociągu elektrycznego, gdy przewody trakcji elektrycznej mają opór] ( $WT = 3,60$ ,  $LPR = 0$ ). Czyżby sformułowanie zadania „pociąg rusza z maksymalnym przyspieszeniem” było niejasne? Rozwiązujący bezpodstawnie zakładali, że opór elektryczny lokomotywy pozostaje stały w czasie ruchu - gdyby tak było, to maksymalne, możliwe do osiągnięcia, przyspieszenie wystąpiłoby tylko raz w ciągu ruchu, a w innych chwilach byłoby mniejsze. Być może rzeczywiście było tu coś niedopowiedzianego i należało sprecyzować treść.

**Zadanie 192.** [Podsok obręczy, do której jest przymocowana masa punktowa] ( $WT = 3,44$ ,  $LPR = 0$ ). Tutaj treść nie budziła wątpliwości, ale wyniki były również bardzo słabe. Tylko część rozwiązujących potrafiła prawidłowo zastosować zasadę zachowania energii, a prawdziwe „schody” zaczęły się przy sformułowaniu warunku oderwania się obręczy od podłoża. Jakiś elementarny błąd święci tu triumf: Czytelnicy „za dobrze” wiedzą o sile odśrodkowej, zapominając o tym, że siła bezwładności występuje również dla ruchu prostoliniowego. Przecież podsokczyć potrafi też zabawka, wewnątrz której ciężarek porusza się pionowo i o żadnej sile odśrodkowej nie ma mowy!

**Zadanie 194.** [Pomiar prędkości nietoperza za pomocą dwóch mikrofonów; łączny sygnał pulsuje] ( $WT = 1,53$ ,  $LPR = 9$ ). Rozwiązanie wzorcowe polegało na wyliczeniu różnicy dróg od nietoperza do jednego i drugiego mikrofonu. Równoważną (i nieco szybszą) metodą było wykorzystanie standardowych wiadomości o zjawisku Dopplera i dudnieniach - tak postąpiła większość rozwiązujących. Zdarzał się tu jednak drobny błąd: częstotliwość pulsowania jest równa  $f_{dud} = f_1 - f_2$ , a nie  $(f_1 - f_2)/2$ . Pozbawione tego błędu były wyniki **Z. Galiasa**, **A. Gawryszczaka**, **P. Gworysa**, **J. Koniecznego** i **A. Nowogrodzkiego**.





315. Dana jest liczba naturalna  $n \geq 2$ . Ile jest permutacji  $\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , dla których nierówność  $\pi(k) \geq k$  jest spełniona przez dokładnie dwie liczby  $k \in \{1, \dots, n\}$ ?

316. Wyznaczyć wszystkie funkcje  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające równanie funkcyjne  
$$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y).$$

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1995

Przypominamy treść zadań:

307. Liczby dodatnie  $a, b, c$  spełniają nierówność

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

Dowieść, że są one długościami boków pewnego trójkąta.

308. Dane są funkcje  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o następujących własnościach:  $f$  jest funkcją różniczkowalną,  $f'(x) = g(f(x))$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Czy funkcja  $f$  musi być monotoniczna (niemalejąca lub nierosnąca)?

307. Teza zadania wynika z prostej do sprawdzenia tożsamości

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4) &= \\ &= (a + b + c)(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c); \end{aligned}$$

można bowiem przyjąć, że  $a \leq b \leq c$ ; pierwsze trzy czynniki powyższego iloczynu są wówczas dodatnie, wobec czego także czwarty czynnik musi być dodatni – a to znaczy, że spełniony jest warunek trójkąta.

