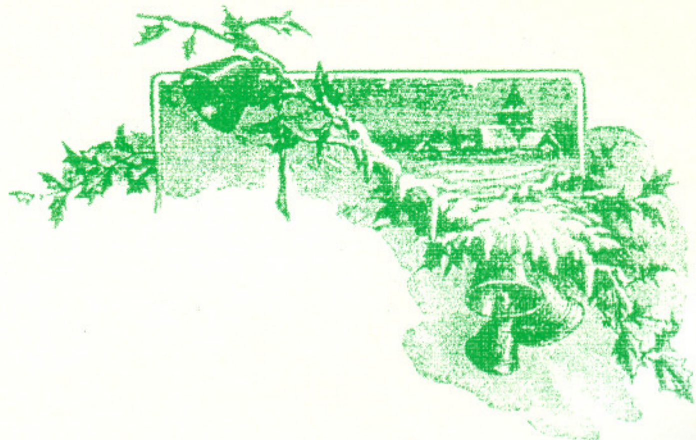


SPIS TREŚCI

NUMERU 12(259)

W następnym numerze:

Kometa kamikadze

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TEX wykonała Redakcja

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1996 roku wynosi 2 zł. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1996 r. 4 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na II kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.
3. Wpłaty na prenumeratę przyjmują na teren kraju:
   - a) jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób;
   - b) od osób zamieszkałych lub instytucji mających siedzibę w miejscowościach, w których nie ma jednostek kolportażowych RUCH, wpłaty należy wnosić na konto „RUCH" S.A. Oddział Warszawa w PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 lub w kasach Oddziału Warszawa, ul. Towarowa 28, czynnych codziennie od poniedziałku do piątku w godz. $8^{00} - 14^{00}$;
   dostawa w takim przypadku odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, tzn. „pod opaską".
4. Cena prenumeraty ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa od krajowej. Wpłaty przyjmuje „RUCH" S.A. na konto lub w kasach Oddziału. Dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty, z wyjątkiem zlecenia dostawy drogą lotniczą, której koszt w pełni pokrywa zamawiający.
5. Terminy przyjmowania wpłat na prenumeratę krajową i zagraniczną ze zleceniem dostawy za granicę od osób zamieszkałych w kraju:
   do 20 XI na I kwartał roku następnego,
   do 20 II na II kwartał,
   do 20 V na III kwartał,
   do 20 VIII na IV kwartał.
6. Zlecenia na prenumeratę dewizową, przyjmowane od osób zamieszkałych za granicą, realizowane są od dowolnego numeru w danym roku kalendarzowym.

Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela „RUCH" S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, ul. Towarowa 28, tel. 620-10-39, 620-10-19, 620-12-71 w. 2442, 2366.

Cena 1 egzemplarza 1 zł 50 gr, 15 000 zł

Męska szowinistyczna świnia

W bieżącym roku minęło sto lat od chwili, gdy pierwsza kobieta uzyskała w normalnym (czyli męskim) trybie doktorat z matematyki. Była to Grace Chisholm, Angielka. Doktorat uzyskała w Niemczech, w Getyndze. Praca doktorska dotyczyła rachunku różniczkowego funkcji rzeczywistych wielu zmiennych.

Doktorat taki był możliwy dlatego, że dwa lata wcześniej pruskie władze państwowe wydały zezwolenie na (eksperymentalne!) podejmowanie studiów w Getyndze przez kobiety. Z kolei w dwa lata po doktoracie Grace Chisholm przeprowadzono wśród stu najwybitniejszych profesorów uczelni niemieckich urzędową ankietę na temat dopuszczalności obecności kobiet na uczelniach. W jej wyniku okazało się to dopuszczalne (niewielką różnicą głosów). Tu nawet jest chwila na to, by się przez moment nie wstydzić: matematycy byli najbardziej prokobiecy; najbardziej zdecydowanymi antyfeministami okazali się historycy. Następne 20 lat, zakończone wojną światową, zapewniło kobietom – przynajmniej formalnie – wstęp na wyższe uczelnie: skoro mogły utrzymać cały świat na własnych barkach, podczas gdy mężczyźni zajmowali się wojaczką, nie można ich było zagnać z powrotem do kuchni.

Chyba jednak nikt nie przypuszcza, że obecnie pozycja kobiet – nawet w nauce – jest równorzędna pozycji mężczyzn. Młody Marks zauważył nawet, że również podczas aktu płciowego kobieta i mężczyzna nie robią tego samego – dlaczegóżby w nauce miało być inaczej? Aby się choć trochę pocieszyć, że są nadzieje na wyjście w tej sprawie ze stanu dzikości, nie od rzeczy jest rzucić okiem na to, co było przedtem.

Pierwsza kobieta w dziejach nauki – Hypatia – to męczennica. Zamiast szukać sobie chłopa, a potem wychowywać dzieci, zajmowała się matematyką, fizyką i astronomią (jak później *Delta*). Przypisuje się jej wynalazek areometru, astrolabium i planisfery. A przecież dobrzy ludzie mówili jej, że zajęcia takie przystoją tylko ladacznicom. Mówili, mówili, aż święty (wtedy jeszcze tylko arcybiskup) Cyryl – rzecz dzieje się w Aleksandrii – doradził im, by zołzę ukamienować. I rzeczywiście: poskutkowało.

Dalsze nasze koleżanki po fachu bez trudu można sobie przypomnieć – płonęły jaskrawym płomieniem na stosach praktycznie aż do 1700 roku. Nie warto więc wchodzić w szczegóły.

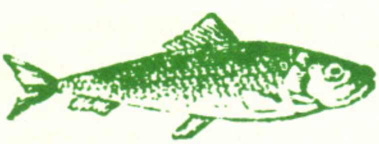
Trochę inaczej było w XVIII wieku. Taka np. madame du Châtelet przetłumaczyła *Principia* Newtona – w istocie jest to bardzo już nienaturalne zboczenie, by robić takie rzeczy podczas orgii z Voltairem (i jego kolegami!) – jeśli ktoś nie wierzy w to, że zajmowała się głównie orgiami, niech sięgnie po jakikolwiek film (może być nadawany półtora roku temu serial telewizyjny), gdzie jest o niej mowa, i się przekona. Potem zaraz była rewolucja i choć usunęła trochę tego rodzaju pań, to jednak innym stworzyła szersze pole działania.

Sophie Germain koniecznie chciała zostać matematykiem. Dopuściła się nawet oszustwa. Ponieważ było (nawet w rewolucyjnej Francji) niemożliwe, aby uczęszczała na zajęcia w École Polytechnique, więc namówiła (ciekawe, jak?) jednego ze studentów, by przynosił jej notatki i tematy prac domowych oraz podrzucał wykładowcom wykonane przez nią prace (podpisywała się – na ironię – Leblanc). Potrafiła zresztą usidlić również wybitnych uczonych, takich jak d'Alembert, Gauss czy Lagrange. Znana była z tego, że udowodniła, iż równanie $x^n + y^n \neq z^n$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych nie podzielnych przez n, gdy n jest nieparzystą liczbą pierwszą mniejszą od stu. Ale przecież już sto pięćdziesiąt lat później mężczyźni poszli w dowodzeniu Wielkiego Twierdzenia Fermata znacznie dalej. Zawróciła w głowie członkom Akademii Paryskiej do tego stopnia, że za pracę o wytrzymałości metali dali jej w 1816 roku Grand Prix. Ale sprawiedliwości stało się zadość – na tablicy wymieniającej wszystkich laureatów tej nagrody, umieszczonej na wieży Eiffla, jej nazwiska nie umieszczono.

Grace **Chisholm**, po zamążpójściu **Jung**, (1868–1953) – zajmowała się teorią funkcji rzeczywistych, równaniami różniczkowymi i teorią potencjału.

Hypatia, ($\sim$370–415) – podobno napisała komentarze do prac Apoloniusza i Diofantosa (ale na szczęście zaginęły); na pocieszenie ma krater na Księżycu i to z widocznej strony.

Sophie **Germain**, Francuzka, (1776–1831) – zajmowała się teorią liczb, matematyczną fizyką, teorią plastyczności metali, pisała również prace o roli nauki w rozwoju kultury.
Zadanie Germain: Wykazać, że dla każdego $a > 1$ liczba $a^4 + 4$ jest złożona.



Zofia **Kowalewska**, (1850–1891) – matematyk i fizyk działający w Niemczech, Francji, Szwecji i Rosji. Prace z analizy matematycznej, teorii kryształów (dwójłomność) i mechaniki ciał sztywnych. Pierwsza kobieta – profesor uniwersytetu. Również powieściopisarka. Też ma krater na Księżycu, ale z niewidocznej z Ziemi strony.

Maria **Skłodowska**, po zamążpójściu **Curie**, (1867–1934) – Polka, francuski fizyk i chemik, współtwórca podstaw promieniotwórczości, odkrywca radu i polonu, dwukrotny laureat Nagrody Nobla (1903 i 1911), prekursor badań radiomedycznych. Zmarła na białaczkę. Umieszczona przez Francuzów na ich banknocie o najwyższym nominale – 500 franków; w Polsce usunięta z banknotów w ramach tzw. denominacji.

Prawdziwa jednak afera rozegrała się za sprawą Rosjanki. Nie darmo pisarze rosyjscy XIX wieku malowali swoje rodaczki bawiące za granicą jako awanturnice w każdym sensie: tak ladacznice, jak i rewolucjonistki.

Zofia Korwin-Krukowska (herbu *Ślepowron*) – bo o niej będzie mowa – w jednej ze swych powieści maluje postać mającą wiele z jej własnych cech: nie powinno dziwić, że nadaje tej prawie-autobiografii tytuł *Nihilistka*. Malutka, okrąglutka osóbka postanowiła, że będzie koniecznie wielką uczoną. I mimo że nikt jej nie chciał dopuścić ani do nauki, ani – tym bardziej – do nauczania, dopięła swego. Najpierw znalazła sobie naiwnego młodego człowieka – Włodzimierza Kowalewskiego – który zawarł z nią fikcyjny ślub. Fikcyjny, by nie przeszkadzać jej w nauce, a ślub – by mogła swobodnie przebywać w męskim towarzystwie, co do uprawiania nauki jest, jak wiadomo, konieczne. Potem znalazła, cieszącego się w młodości bardzo złą reputacją wśród mężów, braci i ojców licznych kobiet, starca będącego na dodatek tytanem matematyki, Karla Weierstrassa. Natychmiast wkradła się w jego łaski (*przywracając go ponownie do życia*, jak pisze wielki matematyk niemiecki następnego pokolenia, Felix Klein) prezentując to, na co Weierstrass okazał się najbardziej łasy – duże wykształcenie i pomysłowość w matematyce. Do tego stopnia go zawojowała, że zaczął forsować pomysł, by za udowodnione przez nią twierdzenie o rozwiązalności równań cząstkowych dać jej doktorat. Na próżno Darboux, Hermite i inni próbowali nie zauważać ani Kowalewskiej, ani jej wyniku. Weierstrass się uparł i Kowalewska w 1874 roku doktorat otrzymała. Wprawdzie *in absentia*, ale *summa cum laude*.

A tak poważnie: czy nie jest przerażające, że udowodnienie najważniejszego twierdzenia teorii równań różniczkowych cząstkowych to było jeszcze za mało, by Kowalewską uznać za pełnowartościowego człowieka? Co więcej, twierdzenie to znajdujemy w literaturze jedynie jako *twierdzenie Cauchy'ego–Kowalewskiej*, choć Cauchy, starszy od Kowalewskiej o 61 lat, nie żył już wtedy od siedemnastu lat. Ale wróćmy do naszych baranów.

Jakby jej mało było doktoratu, i jakby Weierstrass nie był jej już potrzebny, wraca Kowalewska do Rosji i tam rodzi córkę jak normalna kobieta (zapomniała widać, że małżeństwo miało być fikcyjne). Ale gdy jej mąż umiera, znajduje sobie nową ofiarę – tym razem swego rówieśnika i również ucznia Weierstrassa, Göstę Mittag-Lefflera. Nie trzeba wspominać, że matematyk ten też miał zasłużenie zaszarganą opinię wśród strzegących cnoty córek i żon prawdziwych mężczyzn. Kowalewskiej załatwił drobiazg: została ona w 1884 roku profesorem zwyczajnym Uniwersytetu Sztokholmskiego. Do Akademii Szwedzkiej już się tej damy wepchnąć nie udało – jak słusznie zauważył jej sekretarz naukowy, profesor Lindhagen: *Gdy Akademia zacznie wybierać na swoich członków kobiety, to przy jakich żywych stworzeniach zdecyduje się zatrzymać?* Zamiast tego Kowalewska uzyskała w Paryżu (w 76 lat po Sophie Germain) nagrodę Bordena za pracę o obrotach ciała sztywnego (tzw. bąka niesymetrycznego), której dalszą część nagrodzili Szwedzi.

