Dnia 26 lipca 1995 roku
zmarł

Wiesław Szlenk

matematyk, uczony i nauczyciel,
Autor *Delty*

SPIS TREŚCI
NUMERU 9(256)

Delta proponuje
kanon wiedzy ogólnej

W następnym numerze:

Żeglarstwo, fizyka i komputery

Okładkę wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

„Delta" – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano
w Drukarni Naukowo-Technicznej
w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1995 roku wynosi 1 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1995 r. 3 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na I kwartał 1996 r. wynosi 6 zł.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
   - na teren kraju
     - jednostki kolportażowe „Ruch" S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
   - na zagranicę
     - „Ruch" S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
   - na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
     do 20 II na II kwartał
     do 20 V na III kwartał
     do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 1 zł 50 gr, 15 000 zł

Najważniejszym bodaj pytaniem dla wszelkiego nauczania jest: jak wygląda w naszej dziedzinie wiedza ogólna, czyli to, co powinno pozostać w głowie każdego, niezależnie od tego, jaki zawód i jakie zatrudnienie sobie wybrał.

Daleko do tego, by jakiekolwiek programy nauczania były skonstruowane na podstawie dojrzałych przemyśleń na ten temat – jest to przeważnie pazernie zachłanne chciejstwo. Ale *Delta* – nie obarczona koniecznością uzgadniania opinii z komisjami ekspertów – może pozwolić sobie na zaproponowanie po jednym elemencie wiedzy w każdej z naszych dyscyplin do przyswojenia na każdym poziomie edukacji: gdy jest się w zerówce, w klasach 1–8, w klasach I–IV szkoły średniej, na studiach i podczas pracy naukowej.

Wydaje się nam, że składa się z nich zupełnie poprawne wykształcenie ogólne w zakresie matematyki, fizyki i astronomii.

Oczywiście, propozycje przeznaczone dla studiujących podstawówkę nie zostały sformułowane w odpowiednim dla nich języku. Są to propozycje tematów rozmów z nimi dla rodziców, a jeszcze bardziej dla dziadków czy starszego rodzeństwa, bo przecież przez rozmowy ze starszymi zdobywa się w jednocyfrowych latach najbardziej fundamentalne wykształcenie.

Właściwie to i gdy chodzi o wiek bardziej dojrzały, też liczymy na Czytelników *Delty* raczej jako na inicjatorów rozmów i nosicieli przysłowiowego kaganka oświaty, niż wierzymy w to, że to my ich teraz oświecimy.

Całość proponujemy jako prezent od naszych Czytelników dla ich bliskich z okazji wydania *Delty* numer

$$100000000_2 .$$

Być może niektórzy z Czytelników zechcą go przyjąć jako prezent dla siebie.

* *

A ja o jeden więcej...

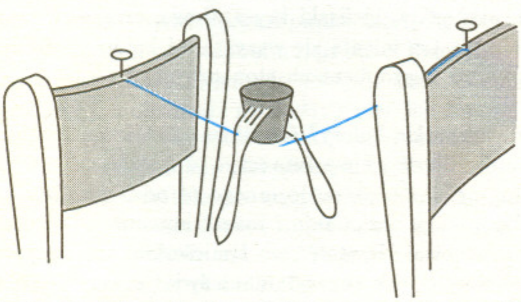
Ilekolwiek by było narysowanych punktów na prostej, to zawsze można narysować jeszcze jeden – patrzymy, który z punktów jest najdalej z prawej strony i rysujemy punkt na prawo od niego. Jest to możliwe, bo prosta jest *nieograniczona*.

Ale można też inaczej. Pomiędzy dwa sąsiednie punkty wrysowujemy jeszcze jeden – może to być środek, ale nie musi. To jest możliwe, bo prosta jest *gęsta*.

I nieograniczoność, i gęstość to przykłady tego, że prosta ma *nieskończenie wiele* punktów. Gdyby do każdej liczby posiadanych samochodzików można było zawsze dołączyć jeszcze jeden, znaczyłoby to, że samochodzików jest nieskończenie wiele. Odpowiedz: czy jest nieskończenie wiele samochodzików?

Równowaga

Naciągnij między oparciami dwóch krzeseł cienki sznurek (lub grubą nitkę) i postaw na niej duży korek od butelki – natychmiast spadnie. A teraz wbij w niego dwa widelce jak na rysunku. Jak widzisz, korek postawiony na sznurku, widelcami do dołu, nie spada – *jest w równowadze*. A to dlatego, że *środek ciężkości*, czyli miejsce, względem którego jest jednakowo rozłożony jego ciężar, jest teraz pod nitką – korek zachowuje się więc nie jakby stał na nitce, lecz jakby na niej wisiał. Możesz nawet lekko trącić widelec: zachwieje się, ale nie spadnie.



Nawet gdy środek ciężkości mieści się wysoko, powyżej tego, na czym przedmiot stoi, to też czasem przedmiot można utrzymać w równowadze. Spróbuj (ale na podwórku!) utrzymać na palcu stojący pionowo kij od szczotki – na pewno przez kilka chwil się uda. A spróbuj zrobić to samo z ołówkiem – zastanów się, dlaczego nie da się tego wykonać. Może także i to uda się wyjaśnić za pomocą środka ciężkości?

ZERÓWKA

Człowiek na Księżycu

Na bezmiernym, pozbawionym wszelkich śladów życia pustkowiu księżycowym pozostał opuszczony pojazd o oryginalnym kształcie. W silnym blasku promieni słonecznych lśni przymocowana do jednej z jego nóg stalowa tabliczka z napisem

Tu człowiek z planety Ziemia
po raz pierwszy postawił stopę na Księżycu
Lipiec 1969 A.D.
Przybyliśmy w imię pokoju dla całej ludzkości

Przez wieki, nie narażony na niszczące działanie powietrza czy wody pozostanie on w tym miejscu na pamiątkę pierwszej w dziejach ludzkości wyprawy załogowej na Księżyc.

Kiedy 20 lipca 1969 roku Neil Armstrong postawił stopę na pokrytej gęstym pyłem powierzchni Srebrnego Globu, wypowiedział słowa, które natychmiast dotarły na Ziemię: „Ten jeden mały krok człowieka jest wielkim krokiem całej ludzkości". Dwadzieścia minut później na Księżycu stanął drugi uczestnik wyprawy Apollo 11 – Edwin Aldrin. Miliony ludzi, dzięki bezpośredniej transmisji telewizyjnej, w napięciu śledziły spowolnione ruchy selenonautów, z wysiłkiem poruszających się w słabym polu grawitacyjnym. W czasie ponaddwugodzinnego pobytu nie oddalili się oni bardziej niż na kilkadziesiąt metrów od statku i przeszli ogółem nie więcej niż pół kilometra. Zebrali w tym czasie 22 kg próbek gruntu księżycowego, sfotografowali otoczenie i ustawili szereg przyrządów pomiarowych. Choć nie doszło do emocjonujących przygód w rodzaju spotkania z Panem Twardowskim czy też potyczek z szernami, cel wyprawy został osiągnięty. Odwieczne marzenie człowieka, fascynujący temat wielu powieści fantastycznych, zostało zrealizowane.

W pięciu następnych wyprawach amerykańskich statków Apollo do Księżyca dotarło jeszcze dziesięciu astronautów, którzy w sumie spędzili ponad trzy doby na Srebrnym Globie i przeszli około 95 kilometrów po jego powierzchni. Ponad dwadzieścia lat temu zaniechano jednak tego rodzaju wypraw. Znacznie mniej kosztowne, a przede wszystkim nie tak niebezpieczne jest badanie innych ciał niebieskich za pomocą sond kosmicznych, o kolonizowaniu zaś innych planet można na razie tylko marzyć.

Księżyc w dzień?

Zapewne każdy widział Księżyc w dzień. Jest to zaskakujące zjawisko i prawie każdy gotów by założyć się, że Księżyc na dziennym niebie jest zjawiskiem zdecydowanie rzadszym niż na niebie nocnym. A jak jest naprawdę?

Księżyc przebywa na niebie nocnym i na dziennym tyle samo czasu. Wynika to z faktu, że porusza się po niebie z prędkością **zupełnie inną** niż Słońce (choć niemal po tym samym kole) i że porusza się zupełnie niezależnie od niego. Dlatego kąt między kierunkiem na Księżyc a kierunkiem na Słońce w przeciągu miesiąca przyjmuje wszystkie możliwe wartości. W konsekwencji równie często Słońce i Księżyc widać na niebie razem (wtedy Księżyc widać w dzień), jak i oddzielnie (wtedy Księżyc widać w nocy).

Dlaczego wobec tego bylibyśmy skłonni upierać się, że Księżyc częściej widać w nocy? Bo to też jest w pewnym sensie prawda. Mianowicie, na nocnym niebie Księżyc widać **łatwiej** z dwóch powodów: w nocy niebo jest ciemne, a sam Księżyc jaśniejszy, gdyż w nocy zawsze go widać w fazie bardziej zbliżonej do pełni niż do nowiu.

Stąd też pochodzi mylny pogląd, że podczas pełni jest zazwyczaj ładna pogoda. Otóż, jeżeli podczas ładnej pogody jest pełnia, to fakt ten rzuca się w oczy i zostaje w pamięci, natomiast Księżyc w nowiu nawet przy ładnej pogodzie nie rzuca się w oczy, a podczas pogody paskudnej wcale Księżyca nie widać – nawet jeśli jest w pełni.

To, że poziomy kąt między kierunkiem na Słońce i na Księżyc przyjmuje w ciągu miesiąca wszystkie wartości, oznacza, że – między innymi – co miesiąc przyjmuje on wartość zero. Sytuacja taka to nów. Dlaczego jednak podczas każdego nowiu Księżyc nie zasłania Słońca, czyli dlaczego co miesiąc nie ma zaćmienia Słońca? Tu właśnie odgrywa rolę fakt, że drogi Księżyca i Słońca po niebie odbywają się po zbliżonych, ale jednak różnych kołach. Aby Księżyc mijając Słońce zasłonił je, mijanka musi się odbywać w pobliżu miejsca, gdzie te dwa koła się przecinają.

Co widać w lustrze?

Świat po drugiej stronie lustra – niby taki sam – jest jednak inny. Niełatwo odcyfrować lustrzane odbicie napisu „Ala ma kota", a gdy przystawi się do lustra zegarek, to można zobaczyć, że na tarczy jego lustrzanego odbicia wskazówka sekundnika kręci się w innym kierunku niż w naszym świecie. Z drugiej jednak strony, gdy zmierzymy jakiś odcinek, nasz sobowtór w lustrze uzyska z mierzenia ten sam, co my, wynik (choć, być może, trudniej będzie przeczytać napisy na podziałce linijki). Lustrzany obraz kwadratu jest kwadratem, a sześcianu – sześcianem i kuli – kulą. Co zatem się zmienia, a co nie?

Jeśli swemu lustrzanemu odbiciu pomachamy prawą ręką, to wyda się nam, że odbicie macha do nas ręką lewą. Czyżby więc lustro zamieniało lewą stronę i prawą?

Nietrudno przekonać się, że tak nie jest. Wyciągnijmy rękę w lewo, równolegle do lustra: nasz lustrzany sobowtór wyciągnie rękę w tę samą stronę, poprawnie wskazując kierunek **w lewo**. Kłopot z lustrem leży gdzie indziej: gdy pokażemy naszego sobowtóra palcem, on pokaże nas, tym razem wyciągając rękę w przeciwną stronę niż my. Zatem, lustro nie tyle zamienia lewą stronę i prawą, co raczej w specyficzny sposób odwraca nas tyłem do przodu.

To, którą rękę nazwiemy lewą, a którą prawą, jest sprawą zupełnie dowolnej umowy. Podobnie, kwestią umowy jest wybór kierunku, w którym mają kręcić się wskazówki zegara. O tym, że to rzeczywiście tylko umowa, mogła się przekonać Alicja w Krainie Czarów. Taką umowę matematyk nazywa **wyborem orientacji przestrzeni**.

I lustro zmienia wyłącznie orientację – świat w lustrze ma inną orientację niż nasz. Reszta pozostaje bez zmian.

A teraz powiedz: ile różnych orientacji ma nasza przestrzeń? Dla ułatwienia: odszukaj (sam lub z czyjąś pomocą) jakąś śrubkę prawoskrętną i jakąś lewoskrętną. Albo ślimaka.

A jak wytłumaczysz, że kula i sześcian w lustrze są dokładnie takie same jak przed nim?

Tęcza

Chyba każdy lubi widok tęczy. Jeśli po burzy rozpogodzi się, szukaj jej w kierunku przeciwnym do Słońca. Ma ona postać barwnych, współśrodkowych łuków, od fioletowego po wewnętrznej do czerwonego po zewnętrznej stronie. Ma rozmiar kątowy około 41°. Oczywiście cała. Środek tęczowego łuku znajduje się na przedłużeniu linii łączącej Słońce z okiem obserwatora. Stojąc w terenie płaskim możemy zobaczyć co najwyżej półokrąg, i to tylko wtedy, gdy Słońce znajduje sie na linii horyzontu. Im wyżej Słońce jest nad widnokręgiem, tym mniejszy widać łuk tęczy; gdy Słońce jest wyżej niż 41°, tęczy po prostu nie ma. Tęczę jako okrąg można zobaczyć, na przykład, z pokładu samolotu lub wierzchołka góry.

Czasem obserwuje się więcej niż jedną tęczę – ta druga jest wyraźnie słabsza, ma większe rozmiary kątowe (około 51°) i odwróconą kolejność barw.

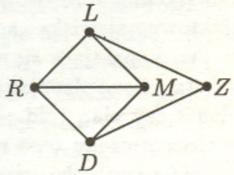
Szczęściarze mogą pochwalić się, że widzieli tęczę również w księżycową noc.