308. Wykażemy, że przy podanych założeniach funkcja  $f$  jest monotoniczna. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że dla pewnej trójki liczb  $a < b < c$  zachodzą nierówności  $f(a) < f(b) > f(c)$  lub  $f(a) > f(b) < f(c)$ ; bez straty ogólności przyjmijmy pierwszy wariant. Możemy także bez straty ogólności założyć, że  $f(a) \geq f(c)$  oraz że  $f(b)$  jest maksymalną wartością funkcji  $f$  na przedziale  $(a; c)$ . Niech  $\alpha$  będzie największą liczbą w przedziale  $(a; b)$ , dla której  $f(\alpha) = f(a)$ ; wówczas

$$(1) \quad f(x) > f(\alpha) \quad \text{dla } x \in (\alpha; b).$$

W przedziale  $(\alpha; b)$  istnieją punkty, w których pochodna  $f'$  jest dodatnia; niech  $u$  będzie jednym z tych punktów:  $u \in (\alpha; b)$ ,  $f'(u) > 0$ . Oznaczmy wartość  $f(u)$  przez  $\lambda$ . Zgodnie z (1)

$$\lambda = f(u) > f(\alpha) = f(a) \geq f(c).$$

Niech  $v$  będzie największą liczbą w przedziale  $(u; b)$ , dla której  $f(v) = \lambda$ , i niech  $w$  będzie najmniejszą liczbą w przedziale  $(b; c)$ , dla której  $f(w) = \lambda$ . Tak więc

$$(2) \quad f(x) > \lambda \quad \text{dla } x \in (v; w).$$

W myśl warunku zadania liczby  $f'(u)$ ,  $f'(v)$ ,  $f'(w)$  są równe (każda z nich równa się  $g(\lambda)$ ). Ze spostrzeżenia (2) zaś wynika, że  $f'(v) \geq 0$ ,  $f'(w) \leq 0$ . Stąd

$$f'(u) = f'(v) = f'(w) = 0$$

– wbrew wyborowi punktu  $u$ . Sprzeczność kończy dowód.

\*\*\*\*\*



Jak każdy konkurs matematyczny, tak i nasza liga pragnie zaciekawiać biorących w niej udział, a przy okazji wszystkich Czytelników *Delty*, intrygującymi problemami matematycznymi. Cała reszta – regulamin, punkty, terminy, współczynniki trudności, magiczna liczba czterdzięści i cztery, drukowana co miesiąc czołówka, liczenie Weteranów – to tylko barwna oprawa. . . Traktujmy ją więc, jak na to zasługuje – jak zabawę. Bawią się przy tym zresztą nie tylko jej uczestnicy, ale i inni Czytelnicy, śledząc na przykład ruch nazwisk w „tabeli ligowej” i dziwiąc się od czasu do czasu. Czemuż to?

Jak wiadomo, żyjemy w kraju, gdzie list z miasta do miasta, ba – z jednego końca Warszawy na drugi – potrafi iść kilka godzin lub kilka miesięcy. Kolejka ligowa już opracowana, „WT” ustalone, punkty podliczone, czołówka wydrukowana, numer zamknięty, minęły tygodnie – a tu przychodzi list (nadany terminowo) z dobrym rozwiązaniem. Albo inaczej: prowadzący ligę z jakiegoś powodu zagląda do starej korespondencji i znajduje rozwiązanie, które ocenił był na „zero”, bo nie zrozumiał wówczas argumentacji, całkiem – jak się okazuje przy ponownym czytaniu – poprawnej. (Nieomyślność jest

celem wzniosłym, ale nieosiągalnym.) W takiej sytuacji postępujemy jak w powieści Orwella: zmieniamy przeszłość. No, nie tak zupełnie: współczynników trudności już nie ruszamy, naliczonych punktów nikomu nie odbieramy – ale zasłużone punkty brakujące dopisujemy.

Takie ingerencje w przeszłość miały już miejsce kilkakrotnie; dla obserwatorów nie są one zazwyczaj zauważalne, bo rzadko kiedy zakłócenie punktacji narusza strefę drukowanej czołówki. Ale otóż właśnie niedawno coś takiego się zdarzyło: nazwisko jednego z uczestników wykonało na liście skok, jakiego, teoretycznie, wykonać nie miało prawa. Natychmiast zostało to dostrzeżone przez wiernych kibiców ligi. Jeden z nich nawet napisał do nas w tej sprawie. (Odpowiedzi listownej nie otrzymał, bo adresu nie podał, listu nie podpisał. . . Nawet *Delta* dostaje anonimy!)