I umarła młodo. Ale nikogo nie zdziwi, że zdążyła „w międzyczasie" wziąć udział w Komunie Paryskiej. Czegóż innego można by się po osobie tego rodzaju spodziewać?

Tym razem zaraza nie dała się już powstrzymać. Dynamiczne panienki z Europy Wschodniej akurat w nauce wiodły prym: Julia Lermontowa uzyskała doktorat z chemii w tym samym roku co Kowalewska, Skłodowska uzyskała doktorat z fizyki dopiero w 1903 roku, lecz studia ukończyła na rok przed doktoratem Grace Chisholm. Ale dostała Nagrodę Nobla i to dwa razy – żeby było śmieszniej: pierwszą razem z doktoratem (laureatka Nobla może dostać doktorat nawet we Francji – w końcu to Szwedzi się pierwsi ośmieszyli).

I z kobietami w nauce trzeba się było rzeczywiście pogodzić. Ale dobra atmosfera wokół tej sprawy trwała. Znakomity matematyk polski z czasów jeszcze sprzed Polskiej Szkoły Matematycznej, Kazimierz Żorawski, musiał w związku ze Skłodowską opuścić Uniwersytet Jagielloński jako zły patriota.

W młodości bowiem romansował był z Marią, lecz na żądanie swoich rodziców zgodził się na rozstanie (dokładnie ta sama fabuła, co w *Trędowatej*, tylko tragedia innego rodzaju) i ona wyszła za Francuza. Pozbawił zatem Polskę – przynajmniej częściowo – wielkiej uczonej. Co gorsza, gdy ta owdowiała, patrzył spokojnie na jej romanse z Langevinem (mają one bodaj bogatszą literaturę niż fizyczne osiągnięcia Skłodowskiej). Musiał się więc Żorawski wynosić z Krakowa na warszawską Politechnikę. I dobrze mu tak: w marcu bieżącego roku w najwyższym majestacie państwowym Francuzi przenieśli prochy **swojej** największej uczonej do Panteonu. A swoją drogą dziwne, że się o Skłodowskiej mówi jak o worku jabłek.

⋆ ⋆ ⋆

Nie jest dla mnie zupełnie jasne, czy tego rodzaju tekst, jak powyższy, zostanie przyjęty we właściwy, z mojego punktu widzenia, sposób. Może ten i ów zrozumie z niego akurat nie to, co bym sobie życzył. Także moje Koleżanki. Jedne z nich przecież wygłaszają wykłady na międzynarodowych sympozjach Kobiet–Matematyków, inne za nic nie chciałyby być obecne na tego rodzaju imprezie, traktując ją, jak – nie przymierzając – wesołe miasteczko w Getcie.

Mam jednak wytłumaczenie. Dwóm zupełnie różnym gremiom (płci obojga) w ramach wykładu z historii matematyki i z okazji Dnia Kobiet (znów impreza bardzo dwuznaczna) opowiedziałem mniej więcej takie właśnie rzeczy, a może i więcej. I, ku swojemu zdumieniu, stwierdziłem, że sala przyjęła moje słowa ze zrozumieniem i w duchu takim, jak je mówiłem. Zdumiałem się, bo wiele wskazuje, że w tej akurat kwestii, czyli że nie tylko Murzyni, lecz także Żydzi, a nawet kobiety są ludźmi (proszę spojrzeć – tylko jedna z tych nazw pisze się po polsku małą literą), cofamy się, a nawet czynimy to z niejakim zapałem. Więc przekonać się, że przynajmniej na studiach nie jest tak źle i że jednak wychodzimy ze stanu dzikości, jest bardzo przyjemnie.

Marek KORDOS

P.S. Chyba nie jest konieczne wyjaśniać, gdzie wystąpiła w tym artykule tytułowa bohaterka.

MK

Rozwiązanie zadania M 758. Dla $k \in \{0,1,\ldots,9\}$ oznaczmy przez $\mathbf{w}_k$ wektor $[\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k\ \text{razy}},\ \underbrace{0,\ldots,0}_{9-k\ \text{razy}}]$. Łatwo sprawdzić, że dla $k,l \in \{0,1,\ldots,9\}$ iloczyn skalarny wektorów $\mathbf{w}_k$ i $\mathbf{w}_l$ jest równy $\mathbf{w}_k \circ \mathbf{w}_l = \min(k,l)$. Ponieważ dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y mamy

$$|x+y| - |x-y| = 2\operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y \cdot \min(|x|,|y|),$$

więc

$$\sum_{m=-9}^{9}\sum_{n=-9}^{9}(|m+n|-|m-n|)a_m a_n = 2\sum_{m=-9}^{9}\sum_{n=-9}^{9}\min(|m|,|n|)(\operatorname{sgn} m\cdot a_m)(\operatorname{sgn} n\cdot a_n) =$$

$$= 2\sum_{m=-9}^{9}\sum_{n=-9}^{9}(\operatorname{sgn} m\cdot a_m\cdot \mathbf{w}_{|m|})\circ(\operatorname{sgn} n\cdot a_n\cdot \mathbf{w}_{|n|}) = 2\left(\sum_{m=-9}^{9}\operatorname{sgn} m\cdot a_m\cdot \mathbf{w}_{|m|}\right)^2 \geq 0,$$

czego należało dowieść.

Uwaga. W podobny sposób dowodzi się, że niezależne zmienne losowe rzeczywiste X i Y o tym samym rozkładzie spełniają nierówność

$$E|X+Y| \geq E|X-Y|.$$

Rozwiązanie zadania M 757. Nie. Gdyby liczby x,y,z,t spełniały warunki zadania, to byłoby

$$1-(x^2+z^2+2y^2+2t^2) = $$
$$= \sqrt{2}(2xy+2zt-1)$$

i z niewymierności $\sqrt{2}$ wynikałoby, że

$$x^2+z^2+2y^2+2t^2 = 1$$

i

$$2xy+2zt = 1.$$

Zatem

$$(x-y\sqrt{2})^2+(z-t\sqrt{2})^2 = 1-\sqrt{2} < 0,$$

co nie jest prawdą.

Kolejny bastion samców zdobyty

Za sprawą słynnego Michaela Faradaya, od 1826 roku na uniwersytecie w Oxfordzie odbywają się doroczne *Królewskie Bożonarodzeniowe Wykłady dla Dzieci*. Jak podaje *Oxford Today*, **7**, no. 2 (1995), dopiero w zeszłym roku, po 168 latach nieprzerwanej męskiej dominacji, konserwatywni Brytyjczycy dopuścili (ciśnie się na usta pytanie: przez nieuwagę?) do tego, by wygłosiła je kobieta.

Seria pięciu wykładów dr Susan Greenfield nosiła tytuł *Podróże do centrum mózgu* i była też transmitowana przez BBC. Dr Greenfield twierdzi, że „... jeśli chodzi o nasze zrozumienie świadomości, to ciągle jesteśmy w średniowieczu. Nie umiemy nawet postawić odpowiednich pytań, nie mówiąc o odpowiedziach."

Pozostaje tylko dodać: świadomość samca rzeczywiście nie zawsze łatwo zrozumieć...

P.S.

Twierdzenie słynnej Rosjanki

Paweł STRZELECKI

Kto przeczytał już artykuł Marka Kordosa o męskiej szowinistycznej świni, wie, że Zofia Kowalewska zdobyła (tak właśnie: nie *napisała*, nie *zrobiła*, ale *zdobyła*) doktorat dowodząc słynnego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tzw. zagadnienia początkowego Cauchy'ego dla równań cząstkowych z analitycznymi współczynnikami. Spróbujemy opowiedzieć zainteresowanym Czytelnikom, co to za twierdzenie, a niedowiarków przekonać o doniosłości pracy Kowalewskiej.

Czytelnicy *Delty* mieli okazję spotkać się z przestrzenią $\mathbf{R}^m$ w n-rze 6/1995, w artykule D. Kołodziejczyk *Słynny problem Borsuka rozstrzygnięty*. Jeśli $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, to

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}$$

jest odległością x od początku układu współrzędnych. Jeśli $x, y \in \mathbf{R}^m$, to ich odległość $d(x, y)$ określamy wzorem $d(x, y) = \|x - y\|$. Wprowadzenie odległości pozwala mówić o kulach i zbiorach otwartych (domkniętych).

Na początek – trochę notacji. Po pierwsze, dla m naturalnego przez $\mathbf{R}^m$ oznaczymy m-wymiarową przestrzeń euklidesową z ustalonym kartezjańskim układem współrzędnych.

Grecką literą α będziemy oznaczać tzw. *wielowskaźniki*, albo – jak mawiają zwolennicy marszu do Europy – *multiindeksy*. Taki wielowskaźnik to uporządkowana m-ka liczb całkowitych nieujemnych, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Długość wielowskaźnika α, oznaczana zwykle przez $|\alpha|$, to suma wszystkich jego współrzędnych, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$. Dla $x \in \mathbf{R}^m$ piszemy (po to, żeby nie marnować papieru) $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$.

Jeśli funkcja f zależna od m zmiennych rzeczywistych $x \in \mathbf{R}^m$ jest gładka (tzn. ma ciągłe pochodne wszystkich rzędów), to jej pochodne cząstkowe oznaczamy dla krótkości w następujący sposób:

$$D_x^\alpha f := \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} f\,.$$

To znaczy, że funkcja $D_x^\alpha f$ powstaje z f przez α_1-krotne zróżniczkowanie względem x_1, α_2-krotne zróżniczkowanie względem x_2, ..., i wreszcie α_m-krotne zróżniczkowanie względem x_m.

Na przykład, jeśli $m = 3$, a $f(x) = x_1 x_2 x_3 + x_2 (x_3)^3$, to

$$D_x^{(0,1,2)} f(x) = 6x_3\,.$$

I ostatnia definicja: powiemy, że funkcja f jest analityczna w zbiorze otwartym $U \subset \mathbf{R}^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt $x \in U$ jest środkiem takiej kuli $B \subset U$, że dla wszystkich $y \in B$ mamy

$$f(y) = \sum_\alpha a_\alpha (y - x)^\alpha\,,$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie możliwe wielowskaźniki α, a współczynniki a_α są rzeczywiste (lub zespolone, gdy rozpatrujemy funkcje o wartościach zespolonych). Równoważnie można powiedzieć, że funkcje analityczne to takie funkcje, które są sumami zbieżnych szeregów potęgowych (albo, co na jedno wychodzi, swoich szeregów Taylora).

Funkcją analityczną jest np. każdy wielomian. Wbrew pozorom, nie wszystkie funkcje gładkie są analityczne. Jeśli $f(x) = \exp(-1/x^2)$ dla $x \neq 0$ i $f(x) = 0$ dla $x = 0$, to f jest gładka, ale nie jest analityczna. Szereg Taylora f w zerze jest bowiem zerowy (proszę sprawdzić!), lecz f nie znika w otoczeniu zera.

Uff! Po tym wstępie możemy nareszcie przejść do sedna sprawy. Niech u, $w_{\alpha,j}$ oraz F będą funkcjami $m+1$ zmiennych rzeczywistych (x, t), gdzie $x \in \mathbf{R}^m$, a $t \in \mathbf{R}$. Rozważymy tzw. *równanie cząstkowe typu Kowalewskiej*,

$$(1) \qquad \frac{\partial^k u}{\partial t^k}(x, t) = \sum_{\substack{|\alpha|+j \le k \\ j \le k-1}} w_{\alpha,j}(x, t) \frac{\partial^j D_x^\alpha u}{\partial t^j}(x, t) + F(x, t)\,.$$

Nietrudno podać przykład równania, które nie jest typu Kowalewskiej. Wystarczy po prawej stronie wpisać mieszane pochodne odpowiednio wysokiego rzędu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} + F(x, t)\,.$$

W powyższym równaniu funkcje F i $w_{\alpha,j}$ traktujemy jako dane, a funkcję u jako niewiadomą. Czytelnik zechce zwrócić uwagę na fakt, że po prawej stronie równania nie występują pochodne funkcji u rzędów wyższych niż k ani pochodne względem zmiennej wyróżnionej t rzędów wyższych niż $k-1$.