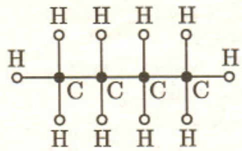
Tęczę możemy też łatwo „zrobić". Wystarczy rozpylić w słoneczny dzień wodę z węża ogrodowego. Barwy tęczy można też zaobserwować w kałuży z plamami benzyny (choć zjawisko to ma całkiem inną przyczynę). Pryzmat lub kawałki szkła, kieliszki kryształowe, drogie klejnoty i krople rosy też mienią się wszystkimi kolorami tęczy, jeśli obrócić nimi w promieniach słonecznych.

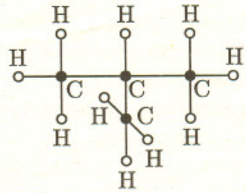
Skąd te wszystkie kolory? Od dawna ludzie zadawali sobie to pytanie. Pierwszy wytłumaczył to Newton. To światło przechodząc z powietrza do innego ośrodka (woda, szkło itp.) ulega załamaniu i rozszczepieniu na różne barwy. Tak pisał Newton „... Umieściłem swój pryzmat przed otworem, tak aby załamane światło mogło padać się na przeciwległą ścianę. Wielce przyjemną rozrywką było z początku oglądanie żywych i silnych barw tak otrzymanych...". Newton zauważył też zjawisko odwrotne „... często z podziwem oglądałem, jak wszystkie barwy pryzmatu skupione, a przez to ponownie zmieszane tak, jak były w świetle przedtem, nim padło na pryzmat, odtworzyły światło całkowicie i dokładnie białe, niczym dostrzegalnym nie różniące się od światła słonecznego...".

Grafy

Graf to rysunkowy (czyli graficzny – stąd nazwa) sposób przedstawiania związków między różnymi obiektami. Wygląda tak, że kropki (każda z nich oznacza pewien obiekt) są połączone kreskami (niekoniecznie prostymi).



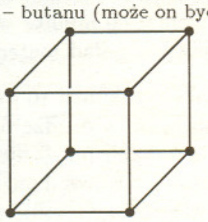




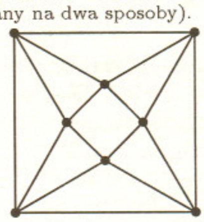
Z lewej pięcioro dzieci (Dorota, Marysia, Leszek, Romek i Zdziś) w grafie, który pokazuje, czy mają wspólną literę w imieniu. Z prawej – atomy składające się na cząsteczkę gazu do zapalniczek – butanu (może on być zbudowany na dwa sposoby).

O grafach warto się wiele dowiedzieć, bo wtedy można te wiadomości zastosować do każdej rzeczy, którą się uda narysować jako graf.

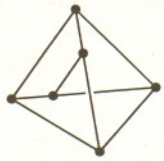
Trudnym problemem dotyczącym grafów było pytanie, czy każdą płaską mapę polityczną da się tak pokolorować czterema barwami, by sąsiednie kraje były innego koloru. Dwadzieścia lat temu Appel i Haken sprawdzili za pomocą komputera, że można.

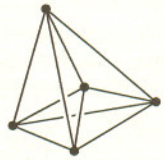


Na rysunku jest sześcian z przezroczystymi ściankami; jeśli do liczby kresek dodamy 2 i odejmiemy liczbę kropek, to otrzymamy liczbę ścian – tak będzie dla każdego wielościanu bez dziurek.



Graf da się narysować bez odrywania ołówka i bez rysowania tej samej kreski dwa razy, jeśli z jego dwóch kropek wychodzi nieparzysta liczba kresek, lub gdy z każdej kropki wychodzi parzysta liczba kresek. I nigdy więcej. Ten z rysunku da się tak narysować.





Graf może się nie dać narysować na płaszczyźnie tak, by jego kreski nie przecinały się, gdzie nie trzeba. Wtedy zawsze jest w nim przynajmniej jeden z dwóch narysowanych kawałków. Ten z lewej znany jest z zadania: *połączyć 3 domki z 3 studniami nieprzecinającymi się drogami.*

Planeta czy gwiazda?

Gdyby tak zgasło Słońce, wraz z nim zniknęłyby nam z oczu wszystkie planety i Księżyc. Nie byłoby też, oczywiście, dnia i nocy, zmierzchów i poranków, pełni i nowiu oraz całego mnóstwa innych, ciekawych zjawisk astronomicznych. Na niezmiennie ciemnym niebie pozostałyby jednak gwiazdy – one świecą na swój własny koszt, niezależnie od Słońca. Silny blask Słońca, naszej najbliższej gwiazdy, rozjaśnia niebo tak mocno, że w dzień innych gwiazd nie widać. Ale nocą to właśnie głównie one zdobią niebo – 6000 najjaśniejszych z nich możemy dostrzec przy dobrej pogodzie nie odwołując się nawet do pomocy lunety. Wszystkie gwiazdy są bardzo od nas odległe i dlatego z Ziemi nie widać tarczy żadnej z nich nawet przy użyciu najsilniejszych teleskopów. Nie jest bowiem możliwe skonstruowanie teleskopu, za pomocą którego z Ziemi można by dostrzec tarcze gwiazd, zawsze pozostaną one tylko świecącymi punkcikami. Inaczej rzecz się ma z planetami, nie wspominając już o Księżycu. Oświetlane przez Słońce, jedynie odbijają jego blask, a że są nieporównanie bliżej niż gwiazdy, widać ich tarcze, a w lunetach czy teleskopach nawet pewne szczegóły powierzchni. Co do możliwości obserwowania tarczy Srebrnego Globu nikt nie ma wątpliwości; do oglądania tarcz planet trzeba raczej użyć lunety, choć podobno możliwe jest dostrzeżenie np. faz Wenus nawet gołym okiem. Dzięki temu, że planety nie są jedynie świecącymi punktami, nie migocą jak gwiazdy, świecą jasnym, spokojnym blaskiem, co pozwala na stosunkowo łatwe odróżnienie jednych od drugich. Ponadto znacznie szybciej wędrują po niebie (to również efekt niedużej, jak na astronomiczne warunki, odległości od nas) i nietrudno zaobserwować ich przemieszczanie się na tle gwiazdozbiorów pasa Zodiaku. Stąd w starożytności nazywano je „gwiazdami błądzącymi".

Prawo Archimedesa

Rozejrzyj się dokoła siebie. Łatwo zauważysz, że w powietrzu unosi się wiele przedmiotów: kurz, pyłki kwiatowe, liście, owady, ptaki, samoloty, balony itp. Większość z nich nie może się jednak utrzymać długo w powietrzu i opada na ziemię. Jeśli nie ma zawirowań powietrza, kurz i liście opadają, owady i ptaki – jeśli przestaną bić skrzydłami, samoloty – gdy wyłączą silniki. Jedynie balony, nawet z podwieszonym koszem i ludźmi w nim, mogą unosić się majestatycznie w powietrzu bez widocznej przyczyny.

Podobnie dzieje się na wodzie. Większość przedmiotów tonie. Łatwo zgodzić się z poglądem, że przedmioty lżejsze od wody mogą pływać po jej powierzchni. To woda je „wypiera". Co to jednak znaczy? Tak naprawdę, to ciało zanurzone w wodzie wypiera ją i to w dosłownym sensie. Tam, gdzie jest ciało, nie może być wody. Woda o objętości zanurzonej części ciała musi być gdzieś usunięta. Więc gdzie ona jest? Jedyne wolne miejsce jest na powierzchni i tam jest ta wyparta woda. Nie bardzo to widać, gdy wchodzimy do jeziora, ale łatwo zauważyć, że poziom wody w wannie wyraźnie idzie do góry, gdy się w niej zanurzamy. Jeśli ciało usuwamy z wody, to wyparta woda może spłynąć na swoje miejsce. A więc to ciężar wypartej wody jest równy sile wyporu. Ciało może pływać pod warunkiem, że ciężar wypartej wody (ogólniej, cieczy) może zrównoważyć ciężar ciała. Tak jest zawsze, gdy ciało jest lżejsze od wody. Ale i kawałek żelaza można zmusić do pływania, jeśli nada mu się odpowiedni kształt. Przecież statki morskie wykonane są z żelaza.

Na przedmioty unoszące się w powietrzu też działa siła wyporu, ale powietrza. Balony często są wypełniane rozgrzanym powietrzem. Rozgrzane powietrze jest lżejsze niż zimne, więc ciężar balonu wraz z zawartym w nim gorącym powietrzem jest mniejszy niż ciężar wypieranego, zimnego powietrza.

Opory

Wyobraźmy sobie dwie sytuacje. W pierwszej wnosimy jakiś przedmiot, na przykład walizkę, po schodach na piętro, w drugiej przeciągamy ją po poziomej podłodze. W obu przypadkach wymaga to od nas wysiłku (fizycy powiedzieliby, że pracy). Przy wnoszeniu walizki po schodach musimy pokonać jej ciężar spowodowany przyciąganiem grawitacyjnym Ziemi. Przy przesuwaniu jej po podłodze musimy pokonać siłę tarcia między walizką i podłogą. Czy w obu przypadkach bezpowrotnie tracimy nasz wysiłek?

W pierwszym nie. Stosując sprytny system linek i krążków możemy zrzucając walizkę z piętra wciągnąć za jej pomocą inny przedmiot do góry lub też wykonać inną użyteczną czynność (w ostateczności roztrzaskać walizkę).

W drugim tak. Walizka przesunięta po podłodze nie może nic już dla nas zrobić. Tutaj nasz wysiłek jest stracony – nie możemy go w żaden sposób odzyskać. Nawet przesuwając ją do położenia początkowego musimy się dodatkowo natrudzić.

Mamy więc do czynienia z dwoma rodzajami sił. W pierwszej sytuacji mamy do czynienia z siłą „uczciwą" – wysiłek włożony do jej przezwyciężenia może być odzyskany później. Drugi rodzaj sił, których przykładem jest siła tarcia, określa się mianem oporów. Gdyby nie opory (tarcie, opór powietrza), to ciało raz wprawione w ruch po poziomej powierzchni poruszałoby się wiecznie. Opór wody jest bardziej odczuwalny. Gdy zamieszamy herbatę w szklance, to po pewnym czasie jej ruch ustanie. Jest to wynik nie tylko tarcia herbaty o szklankę, ale też tarcia wewnętrznego wody, zwanego lepkością.

Opory przeciwstawiają się przyczynie je wywołującej. Dlatego często staramy się je zmniejszyć – wyrównujemy trące powierzchnie, pokrywamy je śliskimi powłokami, smarujemy itp. Ale równie często są nam potrzebne. Bez nich życie nie byłoby możliwe, bo jak ruszylibyśmy z miejsca, jeśli bez tarcia nie byłoby od czego się odepchnąć? A jak zatrzymalibyśmy się?

Meteory

Powszechnie obserwowane, niejednokrotnie bardzo efektowne zjawiska „spadających gwiazd" wywołane są przez spalające się w atmosferze ziemskiej kawałki substancji międzyplanetarnej – resztki rozbitych komet, planet czy planetoid. Układ Słoneczny jest dość mocno zanieczyszczony tego rodzaju odpadkami, często więc Ziemia przechodzi przez orbitę, po której krążą. Zdarza się to np. co roku w okolicy 12 sierpnia, gdy na pogodnym niebie można obserwować rój o tak dużej gęstości, że niemal co minutę w okolicy gwiazdozbioru Perseusza pojawia się ślad meteoru.

Większość z nich to drobne odłamki, które całkowicie spalają się w drodze przez atmosferę i nigdy nie stają się meteorytami (czyli nie dolatują do Ziemi), zdarzają się jednak i większe docierające do powierzchni w postaci pyłu meteorytowego – obecny jest on wszędzie: w powietrzu, wodzie morskiej, skałach osadowych, gruncie, nawet w lodach Arktyki i Antarktydy. To powietrze działa na meteory jak proszek ścierny.

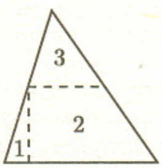
Bywa, choć naprawdę niezwykle rzadko, że z nieba spadają całkiem duże kamienie, a nawet kilkudziesięciotonowe głazy. Np. 30 listopada 1954 roku czterokilogramowy meteoryt w Alabamie wpadł przez dach i zranił panią domu, szczęśliwie niegroźnie.

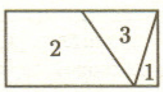
W przybliżeniu wszystkich meteorytów spada rocznie na Ziemię około 500, z czego około 2/3 natychmiast tonie w oceanach, przepada w górach i na pustyniach, tak że zaledwie kilka – od 4 do 5 rocznie – trafia do laboratoriów (oczywiście, nie wprost – np. przez dach), w których są szczegółowo badane – do czasu podróży kosmicznych były to przecież jedyne (poza promieniowaniem) próbki materii pozaziemskiej, jakimi dysponowała ludzkość.

I dziś też ważne jest, aby wszystkie „podejrzane" o pozaziemskie pochodzenie kamienie trafiały w ręce uczonych.

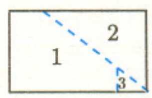
Tniemy figury i bryły na kawałki

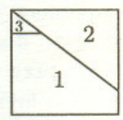
Każdy trójkąt można przeciąć na trzy części, z których ułoży się prostokąt.



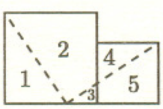


Jeśli prostokąt nie jest zbyt długi, to można go przeciąć na trzy części, z których ułoży się kwadrat.





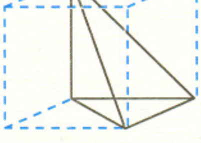
Wynika stąd, że jeśli dwa trójkąty mają jednakowe pola, to można jeden z nich pociąć (jeśli jest z papieru, to np. nożyczkami) na części, z których ułoży się drugi.