Poplotkowawszy sobie o „sportowych” aspektach naszej zabawy, przejdźmy do matematyki. Uczestnicy ligi przysłali liczne ciekawe uwagi oraz uogólnienia rozważanych problemów, nie mówiąc już o rozwiązaniach metodami bardziej eleganckimi od naszych „firmowych”. Oto krótki przegląd. Gdy zadanie zostało zrobione przez niewiele osób, podajemy ich nazwiska.

**Zadanie 277.**  $[a_0 = 1, a_{n+1} = (a_1 + \dots + a_n)^{-1} - \sqrt{2} \Rightarrow$  szereg  $\sum a_n$  jest zbieżny] (współczynnik trudności  $WT = 3,46$ ; liczba poprawnych rozwiązań  $LPR = 4$ ). To zadanie było już omawiane przed rokiem (*Delta* 2/1995) – ale z pomyłką, wymagającą sprostowania: otóż poprawne rozwiązania przysłali: **P. Gadziński, T. Kulpa, P. Żmijewski** oraz **L. Skrzypek** – to ostatnie nazwisko zostało rok temu przeoczone.

**Zadanie 285.** [Iloza sposobami można połączyć 10 punktów (rozdzielnych), aby powstał spójny graf bez zamkniętych cykli (drzewo)?] ( $WT = 3,29$ ;  $LPR = 4$ ). Odpowiedź na analogiczne pytanie dla  $n$  punktów brzmi:  $n^{n-2}$ . Ten ogólny wynik podali Autorzy wszystkich prac ocenionych maksymalnie: **P. Gadziński** dochodzi do wzoru rekurencyjnego, jak w rozwiązaniu „firmowym”, i wyprowadza wzór ogólny przez nietrywialną indukcję; **T. Kulpa** stosuje zmyślne kodowanie badanych drzew ciągami długości  $n - 2$  o wyrazach ze zbioru  $\{1, \dots, n\}$ ; oba te dowody są za długie, by je tu przytaczać. Zainteresowany Czytelnik znajdzie je, a także wiele innych metod, w książce: F. Harary, *A Seminar on Graph Theory*, Holt, Reinhart & Winston, New York 1967, s. 70–78 (rozdział: J. W. Moon, *Various Proofs of Cayley's Formula for Counting Trees*); taki odsyłacz podaje **L. Skrzypek**, wraz z informacją, że jest tam 10 różnych dowodów (!); natomiast **M. Matłęga** odsyła do książki: J. L. Kulikowski, *Zarys Teorii Grafów*, PWN 1986, tw. 9.1, s. 354.

Redaktor ligi zadaniowej wyraża szczerą skruchę z powodu tak niefortunnego wyboru zadania...

**Zadanie 288.**  $[a_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k}; \lim a_n^{1/n^2} = ?]$  ( $WT = 2,87$ ;  $LPR = 6$  (10 ?)). Spośród sześciu bezbłędnych rozwiązań, pięć (**M. Kasperski, L. Skrzypek, P. Gadziński, T. Kulpa, P. Żmijewski**) opiera się na wzorze Stirlinga – tak jak rozwiązanie „firmowe” (dalsze cztery prace „zasadniczo poprawne”, z użyciem wzoru Stirlinga lub własności całek, zawierają dość istotne luki). Szóste bezbłędne rozwiązanie, korzystające ze znacznie skromniejszych środków, przysłał **A. Dudek**, uczeń Technikum Samochodowego. Oto szkic (po adaptacji):

Ciąg o wyrazach  $q_k = k!e^{k-1}k^{-k}$  jest rosnący, a ciąg o wyrazach  $r_k = k!e^k(k-1)^{k-2}k^{-2k}$  jest malejący (aby się o tym przekonać, wystarczy zbadać ilorazy  $q_{k+1}/q_k$  oraz  $r_{k+1}/r_k$ ); przy tym  $r_2 < 1 < q_2$ , więc dla wszystkich  $k \geq 2$  zachodzą nierówności  $r_k < 1 < q_k$ , które można równoważnie zapisać tak:

$$\frac{(k-1)^{k-1}}{k^k} e^k < \frac{k^k}{k!} < e^{k-1}.$$

Ponadto (por. rozwiązanie „firmowe”) zachodzi równość

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{k^k}{k!}. \text{ Stąd } a_n = a_1 \prod_{k=2}^n \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^n \frac{k^k}{k!} \text{ i z uzyskanych}$$