Jak to zwykle w teorii równań różniczkowych bywa, równanie (1) uzupełniamy dodatkowymi warunkami (tzw. warunkami Cauchy'ego) po to, by zagwarantować jednoznaczność rozwiązania u. Ponieważ równanie jest rzędu k, to prosta intuicja podpowiada, iż trzeba dodać k warunków (*k-krotne całkowanie wymaga k-krotnego podjęcia decyzji o wyborze stałej*). Przypuśćmy więc, że na hiperpłaszczyźnie $t = 0$ w przestrzeni $\mathbf{R}^{m+1}$ zadane są funkcje $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$ (każda z nich zależy od m zmiennych $x \in \mathbf{R}^m$). Zakładamy, że

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(x, 0) = \varphi_j(x) \qquad \text{dla } j = 0, 1, \ldots, k-1 . \tag{2}$$

Twierdzenie (Zofia Kowalewska). *Oznaczmy przez $\Omega_{R,T}$ zbiór w kształcie walca,*

$$\Omega_{R,T} = \{(x,t) \in \mathbf{R}^{m+1} \ : \ \|x\| < R, |t| < T\} .$$

Jeśli wszystkie funkcje $w_{\alpha,j}$ oraz F są analityczne w $\Omega_{R,T}$, a funkcje φ_j są analityczne w $\Omega_{R,T} \cap \{t = 0\}$, to istnieją liczby $R_1 \in (0, R)$ i $T_1 \in (0, T)$ oraz funkcja u analityczna w walcu Ω_{R_1,T_1}, która spełnia równanie (1) oraz warunki Cauchy'ego (2) dla $|t| < T_1$ i $\|x\| < R_1$.

Z twierdzenia Kowalewskiej wynika istnienie rozwiązań całej masy równań różniczkowych cząstkowych, które napotykamy w fizyce matematycznej. Jest wśród nich m.in. równanie drgającej struny i membrany, równanie przewodnictwa ciepła, sławne równanie Schrödingera i równania dynamiki gazów.

Znane obecnie dowody tego twierdzenia są zdecydowanie zbyt trudne i długie na to, by w całości przedstawić na łamach *Delty* choćby jeden z nich. Wspomnimy jedynie o pomysłach, na których opierają się dwa różne dowody.

Pierwszy pomysł polega na tym, by wykorzystać warunki (2) oraz równanie (1) do obliczenia, jakie wartości powinny mieć w punkcie $x = 0$, $t = 0$ wszystkie możliwe pochodne cząstkowe rozwiązania u. (To nietrudna część dowodu: Czytelnicy mogą samodzielnie wymyślić, jak to zrobić). Znajomość pochodnych funkcji u w zerze umożliwia wypisanie, jaki powinien być szereg Taylora u. I to prawie koniec, z jednym tylko „drobiazgiem" – trzeba się bardzo solidnie namęczyć: ów wypisany bez większych kłopotów szereg Taylora powinien być zbieżny na pewnym zbiorze *otwartym* zawierającym początek układu w $\mathbf{R}^{m+1}$.

Dowód twierdzenia Kowalewskiej można bez przeszkód uogólnić na przypadek, gdy prawa strona równania zależy od funkcji u i jej pochodnych w sposób nieliniowy. Można też udowodnić (tak samo) odpowiednie twierdzenie dla układów równań różniczkowych cząstkowych. Pozwala to bardzo rozszerzyć listę zastosowań twierdzenia Kowalewskiej.

Inny możliwy dowód to naśladowanie tzw. metody kolejnych przybliżeń stosowanej zazwyczaj w dowodzie twierdzenia Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla równania różniczkowego zwyczajnego (takiego, w którym występują tylko funkcje zależne od jednej zmiennej). I tu jednak sytuacja znacznie się komplikuje: zamiast jednej przestrzeni Banacha, która w pełni wystarcza do dowodu twierdzenia Cauchy'ego dla równań zwyczajnych, dowodzenie twierdzenia (Cauchy'ego?–)Kowalewskiej wymaga dłuższych męczarni z nieskończoną rodziną przestrzeni Banacha.

Ktoś dobrze zaprzyjaźniony z tytułową bohaterką (dalej w skrócie m.s.ś.) artykułu Marka Kordosa rzuci być może w tym momencie:
No dobrze, może nawet Kowalewska wcale nie przepisywała ze starych rękopisów Cauchy'ego. Ale co to za sztuka udowodnić twierdzenie, skoro przyjęła bardzo silne założenia o analityczności współczynników? A tak w ogóle, to pewnie jedyna kobieta, która zdołała cokolwiek zdziałać w trudnej i ważnej teorii równań cząstkowych.

Takiego stwierdzenia nie można zostawiać bez odpowiedzi.

Dokładniej, istotne jest założenie o analitycznej zależności współczynników od zmiennej x. Jeśli chodzi o zależność od t, to wystarczy zakładać, że jest ona ciągła.

Po pierwsze, wiele lat po śmierci Kowalewskiej okazało się, że założenie o analityczności współczynników w jej twierdzeniu jest istotne. Pierwszy przykład układu liniowych równań różniczkowych cząstkowych o gładkich współczynnikach, nie mającego żadnego rozwiązania, podał w 1957 roku amerykański matematyk Hans Lewy. Inni matematycy, m.in. François Treves

i Louis Nirenberg, podali poźniej przykłady znacznie prostsze od tego, który wymyślił Lewy. Jest wśród efektów ich pracy jeden przykład szczególnie prosty i elegancki.

Przykład. Niech f będzie funkcją gładką o zwartym nośniku dwóch zmiennych rzeczywistych $(x,t) \in \mathbf{R}^2$. Załóżmy, że $f(x,t) = f(x,-t)$ i $f(x,t) \geq 0$ dla wszystkich x i t. Przypuśćmy ponadto, że nośnik funkcji f (tzn. domknięcie zbioru tych punktów (x,t), dla których $f(x,t) \neq 0$) jest rozłączny z prostą $\{t = 0\}$. Kto chce, może sobie wykres takiej funkcji wyobrażać jako dwa symetryczne kapelusze położone z dala od siebie na stole.

Okazuje się, że dla takiej funkcji f tzw. równanie Mizohaty

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + it\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(x,t) \tag{3}$$

(i oznacza tu liczbę zespoloną spełniającą równanie $i^2 = -1$) nie ma **żadnego** rozwiązania. Wspomnijmy jednocześnie, że gdy f zależy od zmiennej t w sposób nieparzysty, to wtedy równanie Mizohaty ma rozwiązania.

Oto szkic dowodu nieistnienia rozwiązań równania (3). Dowodzimy przez sprowadzenie do sprzeczności.
1. Jeśli istnieje rozwiązanie u, to istnieje też rozwiązanie u_1 zależne od t w sposób nieparzysty.
2. Jeśli $s = t^2/2$, to na zbiorze $G = \{f = 0\}$ funkcja u_1 zależy od zmiennej $z = s + ix$ w sposób analityczny.
3. $u_1 \equiv 0$ na zbiorze G.
4. Całka z u_1 po brzegu G powinna więc znikać, ale gdy zastosujemy tw. Stokesa i przypomnimy sobie własności f, to okaże się, że $0 \neq 0$.

Czytelnicy, którzy znają twierdzenie Stokesa, mogą przeczytać wskazówki na marginesie i po samodzielnym wykonaniu półstronicowego rachunku przekonać się, że dla opisanych wyżej funkcji f równanie (3) istotnie nie ma żadnego rozwiązania.

Jeśli zaś chodzi o drugi zarzut przyjaciół m.s.ś., to Kowalewska wcale nie była jedyną kobietą osiągającą znaczące wyniki w teorii równań różniczkowych cząstkowych. Lista nazwisk pań, którą można by tu szermować, jest długa. Dość wspomnieć dwie inne Rosjanki, Olgę Ładyżeńską i Ninę Uralcewą: licząca sobie około trzydziestu lat ich potężna monografia jest stale cytowana w setkach prac. Po drugiej stronie Atlantyku też mają się czym pochwalić. W ubiegłym roku Susan Friedlander zorganizowała w MIT niezwyczajną dwudniową konferencję: w roli mówców występowały na niej tylko kobiety (takie, które wcale nie potrzebują korzystać z pomocy feministów, by otrzymywać zaproszenia do wystąpień na Międzynarodowych Kongresach Matematyków). Połowa referatów dotyczyła w różny sposób właśnie teorii równań różniczkowych cząstkowych. Cathleen Morawetz mówiła o równaniu falowym, Jean Taylor o równaniach różniczkowych opisujących powierzchnie poruszające się w przestrzeni $\mathbf{R}^3$, a Chuu-Lian Terng i Karen Uhlenbeck – o nieliniowych równaniach różniczkowych występujących w geometrii różniczkowej.

Pod rezultatami Uralcewej, Taylor, Morawetz czy Uhlenbeck chętnie podpisałaby się niejedna m.s.ś. Zamiast zakończenia będzie więc historyjka. W 1986 roku autor niniejszego tekstu, na polecenie opiekuna swej pracy magisterskiej, studiował artykuł pewnego niemieckiego matematyka, świeżo opublikowany w znanym włoskim czasopiśmie. Niemiec ów (jego nazwisko okryjmy tutaj milczeniem) uogólniał i rozszerzał w swej pracy pewne twierdzenie Karen Uhlenbeck pochodzące z 1977 roku, opisując przy okazji jego historię. W 1983 roku amerykański matematyk Craig Evans opublikował krótki, elegancki dowód pewnego prostego wariantu twierdzenia Uhlenbeck. W artykule owego Niemca natrafić można na zdanie: „Uralcewa udowodniła twierdzenie Evansa w 1968 roku."

Prace Jean Taylor należą do modnej ostatnio *teorii ewolucji geometrycznej*. Oto przykład problemu z tej dziedziny: opisać ruch błony mydlanej rozpiętej na drucianym konturze, którą na chwilę (np. dmuchnięciem) wyprowadzono z położenia stabilnej równowagi.

Metody tej teorii stosują się – o dziwo – w metalurgii oraz do opisu procesów wzrostu kryształów.

Rok 1968 to piętnaście lat wcześniej od publikacji Evansa. Kto więc i kiedy udowodnił czyje twierdzenie? Panowie: mniej śpijmy, mniej jedzmy, a więcej pracujmy. I ważmy nasze sądy i słowa.

Symetrie i prawa zachowania

Jan KALINOWSKI, Krzysztof REJMER

W 1918 r. Emma Noether (1885–1935) sformułowała i udowodniła twierdzenie, zwane dzisiaj twierdzeniem Noether, dzięki któremu na trwałe wpisała się do fizyki. Twierdzenie to łączy zasady zachowania różnych wielkości fizycznych z określonymi symetriami układu. I tak, na przykład, zasada zachowania pędu wiąże się z symetrią względem przesunięć, momentu pędu – z symetrią względem obrotów, a energii – z symetrią względem przesunięć w czasie.

Podstawowymi pojęciami tego twierdzenia są ciągłe, różniczkowalne grupy transformacji (zwane grupami Liego) oraz wielkość fizyczna zwana lagranżjanem.

Lagranżjan danego układu fizycznego $\mathcal{L}(\psi(x), \partial_\mu\psi(x))$ jest funkcją zmiennych dynamicznych opisujących ten układ, $\psi(x)$, i ich pochodnych $\partial_\mu\psi(x) \equiv \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}$ względem $x^\mu = (t, \vec{x})$.

Przykładowo – w mechanice klasycznej punktu materialnego o masie m x – to czas t, $\psi(x)$ – położenie punktu w danej chwili $\vec{r}(t)$, a $\partial\psi(x)$ – to jego prędkość $\dot{\vec{r}} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$. Jeśli punkt znajduje się w polu siły potencjalnej $\vec{F}$, gdzie $F_i = -\partial V(\vec{r})/\partial r_i$, to lagranżjan jest równy różnicy energii kinetycznej i potencjalnej $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\dot{\vec{r}}^2/2 - V(\vec{r}, t)$.

Lagranżjan odgrywa w fizyce olbrzymią rolę, gdyż korzystając z tzw. zasady najmniejszego działania mówiącej, że fizycznemu procesowi odpowiadają takie konfiguracje $\psi(x)$, dla których całka z lagranżjanu $S(\psi) = \int \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi)\,\mathrm{d}x$ (zwana działaniem) przyjmuje wartość minimalną, można z postaci lagranżjanu wyprowadzić równania opisujące dynamikę układu – tak zwane równania Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\,\partial_\mu\psi} = 0\,. \tag{1}$$

Będziemy stosować konwencję, że po wskaźniku powtarzającym się (we wzorze powyżej – μ) wykonujemy sumowanie.

Dla punktu materialnego równanie Eulera-Lagrange'a (r. E-L) można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}_i} = 0\,.$$

Jeśli $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\dot{\vec{r}}^2/2 - V(\vec{r}, t)$, to r. E-L przyjmuje dobrze znaną postać równania Newtona $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$.

Grupy Liego to grupy transformacji w r-wymiarowej przestrzeni funkcji $\psi^a(x)$, $(a = 1, \ldots, r)$, które można zadać za pomocą n-parametrowej algebry Liego, to znaczy po dowolnej (ale zadanej) transformacji funkcji $\psi \longrightarrow \psi'$ wynik można przedstawić jako

$$\psi'^a(x) = (\exp(-i\varepsilon_i T_i))^a_b\ \psi^b(x)\,, \tag{2}$$

gdzie T_i $(i = 1, \ldots, n)$ są r-wymiarowymi, niezależnymi od parametrów ε_i macierzami zwanymi generatorami. Generatory spełniają relacje komutacyjne

$$[T_i, T_j] = T_i T_j - T_j T_i = i\, f_{ijk} T_k\,, \tag{3}$$

a f_{ijk} są stałymi zwanymi stałymi struktury grupy. Parametry ε_i opisują poszczególne elementy grupy Liego i pełnią rolę współrzędnych tych elementów, przy czym jest ich tyle, ile jest generatorów grupy.