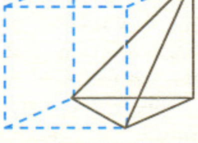


Ponieważ dwa kwadraty można pociąć na pięć części, z których można ułożyć jeden, więc gdy mamy dwa wielokąty o tym samym polu, to jeden z nich można pociąć na części, z których ułoży się drugi.

Można to zrobić np. tak, że potnie się wielokąt na trójkąty, z każdego z nich zrobi się kwadrat, a z wielu kwadratów jeden.

Zupełnie inaczej jest z wielościanami. Są takie wielościany, nawet bardzo proste, które mają jednakową objętość, a żadnego z nich nie da się pociąć na kawałki, z których ułoży się drugi.





Lewą bryłę (czworościan) można pociąć na kawałki, z których da się ułożyć mały sześcian, prawej zaś nie. Wobec tego lewej nie można pociąć na kawałki, z których złoży się prawa. Aby można było sobie lepiej wyobrazić te bryły, każda z nich jest narysowana jako część takiego samego sześcianu. Oczywiście, mają one tę samą objętość.

Najciekawsze w tym jest, że ludzie odkryli takie pary wielościanów dopiero w 1900 roku, choć starali się zbadać, jak to jest, przez ponad 2300 lat.

Co jest większe?

Słońce, niemal 400 razy większe od Księżyca, jest również prawie 400 razy bardziej od nas odległe niż Księżyc. Dzięki tej przypadkowej zbieżności ich rozmiary obserwowane z Ziemi są jednakowe. Tarcze Księżyca i Słońca widzimy pod kątem zaledwie 0,5 stopnia, są więc podobnego rozmiaru jak np. pomarańcza oglądana z odległości dziesięciu metrów. Ten prosty przykład wskazuje na użyteczność podawania rozmiarów (ciał niebieskich, gwiazdozbiorów) i odległości na niebie poprzez wyrażanie ich właśnie w mierze kątowej. Niewiele ma to wspólnego z rzeczywistymi rozmiarami czy odległościami, jednak przy obserwacjach z Ziemi takie umowne umieszczanie wszystkiego na jednej sferze niebieskiej jest niezbędne. Niezbyt precyzyjną, ale za to niezwykle wygodną „miarkę kątową" każdy nosi przy sobie – rozmiar pięści na wyciągniętym ramieniu, z niezłą dokładnością, odpowiada dziesięciu stopniom. Łatwo to sprawdzić odmierzając, na przykład, odległość od horyzontu do zenitu. Powinno zmieścić się w niej 9 pięści, bowiem w każdym miejscu na Ziemi widać połowę sfery niebieskiej, a więc od horyzontu po zenit mamy 90°.

Tą miarką nie da się zmierzyć tarczy Słońca czy Księżyca, ale można, na przykład, ocenić ich wysokość nad horyzontem. Zwróćmy przy tym uwagę, jak bardzo ich wygląd zależy od położenia na niebie. Nisko nad horyzontem (tuż po wschodzie lub przed zachodem) wydają się znacznie większe, są często przy tym spłaszczone, zwykle ciemniejsze i bardziej czerwone. Wszystko to za sprawą atmosfery, która oszukuje nas pochłaniając i uginając światło. Promieniowanie dochodzące z zenitu pokonuje znacznie krótszą drogę w atmosferze niż nisko nad horyzontem, dlatego jest mniej „zafałszowane". Widać również, że większe tarcze nisko nad horyzontem wcale nie dają więcej światła, co tym bardziej utwierdza nas w przekonaniu, że zmiana rozmiaru jest efektem pozornym. Rzeczywiste jasności Słońca i Księżyca muszą być bardzo różne, skoro w dzień jest widno, a nocą nieporównanie ciemniej nawet podczas pełni. Rzeczywiście – Słońce świeci ponad 500 000 razy mocniej. Zresztą Księżyc tak naprawdę sam w ogóle nie świeci, tylko odbija promieniowanie słoneczne i to, jak widać, niezbyt skutecznie.

Podzielność

Obchodzisz urodziny i zaprosiłeś gości: razem z Tobą jest n osób. Masz duży worek, w którym jest m orzechów; chciałbyś podzielić je tak, by każdy dostał tyle samo orzechów i żeby w worku nic nie zostało. Niestety, nie zawsze się to uda. Można to zrobić jedynie wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna k, że $k \cdot n = m$. Powiemy wtedy, że liczba n jest *dzielnikiem* liczby m.

Gdy masz jednego gościa, to możecie we dwójkę podzielić się wszystkimi orzechami bez reszty, gdy liczba m jest *parzysta*, tzn. gdy jej cyfra jedności to 2, 4, 6, 8 albo 0. Jeśli cyfra jedności liczby m jest inna, to jeden orzech Wam na końcu zostanie.

Podział bez reszty między 10 osób uda się tylko wtedy, gdy liczba m ma cyfrę jedności zero, a podział pomiędzy trzy osoby – wtedy i tylko wtedy, gdy suma wszystkich cyfr liczby orzechów dzieli się przez trzy.

W złośliwych przypadkach, gdy liczba m nie ma innych dzielników niż 1 oraz m (jest tak, na przykład, dla $m = 2, 3, 5$ albo 19 czy 101), okaże się, że orzechy można podzielić równo tylko wtedy, gdy wcale gości nie ma (wszystkie orzechy weźmiesz sam), albo wtedy, gdy jest was tyle samo co orzechów – każdy dostanie wtedy jeden orzech. Takie liczby m nazywamy **liczbami pierwszymi**.

Liczby pierwsze to cegiełki, z których zbudowane są wszystkie inne liczby naturalne: każdą liczbę naturalną można *rozłożyć na czynniki pierwsze*, czyli zapisać jako iloczyn liczb pierwszych. Na przykład, $6 = 2 \cdot 3$, a $190 = 2 \cdot 5 \cdot 19$. Takiego rozkładu można dokonać tylko na jeden sposób. Dla każdej liczby istnieje większa od niej liczba pierwsza. Wiedział o tym już Euklides 2300 lat temu. Czy umiałbyś wskazać jakąś liczbę pierwszą większą od 101?

Wszystko się trzęsie

„Od zawsze" ludzie zastanawiali się, czy substancje, z którymi mają do czynienia, są jednolite, ciągłe, czy też są złożone z maleńkich, jednakowych (lub co najwyżej w kilku odmianach) kawałków – cząsteczek.

Nie jest łatwo zdecydować się na któreś z tych rozwiązań. Dlatego bardzo długo odpowiadano, że jedne substancje są ciągłe, a drugie mają strukturę cząsteczkową. Taka odpowiedź nikogo nie mogła zadowolić. Poza tym trzeba było umieć zakwalifikować każdą substancję do któregoś rodzaju. A do jakiego może należeć na przykład woda? Niby nie da się dostrzec jej „kawałków", ale podejrzanie łatwo się dzieli.

Na pomysł, jak to może być, wpadł w XVII wieku Robert Hooke. Wykonał on mianowicie doświadczenie: do naczynia nasypał suchego, drobnego piasku i zaczął naczyniem potrząsać. Piasek (jak woda) wyrównał swoją powierzchnię. Położył na piasku metalowy klucz – klucz utonął (jak w wodzie). Wepchnął pod powierzchnię korek – ten wypłynął (jak w wodzie) itd., itp.

Tak mu się to spodobało, iż zaproponował pogląd, że nie tylko woda, lecz każda substancja składa się z ziarenek, jak piasek, i te ziarenka bezustannie drgają. Najbardziej w gazie, najmniej w ciele stałym.

I okazało się, że koncepcję tę można potwierdzić. Co więcej, okazało się, że ilość energii przypadająca na jedną cząsteczkę to temperatura. Gazy mają cząsteczki najbardziej rozhasane – wypełniają każdy kawałek dostępnej przestrzeni. Cząsteczki cieczy też ruszają się żwawo, ale muszą ulegać ciążeniu – stąd jej stała powierzchnia. W ciałach stałych drganie cząsteczek nie pozwala im nawet na przemieszczanie się między sąsiadami. Widać stąd, dlaczego ogrzewanie może roztopić ciało stałe czy też zamienić ciecz w parę.

Dziś nazywamy tę koncepcję teorią kinetyczno-molekularną. Pomogła ona w zrozumieniu wielu zjawisk nie tylko fizycznych, ale również np. chemicznych, gdzie opisuje się właśnie powstawanie i budowę cząsteczek.

Metale

Najliczniejszą grupą pierwiastków są metale, to znaczy substancje, których atomy zachowują się jak kulki o ładunku dodatnim zawieszone w chmurze elektronów. Te kulki nazywa się *dodatnimi jonami.* Luźne elektrony (*elektrony walencyjne*) są natomiast tak słabo związane z macierzystymi atomami, że utworzona przez nie chmura jest wspólna dla wielu atomów i zachowuje się podobnie do zamkniętego w zbiorniku gazu – mówi się dlatego o gazie elektronowym. Ten gaz odpowiedzialny jest za przewodnictwo metali – dzięki niemu metale bardzo dobrze przewodzą zarówno ciepło, jak też prąd elektryczny, bo choć jeden atom dostarcza do sieci 1–2 elektrony, to jest ich jednak bardzo dużo: 10^{23} w cm^3 (czyli sto tysięcy miliardów miliardów). Chmura elektronowa powoduje też, że wypolerowana powierzchnia metali zachowuje się jak lustro (najczęściej ze srebrzystym połyskiem).

Jednak, mimo że elektronów jest dużo, nie są one w stanie utrzymać nieruchomo w swojej chmurze znacznie od nich cięższych jonów dodatnich (czyli atomów metalu bez elektronów walencyjnych). Tę własność metali obserwujemy jako *kowalność*, czyli możliwość kształtowania metalu pod wpływem uderzeń (często nie muszą one nawet być bardzo silne – np. dla ołowiu, miedzi czy cyny). Gdy jednak metal jest cięższy, to większą rolę zaczynają odgrywać oddziaływania między jego jonami dodatnimi i metal jest twardszy, i trudniej się topi. Metale te lepiej ukazują nam swoją strukturę krystaliczną, która u lżejszych metali jest mniej widoczna.

Najbardziej charakterystyczną chemiczną własnością metali jest ich *alkaliczność*, czyli zdolność do tworzenia zasad – z tego względu lżejsze metale wchodzą w skład wszelkich środków piorących.

METALE w układzie okresowym pierwiastków

H																	He
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	To	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	J	Xe
Cs	Ba	1	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
Fr	Ra	2															

1 – lantanowce, 2 – aktynowce

Trójki pitagorejskie

Zdarza się, że długości wszystkich boków trójkąta są liczbami całkowitymi. Gdy zdarzy się to trójkątowi prostokątnemu, liczby te nazywa się *trójką pitagorejską*. Jeśli liczby całkowite i dodatnie a, b, c spełniają warunek: $a^2 + b^2 = c^2$, to tworzą one trójkę pitagorejską. Trójkę pitagorejską tworzą np. liczby 3, 4 i 5 albo 5, 12 i 13.

W obu podanych przykładach jedna z liczb dzieli się przez 2, jedna dzieli się przez 3 i jedna dzieli się przez 5. Czy tak być musi? Okazuje się, że tak. Dla dwójki sprawdzenie jest bardzo łatwe: gdy b i c są nieparzyste, to nieparzyste są b^2 i c^2, a więc a^2 jest liczbą parzystą, zatem parzysta musi być też liczba a. Dla trójki jest trochę gorzej: **gdyby** żadna z liczb a, b, c nie dzieliła się przez 3, to każda z liczb a^2, b^2, c^2 dawałaby z dzielenia przez 3 resztę 1 – wtedy lewa strona dawałaby z dzielenia przez 3 resztę 2, a prawa 1, więc **gdyby** nie może mieć miejsca. Dla piątki jest jeszcze gorzej, ale spróbuj sam.

A jak wyglądają wszystkie trójki pitagorejskie? Przepis jest następujący: weźmy trzy liczby całkowite dodatnie p, q, r i niech będzie $p > q$. Trójkę pitagorejską tworzą

$$a = 2rpq,\ b = r(p^2 - q^2),\ c = r(p^2 + q^2).$$

Wszystkie trójki pitagorejskie można otrzymać tym sposobem, ale – niestety – niektóre pojawią się po kilka razy. Gdy wyrzucimy z tych wzorów r, to pojawią się wszystkie trójki, które nie mają wspólnego dzielnika większego od 1, ale nie pojawi się wiele innych, np. 9, 12, 15.

Od bardzo dawna matematycy (i nie tylko oni) chcą się dowiedzieć, czy są takie trójki liczb całkowitych dodatnich, dla których jest

$$a^n + b^n = c^n,$$

dla liczby n większej od 2. Ale wszyscy wierzą, że ich nie ma. Przekonanie takie nazywa się Wielkim Twierdzeniem Fermata. Wygląda na to, że rok temu wreszcie pojawił się jego dowód (Andrew Wiles).

Pory roku

Latem jest ciepło, bo promienie słoneczne padają na ziemię pod większym kątem i dzień jest dłuższy niż zimą. Przyczyną tego wszystkiego jest usytuowanie osi ziemskiej względem płaszczyzny ziemskiej orbity: oś z płaszczyzną tworzy kąt nie 0°, nie 90°, lecz „coś pomiędzy", mianowicie 66°,5. I to jest bardzo ważne. Ziemska oś bowiem zachowuje przez cały rok niezmienny kierunek w przestrzeni (jest to właściwość każdego wirującego ciała), a zatem co pół roku silniej nasłoneczniona jest raz północna, a raz południowa półkula Ziemi. Globusy Ziemi produkowane są z pochyloną osią dlatego, by od razu unaocznić ludziom ten narzucony przez przyrodę kąt 66°,5.