nierówności wynikają oszacowania:

$$a_n > \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)^{k-1}}{k^k} e^k = n^{-n} e^{2+\dots+n} > n^{-n} e^{n^2/2},$$

$$a_n < \prod_{k=2}^n e^{k-1} = e^{2+\dots+(n-1)} < e^{n^2/2},$$

które po podniesieniu stronami do potęgi  $1/n^2$  dają, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, wynik:  $\lim a_n^{1/n^2} = e^{1/2}$ .

**Zadanie 290.**  $[a_n > 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{ciąg o wyrazach } b_n = ((1+a_n)/a_{n-1})^n \text{ nie może mieć granicy mniejszej od } e]$  ( $WT = 2,64$ ;  $LPR = 7$ ). Poprawne rozwiązania (**P. Gadziński, J. Olszewski, M. Sarniak, J. Witkowski, P. Żmijewski, L. Skrzypek, T. Więtecha**) nie różnią się istotnie od „firmowego”. **J. Olszewski** uzyskuje tę samą metodą wynik nieco ogólniejszy: dla każdej liczby  $k \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_0 + a_{n+k}}{a_n} \right)^{n+1} \geq e^k$$

i stawia problem (który przekazujemy Czytelnikom): czy liczba  $e^k$  jest tu najlepszym oszacowaniem dolnym? – oraz kończy pracę komentarzem: „Zadanie jest bardzo ciekawe, a wynik dość zaskakujący, bo przecież bardzo niewiele wiemy o ciągu  $(a_n)$ ”.

**Zadanie 294.** [W każdym czworokącie wypukłym istnieje punkt, którego rzuty na boki (lub ich przedłużenia) leżą na okręgu] ( $WT = 3,12$ ;  $LPR = 4$ ). Rozwiązanie „firmowe” było oparte na argumente „ciągłościowym”: przy przemieszczaniu się punktu wzdłuż pewnej drogi wyznaczone przezeń kąty zmieniają się w sposób ciągły, więc przy pewnym położeniu itd. Nie jest to „czysta” geometria – własność Darboux należy raczej do analizy matematycznej. Dowody, które unikają stosowania takich metod, i przez to uchodzą za bardziej eleganckie, zostały wszelako znalezione przez uczestników ligi.

**K. Patkowski** rozumuje tak: W każdy czworokąt wypukły można wpisać elipsę; oznaczmy jej ogniska przez  $F_1, F_2$ , a środek odcinka  $F_1F_2$  – przez  $O$ . Jeśli punkty  $Y_1, Y_2, Q$  są rzutami punktów  $F_1, F_2, O$  na prostą styczną do elipsy w punkcie  $X$ , to  $\angle F_1XY_1 = \angle F_2XY_2 =: \alpha$ . Zatem

$$|Y_1Y_2| = |XY_1| + |XY_2| = s \cdot \cos \alpha, \\ 2|OQ| = |F_1Y_1| + |F_2Y_2| = s \cdot \sin \alpha,$$

gdzie  $s = |F_1X| + |F_2X|$  jest wielkością stałą dla danej elipsy (niezależną od wyboru prostej stycznej); stąd

$$|OY_1|^2 = |OQ|^2 + |QY_1|^2 = \left(\frac{1}{2}s \cdot \sin \alpha\right)^2 + \left(\frac{1}{2}s \cdot \cos \alpha\right)^2 = \frac{1}{4}s^2,$$

czyli  $|OY_1| = s/2$ , i podobnie  $|OY_2| = s/2$ . Wniosek: rzuty każdego z ognisk na proste zawierające boki czworokąta leżą na okręgu o środku  $O$  i promieniu  $s/2$ . (To zgrabne rozwiązanie jest zgodne z intencją Waldka Pompe, Autora zadania.)

Inny dowód, także „czysto geometryczny”, podają: **Nguyen Hung Son** oraz **K. Patkowski** (drugie rozwiązanie!). Dowody z użyciem ciągłości: **J. Witkowski** oraz **P. Gadziński**, który dodatkowo zauważa, że założenie wypukłości nie jest konieczne.