Jeśli pewne transformacje g: $\psi^a \longrightarrow \psi'^a$ nie zmieniają postaci lagranżjanu, $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi) \equiv \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi')$, to mówimy, że lagranżjan jest niezmienniczy, a transformację g nazywamy transformacją symetrii $\mathcal{L}$.

Możemy teraz sformułować twierdzenie Noether:
Z każdą ciągłą, n-parametrową grupą transformacji symetrii lagranżjanu wiąże się prawo zachowania dokładnie n wielkości fizycznych.
Rozpatrzmy bowiem lagranżjan będący niezmiennikiem pewnej grupy transformacji g: $\psi^a(x) \rightarrow \psi'^a(x) = \psi^a(x) + \delta\psi^a(x)$. Gdy transformacje są infinitezymalne (bliskie tożsamości), możemy napisać $\delta\psi^a(x) = -i\varepsilon_i (T_i)^a_b \psi^b(x)$. Dla pochodnej mamy $\delta\,\partial_\mu\psi^a(x) = \partial_\mu\,\delta\psi^a(x)$. (Rozpatrujemy jedynie – dla uproszczenia – tak zwane transformacje globalne, gdzie ε_i nie zależą od x – dla transformacji lokalnych $\varepsilon(x)$ dowód jest trudniejszy.) Wówczas zmiana lagranżjanu wynosi

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^a}\delta\psi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi^a}\delta\partial_\mu\psi^a = \\ &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^a} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi^a}\right)\delta\psi^a + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi^a}\delta\psi^a\right), \end{aligned} \tag{4}$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru na różniczkowanie iloczynu.

Załóżmy teraz, że lagranżjan jest niezmienniczy względem przesunięć o dowolny wektor $\vec{u} = (u, 0, 0)$ wzdłuż osi x, to znaczy $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \mathcal{L}(\vec{r} + \vec{u}, \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{u}})$. Jest to możliwe, gdy potencjał nie zależy od składowej x, to znaczy, gdy nie działają siły o niezerowej x-owej składowej. W tym przypadku człon $\delta\psi^a$ przyjmuje postać $\vec{u}$, a $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi^a} \rightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}}$. Prawo zachowania ma więc postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\dot{x}\,,$$

to znaczy, że składowa x-owa pędu jest stałą ruchu.

Pierwszy wyraz znika na mocy równania Eulera–Lagrange'a. Drugi wyraz możemy zapisać w następującej postaci

$$\varepsilon_i \partial_\mu j_i^\mu = 0\,, \tag{5}$$

gdzie

$$j_i^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi^a} (T_i)^a_b \psi^b\,. \tag{6}$$

Ponieważ parametry ε_i są dowolne, to dostajemy n zachowanych wielkości j_i^μ $(i = 1, \ldots, n)$. Na marginesie poprzedniej strony ilustrujemy nasze dość formalne przekształcenia na przykładzie mechaniki klasycznej punktu materialnego z symetrią względem przesunięć.

Poszukiwania praw zachowania w fizyce można więc sprowadzić do poszukiwania symetrii lagranżjanu opisującego dany układ fizyczny. I na odwrót – znając z doświadczenia symetrię układu, możemy łatwiej skonstruować lagranżjan i tym samym wyprowadzić równania opisujące ten układ. Na przykład odkrycie pełnej symetrii równań elektryczności i magnetyzmu pozwoliło Maxwellowi na sformułowanie jednolitej teorii elektromagnetyzmu. Podobnie sto lat później odkrycie symetrii kwantowej teorii elektromagnetyzmu i teorii oddziaływań słabych (odpowiedzialnych, na przykład, za rozpad β neutronu) doprowadziło do stworzenia jednolitej teorii oddziaływań elektrosłabych.

Bez przesady można powiedzieć, że twierdzenie, które zawdzięczamy Emmie Noether, stało się jednym z podstawowych narzędzi współczesnej fizyki.

W elektrodynamice pole elektromagnetyczne opisywane jest dwoma polami wektorowymi: natężenia pola elektrycznego $\vec{E}(\vec{r}, t)$ i indukcji magnetycznej $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Oba pola można także określić za pomocą potencjałów: skalarnego $\varphi(\vec{r}, t)$ i wektorowego $\vec{A}(\vec{r}, t)$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\,,$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = rot\vec{A}\,.$$

Te potencjały nie są określone jednoznacznie. Transformacja

$$\varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}\,,$$

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla f\,,$$

gdzie f jest dowolną funkcją $\vec{r}$ i t, nie zmienia pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$. Jest więc transformacją symetrii. Jest to przykład transformacji lokalnej, gdyż zależy od punktu w przestrzeni i chwili czasu. Nosi ona nazwę symetrii cechowania i związana jest z nią zasada zachowania ładunku elektrycznego.

Brak symetrii

Jan KALINOWSKI, Krzysztof REJMER

Chien Sien Wu (urodzona w 1913 r. w Szanghaju, ale pracująca w USA) przeszła do historii fizyki dzięki przeprowadzeniu doświadczenia wykazującego brak symetrii prawo-lewo w mikroświecie.

Pojęcie symetrii w fizyce odgrywa olbrzymią rolę (patrz artykuł „Symetrie i prawa zachowania"). Żądanie symetrii układu prowadzi do daleko idących konsekwencji. Na przykład: z symetrii sferycznej oddziaływania kulombowskiego wynika w dużym stopniu struktura tablicy okresowej Mendelejewa, a istnienie antycząstek wynika z teorii Diraca zbudowanej na podstawie żądania relatywistycznej niezmienniczości teorii.

Jedną z symetrii dyskutowaną od zarania dziejów jest symetria odbicia przestrzennego – zamiany strony prawej na lewą i na odwrót, którą będziemy nazywali symetrią prawo-lewo. W życiu codziennym bardzo rzadko napotykamy sytuacje, które mają idealną symetrię prawo-lewo. W szczególności od czasu badań Pasteura w 1848 r. wiadomo, że substancje organiczne, których cząsteczki mogą występować w dwóch postaciach będących wzajemnym lustrzanym odbiciem, w naturalny sposób powstają tylko w jednej z nich, natomiast syntetyzowane sztucznie produkowane są w obu wersjach.

W odróżnieniu od życia codziennego prawa fizyki wykazują idealną symetrię prawo-lewo. W mechanice kwantowej istnienie symetrii prawo-lewo prowadzi do istnienia pewnego prawa zachowania. Układom fizycznym można przypisać pewną liczbę kwantową zwaną parzystością, która jest zachowana, co pozwala

Rozwiązanie zadania F 417. Zgodnie ze wzorem Laplace'a ciśnienie we wnętrzu bańki wynosi

$$p = \frac{4\sigma}{r}\,,$$

gdzie r jest promieniem bańki. Wynika stąd, że

$$pV^{1/3} = \text{const}\,.$$

Posługując się powyższym równaniem, równaniem stanu gazu doskonałego

$$pV = NRT$$

oraz pierwszą zasadą termodynamiki

$$Nc_V\,dT = Nc_X\,dT - p\,dV$$

znajdujemy szukane ciepło właściwe

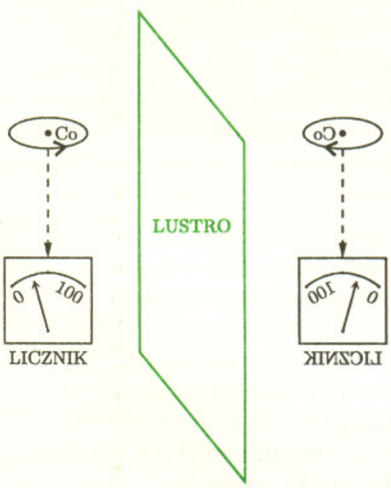
$$c_X = c_V + \frac{3}{2}R\,,$$

gdzie c_V jest ciepłem właściwym gazu przy stałej objętości.

wykluczyć pewne procesy, w których ta liczba ulegałaby zmianie. Prawo zachowania parzystości okazało się bardzo przydatne przy analizie widm atomowych, a później pojęcie parzystości i zasada jej zachowania zostało rozciągnięte na obszar fizyki jądrowej i cząstek elementarnych.

W pierwszej połowie lat 50. fizycy natrafili na pewien paradoks zwany paradoksem $\theta - \tau$. Dzisiaj wiemy, że θ i τ to ta sama cząstka zwana mezonem K, ale wtedy wiedziano jedynie, że θ rozpadała się na dwie cząstki zwane mezonami π, a τ rozpadała się na trzy mezony π. Układ dwóch mezonów π ma parzystość dodatnią, a trzech – ujemną. Jeśli parzystość jest zachowana, to θ i τ muszą się różnić; z drugiej strony, w wyniku długotrwałych badań stwierdzono, że poza rozpadami cząstki θ i τ zachowują się identycznie.

Rozwiązanie tego paradoksu zawdzięczamy T.D. Lee i C.N. Yangowi, którzy wysunęli radykalną hipotezę, że parzystość nie jest zachowana w procesach słabych, takich jak rozpad β neutronu czy też rozpad $\theta - \tau$. Ta śmiała hipoteza przyniosła jej autorom Nagrodę Nobla. Lee i Yang stwierdzili, że prawo zachowania parzystości, testowane wielokrotnie w oddziaływaniach elektromagnetycznych i jądrowych, nie było bezpośrednio sprawdzone w oddziaływaniach słabych i wiara w zachowanie parzystości w tych oddziaływaniach opierała się na stwierdzeniu: *bo nie może być inaczej*. Jeśli jednak parzystość w nich nie jest zachowana, to cząstki θ i τ mogą być jedną cząstką, która może rozpadać się na stany o różnej parzystości i nie ma w tym żadnego paradoksu.



Aby sprawdzić hipotezę niezachowania parzystości, należy zbudować dwa różne układy fizyczne będące wzajemnym lustrzanym odbiciem, w których zachodzą oddziaływania słabe. Jeśli wyniki eksperymentów przeprowadzonych w tych układach będą się różnić, to jest to dowód niezachowania parzystości. Wolfgang Pauli gotów był się założyć nawet o dużą sumę, że wynik zawsze będzie identyczny. Pierwszy tego typu eksperyment został przeprowadzony pod kierunkiem pani Chien Sien Wu. Rysunek przedstawia ideowy schemat układu doświadczalnego. W doświadczeniu zliczane były przypadki rozpadu β jąder kobaltu Co^{60}. Zwróćmy uwagę, że prąd płynący w pętli okrążającej jądro kobaltu jest istotnym elementem układu, gdyż bez niego oba układy byłyby identyczne i musiałyby dać identyczne wyniki. Aby wpływ prądu na jądra kobaltu był przez nie odczuwany, należało wyeliminować wpływ zakłóceń wywoływanych przez wzbudzenia termiczne. Dlatego też eksperyment należało przeprowadzić w bardzo niskiej temperaturze, rzędu 0,01 kelwina. Wyniki eksperymentów przeprowadzonych przez zespół pani Wu pokazały bardzo dużą różnicę w zliczeniach liczników pokazanych na rysunku, jednoznacznie wykazując brak symetrii prawo-lewo w oddziaływaniach słabych. Łamanie symetrii zwierciadlanej wiąże się także z naruszeniem innych symetrii. Na gruncie relatywistycznej teorii pola Lüders i Pauli udowodnili słynne twierdzenie CPT, zgodnie z którym prawa przyrody rządzące mikroświatem są niezmiennicze względem złożenia trzech symetrii: odbicia zwierciadlanego P, odwrócenia biegu czasu T i sprzężenia ładunkowego (tzn. zamiany cząstki na antycząstkę) C, co w symbolicznym języku zapisuje się równaniem: $CPT = 1$. Oznacza to, że złamanie jednej z tych trzech symetrii pociąga za sobą złamanie którejś z pozostałych.

Odkrycie niezachowania parzystości było szokiem i jednocześnie silnym impulsem w rozwoju fizyki. Odżyła hipoteza struktury neutrina stworzona przez Hermanna Weyla (jeszcze w 1929 r.) na bazie prostoty i elegancji rozumowania matematycznego, a odrzucona z powodu braku symetrii prawo-lewo. Jak powiedział Weyl w 1952 r. (a więc na kilka lat przed odkryciem niezachowania parzystości), asymetria rzadko jest po prostu brakiem symetrii. Nie może być przypadkiem, że Natura zdradza siebie częściowo dla piękna rozumowania matematycznego.