U innych planet jest rozmaicie. Np. oś obrotu Jowisza jest niemal prostopadła do płaszczyzny jego orbity, a oś Urana leży akurat w płaszczyźnie orbity. Dlatego na Jowiszu pór roku nie ma, a na Uranie pionowymi, prostopadłymi promieniami Słońca bywają oświetlane nawet bieguny.

Orbita ziemska (po której mkniemy z szybkością 100 000 km/h) nie jest kołem, lecz elipsą, ale nasza odległość od Słońca (średnio 149 mln km) zmienia się zaledwie w zakresie $\pm 1,5\%$, przy czym w lecie jesteśmy dalej od Słońca niż w zimie. Można by więc przypuszczać, że u nas, tj. na półkuli północnej, lato będzie przez to mniej gorące, niż gdyby orbita Ziemi była okręgiem.

No, ale wskutek tej samej eliptyczności orbity wiosna i lato trwają u nas o tydzień dłużej (od wiosennego zrównania dnia z nocą 21 marca do jesiennego 23 września), niż pory chłodne, więc może zarówno lato, jak i zima, powinny być na naszej półkuli ostrzejsze?

Wszelkie takie rozważania nie są jednak sensowne, ponieważ dla klimatu większe znaczenie ma rozkład lądów i oceanów, a także istnienie systematycznych wiatrów (np. pasatów), niż zmiana odległości od Słońca o 1,5%.

Układy pozycyjne

Jeśli chcemy zorientować się, ile mamy np. pinezek w pudełku, to możemy je ułożyć w kupkach po 10 albo po 15, a potem policzyć, ile jest tych kupek i ile zostało „wolnych" pinezek. Z takiego sposobu zliczania zostały nam coraz mniej używane nazwy: tuzin (12), mendel (15), kopa (60), gros (144), mówiące, w jakie to kupki grupujemy przedmioty. Lepszym rozwiązaniem są układy pozycyjne.

Znany ze szkoły układ dziesiątkowy wydaje się nam łatwy i wygodny: każdą liczbę naturalną możemy dzięki niemu zapisać używając (być może wielokrotnie) jedynie dziesięciu różnych znaków, *cyfr*. Łatwo się dodaje i mnoży dwie liczby zapisane w ten sposób. Dużo trudniej byłoby mnożyć liczby zapisane w systemie rzymskim (tym, gdzie zamiast 1995 pisze się MCMXCV).

Układ dziesiątkowy nie jest jedynym możliwym. Do zapisywania liczb w *układzie dwójkowym* wystarczą dwie cyfry: 0 i 1. Żeby zapisać jakąś liczbę w układzie dwójkowym, trzeba ją dzielić wielokrotnie przez dwa i notować reszty z dzielenia:

$$19 = 2\cdot 9 + 1 = 2\cdot(2\cdot 4 + 1) + 1 = 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = (10011)_2\,.$$

Dzięki układowi dwójkowemu może liczyć komputer, który pojmuje tylko fakt, że w jakimś obwodzie w danej chwili przepływa (albo nie) prąd elektryczny.

Jako *podstawy układu* można użyć dowolnej liczby naturalnej $p > 1$; potrzeba wtedy p cyfr: $0, 1, \ldots, p-1$. Na przykład

$$50 = 1\cdot 3^3 + 2\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 = (1212)_3 \quad\text{oraz}\quad 50 = 7^2 + 7^0 = (101)_7.$$

Ten sam napis może w różnych układach oznaczać różne liczby. Na przykład (sprawdź!)

$$(1001101)_2 = 77, \qquad (1001101)_5 = 15\,776.$$

Potęgi mogą być również ujemne (umowa: $\frac{1}{a^k} = a^{-k}$). Na przykład

$$(12{,}34)_6 = 8\frac{11}{18}, \qquad \text{bo jest to} \qquad 1\cdot 6^1 + 2\cdot 6^0 + 3\cdot 6^{-1} + 4\cdot 6^{-2}.$$

W układach niedziesiątkowych wiele spraw wygląda inaczej, niż do tego przywykliśmy – na przykład cechy podzielności. W układzie siódemkowym cecha podzielności przez 2 i 3 jest taka sama: liczba dzieli się przez 2 (lub 3), jeśli suma jej siódemkowych cyfr dzieli się przez 2 (lub 3). Czy umiałbyś to udowodnić? Albo powiedzieć, jaka jest cecha podzielności przez 7 w układzie ósemkowym?

Komety

Chyba żadne obiekty kosmiczne nie zostały tak zdegradowane jak komety. Te budzące kiedyś grozę ciała, uważane za wysłanników bogów, za zwiastunów kataklizmów lub, w każdym razie, przełomowych wydarzeń, okazały się po prostu bryłami brudnego śniegu.

Jądro komety bowiem to skalny pył i okruchy zlepione w całość (o rozmiarach kilku kilometrów) zamrożoną wodą, metanem i dwutlenkiem węgla. Gdy ciało to zbliży się do Słońca, lody parują i materia jądra rozprasza się wokół tworząc tak zwaną *głowę komety*, na ogół znacznie większą od Ziemi. Materia ta jest następnie porywana przez wiatr słoneczny lub strumień słonecznego promieniowania i tworzy z czasem *warkocz komety* rozciągający się niekiedy na dziesiątki milionów kilometrów. Łatwo się domyśleć, że tak rozproszona materia małego jądra musi być niezwykle rozrzedzona. I rzeczywiście, np. przez warkocze komet niemal swobodnie widać gwiazdy, a gdy w 1910 r. Ziemia przeszła przez warkocz komety Halleya, to skutki tego były dokładnie żadne.

Niewątpliwie niebezpieczne byłoby bezpośrednie uderzenie komety w Ziemię. Jest jednak ono bardzo mało prawdopodobne. Znacznie większa jest szansa na to, że Ziemia spotka się z resztkami jakiejś komety. W grę wchodzą tu przede wszystkim komety okresowe, czyli takie, które okrążają Słońce po bardzo wprawdzie wydłużonych, ale eliptycznych orbitach. Za każdym przelotem w pobliżu Słońca kometa taka traci poprzez rozproszenie warkocza część spajających jej jądro substancji. Z czasem jądro rozpada się na oddzielnie poruszające się bryły kamienne. Z reguły nie są one wielkie, a co więcej, rozpraszają się coraz bardziej i ich orbity zaczynają się coraz bardziej różnić. Taki jest koniec komety, a spotkanie z „byłą kometą" nie jest już groźne – wygląda tak, jakby w atmosferę trafił nadprogramowy rój meteorów.

Elektromagnetyzm

Zjawiska elektryczne były aż do XVIII stulecia znane jako ciekawostka: przyciąganie skrawków papieru przez potarty bursztyn czy też iskierki pojawiające się podczas czesania wełny albo włosów w ciemności. Podobnie było ze zjawiskami magnetycznymi, choć te wykorzystano w konstrukcji kompasu. Dopiero praktyczne podejście w pierwszej połowie XIX wieku pozwoliło znaleźć związek między tymi dwoma zjawiskami, a w konsekwencji zaowocowało konstrukcją prądnicy, silnika elektrycznego, elektromagnesu, telefonu, radia i telewizji.

Odkrycie polegało na spostrzeżeniu, że znajdujące się w ruchu ładunki elektryczne wywołują zjawiska magnetyczne i odwrotnie – zmiany pola magnetycznego wywołują ruch ładunków elektrycznych, czyli prąd elektryczny. Słowo *pole magnetyczne* oznacza taką własność przestrzeni, że umieszczenie w niej jakiegoś magnesu powoduje powstanie działającej na niego siły. Podobnie *pole elektryczne* to własność przestrzeni powodująca, że na umieszczony w niej ładunek elektryczny działa siła. Pojęcia te wprowadził do fizyki Faraday – nie chciał bowiem mówić (tak jak Newton) o sile działającej na odległość; wolał mówić, że ładunki elektryczne zmieniają własności przestrzeni, wytwarzają pole. Podobnie magnesy. W tym ujęciu elektromagnetyzm to fakt, że zmiany pola elektrycznego i magnetycznego wywołują się nawzajem.

Pojęć *pole* i *działanie na odległość* można używać zamiennie tak długo, dopóki ładunki są w spoczynku i pola nie zależą od czasu. Dopiero Maxwell stwierdził, że ruch lub znikanie i pojawianie się ładunków wytwarzających pole nie ma natychmiastowego wpływu na odległe ładunki, lecz zmiany te przenoszą się ze skończoną (choć olbrzymią) prędkością. To znacznie lepiej wyraża i opisuje pojęcie pola. Pamiętajmy, że tak światło, jak fale radiowe to właśnie zaburzenia tego pola.

Nasi sąsiedzi

Pytanie, czy człowiek jest samotny we Wszechświecie, czy ma gdzieś żywych, a może i rozumnych sąsiadów, stawiali sobie ludzie od dawna. Przez kilkaset lat obowiązywała doktryna o unikalności człowieka, w XIX wieku zaś jako niemal obowiązkowe traktowano przekonanie *o mnogości zamieszkałych światów*. Co więcej, oczekiwano, że przekonanie to lada chwila zostanie obserwacyjnie potwierdzone.

Wydawało się, że najbliżej nas jest życie na Marsie. Obserwowano bowiem sezonowe zmiany barwy jego gruntu, co interpretowano jako wywołane porami marsjańskiego roku rozwój i zamieranie roślinności. Wielu obserwatorów rysowało nawet mapy tzw. kanałów marsjańskich – rzekomej sieci wodnej. Potem okazało się, że to tylko wiatry przenoszą ogromne ilości pyłu zmieniając wygląd planety, a życia na Marsie nie ma. A więc na pewno nie ma go – poza Ziemią – w Układzie Słonecznym, bo warunki cieplne i ciśnieniowe na innych od Ziemi i Marsa planetach wykluczają istnienie życia przynajmniej w takim sensie, do jakiego jesteśmy przyzwyczajeni.

Obserwacje optyczne też jednak kończą się na obiektach należących do naszego układu planetarnego. Nie możemy zobaczyć, jak wyglądają planety, choć czasem można stwierdzić, że pewna gwiazda – poza Słońcem – jakieś planety posiada.

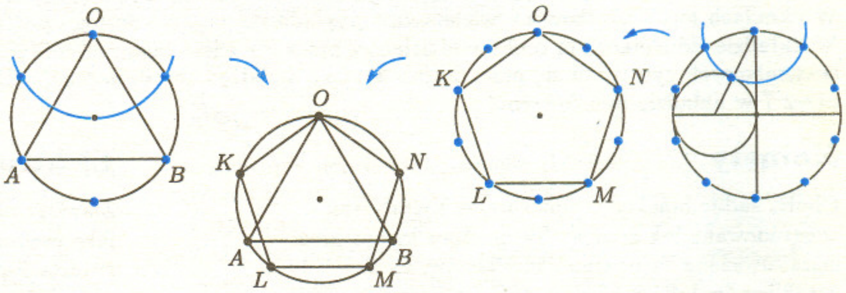
Rozpoczęto więc radiowe nasłuchy Kosmosu. Z tego, co usłyszano, jedynie promieniowanie pulsarów mogło przez jakiś czas stwarzać złudzenie wysyłanych przez kogoś sygnałów. Gdy jednak okazało się, że można ich powstanie wyjaśnić całkiem naturalnie, nie zostało nic, co można by podejrzewać o pochodzenie od istot rozumnych.

Z kolei sami zaczęliśmy – tak na wszelki wypadek – wysyłać sygnały, które jakieś rozumne istoty mogłyby rozszyfrować dowiadując się z nich podstawowych rzeczy o nas – przynajmniej taka nadzieja towarzyszyła temu przedsięwzięciu. Wszystko na razie bez echa.

Wniosek jest jeden: o potencjalnych sąsiadach nie wiemy **NIC**, bo albo nie istnieją, albo są zbyt daleko, albo uparcie milczą.

Wielokąty foremne i twierdzenie Gaussa

Na pewno wiesz, jak za pomocą cyrkla i linijki skonstruować trójkąt równoboczny. Trochę trudniejsza jest konstrukcja pięciokąta foremnego (najpierw konstruujemy dziesięciokąt). Jeśli jednak umiemy skonstruować oba te wielokąty foremne, to skonstruowanie piętnastokąta foremnego nie sprawi już kłopotu. Wystarczy narysować je oba w tym samym kole, zaczynając od tego samego punktu – patrz obok.



Z prawej konstrukcja dziesięciokąta i pięciokąta foremnego, z lewej trójkąta równobocznego, w środku – piętnastokąta foremnego. Bokiem piętnastokąta wpisanego w okrąg jest odcinek AL.

Podobnie, jeśli umiemy skonstruować p-kąt foremny i q-kąt foremny i gdy $\mathrm{NWD}(p,q)=1$, konstruujemy $(p\cdot q)$-kąt foremny.

Niektórych wielokątów foremnych – na przykład 7-kąta albo 9-kąta – nie można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki. Akurat 200 lat temu Carl Gauss udowodnił, że n-kąt foremny można skonstruować za pomocą cyrkla i linijki wtedy i tylko wtedy, gdy

$$n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_l,$$

gdzie $p_1, p_2, \ldots, p_l$ są **różnymi** liczbami pierwszymi Fermata, czyli liczbami pierwszymi postaci $2^{2^k}+1$. Do tej pory znamy tylko pięć liczb pierwszych Fermata – dla k równego 0, 1, 2, 3, 4 (oblicz, jakie to liczby); dla $k=5$ nie jest to już liczba pierwsza i nie wiadomo, czy w ogóle jest jeszcze jakaś liczba pierwsza Fermata.