**Zadanie 295.**  $[T = \{1, \dots, 3n\}; n \in \mathbb{N}$ ; znaleźć minimalną liczbę  $m$  o własności:

$(\forall M \subset T)(|M| = m \Rightarrow \exists a, b \in M: n < a - b < 2n)]$  ( $WT = 2,03$ ;  $LPR = 12$ ). Wielu uczestników wylapało usterkę w sformułowaniu zadania: brak założenia, że  $n \geq 2$  (dla  $n = 1$  treść nie ma wiele sensu). Duże uogólnienie podaje **M. Lewandowski**: biorąc zbiór  $T$  postaci

$T = \{t, t+1, \dots, t+l\}$  oraz zastępując warunek  $n < a - b < 2n$  warunkiem  $p < a - b < q$  (gdzie  $t, l, p, q \in \mathbb{Z}, t \geq 0, l \geq 2, 0 \leq p < q \leq l, q - p \geq 2$ ) dowodzi, że minimalna liczba  $m$  o własności analogicznej do rozważanej w zadaniu wynosi

$$1 + \frac{l-r}{p+q}(p+1) + \min\{p+1, r+1\},$$

gdzie  $r$  jest resztą z dzielenia  $l$  przez  $p+q$  (dowód długi).

**Zadanie 297.** [Permutacja  $(x_1, \dots, x_{250})$  zbioru  $\{1, \dots, 250\}$  o własności:  $x_{k+1}(x_1 + \dots + x_k), k = 1, \dots, 249]$  ( $WT = 2,46$ ;  $LPR = 11$ ). Kilka osób podaje przykład z rozwiązania „firmowego”:

$$(250, 2, 126, 3, 127, 4, 128, \dots, 124, 248, 125, 249, 1);$$

większość znajduje permutację

$$(126, 1, 127, 2, 128, 3, \dots, 250, 125);$$

**T. Józefczyk** podaje – oprócz tych dwóch – jeszcze przykład

$$(249, 1, 2, 126, 3, 127, 4, \dots, 247, 124, 248, 250, 125);$$

wszyscy zauważają, że ich metoda „działa” dla permutacji zbioru  $\{1, \dots, n\}$  dla dowolnego  $n$  parzystego, a po drobnej modyfikacji – także dla  $n$  nieparzystego.



**Zadanie 300.** [ $S$  – skończona suma przedziałów domkniętych,  $f: S \rightarrow S$  – funkcja ciągła  $\Rightarrow (\exists A \subset S, \text{niepusty})(f(A) = A)$ ] ( $WT = 2,06$ ;  $LPR = 15$ ). Teza zadania jest elementarnym wariantem analogicznego twierdzenia, w którym  $S$  jest dowolną przestrzenią topologiczną zwartą (niekoniecznie podzbiorem prostej liczbowej). Oto dowód, który przedstawił **M. Lewandowski**:

Rodzina  $\mathcal{R}$  zbiorów  $T \subset S$  niepustych, domkniętych i takich, że  $f(T) \subset T$ , ma elementy minimalne w sensie relacji inkluzji (uzasadnienie: lemat Kuratowskiego–Zorna plus spostrzeżenie, że dowolny łańcuch w  $\mathcal{R}$  jest rodziną scentrowaną zbiorów domkniętych); ponadto spełnia warunek:  $T \in \mathcal{R} \Rightarrow f(T) \in \mathcal{R}$ . Jeśli więc  $A$  jest dowolnym elementem minimalnym rodziny  $\mathcal{R}$ , to  $f(A) = A$ .

To samo uogólnienie uzyskali także **P. Gadziński** i **J. Witkowski**, a przy dodatkowych założeniach (metryczność, ciągowa zwartość, itp.): **J. Olszewski**, **P. Sołtan**, **Z. Sewartowski**.