Cefeidy i kosmiczne odległości

Tomasz KWAST

To, co nazywamy odkryciem, ma zazwyczaj autora i datę. Tymczasem gromadzenie wiedzy o budowie naszej Galaktyki lub odległościach galaktyk sąsiednich odbywało się poprzez kolejne przybliżenia z udziałem wielu badaczy wykonujących mozolnie mało efektowne obserwacje. Dopiero później ich właściwa interpretacja wykazywała, że zostało dokonane ważne odkrycie dające trwały wkład w poznanie Wszechświata.

Gwiazdy zmienne były znane właściwie od niepamiętnych czasów. Ich obecność była jednak przez wieki ledwo tolerowana może dlatego, że gołym okiem widać ich zaledwie kilka, albo też, że była dość niewygodna, kłóciła się bowiem z powszechnym przekonaniem o solidności i niezmienności nieba. Wprawdzie pojawienia się gwiazdy nowej czy supernowej nie sposób było zignorować, toteż fakt taki, owszem, był odnotowywany w kronikach, ale szybko przechodził do historii. Chyba pierwszą informację na piśmie o zmienności blasku Algola pozostawił Gemiano Montanari z Padwy w 1672 r. W miarę precyzyjny opis charakteru zmienności tej gwiazdy opublikował John Goodricke w 1783 r. Opis ten można uważać za historycznie pierwszą „krzywą blasku" gwiazdy zmiennej, tyle że przedstawioną w postaci słownego opisu, a nie – jak obecnie to się robi – za pomocą wykresu. Goodricke również sugerował, że przyczyną zmian jasności może być ciemny satelita obiegający gwiazdę. On też dwa lata później odkrył inną gwiazdę zmienną, δ Cefeusza. Jej charakteru zmienności nie dawało się wytłumaczyć zaćmieniami choćby dlatego, że jasność gwiazdy spada przez 4 dni, a rośnie do wartości maksymalnej gwałtowniej – przez 1 dzień.

Rozwój technik obserwacyjnych zagmatwał sprawę jeszcze bardziej. Mniejsza już o to, że coraz lepszymi teleskopami nie udało się zobaczyć delty Cefeusza jako podwójnej, to jeszcze obserwacje spektroskopowe wykazały, że w maksimum jasności gwiazda jest bardziej niebieska, a w minimum nieco bardziej czerwona, zmienia więc okresowo widmo, a więc i temperaturę!

Spisy gwiazd zmiennych zaczęły gwałtownie się wydłużać, rosła też lawinowo ilość informacji astrofizycznych o gwiazdach w ogóle, naturalną więc koleją rzeczy pojawiła się konieczność wprowadzenia w tym wszystkim jakiejś klasyfikacji. W tej dziedzinie największe zasługi położyli: Edward Pickering i jego współpracownicy oraz Ejnar Hertzsprung i Henry Norris Russell. Jak wiadomo, dwaj ostatni panowie stworzyli diagram H-R. Każda gwiazda ma na nim swoje miejsce określone przez dwie współrzędne: jasność absolutną i temperaturę (lub zastępczo przez typ widmowy). Gwiazdy zmienne powinny być na nim formalnie reprezentowane przez jakieś kreski, może łuki, może pętelki. Tak czy inaczej, wśród rozmaitych opracowań ogromnego materiału obserwacyjnego pojawiło się w 1912 r. skromne zestawienie własności 25 gwiazd zmiennych podobnych do delty Cefeusza, czyli tzw. cefeid, położonych w Małym Obłoku Magellana. Publikację tę napisała pani Henrietta Leavitt (1868–1921) pracująca od 1902 r. w Harvard Observatory. Z pracy tej wynikało, krótko mówiąc, że **im dłuższy okres zmian jasności ma cefeida, tym jest jaśniejsza**.

Konsekwencje niepozornego odkrycia Henrietty Leavitt okazały się ogromne. Bowiem skoro wszystkie cefeidy w Małym Obłoku Magellana są praktycznie w tej samej odległości od nas (odległość Małego Obłoku Magellana jest około 20 razy większa od jego rozmiarów), to oznacza, że dłuższemu okresowi zmian jasności odpowiada większa jasność **absolutna** gwiazdy. Tylko jaka? – tego nie wiadomo, bo odległość Obłoków Magellana jest (tzn. wtedy była) nieznana. Zależność okres-jasność można by wykorzystać do wyznaczania odległości cefeid (i ich macierzystych galaktyk), gdyby właśnie dało się ją wyskalować na cefeidach, których odległości są znane skądinąd. Wtedy mierząc okres zmian jasności cefeidy, co jest dość łatwe technicznie, miałoby się od razu jasność absolutną M, a z porównania z jasnością obserwowaną m łatwo już obliczyć odległość r ze znanego, definiującego skalę jasności wzoru $m - M = 5\log r - 5$ (r jest tu wyrażone w parsekach, a jasności w wielkościach gwiazdowych).

Starania o wyskalowanie i udoskonalenie tej metody wyznaczania odległości toczyły się jeszcze długo, również już bez udziału Henrietty Leavitt. Najprostsze rozwiązanie – znalezienie cefeidy o znanej odległości – okazało się trudne w realizacji. Tak się bowiem nieszczęśliwie składa, że najbliższą w naszej Galaktyce (a więc najbliższą nam) cefeidą jest Gwiazda Polarna leżąca zbyt daleko, by jej odległość można było wyznaczyć metodami trygonometrycznymi. Nawiasem mówiąc, jej zmienności gołym okiem nie dostrzegamy, gdyż zachodzi w granicach zaledwie 10% średniego blasku. Nawiązanie skali odległości w Galaktyce i odległości pozagalaktycznych musiało więc nastąpić okrężną drogą. Umożliwiły to gromady kuliste, w których występują również cefeidy. Odległość tych gromad można bowiem wyznaczyć porównując jasności absolutne i obserwowane zwykłych gwiazd należących do nich. Niezbędną tu jasność absolutną gwiazdy można określić na podstawie jej widma, jak podpowiada diagram H-R. Tak więc odległość pewnej liczby cefeid dała się jednak ustalić.

W ten sposób cefeidy stały się niezwykle ważnymi dla astronomii obiektami nie tylko jako gwiazdy pulsujące, ale też jako obiekty umożliwiające pomiar odległości międzygalaktycznych, ponieważ są gwiazdami generalnie jasnymi i dzięki temu widocznymi z ogromnych odległości. Dziś umiemy klarowny obraz wyznaczania odległości kosmicznych, jaki powstał dzięki pracy Henrietty Leavitt, odpowiednio skomplikować uwzględniając np. istnienie materii międzygwiazdowej fałszującej obserwowane jasności gwiazd. Okazało się też, że są cefeidy kilku rodzajów, ale to wszystko oznacza tylko, że metoda zapoczątkowana odkryciem Henrietty Leavitt została udoskonalona i jest stosowana do dziś.

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

Zadania **756** i **757** zaproponował Jarosław Wróblewski.

M 756. Trzy osoby grają w orła i reszkę. Każdy z graczy wpłaca do puli 1 zł. Pierwszy zawsze obstawia orła, a drugi – reszkę. Pula 3 zł jest dzielona równo między osoby, które trafnie wytypowały wynik rzutu symetryczną monetą. Uzasadnić, dlaczego gra nie jest sprawiedliwa dla trzeciego gracza.
Rozwiązanie na str. 16

M 757. Czy istnieją takie liczby wymierne x, y, z, t, że

$$1+\sqrt{2}=(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2\ ?$$

Rozwiązanie na str. 3

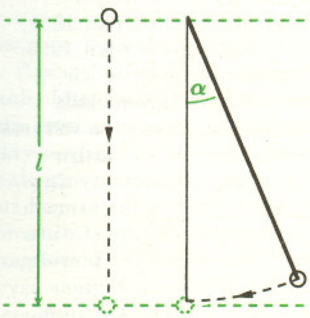
M 758. Załóżmy, że $a_{(-9)}, a_{(-8)}, \ldots, a_8, a_9$ są liczbami rzeczywistymi. Udowodnić, że

$$\sum_{m=-9}^{9}\sum_{n=-9}^{9}|m+n|a_m a_n \geq \sum_{m=-9}^{9}\sum_{n=-9}^{9}|m-n|a_m a_n .$$

Rozwiązanie na str. 3

Redaguje Krzysztof REJMER

F 417. Bańka mydlana wypełniona powietrzem znajduje się w próżni. Znaleźć równanie (w zmiennych p, V) opisujące przemianę gazu w bańce przy zmianach temperatury powietrza w bańce oraz ciepło właściwe tego procesu. Przyjąć, że powietrze jest gazem doskonałym, a napięcie powierzchniowe σ nie zależy od temperatury.
Rozwiązanie na str. 8



F 418. Kulkę zawieszono na długiej nici o długości l i odchylono od pionu o niewielki kąt α. Drugą taką samą kulkę umieszczono w punkcie zaczepienia nici. Obie kulki puszczono jednocześnie. Która z nich wcześniej znajdzie się na poziomie najniższego położenia pierwszej kulki?
Rozwiązanie na str. 16

Kobiety zjednoczone

Anna ROMANOWSKA

Gdy w roku 1987 zaproponowano mi przyjazd do Kopenhagi na spotkanie pań – matematyków uniwersyteckich, byłam trochę zdziwiona tym pomysłem. Ale w końcu... dlaczego nie? Z drugiej strony... jaki miałby być cel takiego spotkania? Co będziemy tam właściwie robić? Jakoś dotąd nie przyszło mi do głowy, żeby myśleć o matematyce w kategoriach męsko-damskich. W czasie moich studiów matematycznych w Łodzi było nas, studentek matematyki, więcej niż chłopców, i wydawało mi się, że osiągałyśmy lepsze od nich wyniki. W mojej pierwszej pracy, w Instytucie Matematyki Politechniki Warszawskiej, procent kobiet też był znaczny. A że życie ich nie było łatwe? No cóż, wszyscy dokoła mieli niezbyt łatwe życie. Po pewnym czasie mogłam się jednak zorientować, że im wyższe stanowisko, tym pań jest mniej. Nieco później, gdy zaczęłam jeździć na konferencje matematyczne, zorientowałam się również, że im bardziej prestiżowa i międzynarodowa konferencja, tym kobiet jest mniej. Wśród wybitnych matematyków-naukowców było ich niewiele. Tymczasem, w moim macierzystym instytucie, koledzy (nie tak liczni, co prawda) robili kariery naukowe, wspomagani przez (zazwyczaj również pracujące) żony. Większość koleżanek „grzęzła" coraz bardziej pod ciężarem nadmiernych obowiązków domowo-zawodowych. Znacznie rzadziej znajdowały one większą pomoc ze strony swoich mężów. Obowiązki rodzinne stawały się priorytetowe i wypierały (choć nie zawsze i nie zupełnie) ambicje naukowe. Czy poza tymi, rzucającymi się w oczy różnicami, istniały jakieś inne? Czy nasza sytuacja była z innych jeszcze powodów jakaś specjalna? Czy miałyśmy jeszcze inne specjalne trudności, które nie były udziałem naszych kolegów? Każdej z nas zdarzały się, oczywiście, „ochy" i „achy" zachwyconych lub zgorszonych cioć („co innego powinno być zadaniem kobiety"). Nie tak rzadko słyszało się od starszych krewnych pobłażliwe: *Nie zaszkodzi, jeśli w obecnych ciężkich czasach, przyniesie ona do domu (jako nauczycielka) trochę grosza.* A nasi koledzy? Pamiętam seminarium, na którym jeden z kolegów referował pracę poświęconą twierdzeniu znanemu teraz pod nazwą dualności Priestley-Stone'a dla krat rozdzielnych. Był zachwycony tym twierdzeniem i wszystkim o nim opowiadał. Pamiętam również jego reakcję na moją uwagę, że nieprawidłowo odmienia nazwisko Priestley. Hilary Priestley była bowiem drobną niebieskooką blondynką, i niewątpliwie kobietą. Reakcja kolegi: *To niemożliwe*!!! Postanowiłam pojechać na zjazd do Kopenhagi.

Przygotowania i zbieranie materiałów uświadomiły mi wiele spraw i problemów, których wcześniej nie dostrzegałam. Po pierwsze, było nas znacznie mniej niż (dość naiwnie) się spodziewałam. Mój instytut (liczący ponad jedną trzecią kobiet) okazał się dość wyjątkowy. W większości polskich instytutów matematyki, z których udało mi się otrzymać informacje, procent kobiet wahał się od 10 do 20. Wśród pracowników samodzielnych było ich jeszcze mniej. Wiele koleżanek, które pytałam o ich doświadczenia, skarżyło się nie tylko na nadmiar obowiązków, ale również na niepoważne lub niechętne traktowanie przez przełożonych czy nawet kolegów. Zdarzały się jednak również takie, które nie uważały, aby ich sytuacja była wyjątkowa i interesująca jako temat do rozmowy.