A teraz odpowiedz: czy za pomocą cyrkla i linijki można skonstruować 11-kąt foremny? a 21-kąt? a jak skonstruować 8-kąt albo 30-kąt foremny?

Silnik cieplny

Wiemy, że energia mechaniczna może być w całości przekształcona w ciepło, na przykład przez tarcie. Natomiast całkowita przemiana w odwrotnym kierunku nie jest fizycznie możliwa. Każda maszyna cieplna, oprócz grzejnika, z którego pobiera energię, musi posiadać chłodnicę – najczęściej jest to otaczające silnik powietrze i dlatego nie uświadamiamy sobie jej obecności.

Nie całe jednak ciepło przepływające ze zbiornika do chłodnicy może być zamienione na pracę. Maszynę cieplną można porównać do koła wodnego napędzanego strumieniem wody ze spiętrzonego potoku i pompującego wodę do innego zbiornika. Jasne jest, że takie urządzenie nie może przepompować całej wody z potoku, gdyż nie pozostałoby nic, co poruszałoby koło wodne.

Jedynie część wody można w ten sposób przepompować; część ta zależy od wysokości spiętrzenia wody i wysokości, na jakiej znajduje się zbiornik. W przypadku silników cieplnych jedynie część ciepła równa $(T_1 - T_2) : T_1$ (gdzie T_1 i T_2 są temperaturami w skali bezwzględnej grzejnika i chłodnicy) może być zamieniona na pracę. W rzeczywistości, ze względu na straty ciepła i różne inne przyczyny, wydajność maszyny jest zawsze jeszcze niższa.

Gdyby chłodnica miała temperaturę *bezwzględnego zera* (0 kelwinów), można by osiągnąć pełną zamianę ciepła w pracę. Osiągnięcie temperatury 0 K nie jest jednak możliwe nawet teoretycznie. A skonstruowanie silnika cieplnego o wyższej wydajności jest tak samo niemożliwe, jak nakłonienie wody, by samorzutnie popłynęła pod górę i spadła na koło wodne.

Big Bang

Mało chyba jest głębszych problemów niż pytanie: *jak powstał Wszechświat?*.

Przełomowym momentem było tu odkrycie tzw. *ucieczki galaktyk*. Ponad pół wieku temu Edwin Hubble stwierdził, że wszelkie obiekty oddalają się, jeden od drugiego, z prędkościami proporcjonalnymi do wzajemnej odległości, niezależnie od ich położenia we Wszechświecie. Słowo *wszelkie* odnosi się, oczywiście, tylko do obiektów dużych i wzajemnie bardzo oddalonych, jak galaktyki i ich gromady.

Naturalnym wnioskiem ze stałego „rozdymania się" Wszechświata jest fakt, że kiedyś musiał on być znacznie mniejszy, a nawet, że kiedyś był cały w jednym punkcie nazywanym *pierwotną osobliwością*. I ta osobliwość eksplodowała – to jest właśnie Wielki Wybuch (ang.: *Big Bang*). Dlaczego Wybuch nastąpił, nie wiadomo. Znajomość praw przyrody pozwala jedynie wyobrazić sobie, co było potem.

Struktura młodego Wszechświata była prosta. Nie było ani galaktyk, ani gwiazd, ani planet. Z powodu niezwykle wysokiej temperatury nie było atomów ani nawet jąder atomowych. Istniały jedynie cząstki elementarne – przestrzeń wypełniona była utworzoną z nich gorącą plazmą i promieniowaniem.

Z czasem, gdy zrobiło się nieco luźniej – bo cały czas Wszechświat się rozszerzał – promieniowanie oddzieliło się od materii, zrobiło się mniej gorąco, wreszcie niektóre cząstki elementarne zaczęły tworzyć atomy. Z tego etapu rozwoju Wszechświata mamy zabytek – jest to rejestrowane przez współczesne radioteleskopy tzw. *promieniowanie tła* równomiernie rozłożone w całej przestrzeni.

Po upływie około miliona lat ze zgęszczeń materii zaczęły powstawać pierwsze pokolenia gwiazd zbudowane głównie z wodoru. Era ta trwa do dziś, czyli przez 15–20 miliardów lat, z tym że we wnętrzach starych gwiazd powstały w międzyczasie cięższe pierwiastki. A co będzie dalej? Czy Wszechświat czeka nieustanna ekspansja, czy też zacznie się z czasem zapadać, by powrócić do pierwotnej osobliwości? Na razie tego stwierdzić nie umiemy.

Promieniotwórczość

Powodem do dumy XIX-wiecznych chemików było udowodnienie, że wysiłki średniowiecznych alchemików, aby zamienić jakiś tańszy metal w złoto, były z góry skazane na niepowodzenie. Stwierdzono, że atomy są niezmienne i nie istnieją metody tworzenia pierwiastków – złoto można jedynie znaleźć, a nie wytworzyć. Stąd też szokiem dla całego świata nauki było odkrycie promieniotwórczości przez Becquerela w 1896 roku. Okazało się, że atom może zmienić swoją „osobowość" wskutek naturalnej emisji cząstek α (później okazało się, że są to jądra helu) lub β (są to elektrony) z jądra atomowego. Za swoje odkrycie Becquerel i jego współpracownicy – Piotr Curie i Maria Skłodowska-Curie – otrzymali w 1903 roku Nagrodę Nobla.

Emisja cząstki α powoduje „przesunięcie się" atomu w lewo o dwa miejsca w tablicy Mendelejewa.
Emisja cząstki β zaś – o jedno miejsce w prawo.
Dla niektórych pierwiastków emisja taka następuje spontanicznie, bez naszej ingerencji. Dlatego nazywa się ją promieniotwórczością naturalną. Najbardziej znanym pierwiastkiem wykazującym naturalną promieniotwórczość jest uran (a dokładniej, jeden z jego izotopów).

Prawie trzydzieści lat później przekonano się, że promieniotwórczość może też być sztucznie wywołana przez człowieka, że atomy można jednak „zmusić" do zmiany swej „tożsamości". Dokonuje się tego za pomocą bombardowania ich strumieniem innych cząstek (służą do tego *akceleratory*).

Tak więc dziś można by pokusić się o zamianę w laboratorium np. uranu w złoto. Procedura byłaby jednak tak niesamowicie droga, że żadnego zysku z jej przeprowadzenia nie uzyskałoby się. Można by to zrobić jedynie „na złość" XIX-wiecznym chemikom. Ale, w istocie, taka przemiana nie zagroziłaby podstawom chemii: w dalszym ciągu nie można dokonać przemiany pierwiastków na drodze chemicznej.

Natomiast w fizyce odkrycie promieniotwórczości otworzyło nowe obszary badań i doprowadziło do powstania nowych gałęzi fizyki współczesnej, techniki, energetyki jądrowej i broni masowej zagłady.

Miara

Najwspanialszym osiągnięciem nauk przyrodniczych jest możliwość używania do opisu najrozmaitszych wielkości jednych i tych samych liczb; pozwala to kojarzyć te wielkości ze sobą – bez sensu jest dzielenie drogi przez czas, ale głęboki sens ma dzielenie liczby odpowiadającej drodze przez liczbę wyrażającą czas: powstaje wtedy liczba dająca nam wyobrażenie o tempie ruchu. – Tak zachwycał się Izaak Newton w swoim dziele *Philosophiae naturalis principia mathematica* wynalazkiem miary, czyli przyporządkowywania różnym wielkościom liczb, dokonanym 2000 lat wcześniej przez Eudoksosa.

Podstawowa własność miary to *addytywność*. Mówi ona, że jeśli podzielimy wielkość na części, to suma ich miar jest równa mierze całej wielkości. Miara nie może też być liczbą ujemną. Określenie miary jest sensowne, gdy jednakowym wielkościom przypisuje jednakowe miary. Własności te wydają się bardzo oczywiste i nic z nich wynikać nie powinno.

Tymczasem można udowodnić, że jedyną możliwą niezerową miarą powierzchni prostokąta jest iloczyn dwóch jego sąsiednich boków, a objętości prostopadłościanu – iloczyn jego krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka.

Bardzo często do mierzenia jakichś wielkości używa się przyrządów; np. ciężary mierzymy wagą, a długość taśmą. Są jednak wielkości, których miary nie da się ustalić żadnym materialnym przyrządem. A jedna z takich wielkości odgrywa ważną rolę w naszym życiu. To prawdopodobieństwo – od kiedy wykryto, że jest to miara, podobnie jak długość, objętość czy ciężar (1933 r., Kołmogorow), nasza wiedza o prawdopodobieństwie powiększyła się niesłychanie i ciągle jeszcze powiększa się szybciej niż wiedza o innych gałęziach matematyki.

Warto jeszcze pamiętać, że nie każde przyporządkowanie zjawiskom przyrodniczym liczb jest miarą – nie jest nią np. ustalanie temperatury, choć mówi się: *mierzymy temperaturę*.

Algorytm Euklidesa

Proponujemy następującą zabawę, która będzie opisana na przykładzie.

$$\frac{21}{15} = 1 + \frac{6}{15} = 1 + \frac{1}{\frac{15}{6}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3}{6}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{6}{3}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}.$$

Kolejne równości powstają tak: dzielimy 21 przez 15 z resztą, $21 = 1 \cdot 15 + 6$, i stąd otrzymujemy pierwszą równość. Teraz ułamek $\frac{6}{15}$ odwracamy i mamy równość drugą. Wykorzystując następnie dzielenie z resztą $15 = 2 \cdot 6 + 3$ otrzymujemy trzecią równość. Teraz ułamek odwracamy... W końcu nasza zabawa zakończyła się: 6 podzieliło się przez 3 bez reszty i dalej nic się nie da zrobić.

Powyższą zabawę można powtarzać dla dowolnych ułamków liczb naturalnych $\frac{m}{n}$. Okazuje się, że zawsze zakończy się ona po skończonej liczbie kroków (dlaczego?), dając rozwinięcie $\frac{m}{n}$ w postaci tzw. ułamka łańcuchowego

$$\frac{m}{n} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_k}}}.$$

Popatrzmy jeszcze raz na otrzymane na początku rozwinięcie $\frac{21}{15}$. W ostatnim kroku wykonaliśmy dzielenie bez reszty $6 : 3$. Zauważmy, że mianownik tego dzielenia to nic innego tylko $\mathrm{NWD}(21, 15)$. Czy to przypadek? Nie. Okazuje się, że gdy $\mathrm{NWD}(m,n) > 1$, to zawsze w ostatnim kroku rozwijania ułamka $\frac{m}{n}$ na ułamek łańcuchowy wykonujemy dzielenie bez reszty i mianownik tego dzielenia jest równy $\mathrm{NWD}(m, n)$ (dlaczego?). Opisana metoda znajdowania największego wspólnego dzielnika nazywa się algorytmem Euklidesa.

A co się stanie, gdy $\mathrm{NWD}(m,n) = 1$? Prześledź to na przykładzie $\frac{7}{5}$.

Prawa Keplera

Chociaż Kopernik centralnym ciałem naszego układu planetarnego uczynił Słońce, to ruch planet jeszcze przez kilkadziesiąt lat opisywano jak za dawnych czasów, mianowicie składano z wielu jednostajnych ruchów kołowych. Dlatego hipoteza Kopernika była światopoglądowo rewolucyjna, ale naukowe znaczenie miała wtedy minimalne.

Kepler, z usposobienia mistyk, szukał w ruchach planet wyższej harmonii – cokolwiek miałoby to znaczyć. I znalazł! Metodą prób i błędów wykrył, że do opisu ruchu planety zamiast wielu epicykli wystarczy jedna elipsa – obecnie fakt ten nazywamy pierwszym prawem Keplera.

Z kolei ruch po elipsie odbywa się z prędkością zmienną, tak że stała jest prędkość polowa planety, tzn. pole omiatane przez jej promień wodzący w jednostce czasu. Dziś wiemy, że jest to innymi słowami wyrażona zasada stałości momentu pędu planety, którą nazywamy drugim prawem Keplera.

Prawo trzecie dotyczy Układu Słonecznego jako całości i głosi, że okres T obiegu planety i promień a jej orbity są związane zależnością

$$\text{ułamek } \frac{T^2}{a^3} \text{ jest taki sam dla wszystkich planet}.$$

Co prawda, jak powiedzieliśmy, orbity planet nie są kołowe, ale różnią się od kół niewiele, a ponadto gdyby nawet były silnie spłaszczone, to przez a należałoby rozumieć średnią arytmetyczną najmniejszej i największej odległości planety od Słońca (jest to wielka półoś orbity danej planety) i wszystko byłoby w porządku. Dla orbit kołowych prawo to jest łatwo wyprowadzić z przyrównania przyspieszenia grawitacyjnego i dośrodkowego planety.

Przyroda demonstruje słuszność tych praw w niezliczonych przykładach, to one bowiem rządzą ruchami również satelitów, także sztucznych, gwiazd podwójnych itd. Warto może też wiedzieć, że to z nich Newton wyprowadził postać prawa grawitacji, chociaż w istocie są one jego konsekwencjami.

Gazy

W przeciwieństwie do ciał stałych i cieczy gazy bardzo łatwo poddają się zmianom objętości.

Współcześni Newtonowi Robert Boyle i Edme Mariotte zauważyli, że objętość danej ilości *dowolnego* gazu w stałej temperaturze jest odwrotnie proporcjonalna do jego ciśnienia.

W sto lat później Joseph Gay-Lussac i Jacques Charles stwierdzili, że ciśnienie *dowolnego* gazu zawartego w stałej objętości wzrasta o 1/273 początkowej wartości przy ogrzaniu o jeden stopień Celsjusza. Ściśliwość i rozszerzalność termiczna ciał stałych i cieczy zależy natomiast w istotny sposób od rozpatrywanej substancji i podlega znacznie bardziej skomplikowanym prawom (na przykład woda).