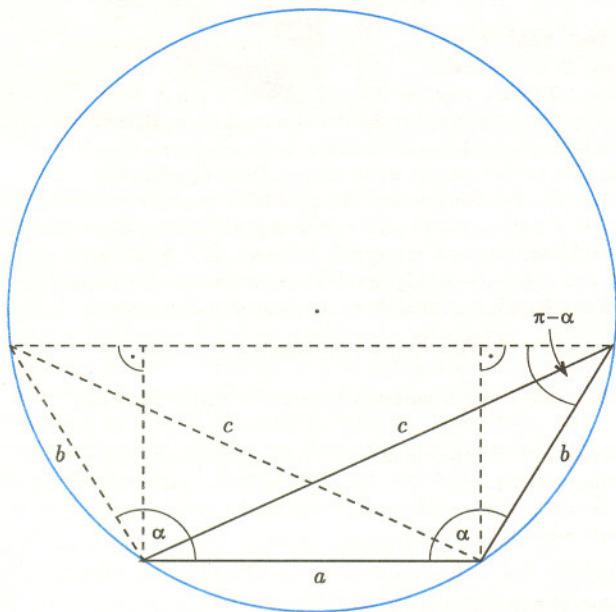
**Zadanie 301** [Wielomian  $P(x) = \sum_{j=0}^{n+1} c_j x^j$  jest podzielny przez  $Q(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  (gdzie  $c_{n+1} = a_n \neq 0$ )  $\Rightarrow \max |a_k| \leq (n+1) \max |c_j|$ , ( $WT = 2,03$ ;  $LPR = 9$ ).

I jeszcze jedno. Jak zapewne zauważyli nie tylko Czytelnicy ligi, od pewnego czasu *Delta* ukazuje się na początku miesiąca, którego numer ma napisany na okładce. Dla ligi oznacza to, że (w szczególności) przerwa wakacyjna będzie w numerach 7 i 8. Napisaliśmy to w Regulaminie, ale tu o tym przypominamy.

## Matematyczne miniatury

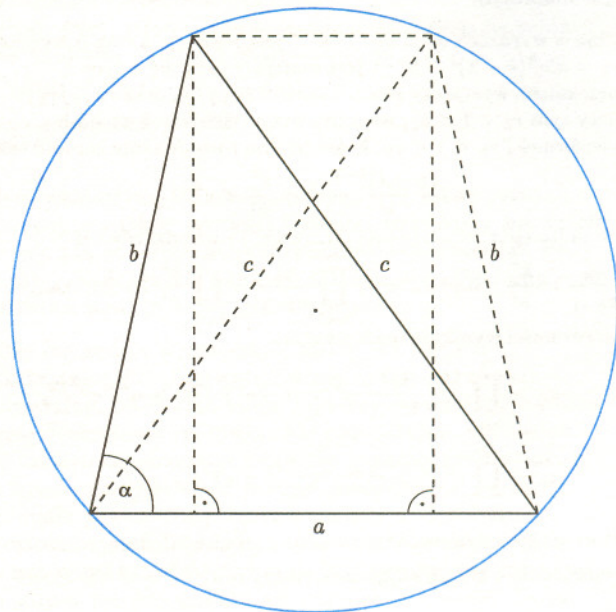
### Przykład 5

Z twierdzenia Ptolemeusza (iloczyn długości przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest równy sumie iloczynów długości boków przeciwległych, patrz *Delta* 8/1993, 1/1995) wynika twierdzenie kosinusów. Wystarczy przeanalizować rysunki.



$$c \cdot c = b \cdot b + a(a + 2b \cdot \cos(\pi - \alpha)),$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos \alpha.$$



$$c \cdot c = b \cdot b + a(a - 2b \cdot \cos \alpha),$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos \alpha.$$

W połączeniu z dowodem twierdzenia Ptolemeusza zamieszczonym w *Delcie* 8/1993 oznacza to, że twierdzenie Ptolemeusza i twierdzenie kosinusów są równoważne.

*Ciąg dalszy w numerze 3/1996.*

**L. Skrzypek** wykazuje, że podaną nierówność można wzmocnić do postaci

$$\max |a_k| \leq |c_1| + |c_2| + \dots + |c_n| + \max\{|c_0|, |c_{n+1}|\}$$

i zauważa, że rozumowanie jest słuszne także dla wielomianów o współczynnikach zespolonych (jeśli „podzielność” jest rozumiana jako podzielność w pierścieniu wielomianów nad  $\mathbb{C}$ ).