Na zjeździe w Kopenhadze spotkałam dwadzieścia kilka ogromnie interesujących kobiet. Było wśród nich kilka wybitnych matematyczek, które na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Berkeley w roku 1986 postanowiły, wzorem istniejącej od dłuższego już czasu amerykańskiej organizacji *Association of Women in Mathematics*, utworzyć podobną organizację europejską. Pierwsze (nieformalne) spotkanie odbyło się w tym samym roku w Paryżu. Matematyczki francuskie były w tym czasie zaniepokojone drastycznym spadkiem liczby dziewczyn rozpoczynających studia matematyczne w słynnej *École Normale Supérieure*, po połączeniu istniejących dotąd osobnych szkół dla dziewcząt i chłopców. Szkoła żeńska wykształciła sporą liczbę znakomitych francuskich matematyczek. Zdawały one dokładnie takie same egzaminy jak chłopcy i, zdaniem naszych francuskich koleżanek, radziły sobie znacznie lepiej niż po połączeniu szkół. Wkrótce powstała (chyba pierwsza tego rodzaju w Europie) organizacja *Femmes et Mathèmatiques*, aktywnie działająca i licząca sobie obecnie około 100 członkiń, głównie matematyków uniwersyteckich. Już w Paryżu, a jeszcze bardziej w Kopenhadze, zaczęły się również ujawniać zaskakujące różnice regionalne. Im bardziej na południe, tym procent kobiet w instytutach matematycznych jest większy (najwięcej w Portugalii i we Włoszech (35–40%), najmniej w krajach skandynawskich i niemieckojęzycznych (3–4%)). Również w krajach byłego bloku wschodniego różnice są znaczne (niewiele kobiet w byłej Czechosłowacji i na Węgrzech (11–12%), więcej w Polsce i Bułgarii, jeszcze więcej w niektórych częściach byłego ZSRR).

Bardzo przyjemne, zorganizowane przez panią Bodil Branner, spotkanie w Kopenhadze było jeszcze dość nieformalne. Były tam sprawozdania z poszczególnych krajów, dużo dyskusji, była część matematyczna z pięknym wykładem Ragni Piene z Norwegii. Zauważyłyśmy, że atmosfera na tym wykładzie wyraźnie odbiegała od atmosfery, jaką większość z nas znała z seminariów i wykładów matematycznych. Po prostu, czułyśmy się dobrze razem, swobodniej i chętniej zadawałyśmy pytania. Z wykładu zrobiło się bardzo interesujące i żywe seminarium. Postanowiłyśmy ten styl, już świadomie, kontynuować na przyszłych spotkaniach.

Następny zjazd zorganizowała w Warwick w Anglii w roku 1988 Caroline Series. Było nas już ponad czterdzieści z trzynastu krajów. Poza tradycyjnymi już sprawozdaniami, dyskusją nad sytuacją kobiet matematyków i bardziej rozbudowaną częścią matematyczną (otwartą dla wszystkich zainteresowanych), było również spotkanie z dziewczętami z miejscowych szkół średnich. Rozpoczęto także żmudną pracę nad formalnym powołaniem do życia organizacji matematyczek europejskich. W tym też mniej więcej czasie opracowano pierwszy spis adresowy i zaczęto tworzyć „sieć" kontaktów elektronicznych.

Z różnych przyczyn niezbyt udało się następne spotkanie w Lizbonie w roku 1990. Można jednak uznać za spore sukcesy kolejne zjazdy w Marsylii w roku 1991, w Warszawie w roku 1993 i w Madrycie w roku 1995. Znacznie więcej osób było zaangażowanych w ich organizację. Wszystkie trzy spotkania zgromadziły znacznie większą liczbę uczestniczek, prawie ze wszystkich krajów europejskich. Wszystkie trzy miały bardzo interesujące i rozbudowane programy matematyczne i niematematyczne, działały też w innych już ramach. W Warszawie zatwierdzono ostateczną formę statutu przyszłej organizacji. A w grudniu roku 1993 powołano ją formalnie do życia pod nazwą *European Women in Mathemathics* (EWM), z siedzibą i sekretariatem w Helsinkach. Zgodnie ze statutem głównymi zadaniami tej organizacji są:

- Zachęcanie kobiet do podejmowania i kontynuowania studiów matematycznych, działania na rzecz szerszego zainteresowania kobiet matematyką.
- Popieranie kobiet zajmujących się (lub chcących się zajmować) badaniami naukowymi w matematyce i dziedzinach pokrewnych.
- Stworzenie miejsca spotkań dla tych kobiet.
- Sprzyjanie międzynarodowej naukowej wymianie między kobietami zajmującymi się tą samą i różnymi dziedzinami matematyki.
- Popieranie zasady równych możliwości i równego traktowania kobiet i mężczyzn w ramach społeczności matematycznej.
- Współdziałanie z grupami i organizacjami o podobnych celach.

Zadania te starają się realizować członkowie EWM i ich sympatycy (w obu grupach zdarzają się również mężczyźni). Zjazdy EWM zaowocowały nowymi kontaktami i nową współpracą, która zaczyna przyciągać również młodsze pokolenie. Sprawozdania ze zjazdów (zawierające część matematyczną i niematematyczną), *Newsletters*, i inne informacje rozprowadzane są drogą elektroniczną. Szuka się kontaktów z osobami badającymi zagadnienia, których znajomość mogłaby ułatwić nasze kariery, i inspiruje takie badania. Na zjeździe w Marsylii był np. wykład psychologa o tzw. rolach modelowych (role models). Zauważono, że wybitne panie są często w stanie zgromadzić wokół siebie grupy młodych badaczek. W Warszawie mieliśmy interesujący wykład na temat pobudzania zdolności twórczych, a w Madrycie wykład historyka nauki pt. *Rodzina a kariera*. Wszystkie kończyły się ożywionymi dyskusjami. Widać też wyraźnie ewolucję w organizacji matematycznych części spotkań. Wydaje się, że większość z nas preferuje, lepiej się czuje i lepiej działa raczej w atmosferze współdziałania niż współzawodnictwa. Może to jest powodem, że (pomijając mniejszą liczność) jesteśmy zwykle mniej widoczne na seminariach i konferencjach. Idee prezentacji matematyki, które zaczęły kiełkować w Kopenhadze i w Warwick, są teraz świadomie wprowadzane w życie i dyskutowane. Najbardziej spodobał mi się pomysł „plant an idiot", wybieranie do każdego wykładu osoby, której zadaniem byłoby stawianie pytań, nawet tych „głupich", i „rozruszanie" słuchaczy. Działało to świetnie i byłoby chyba pożyteczne na wielu seminariach i wykładach. Osobiste kontakty też miały duże znaczenie. Pozwoliły wielu z nas uświadomić sobie, że nie jesteśmy same z naszymi codziennymi trudami i kłopotami (ta nasza, jakże czasem ciężko okupiona dzielność!), i usłyszeć, jak inne rozwiązują swoje problemy życiowo-zawodowe. Istnieją dalsze plany spotkań, dyskusji, badań, stworzenia funduszu nagród, funduszu wspierającego działalność naukową kobiet (ułatwienia w podróżach), organizacja pomocy dla matek z dziećmi itp.

Dotychczasowe działania EWM stały się bodźcem do tworzenia dalszych ugrupowań o podobnych celach, zwłaszcza w krajach, gdzie kobiet-matematyków jest mało. Powstały aktywnie działające grupy w Wielkiej Brytanii, Niemczech i Skandynawii. Prowadzą one badania istniejącej sytuacji i mają już całkiem konkretne projekty mające na celu jej poprawę. W roku 1993 powstało stowarzyszenie matematyczek rosyjskich. Odbyły one już dwa międzynarodowe kongresy (drugi z kolei, w Woroneżu, zgromadził ponad osiemdziesiąt pań!). Na kongresie *European Mathematical Society* w roku 1992 w Paryżu zorganizowana została przez komitet *Women and Mathematics* dyskusja (okrągły stół), w której omawiano, między innymi, dane statystyczne dotyczące udziału kobiet w matematyce europejskiej i dane dotyczące sytuacji matematyczek niemieckich. Badania podobnego typu prowadzono później również w innych krajach. Podobna dyskusja miała miejsce również na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Zurychu w roku 1994. Działały tam wspólnie EWM i AWM – amerykańska organizacja *Association for Women in Mathematics*, o znacznie dłuższym stażu i doświadczeniu, mająca coraz silniejszą pozycję wśród matematyków amerykańskich. Warto tu może zauważyć, że liczba doktoratów z matematyki, uzyskanych przez obywatelki amerykańskie, stanowiła 6% wszystkich w roku 1964, ale już 26% w roku 1994.

Dla pań działających w opisanych organizacjach sens ich działania nie ulega wątpliwości. Inni patrzą na to różnie. Zdarzyło się nam w Polsce zostać obruganymi za sam pomysł „jednoczenia się". Zdarzyło się nam również usłyszeć opinię, że kobiety rzadko mają powołanie do matematyki, może więc byłyby szczęśliwsze bez niej, i może nie należałoby ich zachęcać do uprawiania matematyki. Z całą pewnością jednak (nawet w krajach bogatych) coraz więcej kobiet pracuje i będzie pracować zawodowo. Dlaczego więc te, które mają do matematyki talent i zainteresowanie, mają ten talent marnować i nudzić się jako sekretarki, urzędniczki, sprzedawczynie czy sprzątaczki? Jest więc sens w działaniach, które mogłyby im ułatwić robienie „karier matematycznych", które mogłyby przekonać niechętnych, i usuwałyby trudności spowodowane tradycją, stereotypami, obawą przed rosnącą konkurencją czy utratą uprzywilejowanych pozycji. Nikt również nie udowodnił, że wszystkie kobiety „z natury" nie nadają się do matematyki i są bez niej szczęśliwsze. Oczywiście zdarzają się i takie, i wcale nie chcemy wszystkich „na siłę" uszczęśliwić matematycznie. Chcemy tylko ułatwić karierę tym, które tego same chcą. Osobiście nie bardzo również wierzę w wyniki „badań" statystycznych, które mają rzekomo potwierdzać mniejsze matematyczne uzdolnienia kobiet. Zbyt wiele nieznanych czynników może w takich „badaniach" odgrywać znaczącą rolę. Nie można się też powoływać na tradycję i historię. Kobiety od tak niedawna mają dostęp do wykształcenia, a od jeszcze krótszego czasu, do karier akademickich. Sen z powiek przeciwników kobiet w matematyce spędza i taka obawa: czy aby znajdą się wśród najlepszych, czy będą wśród nich geniusze? A gdzie jest powiedziane, że jedyną możliwą i wartą zrobienia karierą jest zdobycie najwyższych laurów? Może ważniejsze jest nastawienie, aby przeżyć życie interesująco, pożytecznie, i jak najmniej szkodliwie? Bardzo wybitnych matematyków jest w ogóle niewielu. A jeśli młoda dziewczyna ma talent matematyczny i chce mieć interesujące życie, to myślę, że nie powinna bać się kariery matematycznej. Być może jej życie nie będzie łatwe. Ale, być może, życie prostsze, bezpieczniejsze i nudniejsze nie dawałoby jej wcale satysfakcji. Matematykę można zresztą uprawiać organizując sobie życie na bardzo różne sposoby, i kariera uniwersytecka nie jest jedyną możliwością. I jeszcze jedno, większość z nas, mimo przeróżnych życiowych trudności, znajduje sobie na ogół życiowych partnerów, i wcale niekoniecznie całkowicie rezygnuje z życia rodzinnego.

Na zakończenie jeszcze jedna uwaga, dla tych, którzy mogliby mieć wątpliwości. Nie jesteśmy straszliwymi, wąsatymi, agresywnymi „babonami". Nie jesteśmy wojującymi feministkami. Nasze środowisko jest, jak każde, zróżnicowane. Są wśród nas kobiety piękne i niezbyt ładne, młode i stare, mężatki i panny, wybitni matematycy i przeciętni, ale w większości są to bardzo interesujące, pełne energii i radości życia kobiety.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

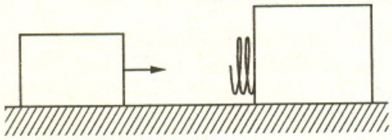
Termin nadsyłania rozwiązań:
31 III 1996

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

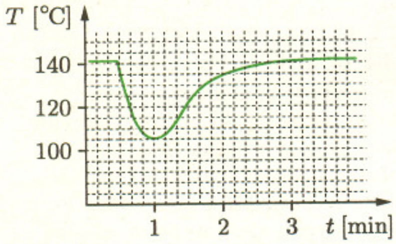
Zadania z fizyki nr 209, 210

Redaguje Jerzy B. BROJAN



Rys. 1

209. Klocek o masie m uderzył w klocek o masie M zaopatrzony w sprężynowy zderzak o stałej sprężystości k (rys. 1). Współczynnik tarcia f o podłoże jest jednakowy dla obu klocków i ma taką samą wartość dla tarcia statycznego, co dla kinetycznego. Po ściśnięciu sprężyna rozprostowała się, a klocki rozłączyły, podczas gdy drugi klocek pozostawał cały czas w spoczynku. Jaki warunek muszą spełniać masy m i M, aby takie zdarzenie mogło zajść? Zakładamy, że długość swobodna sprężyny jest wystarczająco duża, aby nie uległa „ściśnięciu do zera", tzn. oddziaływanie między klockami jest opisywane przez prawo Hooke'a.