Powyższe dwa prawa ujawniają więc niesłychaną prostotę struktury wewnętrznej gazów. Wszystkie gazy zachowują się tak samo – wszystkie gazy są „wzorcowe".

Oczywiście, jest to prawda jedynie w pewnym, choć bardzo szerokim, zakresie temperatur i ciśnień. Gdyby bowiem gaz o temperaturze początkowej 0°C oziębić do temperatury 273°C niższej, to zarówno ciśnienie, jak i objętość powinny spaść do zera – co definiuje zero bezwzględne temperatury. Tak się jednak nie dzieje. Gazy rzeczywiste bowiem, w odróżnieniu od ich idealizacji zwanej gazem doskonałym, w pewnej temperaturze skroplą się w ciecz, której nie można już dowolnie ścisnąć. Ujawnia się w ten sposób skończoność rozmiarów molekuł gazu. Poza tym powyższe prawa nie uwzględniają też sił międzycząsteczkowych istotnych przy małych odległościach między cząsteczkami gazu. Prawa dla gazów rzeczywistych są bardziej skomplikowane.

Niemniej jednak, podobnie jak w innych działach fizyki, często dokonujemy idealizacji opisu, jeśli nie prowadzi ona do zbyt grubych przybliżeń. Osiąga się wtedy większą przejrzystość interpretacji zjawisk, co prowadzi do lepszego ich zrozumienia.

Oscylacje

Ruch jest zjawiskiem powszechnym. Obserwowane ruchy możemy podzielić na dwie bardzo ogólne klasy w zależności od tego, czy poruszające się ciało pozostaje w pobliżu ustalonego miejsca, czy też nie. Do pierwszej klasy zaliczamy oscylacje: ruch wahadła, drgania strun i płyt, falowanie liści drzew i kłosów zbóż, łopot flagi i powłoki namiotu na wietrze, drgania elektronów w układach elektrycznych i w atomach, drgania powietrza i pól elektromagnetycznych.

Niektóre z powyżej przytoczonych przykładów to bardzo skomplikowane ruchy, ale wszystkie charakteryzują się cyklicznością, powtarzaniem się pewnych zdarzeń w taki sposób, że czas między kolejnymi powtórzeniami jest (w przybliżeniu) stały. Najprostszy z nich to *ruch drgający prosty*, czyli ruch *harmoniczny*, w którym wychylenie od ustalonego miejsca – zwanego *położeniem równowagi* – jako funkcję czasu opisuje funkcja sinus

$$x(t) = a \cdot \sin(\omega t + \alpha_0).$$

Bardziej skomplikowane ruchy można rozłożyć (dokonać rozkładu harmonicznego) na sumę drgań prostych o ustalonych częstościach.

Z pomocą pianina możesz sam dokonywać (przybliżonego) rozkładu harmonicznego różnych dźwięków. Na przykład, przy naciśniętym pedale tłumienia zawołaj w pobliżu strun i płyty rezonansowej jakąś samogłoskę i posłuchaj, które struny „odezwą się".

Bomba czy reaktor?

Znamy dwa sposoby uzyskiwania energii z reakcji jądrowych: rozszczepienie jąder pierwiastków ciężkich (uranu, plutonu) i synteza pierwiastków lekkich (helu z wodoru).

Technicznie opanowany jest sposób pierwszy – potrafimy zarówno spowodować wybuch bomby, jak i kontrolować proces rozszczepienia w reaktorach. Drugiego sposobu, syntezy, nie potrafimy jeszcze kontrolować; możemy wykorzystywać tylko – niestety – gwałtowną reakcję w bombie wodorowej.

Tymczasem na tej zasadzie działa Słońce i ogromna większość gwiazd. Wykazał to Hans Bethe w latach czterdziestych (Nagroda Nobla w 1967 r.). To dlaczego Słońce nie wybucha jak gigantyczna bomba wodorowa? Otóż (po pierwsze) Słońce pracuje na granicy możliwości zachodzenia reakcji syntezy, a wtedy (po drugie) skuteczny jest mechanizm powodujący, że jeżeli gdzieś reakcja zaczyna się toczyć gwałtowniej, to odpowiednia objętość materii słonecznej rozdyma się i tempo reakcji spada.

Tak więc gwiazdy są mechanizmami z własną regulacją, a ponadto – mówiąc obrazowo – reakcja syntezy w nich zaledwie się tli. Dlatego zresztą mogą być tak długowieczne.

Suma nieskończona i iloczyn nieskończony

Dodawanie skończonej długości można przedłużać w nieskończoność, ale to, co się wtedy otrzymuje, nie zawsze ma sens:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\ldots, \qquad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\ldots, \qquad 1-1+1-1+1-1+\ldots.$$

Lewa nieskończona suma (inaczej: *szereg*) ma wartość 1, gdyż wartości jej skończonych coraz dłuższych początkowych fragmentów coraz lepiej przybliżają tę liczbę. Kto nie wierzy, może pomyśleć o tym, jak w godzinę zjada się tabliczkę czekolady: w pół godziny pół tabliczki, potem w kwadrans ćwierć i tak dalej.

Środkowa suma nie ma wartości liczbowej, ale można jej przypisać wartość ∞, gdyż wartość jej początkowych fragmentów nieograniczenie rośnie. Przekonać się o tym można, gdy się zauważy, że suma jej k wyrazów, od $\frac{1}{k+1}$ do $\frac{1}{2k}$ jest dla każdego k większa od $\frac{1}{2}$.

Wreszcie trzecia suma nie ma żadnego sensu, gdyż nie przybliża żadnej liczby, ani też nie rośnie, ani nie maleje nieskończenie.

Teoria sumowania nieskończonego nie jest algorytmizowalna, to znaczy nie ma w niej gotowych recept na stwierdzenie, czy szereg przedstawia sobą liczbę, czy też nieskończoność, a może jest napisem bezsensownym. Np. stwierdzenie, że suma nieskończona

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \ldots$$

jest, dla $|q| < 1$, równa $\frac{a}{1-q}$, nie nastręcza trudności. Nieco trudniej zauważyć to, co Leibniz: jeżeli sumujemy wyrazy nieskończonego ciągu monotonicznie zbieżnego do zera, stawiając przed co drugim z nich znak minus, to zawsze otrzymamy w wyniku sumowania liczbę. Ale nawet jeśli się o tym wie, to i tak nie widać, że wstawienie co drugiego minusa w środkowy z podanych na wstępie szeregów da akurat

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\ldots = \ln 2.$$

Podobnie, nie jest rzeczą prostą odkryć, że szereg

$$4-\tfrac{4}{3}+\tfrac{4}{5}-\tfrac{4}{7}+\tfrac{4}{9}-\ldots$$

przedstawia liczbę π. Trudności z sumowaniem szeregów biorą się z tego, że sumowanie nieskończone wyrazów o różnych znakach nie jest na ogół ani łączne, ani przemienne.

Analogicznie przedstawia się sytuacja iloczynów nieskończonych. Np. iloczyn

$$\tfrac{2}{1}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{4}{3}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{8}{7}\cdot\ldots$$

ma określoną wartość liczbową (konkretnie $\frac{1}{2}\pi$), ale odkrycie tego nie jest rzeczą prostą. Choć kłopot jest ten sam – funkcja logarytm powoduje, że kto zna nieskończone sumy, ten zna i nieskończone iloczyny.

Naprawdę ważną rolę w matematyce odgrywają sumy nieskończone funkcji. Najprostszym, ale do tej pory najważniejszym przykładem są szeregi potęgowe, czyli wielomiany nieskończonej długości. Np. szeregi

$$x-\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}-\tfrac{x^7}{7!}+\ldots, \qquad x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x^4}{4}+\tfrac{x^5}{5}-\ldots$$

przedstawiają: ten z lewej $\sin x$, a ten z prawej $\ln(1+x)$ – oczywiście ten drugi ma sens tylko dla $x \in (-1, 1\rangle$. Przedstawianie funkcji jako szeregów potęgowych pozwala stosować do ich badania metody pochodzące z algebry.

Szeroko stosowane jest też rozwijanie funkcji w szeregi trygonometryczne. Np. $\frac{x-x^2}{8} = \frac{\sin(\pi x)}{(\pi)^3} + \frac{\sin(3\pi x)}{(3\pi)^3} + \frac{\sin(5\pi x)}{(5\pi)^3} + \frac{\sin(7\pi x)}{(7\pi)^3} + \ldots$

Czarna dziura

Już w XVIII wieku wiedziano, że pocisk wystrzelony z prędkością v z powierzchni kuli o promieniu R i masie M oddali się od tej kuli dowolnie daleko (*ucieknie do nieskończoności*) tylko wtedy, gdy

$$v \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

gdzie G jest stałą grawitacji. Ta graniczna wartość to tzw. *druga prędkość kosmiczna* lub *prędkość ucieczki.*

Powstaje pytanie, czy może istnieć tak gęsta materia, by od niej nie dało się uciec. Pomysł rozwiązania nasuwa się od razu: z powyższego wzoru możemy obliczyć, jak mały musiałby być promień kuli o masie M, by prędkość ucieczki wynosiła dla niej c, czyli prędkość światła. Taki promień to

$$R_0 = \frac{2GM}{c^2}.$$

Z kuli o jeszcze mniejszym promieniu i tej samej masie nawet światło nie wydostałoby się. Każda taka kula to *czarna dziura. Czarna* – bo skoro światło się z niej nie wydostaje, to tym bardziej nie może ona świecić. Właściwiej byłoby jednak nazwać ją niewidzialną.

Dziura jest lepiej dobranym słowem: co bowiem do czarnej dziury trafi, na zawsze jest dla nas stracone.

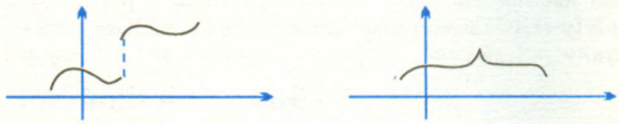
Rozumowanie, jakiego użyliśmy dla stwierdzenia możliwości istnienia czarnych dziur, jest niepoprawne: zastosowaliśmy mechanikę klasyczną do problemu, który trzeba rozpatrywać na gruncie teorii względności (tak jest zawsze, gdy odwołujemy się do prędkości światła). Jednak wynik uzyskany poprawnie jest – o dziwo – taki sam !

Co więcej, czarne dziury najprawdopodobniej istnieją w przyrodzie. Gdy dostatecznie masywna gwiazda wybucha jako supernowa, to jej jądro, nie będąc w stanie niczym zrównoważyć własnej grawitacji, zapada się tak bardzo, że staje się mniejsze od odpowiedniego dla jego masy R_0. Nie wiemy, co dzieje się wtedy z materią jądra tej gwiazdy, bo do czarnej dziury – z definicji – zajrzeć się nie da.

Możemy jedynie odkrywać miejsca we Wszechświecie, gdzie mogą być czarne dziury. To takie miejsca, w których nie ma nic, a które przyciągają okoliczną materię. Grawitacja jest bowiem jedynym oddziaływaniem czarnej dziury z jej otoczeniem.

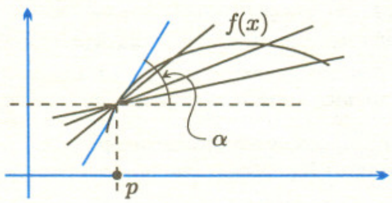
Pochodna

Jeśli krzywa nie ma „skoków" ani „dziobków", to w każdym punkcie ma dobrze określoną styczną. Jeśli krzywa taka jest na dodatek wykresem funkcji, a styczna nie jest pionowa, to funkcję tę nazywamy *różniczkowalną.* Prosta styczna ma tę własność, że w niewielkiej odległości od punktu styczności najlepiej ze wszystkich prostych przybliża krzywą.



Te funkcje mają punkty nieróżniczkowalności, czyli punkty, w których ich wykresy nie mają stycznej.

Jeśli zatem styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(p,\ f(p))$ ma równanie $y = ax + b$, to funkcja g dana wzorem $g(x) = ax + b$ najlepiej ze wszystkich funkcji liniowych przybliża funkcję f niedaleko argumentu p.



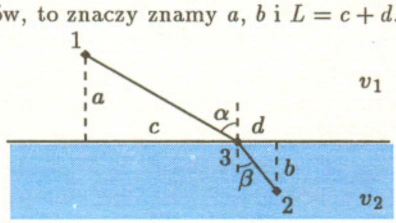
Kąt α odchylenia stycznej od poziomu spełnia warunek: $\operatorname{tg}\alpha = a$. Liczba a mierzy zatem szybkość (i kierunek) zmian wartości funkcji f i nazywa się *pochodną* funkcji f w punkcie p. Oznacza się ją na ogół przez $f'(p)$. Pojęcie pochodnej zostało wzięte z fizyki – jest to *prędkość chwilowa* ruchu, w którym f opisuje, ile drogi zostało przebyte. Styczna jest granicznym położeniem siecznej, stąd

$$a = \lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}, \text{ czyli } f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Styczna jest pozioma, gdy pochodna jest równa 0 – jest to warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej. Dla $f(x) = x^3$ mamy $f'(0) = 0$, a ekstremum nie ma – nie jest to więc warunek dostateczny.