Dalej Autor dowodzi następującego uogólnienia (dowód długi): jeżeli  $d$  jest dowolną stałą większą od  $2/3$ , to dla dostatecznie dużych  $n \in \mathbb{N}$  założenia podane w treści zadania implikują oszacowanie

$$\max |a_k| \leq d \cdot (n+1) \cdot \max |c_j|$$

– oraz wyraża przypuszczenie, że analogiczna implikacja zachodzi dla dowolnej stałej  $d > 1/2$ , zauważając jednocześnie, że nie zachodzi ona dla żadnej stałej  $d < 1/2$ , o czym świadczy przykład:  $n = 2m - 1$ ,  $T(x) = x + x^2 + \dots + x^m$ ,

$$P(x) = (x^m - 1)T(x) = (x - 1)Q(x)$$

(w tym przypadku  $\max |c_j| = 1$ , natomiast  $\max |a_k| = a_m = m = (n+1)/2$ , co nietrudno sprawdzić). Kończąc pracę, Autor zapytuje o znane fakty z tej tematyki i ewentualne odsyłacze do literatury. Może ktoś z Czytelników...?

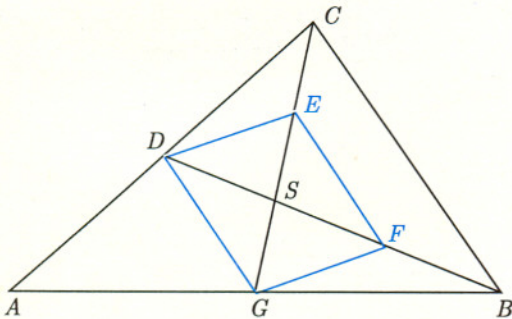
## Dorysowywanie (2)

W poprzednim *EPSILONIE* była mowa o tym, jak pomocne przy rozwiązywaniu zadań z geometrii elementarnej może być dorysowywanie. Metodą tą można też udowodnić rozmaite, znane twierdzenia geometryczne. Oto trzy przykłady:

- trzy środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie; punkt ten dzieli każdą ze środkowych w stosunku 2 : 1;
- odcinek łączący środki nierównoległych boków trapezu jest równoległy do podstaw trapezu, jego długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw;
- trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Oprócz odpowiednich rysunków konieczna jest też znajomość pewnych twierdzeń. Będziemy korzystać, na przykład, z takiego faktu: odcinek łączący środki boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest dwa razy mniejsza od długości trzeciego boku (nazwijmy go: twierdzenie o linii środkowej trójkąta).

Dowód twierdzenia o środku ciężkości może wyglądać tak. Narysujmy trójkąt  $ABC$  i dwie jego środkowe  $BD$  i  $CG$  przecinające się w punkcie  $S$  (rys. 1). W trójkącie  $CSB$  środki boków  $CS$  i  $BS$  oznaczmy  $E$  i  $F$ . Zauważmy, że w trójkącie  $ABC$  odcinek  $DG$  jest równoległy do odcinka  $BC$  i równy jego połowie, a w trójkącie  $CSB$  odcinek  $EF$  jest też równoległy do odcinka  $BC$  i także równy połowie jego długości. Czworokąt  $DEFG$  jest równoległobokiem, zatem przekątne jego przecinają się w połowie, co daje nam równość odcinków  $DS$  i  $SF$ . Z konstrukcji rysunku wiemy, że odcinki  $SF$  i  $FB$  są równe. Wykazaliśmy podział odcinka  $BD$  punktem  $S$  w stosunku 2 : 1. Analogicznie można wykazać podział pozostałych par środkowych. Istnieje tylko jeden punkt dzielący odcinek w stosunku 2 : 1, czyli wszystkie środkowe przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 1