Rys. 2

210. Pojemnik zawiera element grzejny o mocy $P = 200$ W i termometr mierzący temperaturę zewnętrznej powierzchni pojemnika. Pojemnik umieszczono w pokoju o temperaturze $T_0 = 20°$C i włączono grzejnik, w wyniku czego po dłuższym czasie termometr wskazał temperaturę $T_k = 140°$C. Wtedy wrzucono do pojemnika metal o masie $m = 100$ g i temperaturze T_0 i szybko zamknięto pojemnik. Ile wynosi ciepło właściwe tego metalu, jeśli przebieg wskazań termometru jest dany przez rysunek 2?

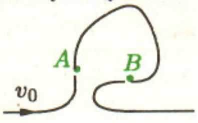
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1995

Przypominamy treść zadań:

201. Koralik porusza się po wygiętym drucie, przy czym działa na niego tylko siła oddziaływania ze strony drutu (nie występuje np. siła ciężkości). Siła tarcia jest proporcjonalna do prostopadłej do drutu składowej siły oddziaływania, a stała proporcjonalności (współczynnik tarcia) jest równa $f = 0{,}1$. Zatem na prostoliniowych odcinkach drutu tarcie nie występuje. Jeśli kształt drutu jest taki, jak na rysunku 3, a początkowa prędkość wynosi $v_0 = 1$ m/s, to ile wynosi prędkość końcowa?

202. Pstrykiewicz: Do mojego aparatu fotograficznego są dwa obiektywy, jeden o dłuższej, a drugi o krótszej ogniskowej. Można też je założyć jeden przed drugim, i wtedy otrzymuje się obiektyw o ogniskowej jeszcze krótszej.
Fotończyk: Mój aparat ma też dwa obiektywy, i też jeden ma krótszą, a drugi dłuższą ogniskową. Gdy zamontuję się oba jeden za drugim, to ogniskowa jest jeszcze dłuższa.
Kamerański: Do mojego też są dwa obiektywy o różnych ogniskowych, i też można je zakładać jeden za drugim, ale można to robić w dowolnej kolejności – raz otrzymuje się obiektyw o najdłuższej ogniskowej, a jeśli się je zamieni miejscami, to o najkrótszej.
Czy to możliwe?

201. Na koralik działa siła dośrodkowa (prostopadła do toru składowa siły oddziaływania) $N = mv^2/r$ oraz siła tarcia $T = fN$, przy czym r oznacza lokalny promień krzywizny drutu.



Rys. 3

Przyrównując $-T$ do $ma_{st} = m\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ i korzystając z tożsamości $v\mathrm{d}t/r = \mathrm{d}s/r = \mathrm{d}\alpha$ (gdzie a_{st} – styczna składowa przyspieszenia, $\mathrm{d}\alpha$ – zmiana kierunku) dochodzimy do równania
$$\mathrm{d}v = -fv\mathrm{d}\alpha.$$
Ponieważ $\mathrm{d}\alpha$ uważamy za wielkość zawsze dodatnią, więc rozwiązaniem jest $v = v_0 \mathrm{e}^{-f|\alpha|}$. Wyrażenie $|\alpha|$ oznacza tu całkowity bezwzględny kąt skręcenia wyrażony w radianach, czyli na naszym rysunku jest to suma $\pi/2$ (do punktu A), $(3/2)\pi$ (od A do B) i π (od punktu B) – razem 3π. W rezultacie otrzymujemy $v = v_0\mathrm{e}^{-0{,}3\pi} = 0{,}39$ m/s.

202. Dla uproszczenia potraktujmy oba obiektywy jako pojedyncze soczewki o ogniskowych f_1 i f_2. Jeśli odległość między soczewkami wynosi d, to ogniskową układu można znaleźć standardowym rachunkiem, który przytoczymy w skrócie. Wiązka równoległa, padająca na pierwszą soczewkę pod kątem α do osi, skupia się w jej płaszczyźnie ogniskowej w odległości $h_1 = \alpha f_1$ od osi. Dla drugiej soczewki podstawiamy do równania $1/f_2 = (1/x) + (1/y)$ zmienną x równą $d - f_1$, obliczamy $y = f_2(f_1 - d)/(f_1 + f_2 - d)$, a następnie h ze wzoru $h = -h_1 y/x$ (minus stąd, że zakładamy dodatni znak h po tej samej stronie osi, co h_1). Otrzymujemy $h = \alpha f_1 f_2/(f_1 + f_2 - d)$ i ogniskową układu $f = h/\alpha = f_1 f_2/(f_1 + f_2 - d)$. Widzimy, że zestaw Pstrykiewicza jest w pełni możliwy – dla małych d zdolności skupiające soczewek dodają się (tylko ten przypadek należy do programu szkolnego). Jeśli d jest natomiast bliskie sumy $f_1 + f_2$, to ogniskowa układu staje się dowolnie duża, a ponieważ d może zależeć od kolejności obiektywów (dłuższe lub krótsze tubusy), więc nawet rewelacyjny zestaw Kamerańskiego nie wydaje się sprzeczny z prawami optyki.

W powyższym rozumowaniu nie został wzięty pod uwagę warunek, że obraz wytworzony przez obiektyw fotograficzny musi być rzeczywisty (na kliszy). Gdy $f_1 + f_2 > d > f_1$, obraz jest rzeczywisty tylko dla przedmiotów bliskich obiektywowi, a dla przedmiotów odległych wiązka wychodząca z obiektywu będzie rozbieżna, czyli fotografowanie ich będzie niemożliwe. Z drugiej strony, dla $d > f_1 + f_2$ odległe przedmioty dadzą rzeczywisty obraz na kliszy, ale prosty (druga soczewka odwraca obraz rzeczywisty wytworzony przez pierwszą). Może Fotończyk i Kamerański chcą fotografować podwójnym obiektywem tylko biedronki i znaczki pocztowe, a może w ich aparatach są odrębne wizjery i nie przeszkadza im odwrócenie na kliszy?

Jeśli oba obiektywy składowe same są zestawami soczewek, to problem się komplikuje, ale większa liczba zmiennych stwarza nadzieję na osiągnięcie celów niedostępnych z pojedynczymi soczewkami. Autorowi nie udało się zbudować z dwóch obiektywów krótkoogniskowych obiektywu długoogniskowego dającego obraz rzeczywisty i odwrócony (jak w zwykłym obiektywie) przedmiotów odległych. Może ta sztuka uda się komuś z Czytelników?

Zadania z matematyki nr 311, 312

Redaguje Marcin E. KUCZMA

311. Znaleźć wszystkie funkcje niemalejące f, określone na zbiorze liczb całkowitych nieujemnych, o wartościach w tym samym zbiorze, spełniające warunek:

$$2f(x^2+y^2) = f(x)^2 + f(y)^2 \quad \text{dla} \quad x, y = 0, 1, 2, \ldots .$$

312. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geq 3$, dla których istnieje n-kąt foremny o wierzchołkach w punktach kratowych przestrzeni trójwymiarowej, to znaczy, w punktach (x, y, z), których współrzędne są liczbami całkowitymi (w ustalonym prostokątnym układzie współrzędnych).

Zadanie **312** zaproponował pan Lesław Skrzypek z Rzeszowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1995

Przypominamy treść zadań:

303. Wielościan wypukły W (o wszystkich kątach dwuściennych ostrych) ma następującą własność: istnieją takie liczby naturalne $p, q \geq 3$, że każdy przekrój wielościanu W płaszczyzną przecinającą wnętrze W jest albo p-kątem, albo q-kątem. Czy wielościan W musi być czworościanem?

304. Ciąg (b_n) jest dany wzorami: $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_n = (n+1)\left(\frac{b_{n-1}}{n} + \frac{b_{n-2}}{n-1}\right)$ dla $n \geq 2$. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$.

303. Wybierzmy dowolną ścianę S wielościanu W. Niech B, A, C będą trzema kolejnymi wierzchołkami tej ściany. Przez punkt C prowadzimy płaszczyznę γ tak położoną, by punkty A i B znalazły się po jednej jej stronie (punkt B – bliżej, punkt A – dalej od γ), a pozostałe wierzchołki W znalazły się po przeciwnej jej stronie. Poprowadźmy następnie trzy płaszczyzny α, β, δ równoległe do γ: płaszczyznę α przebiegającą pomiędzy punktami A i B, płaszczyznę β – pomiędzy punktami B i C, i płaszczyznę δ – pomiędzy punktem C a pozostałymi wierzchołkami wielościanu W.

Rozważymy dwa przypadki:
1°. Odcinek BC jest krawędzią wielościanu W (a zatem ściana S jest trójkątem).
2°. Odcinek BC nie jest krawędzią wielościanu W.

Przypuśćmy, że z wierzchołka A wychodzi a krawędzi wielościanu W, z wierzchołka B wychodzi b krawędzi, a z wierzchołka C wychodzi c krawędzi. Przekrój wielościanu W każdą z płaszczyzn α, β, γ, δ jest pewnym n-kątem; wartości n przedstawia tabelka:

	przypadek 1°	przypadek 2°
$W \cap \alpha$:	a	a
$W \cap \beta$:	$a+b-2$	$a+b-2$
$W \cap \gamma$:	$a+b-3$	$a+b-2$
$W \cap \delta$:	$a+b+c-6$	$a+b+c-4$

Zgodnie z założeniem, n może przybierać tylko dwie wartości. Wobec tego przypadek 2° jest niemożliwy (bo $a < a+b-2 < a+b+c-4$), natomiast w przypadku 1° wartości a oraz $a+b-3$ muszą być równe, skąd wynika, że $b = 3$.

Ponieważ ściana S była wybrana dowolnie, a także punkt B był dowolnie wybranym jej wierzchołkiem, zatem wszystkie ściany W są trójkątami, a z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie trzy krawędzie. To znaczy, że W jest czworościanem.

304. Określając $a_n = b_n/(n+1)$ mamy rekurencję: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, przy czym $a_0 = a_1 = 1$. Tak więc (a_n) jest ciągiem Fibonacciego:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right), \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Wobec tego

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)a_n}{2^n} = \frac{\alpha f(\alpha/2) - \beta f(\beta/2)}{\sqrt{5}},$$

gdzie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{d}{dx}\,\frac{x}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(szeregi potęgowe zbieżne dla $x \in (-1; 1)$, różniczkowanie poprawne w tym przedziale). Jeśli więc λ jest jedną z liczb α, β, czyli jeśli $\lambda = \left(1 + \varepsilon\sqrt{5}\right)/2$, $\varepsilon = \pm 1$, to

$$\lambda f\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{4\lambda}{(2-\lambda)^2} = \frac{4 + 4\varepsilon\sqrt{5}}{7 - 3\varepsilon\sqrt{5}} = 22 + 10\varepsilon\sqrt{5},$$

a zatem szukana suma równa się

$$s = \frac{(22 + 10\sqrt{5}) - (22 - 10\sqrt{5})}{\sqrt{5}} = 20.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 297 (WT=2,46) i 298 (WT=1,54)
z numeru 3/1995

Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	45,17
Tomasz Wietecha	– Tarnów	42,33
Piotr Lipiński	– Radom	36,05
Krzysztof Zapisek	– Warszawa	34,92
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	34,89
Tomasz Kulpa	– Katowice	34,45

Weteran Przemek Gadziński w efektownym stylu kończy czwartą rundę!

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 195 (WT=3,70) i 196 (WT=3,80)
z numeru 3/1995
oraz
zadań 197 (WT=3,22) i 198 (WT=3,76)
z numeru 4/1995

Artur Gawryszczak	– Dubeczno	38,30
Zbigniew Galias	– Kraków	36,75
Aleksander Surma	– Myszków	30,14
Dariusz Wilk	– Rzeszów	25,57
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	23,31
Przemysław Gworys	– Częstochowa	21,24

Niebo przez lornetkę

Najefektowniejszymi chyba zjawiskami niebieskimi, możliwymi do obserwacji przez cały rok, są zaćmienia Słońca i Księżyca. Zaćmienie Słońca to przesłonięcie go przez Księżyc, natomiast zaćmienie Księżyca to jego wejście w cień Ziemi. W 1996 roku nastąpią dwa częściowe zaćmienia Słońca, ale jedno (17/18 IV) widoczne będzie tylko na południowym Pacyfiku, drugie natomiast (12 X) na północnym Atlantyku i w Europie Zachodniej – w Polsce praktycznie nie. Nastąpią też dwa całkowite zaćmienia Księżyca (3/4 IV i 27 IX nad ranem) – oba z Polski będą widoczne, oczywiście jeżeli niebo będzie pogodne.