Optyka geometryczna, czyli zasada minimum

Optyka geometryczna opiera się na zasadzie, że światło rozchodzi się po takiej drodze, której przebycie zajmuje jak najmniej czasu (*droga minimalna*). Jeśli przestrzeń jest *jednorodna* i *izotropowa* (nie ma wyróżnionych punktów ani kierunków), to minimalną drogą jest linia prosta. Nietrudno znaleźć minimalną drogę, gdy mamy dwa ośrodki jednorodne i izotropowe rozgraniczone płaszczyzną. Niech prędkości światła w tych ośrodkach będą odpowiednio v_1 i v_2, źródło światła niech będzie w punkcie 1; oświetlić chcemy punkt 2 – znamy położenie tych punktów, to znaczy znamy a, b i $L = c + d$.



Aby znaleźć punkt 3 , czyli np. długość c, obliczamy czas przebycia drogi z 1 do 2 jako funkcję c

$$t(c) = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (L-c)^2}}{v_2}$$

i szukamy jego najmniejszej wartości. Ponieważ funkcja t jest różniczkowalna i przyjmuje ekstremum, więc jest ono w jedynym punkcie, gdzie pochodna jest równa 0. Odpowiada to sytuacji, gdy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2},$$

co jest znane jako *prawo Snella.*

Metoda taka z powodzeniem daje się zastosować do całej mechaniki klasycznej – zamiast czasu minimalizuje się wielkość zwaną działaniem (całkę z różnicy energii kinetycznej i potencjalnej wzdłuż drogi). Jest ona równoważna drugiej zasadzie dynamiki dla sił potencjalnych.

Geometrie nieeuklidesowe

Suma kątów trójkąta narysowanego na powierzchni kuli jest większa od dwóch kątów prostych, czyli (w mierze łukowej) π, a jego pole jest równe kwadratowi promienia kuli pomnożonemu przez to, o ile suma ta przekracza π.

Żadnych takich własności nie ma zwykła płaszczyzna, zwana euklidesową. Zatem geometria powierzchni kuli, czyli sfery, jest geometrią nieeuklidesową. Nietrudno się domyślić, że geometrii nieeuklidesowych jest bardzo wiele. Można też sobie wyobrazić, jak wyglądają geometrie nieeuklidesowe trójwymiarowe. I jak można określić geometrie wyższych jeszcze wymiarów.

Rysując trójkąt na powierzchni kuli rysujemy, jako jego boki, linie możliwie najprostsze, najmniej krzywe (są to w tym przypadku okręgi wielkie) – linie o tej własności nazywają się w dowolnej sytuacji liniami geodezyjnymi. To one pełnią w geometriach nieeuklidesowych rolę prostych. Odległość dwóch punktów, mierzona po powierzchni kuli, to długość najkrótszego łuku łączących te punkty geodezyjnych (na powierzchni kuli na ogół są dwa takie łuki, choć bywa i więcej) – w geometrii nieeuklidesowej tak właśnie definiuje się odległość w każdej sytuacji.

Określona w ten sposób geometria ma na ogół dużo własności innych niż geometria, której uczy się w szkole. Charakterystycznymi dla szkolnej geometrii, dla geometrii euklidesowej, są twierdzenie Pitagorasa, twierdzenie Talesa i istnienie jednokładności o stosunku różnym od 1 i -1. Najbardziej znaną geometrią nieeuklidesową jest geometria Bolyai–Łobaczewskiego, w której suma kątów w trójkącie jest mniejsza od 180°.

Uznanie geometrii nieeuklidesowych za naukowo poprawne dokonało się niewiele ponad 100 lat temu. Działo się tak, ponieważ utożsamiano geometrię z badaniem fizycznej przestrzeni, a ta nie może być opisana za pomocą wykluczających się teorii. Dopiero Helmholtz 130 lat temu przekonał fizyków i matematyków, że do różnych geometrii fizyk powinien podchodzić jak do skrzynki z narzędziami i wybierać sobie dla opisu konkretnego zjawiska tę geometrię, która najlepiej pasuje, albo którą sam najlepiej umie.

Dziś rozważa się geometrie tak dalece odbiegające od naszej zwykłej geometrii, że nawet o odległości punktów nie da się tam mówić; taką jest np. używana do opisu Kosmosu czasoprzestrzeń wprowadzona przez Einsteina.

Gwiazdy zmienne

Każda gwiazda zmienia się przez całe swoje życie. Nie każdą jednak nazywamy gwiazdą zmienną. Z dobrym przybliżeniem można powiedzieć, że gwiazdy zmienne to takie, których zmiany możemy bezpośrednio zaobserwować, czyli takie, które zmieniają się szybko. Oczywiście wszystko, co możemy obserwować, to promieniowanie.

Nie oznacza to jednak, że wszystkie gwiazdy zmienne zmieniają w opisanym tempie ilość czy kierunek wysyłanego promieniowania. Najdawniej zostały odkryte *gwiazdy zmienne zaćmieniowe*. Są to gwiazdy zawsze z układów wielokrotnych (np. podwójnych), a zmiany obserwowanego z Ziemi ich blasku biorą się stąd, że składniki układu rytmicznie zasłaniają się wzajemnie. Aby tak było, cały układ musi krążyć w płaszczyźnie przechodzącej przez Ziemię. To, że znamy wiele gwiazd zmiennych zaćmieniowych (np. Algol), świadczy, iż układów wielokrotnych jest na niebie nieprzebrane mrowie – w płaszczyznach przechodzących przez Ziemię obraca się przecież tylko znikoma ich liczba.

Te gwiazdy, które naprawdę, a nie tylko dla ziemskiego obserwatora, zmieniają swój blask, nazywają się *zmiennymi fizycznie*. Jest ich wiele rodzajów.

Najbardziej typowymi są *cefeidy* – gwiazdy pulsujące w rytmie ściśle związanym z ich jasnością absolutną. Jest ich wiele, bo każda prawie gwiazda przynajmniej raz w ciągu swego życia staje się cefeidą.

Zupełnie inne gwiazdy zmienne to *pulsary*. Tu najprościej opisać przyczynę zmian blasku można przez porównanie do latarni morskiej – obracająca się z nieprawdopodobnym (i w dodatku niesłychanie stałym) okresem – rzędu sekund czy milisekund – gwiazda neutronowa omiata Wszechświat stożkiem świetlnym emitowanym przez świecące cząstki spadające na nią.

Jeszcze inny rodzaj gwiazd zmiennych fizycznie to *gwiazdy nowe*. Ich jasność wzrasta gwałtownie (nawet do kilkudziesięciu tysięcy razy) w ciągu kilku godzin czy dni. Zjawisko to wiąże się z ewolucją układów podwójnych, w których jednym ze składników jest biały karzeł. Rozbłyski nowych zdarzają się wielokrotnie, w dużych odstępach czasu.

Mimo podobieństwa nazwy *gwiazdy supernowe* to gwiazdy wybuchem kończące swoje życie – jest to więc zmienność jednorazowa, za to najgwałtowniejsza z obserwowanych we Wszechświecie.

Względność

Gdybyśmy chcieli znaleźć najbardziej ogólne prawo fizyki, to najlepszym kandydatem byłaby zasada względności: *wszystkie prawa fizyki są takie same względem każdego układu inercjalnego.*

Najbardziej niezwykłym wnioskiem z tej zasady jest fakt, że prędkość światła jest we wszystkich układach inercjalnych taka sama. A więc także w poruszających się względem siebie z bardzo znaczną – byle stałą – prędkością. Fakt ten wskazuje na to, że prędkości nie dają się składać tak jak wektory w geometrii euklidesowej. Tego rodzaju obserwacje zostały ujęte przez Einsteina w rewolucyjnie nową teorię, która zmieniła nasze poglądy na naturę czasu i przestrzeni. Okazały się one sprzężone ze sobą w jedną strukturę zwaną czasoprzestrzenią.

W szczególności zmiana jednego inercjalnego układu odniesienia na inny jest transformacją nie tylko przestrzeni, lecz także czasu.

Najbardziej doniosłą konsekwencją tego faktu jest względność równoczesności: dwa zjawiska równoczesne dla jednego obserwatora nie muszą być równoczesne dla innego, tak jak dwa punkty o tej samej pierwszej współrzędnej w jednym układzie nie muszą mieć pierwszych współrzędnych równych w innym.

Wielkość tych efektów zależy od v/c – stosunku prędkości względnej poruszających się układów do prędkości światła. Wynika stąd zarówno nieprzekraczalność prędkości światła, jak i wzór na równoważność masy i energii

$$E = m \cdot c^2.$$

Klub 44

$\otimes\sqrt{\oint\!\!\!\!\sum !}=44$

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 1995

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 291 (WT=1,59) i 292 (WT=2,76)
z numeru 12/1994

Tomasz Wietecha	– Tarnów	42,33
Janusz Olszewski	– Suwałki	40,79
Adam Czornik	– Bytom	39,26
Tomasz Kulpa	– Katowice	33,34
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	32,66

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Zadania z matematyki nr 305, 306

Redaguje Marcin E. KUCZMA

305. Wysokość CD trójkąta ostrokątnego ABC ma długość h; punkty O oraz I są środkami okręgów opisanego (o promieniu R) oraz wpisanego (o promieniu r). Punkt P, leżący na odcinku CD, ma tę własność, że prosta wyznaczona przez jego rzuty na boki AC i BC przechodzi przez punkty O oraz I.
(a) Znaleźć związek między liczbami R, r, h.
(b) Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość stosunku $|CP| : h$.

306. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Dla $k = 1, 2, \ldots, p-1$ oznaczmy przez r_k resztę z dzielenia liczby k^p przez p^2. Obliczyć sumę $r_1 + r_2 + \ldots + r_{p-1}$.

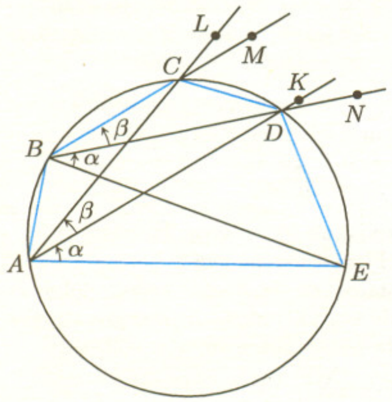
Zadanie **306** zaproponował pan Henryk Pawłowski z Torunia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1995

Przypominamy treść zadań:

301. Wielomian $P(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n + c_{n+1}x^{n+1}$ jest podzielny przez wielomian $Q(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, przy czym $c_{n+1} = a_n \neq 0$. Dowieść, że

$$\max(|a_0|, \ldots, |a_n|) \le (n+1)\max(|c_0|, \ldots, |c_{n+1}|).$$



302. Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg. Na półprostych $AD^{\rightarrow}$, $AC^{\rightarrow}$, $BC^{\rightarrow}$, $BD^{\rightarrow}$ odkładamy odpowiednio odcinki AK, AL, BM, BN o długościach $|AK| = |AE|$, $|AL| = |AD|$, $|BM| = |BD|$, $|BN| = |BE|$. Udowodnić, że czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy $|CD| = |DE|$.

301. Z warunków zadania wynika, że

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x)$$

dla pewnej liczby rzeczywistej α. Przyrównując współczynniki wielomianów po obu stronach tej równości dostajemy układ równań

$$\begin{aligned} c_0 &= -\alpha a_0 \\ c_1 &= a_0 - \alpha a_1 \\ c_2 &= a_1 - \alpha a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-1} &= a_{n-2} - \alpha a_{n-1} \\ c_n &= a_{n-1} - \alpha a_n \\ c_{n+1} &= a_n\,. \end{aligned}$$

Począwszy od ostatniego równania, wyznaczamy kolejno:
$a_n = c_{n+1}$, $a_{n-1} = c_n + \alpha c_{n+1}$, $a_{n-2} = c_{n-1} + \alpha c_n + \alpha^2 c_{n+1}$,
i ogólnie

$$(1) \qquad a_k = \sum_{i=0}^{n-k} \alpha^i c_{k+1+i} \qquad (\text{dla} \quad k = 1, \ldots, n).$$

Jeśli $\alpha \neq 0$, możemy powyższy układ rozwiązywać począwszy od pierwszego równania:
$a_0 = -\alpha^{-1}c_0$, $a_1 = -\alpha^{-2}c_0 - \alpha^{-1}c_1$, $a_2 = -\alpha^{-3}c_0 - \alpha^{-2}c_1 - \alpha^{-1}c_2$,
i ogólnie

$$(2) \qquad a_k = -\sum_{i=0}^{k} \alpha^{-(k+1-i)} c_i \qquad (\text{dla} \quad k = 1, \ldots, n).$$

Dane do udowodnienia oszacowanie uzyskujemy natychmiast z równości (1), gdy $|\alpha| \le 1$, oraz z równości (2), gdy $|\alpha| \ge 1$.

302. Pięciokąt jest wpisany w okrąg, więc mamy następujące równości kątów zorientowanych:

$$\angle(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}) = \angle(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) =: \alpha,$$
$$\angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \angle(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) =: \beta.$$

W przestrzeni wektorów swobodnych rozważamy przekształcenia (liniowe):

$$f = \text{obrót o kąt } \alpha, \qquad g = \text{obrót o kąt } \beta.$$

Z określenia punktów K, L, M, N wynika, że

$$\overrightarrow{AK} = f(\overrightarrow{AE}),\ \overrightarrow{AL} = g(\overrightarrow{AD}),\ \overrightarrow{BM} = f(\overrightarrow{BD}),\ \overrightarrow{BN} = g(\overrightarrow{BE}).$$

Ponadto mamy równość

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE};$$

oznaczmy ten wektor przez $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE};$$

jest to wektor niezerowy. Z wypisanych zależności otrzymujemy związki:

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK} = g(\overrightarrow{AD}) - f(\overrightarrow{AE}),$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = g(\overrightarrow{BE}) - f(\overrightarrow{BD}),$$
$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN} = g(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE}) - f(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) = g(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}).$$

Następujące stwierdzenia są wobec tego kolejno równoważne:

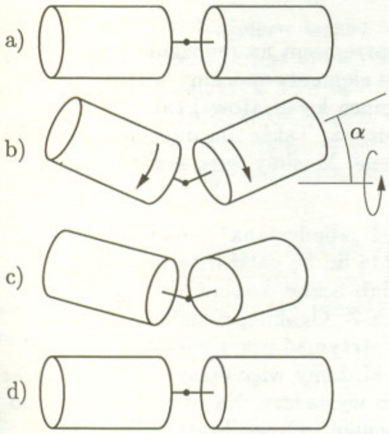
[$KLMN$ jest równoległobokiem] $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ [$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN}$ jest wektorem zerowym] $\Longleftrightarrow$ [$g(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v})$] $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ [obrót wektora $\mathbf{v}$ o kąt α oraz o kąt β daje w wyniku ten sam wektor] $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow$ [$\alpha = \beta$] $\Longleftrightarrow$ [$\angle EAD = \angle DAC$] $\Longleftrightarrow$ [$|ED| = |DC|$].