Dla dowodu twierdzenia o linii środkowej w trapezie  $ABCD$  (środki ramion oznaczmy  $E$  i  $F$ ) narysujmy trójkąt, którego dwa wierzchołki to  $A$  i  $D$ , trzeci to punkt przecięcia półprostych  $AB$  i  $DF$  – oznaczmy go przez  $G$  (rys. 2). Zauważmy, że trójkąty  $DFC$  oraz  $FGB$  są przystające (równe są odcinki  $CF$  i  $FB$ , kąty  $DFC$ ,  $BFG$  oraz  $DCF$ ,  $FBG$ ). Przystawanie tych trójkątów daje nam równość boków  $DF$  i  $FG$ , skąd wynika, że odcinek  $EF$  jest linią

## Anegdoty egzaminacyjne

Ongiś pewien matematyk na wykładzie sformułował twierdzenie, mówiące o tym, że dwie własności są równoważne. Udowodnił jedną z implikacji, o drugiej zaś powiedział: „a w drugą stronę to jest oczywiste”. Studenci, rzecz jasna, ze zrozumieniem pokiwali głowami.

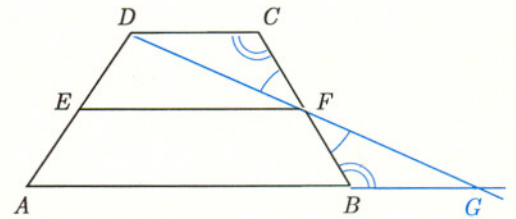
Do egzaminu studenci zaczęli się przygotowywać (tradycyjnie) dopiero wtedy, gdy zbliżała się sesja. I wówczas nikomu nie udało się nie tylko stwierdzić, dlaczego implikacja jest oczywista, ale nawet tego, dlaczego jest prawdziwa. Egzamin był zaś tak blisko, że nie wypadało pójść do wykładowcy i poprosić go o wyjaśnienie. W efekcie nikt odpowiedniego dowodu nie umiał.

Tak się jednak zdarzyło, że na egzaminie jeden ze studentów został zapytany o to właśnie nieszczęsne twierdzenie. Przeprowadził sprawnie dowód w jedną stronę, po czym (bo cóż miał robić?) rzekł: „a druga implikacja jest oczywista”.

Profesor głęboko się zastanowił, myślał przez dłuższą chwilę...

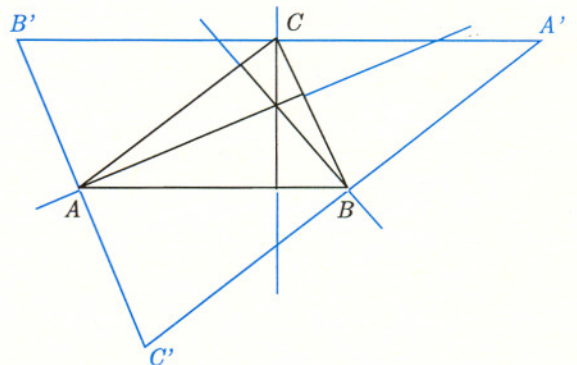
- Tak, ma pan rację.

środkową w trójkącie  $ADG$ . Odcinek  $EF$  jest równoległy do podstaw trapezu, długość odcinka  $EF$  równa jest połowie długości odcinka  $AG$ , ten zaś równy sumie długości  $AB + DC$  ( $BG = DC$  jako odpowiednie boki przystających trójkątów). I mamy już gotowy dowód.



Rys. 2

Udowodnijmy trzecie wymienione twierdzenie. Mamy dany trójkąt  $ABC$ . Poprowadźmy proste równoległe do boków trójkątów przechodzące przez przeciwległe wierzchołki – powstanie nowy trójkąt  $A'B'C'$ . Tak otrzymany rysunek (rys. 3) to cztery przystające trójkąty (z równoległości prostych wynika równość odpowiednich kątów w trzech dorysowanych trójkątach i wyjściowym; ponieważ trójkąty te mają parami wspólne boki, to wszystkie cztery trójkąty są przystające). Zakończmy dowód – wysokości trójkąta  $ABC$  są, oczywiście, zawarte w symetrycznych odpowiednich boków trójkąta  $A'B'C'$ , które to przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 3

Dla drobiazgowych Czytelników propozycja: Ile razy w powyższych dowodach użyto aksjomatu Euklidesa, czy korzystanie z niego zawsze było konieczne?

Danuta CIESIELSKA