Przesłonięcie przez Księżyc jakiejś gwiazdy lub niekiedy planety to tzw. zakrycie. Niestety, są to zjawiska również dość rzadkie, bo choć Księżyc ma $0^\circ\!,5$ średnicy, a w Galaktyce jest 2×10^{11} gwiazd, to jest bardzo mała szansa, by przesłonił jakąś JASNĄ gwiazdę. Dlatego zjawiska te są skrupulatnie przewidywane i obserwowane przez astronomów zajmujących się ruchem Księżyca. Uchwycenie momentu zakrycia lub odsłonięcia gwiazdy przez Księżyc stwarza bowiem możliwość bardzo dokładnego wyznaczenia jego położenia w danej chwili, a przez to sprawdzenie lub udoskonalenie modelu jego ruchu. A zakrycie gwiazdy przez planetę to zjawisko jeszcze rzadsze i dlatego szczególnie atrakcyjne z analogicznego powodu. Zakrycie pewnej gwiazdy przez Urana 10 III 1977 r. przyczyniło się nawet do odkrycia jego pierścieni, kiedy okazało się, że jasność tej gwiazdy spadła kilkakrotnie, zanim zakryła ją sama planeta, a po zakryciu owe spadki jasności powtórzyły się symetrycznie w czasie.

W przypadku Księżyca można oczekiwać w ciągu roku kilku zakryć gwiazd możliwych do obserwacji za pomocą lornetki. Od czasu do czasu Księżyc może też zakryć planetę, ponieważ zarówno on, jak i planety poruszają się po niebie w pasie zodiakalnym. W pasie zodiakalnym leżą też Plejady, otwarta gromada gwiazd w Byku. Znalezienie się Księżyca choćby tylko w pobliżu Plejad to wyjątkowo miły dla oka obraz. W 1996 roku Księżyc 15 razy zakryje znaczniejsze obiekty, mianowicie:
6 razy Aldebarana: 8 VIII, 4 IX, 1 X, 29 X, 25 XI, 23 XII,
2 razy Merkurego: 14 VI, 16 VIII,
2 razy Wenus: 22 II, 12 VII,
3 razy Ceres: 8 IV, 5 V, 1 VI,
1 raz Juno: 4 VIII,
1 raz Westę: 21 VIII.
Z Polski można będzie zobaczyć tylko niektóre z tych zjawisk, w pozostałych przypadkach będą to w każdym razie bliskie złączenia dwóch obiektów.

Jeszcze jedna klasa tego typu zjawisk to zakrycia i zaćmienia satelitów Jowisza przez samego Jowisza. Cztery tzw. galileuszowe satelity tej planety w ciągu miesiąca mogą zademonstrować pełny repertuar tych zjawisk: zakrycie przez tarczę Jowisza, zaćmienie – tzn. wejście satelity w cień planety, przejście cienia satelity po tarczy planety i samego satelity przed tarczą Jowisza – co akurat jest mało efektowne, bo jasnego punktu na jasnym tle tarczy Jowisza właściwie nie widać. Najczęściej w tych zjawiskach bierze udział, oczywiście, Io, obiegająca Jowisza najbliżej, a więc najszybciej (w ciągu 1,769 dnia). Wreszcie, nawiązując do zapowiadanych w *Delcie* 8/1995 przejść Ziemi przez płaszczyznę pierścieni Saturna, zawiadamiamy, że trzecie z owych przejść w bieżącej serii nastąpi 12 II, co również będzie mało widokowe, ponieważ przejawi się widocznym BRAKIEM pierścieni. Dokładniejsze informacje o tych wszystkich zjawiskach podaje np. miesięcznik Polskiego Towarzystwa Miłośników Astronomii – *Urania*. Życzymy dobrej pogody!

Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania M 756.
Niezależnie od tego, czy trzeci gracz obstawi orła czy reszkę, z prawdopodobieństwem 1/2 wygra, zyskując 50 gr (pół puli minus stawka), a z prawdopodobieństwem 1/2 przegra swoją stawkę 1 zł. W każdej grze straci więc średnio 25 gr. Co ciekawsze, w analogicznej sytuacji, gdy gra pięciu graczy i trzech z nich jest zblokowanych (po grze równo dzielą zyski i straty), a dwóch pozostałych stosuje taktykę zawsze orzeł – zawsze reszka, tych dwóch graczy jest w lepszej sytuacji niż zblokowana trójka.

Rozwiązanie zadania F 418.
Czas spadania pierwszej kulki jest równy 1/4 okresu drgań wahadła matematycznego o długości l i nie zależy od kąta α (dla małych α). Jest on równy

$$t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Czas spadania drugiej kulki, która porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z zerową prędkością początkową, jest równy

$$t_2 = \sqrt{\frac{2l}{g}}.$$

Ponieważ $\sqrt{2} < \frac{1}{2}\pi$, pierwsza spadnie kulka poruszająca się swobodnie. Powyższa nierówność ma proste uzasadnienie geometryczne. Obwód okręgu jest większy od obwodu wpisanego weń kwadratu.

Czas spadania kulki swobodnej wynosi około 90% czasu spadania kulki uwięzionej na nici, niezależnie od długości nici (jeśli tylko kąt α jest mały).

epsilon δελτα...

12/95

(58)

Ogłoszony rok temu nasz konkurs świąteczny był nieco inny niż zazwyczaj. Tym razem prosiliśmy Czytelników, by poinformowali nas o zauważonych użyciach słowa „DELTA" – w nazwach firm, instytucji, gdziekolwiek! Ponadto prosiliśmy o próbę znalezienia wykorzystania słowa „EPSILON".

Okazało się, że nasi Czytelnicy zdecydowanie wolą pisać do nas o matematyce. Jedynie Pan Waldemar Pompe powiadomił nas, że imię DELTA nosi pies jego kolegi, a później Panowie Krzysztof Chełmiński i Waldemar Pompe zgłosili nam DELTY kolejne: w Gołdapi istnieje zespół muzyczny DELTA, nazwę DELTA nosi też jeden z akademików w Białymstoku. Poniżej przytaczamy to, co znaleźliśmy my.

4) Linie lotnicze DELTA (DELTA AIRLINES).

5) Biuro Usług Turystycznych DELTA TRAVEL w Krakowie, ul. Dietla 45.

6) DELTA-TECH – firma komputerowa, komputeryzująca m.in. apteki, biura handlowe, składy celne (3 lata gwarancji), w Krakowie, ul. św. Anny 9/10.

7) Przedsiębiorstwo Usług Technicznych i Handlowych DELTA SOUTH w Krakowie, os. Kościuszkowskie 2.

8) DELTA S.C., Przedsiębiorstwo Handlowo-Usługowe w Krakowie, Na Kozłówce 25.

9) Przedsiębiorstwo Produkcji Spożywczej DELTA w Tarnowie Podgórnym, ul. 25 Stycznia 3.

10) DELTA – zakłady produkujące wędliny (z nalepkami DELTA FOOD), w Krakowie, ul. Krzywoń 25 i w Piekarach Śląskich, ul. Górnicza 17.

11) PPH DELTA – firma w Żywcu, ul. Leśnianka 129, produkująca napoje chłodzące, m.in.: DELTA Orange, DELTA Citrone, DELTA Cola, DELTA Tonic, DELTA Lemon.

12) DELTA-MARKET w Krakowie, ul. Królowej Jadwigi 244.

13) Sklep Budowlano-Przemysłowy DELTA w Krakowie, Rynek Kleparski 5.

14) Sklep Elektryczny DELTA sp. z o.o. w Krakowie, ul. Szewska 22.

15) Oficyna Wydawnicza DELTA W-Z (wydała m.in. album „Mój ogród").

16) Wydawnictwo DELTA (wydało m.in. książeczkę dla dzieci „Sportowcy", na okładce chłopak na lotni z napisem „I ♡ DELTA").

17) DELTA CORPORATION w Krakowie, ul. Powstania Warszawskiego 10.

18) DELTA S.C. w Krakowie, ul. Broniewskiego 1.

19) Agencja Informacyjno–Reklamowa DELTA – A.I.R. w Bielsku-Białej, ul. Browarna 2.

20) Radio DELTA w Bielsku Białej.

21) Prosto z DELTY – kolumna w tygodniku „Kronika Beskidzka", informująca o przebojach Radia „Delta".

22) Kocioł DELTA ACV – kocioł na gaz lub olej opałowy, produkowany przez belgijską firmę ACV.

23) Smoczki anatomiczne z odpowietrzaczem DELTA (produkowane przez Spółdzielnię Inwalidów „Saturn" w Warszawie, ul. Rezedowa 19).

24) DELTA – jednostka użyta w *Porozumieniu między J.M. Rektorem Uniwersytetu Jagiellońskiego a Komisją Zakładową NSZZ „Solidarność" Uniwersytetu Jagiellońskiego*, dotyczącym regulacji płacowych (cytujemy fragment):

Stała kwota podwyżki dla nauczycieli akademickich wynosi 40.00 zł. Pozostała kwota podwyżki jest dzielona zgodnie z algorytmem 6 delt, przyznawanych za:
– tytuł profesora, – habilitację, – stopień doktora, – studia wyższe, – UJ jako podstawowe miejsce pracy, – uznaniową. Jedną dodatkową deltę można przyznać profesorom zwyczajnym.

25) Hotel DELTA w Amsterdamie (ul. Damrak 42-43).

26) Restauracja DELTA w Amsterdamie (koło hotelu).

27) Tabliczka z napisem DELTA w Budapeszcie, na domu przy ulicy Kossuth nr 17 (redaktorom *EPSILONA* nie udało się dociec, czego owa tabliczka dotyczy).

28) Papierosy DELTA (Kingsize, Ultrafilter), sprzedawane na Węgrzech.

29) Napis DELTA na lokomotywach niektórych pociągów jeżdżących w Holandii.

30) DELTA AMACURO – terytorium federalne w północno-wschodniej Wenezueli.

31) DELTA-PLAN – nazwa nadana inwestycjom, których celem jest powiększenie powierzchni ziem uprawnych, w Holandii.

32) DELTA Burke – aktorka, grała w filmie „A Bunny's Tale" (wyświetlanym w polskiej telewizji pod tytułem „Byłam króliczkiem Playboya").

33) Sprawa DELTY – tytuł powieści Stanisława Broszkiewicza.

34) DELTA Force – tytuł filmu.

35) DELTA Venus – tytuł dramatu erotycznego prod. USA, 1995, w reżyserii Zalmana Kinga (tytuł oryginału „Delta of Venus").

36) DELTA City – nazwa projektowanego nowego miasta w filmie „Robocop".

37) DELTA – amerykańska grupa antyterrorystyczna z powieści Christophera Hyde'a „Plan Maxwella".

38) CHARLIE DELTA – kryptonim radiowy samolotu z opowiadania Fredericka Forsytha „Pasterz".

No i jeszcze (a może przede wszystkim) liczne DELTY matematyczne... Najsłynniejszy chyba, wyróżnik trójmianu kwadratowego ($\Delta = b^2 - 4ac$), *delta Kroneckera* (δ_{ij}, równa 1, gdy $i = j$, równa 0, gdy $i \neq j$), *delta Diraca* (słynna dystrybucja; takie dziwo, które można określić jako przyjmujące w zerze wartość ∞, poza tym 0, a całka z tego po $\mathbf{R}$ wynosi 1), oznaczenie przyjęte na laplasjan ($\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$), delta amplitudy – jedna z eliptycznych funkcji Jacobiego. Ponadto delta geologiczna (przy ujściu rzek)...

A EPSILONA znaleźliśmy tylko jednego, za to matematycznego! Otóż istniało kiedyś (może istnieje nadal?) czasopismo PI MU EPSILON JOURNAL. Pisma nie widzieliśmy i niemal nic o nim nie wiemy, dotarliśmy jedynie do pracy tam opublikowanej; w numerze z kwietnia 1953, w roczniku nr 1, na stronach 311–317 znajduje się artykuł wybitnego amerykańskiego matematyka, R.H. Binga „Examples and Counterexamples".

W tym roku nie ogłaszamy konkursu świątecznego (musi być jakaś odmiana), choć... Proponujemy Czytelnikom zastanowienie się nad trzema (może znanymi?) zadaniami. Będzie o nich mowa w następnych *EPSILONACH*, a zawsze milej jest trochę nad problemem pomyśleć, zanim się poczyta o jego rozwiązaniu.

1. Dany jest czworokąt, którego dwa przeciwległe kąty są proste; długości boków przy jednym z kątów prostych wynoszą a i b, długości boków przy drugim kącie prostym są równe. Obliczyć odległość między wierzchołkami przy kątach prostych.

2. W dwóch trójkątach długości dwóch boków i środkowej poprowadzonej ze wspólnego wierzchołka między tymi bokami są odpowiednio równe. Czy te trójkąty są przystające?

3. Udowodnić, że wysokości w trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.