Zadania z fizyki nr 203, 204

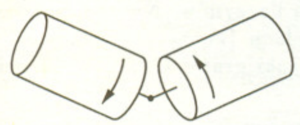
Redaguje Jerzy B. BROJAN

203. „Kot spada zawsze na cztery łapy" – mówi przysłowie. Jeden z modeli objaśniających mechanizm obrotu kota w powietrzu jest następujący: Przedstawmy ciało kota w postaci dwóch jednorodnych i jednakowych walców o promieniu r i wysokości h osadzonych na nieważkich ośkach połączonych przegubowo (rys. 1). Przyjmijmy, że początkowo układ walców był nieruchomy, dalej nastąpiło zgięcie w przegubie o kąt 2α, następnie walce obróciły się o jednakowy kąt β wokół swych osi (względem układu nieinercjalnego), cały zaś układ obrócił się o kąt γ względem osi poziomej, a po zakończeniu obrotu ośki się wyprostowały. O jaki kąt obróciły się walce względem układu inercjalnego? Pominąć oddziaływanie z powietrzem („kot swobodnie lewitujący"). Pytanie dodatkowe: o jaki kąt i w jakiej płaszczyźnie obróciłby się układ walców, gdyby obrót o kąt β nastąpił z przeciwnym zwrotem (rys. 2)?

204. Ocenić orientacyjnie maksymalny ładunek, jakim można naładować kulkę stalową o średnicy 2 cm, aby nie uległa ona rozerwaniu pod wpływem odpychania elektrostatycznego (ewentualnie także – aby nie oderwała się od niej warstwa powierzchniowa).



Rys. 1



Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1995

Przypominamy treść zadań:

199. Między okładki płaskiego kondensatora powietrznego wpuszczono ciecz dielektryczną w ilości niewystarczającej do wypełnienia przestrzeni między okładkami. Jeśli kondensator naładujemy, to czy ciecz utworzy warstwę równoległą do okładek (rys. 3a), czy też zajmie część powierzchni okładek (rys. 3b)? Należy pominąć efekty brzegowe, tzn. przyjąć, że rozmiary okładek są znacznie większe od ich wzajemnej odległości, a ponadto pominąć efekty siły ciężkości oraz napięcia powierzchniowego.

200. Ciało o masie m porusza się po linii prostej pod wpływem siły wywieranej przez nieważką sprężynę o stałej sprężystości k. Punkt zamocowania drugiego końca sprężyny tak się obluzował, że sprężyna drgając porusza nim; jego prędkość jest proporcjonalna do siły, a stała proporcjonalności α jest dana. Zakładając, że α jest małe (obluzowanie jest niewielkie) obliczyć, po jakim czasie amplituda drgań ciała zmaleje 2 razy w stosunku do amplitudy początkowej.

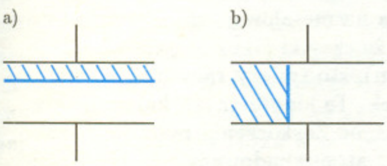
199. Niech S będzie powierzchnią okładek, d ich odległością, a ε stałą dielektryczną cieczy. Wprowadźmy też oznaczenia grubości warstw cieczy d_1 i powietrza d_2 na rysunku 3a, a S_1 i S_2 będą odpowiednimi powierzchniami na rysunku 3b. Kondensator przedstawiony na rysunku 3a można uznać za szeregowe połączenie kondensatorów powietrznego i cieczowego, zatem jego pojemność jest dana wzorem

$$C_a = \frac{\varepsilon_0 S}{(d_1/\varepsilon) + d_2},$$

a na rysunku 3b połączenie jest równoległe, więc

$$C_b = \frac{\varepsilon_0}{d}(\varepsilon S_1 + S_2).$$

Uwzględniając równości $d = d_1 + d_2$, $S = S_1 + S_2$ oraz $S_1/S_2 = d_1/d_2$ (objętość cieczy jest taka sama) nietrudno wykazać, że $C_a < C_b$. Ciecz ułoży się tak, aby energia naładowanego kondensatora była jak najmniejsza. Tę energię należy wyznaczać ze wzoru $E = Q^2/(2C)$ (a nie ze wzoru $E = CU^2/2$, gdyż wtedy w bilansie energii trzeba by było uwzględnić też źródło napięcia). Prawidłowe położenie cieczy jest więc przedstawione na rysunku 3b.



Rys. 3

200. Oznaczmy przesunięcie ciała przez x, a przesunięcie drugiego końca sprężyny przez y. Siła napięcia sprężyny jest równa $k(y-x)$, a ruchem obu końców rządzą równania

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = k(y-x) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Najszybciej można dojść do wyniku traktując x i y jako części rzeczywiste pewnych wielkości zespolonych $x' = Ae^{\sigma t}$, $y' = Be^{\sigma t}$. Analogiczne rozwiązywanie w liczbach rzeczywistych jest dość kłopotliwe i prościej jest skorzystać z faktu, że α jest małe, a więc w pierwszym przybliżeniu można przyjąć $\alpha = 0$, czyli $x = A\cos(\omega t)$, gdzie $\omega = \sqrt{k/m}$. Siła działająca na zamocowany koniec jest równa kx, a dopuszczając teraz jego ruch stwierdzamy, że tracona moc wynosi $Fv = \alpha F^2 = \alpha k^2 x^2$. Średnia wartość tej mocy jest równa $\alpha k^2 A^2/2$, a przyrównując ją (ze znakiem minus) do pochodnej względem czasu z energii $E = kA^2/2$ dochodzimy do równania

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\alpha k A,$$

którego rozwiązaniem jest $A(t) = A_0 \exp(-\alpha k t/2)$. Spadek amplitudy do połowy wartości początkowej nastąpi po czasie $\tau = 2\ln 2/(\alpha k)$.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 191 (WT=2,89) i 192 (WT=3,44) z numeru 1/1995

Zbigniew Galias	– Kraków	35,22
Artur Gawryszczak	– Dubeczno	31,44
Aleksander Surma	– Myszków	28,53
Dariusz Wilk	– Rzeszów	25,57
Przemysław Gadziński	– Środa Śl.	20,38
Przemysław Gworys	– Częstochowa	17,93

Po rekordowo długim (7-letnim!) okresie „uśpienia" powrócił do Ligi p. Galias. Czyżby tak długo trwała uraza po omyłkowym pominięciu Pana w czołówce 7 lat temu? Przepraszamy i witamy w Lidze!

Jak opisuje się grupy

Działanie $*$ w zbiorze G jest odpowiednie, jeśli
1° jest łączne: $(x * y) * z = x * (y * z)$,
2° w G jest element neutralny e: $x * e = e * x = x$,
3° dla każdego $x \in G$ istnieje w G taki x^{-1}, że $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Na przykład, dla $G = \{e, a\}$ poniższa tabelka opisuje (jedyną) grupę dwuelementową $\mathbf{Z_2}$:

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	e

W grupie $\mathbf{Z_2}$ generator a spełnia relacje $a \cdot a = a^2 = e$, $a^4 = e$, $a^6 = e, \ldots$. Zauważmy, że tylko pierwsza z tych relacji jest istotna w tym sensie, że pociąga za sobą wszystkie następne.

Prezentacje zapisujemy w formie $G = \langle x_1, x_2, \ldots | r_1 = e, r_2 = e, \ldots \rangle$. Litery x_i oznaczają tu generatory, a r_j są pewnymi iloczynami generatorów, czyli słowami napisanymi za pomocą liter x_i oraz x_i^{-1}. Tak więc np. $\mathbf{Z_2} = \langle x | x^2 = e \rangle$, $\mathbf{Z} = \langle x | \emptyset \rangle$.

Tym, którzy chcą poczuć smak tej przygody, proponujemy ćwiczenie: należy wykazać, że $\langle x, y, z | x^2 y x^{-1} y^{-1} = e, y^2 z y^{-1} z^{-1} = e, z^2 x z^{-1} x^{-1} = e \rangle$ jest prezentacją grupy trywialnej $G = \{e\}$, tj. równości $x = e$, $y = e$, $z = e$ są konsekwencją wypisanych wyżej relacji.

Grupa to zbiór wyposażony w odpowiednie działanie (na ogół zwane mnożeniem). Zbiory liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych, zespolonych, liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbf{Z}$ z działaniem dodawania są wszystkie grupami. Grupą jest też zbiór liczb rzeczywistych dodatnich z działaniem mnożenia. Inne przykłady to zbiory przekształceń z działaniem ich składania; np. permutacje, izometrie, symetrie własne jakiejś figury.

Aby opisać grupę, należy podać zbiór G wraz z przepisem na mnożenie jego elementów. Kiedy zbiór G jest skończony, to jego elementy możemy wypisać jeden po drugim, a mnożenie określić po prostu za pomocą kwadratowej tabelki. Sposób taki, oczywiście, odpada, gdy grupa jest nieskończona. Także dla dużych grup skończonych używanie tabelki jest mało praktyczne. Musimy więc szukać innych sposobów.

Zauważmy, że nawet bardzo duża grupa może być „zbudowana” z niewielkiego, skończonego podzbioru $S \subset G$. Na przykład, każdą liczbę całkowitą można otrzymać przez wielokrotne sumowanie liczby 1 lub liczby przeciwnej: -1. Mówimy, że zbiór $S = \{1\}$ *generuje* grupę liczb całkowitych $\mathbf{Z}$. Ogólnie, podzbiór $S \subset G$ generuje grupę G, jeśli każdy jej element można otrzymać przez wielokrotne mnożenie bądź odwracanie elementów zbioru S. Możemy więc opisywać grupę przez wskazanie zbioru jej generatorów. Niestety, to nie wystarczy. Na przykład, zarówno grupa $\mathbf{Z}$, jak i $\mathbf{Z_2}$ jest generowana przez jeden element. Czego brakuje?

Otóż, pewne iloczyny generatorów (i ich odwrotności) reprezentują element neutralny $e \in G$. Brakująca informacja to opis takich iloczynów. Nie wypisujemy wszystkich – staramy się znaleźć taki (mały) zbiór relacji $\{r_1 = e, r_2 = e, \ldots\}$, którego konsekwencją są wszystkie reprezentacje jedynki grupy. Generatory i relacje dają tzw. *prezentację* grupy.

Można postąpić na odwrót i zacząć od prezentacji. Każdy napis podanej wyżej postaci reprezentuje pewną grupę. Niestety, kompletnie różne napisy mogą opisywać tę samą grupę. Co więcej, problem *czy dane dwie prezentacje dają tę samą grupę?* jest nierozstrzygalny.

Życie normalnej gwiazdy

Zaczyna się od obłoku materii. Jeśli jest on odpowiednio duży (10^2– 10^5 mas Słońca), to powstaną w nim zgęstki, które dadzą początek gwiazdom – w przeciwnym razie energia termiczna obłok rozproszy.

Na ogół w obłoku rodzi się równocześnie tysiące gwiazd. Najmniejsze (poniżej 0,1 masy Słońca) nie zapalą nigdy w swym wnętrzu atomowego ognia i będą, jako brązowe karły, wyświecać swą energię grawitacyjną. Te większe będą świeciły dzięki reakcjom termojądrowym. Ten etap ich życia będzie trwał tym krócej, im będą masywniejsze – mają co prawda więcej paliwa, jednak zużywają je gwałtowniej. Słońce, jako mało masywne, żyje już około 5 mld lat i pożyje jeszcze drugie tyle.

Potem dzieją się straszne rzeczy – gwiazda może skokowo zmieniać swoją jasność wskutek uruchamiania nowych źródeł energii (np. przemiany helu w węgiel, potem tlen, neon, magnez, krzem, w końcu żelazo), może przeżyć okres regularnych zmian jasności (cefeidy), może odrzucić warstwy powierzchniowe (tak powstaje mgławica planetarna, a w jej centrum zostaje biały karzeł). Wreszcie – gdy ma dostatecznie dużą masę – może eksplodować jako supernowa, a pozostałością po niej stanie się gwiazda neutronowa lub czarna dziura. Ostatnie chwile bardzo masywnych gwiazd to zaiste kosmiczny kataklizm: przez pewien czas supernowa świeci z mocą równą łącznej mocy wszystkich gwiazd galaktyki sygnalizując w ten sposób o swej zagładzie z kosmicznych odległości.

A jako produkt uboczny wszystkie te wydarzenia są źródłem kompletu pierwiastków, dzięki którym np. nasza planeta może prezentować się tak efektownie.

Jądro atomu

To, że atom ma jądro, stwierdził w 1913 roku Rutherford rozpraszając cząstki alfa na metalowej folii. Analiza kątów rozproszenia wykazała, że cząstki alfa odbijają się od bardzo małych (10^{-15} m), sto tysięcy razy mniejszych od rozmiaru atomu kulek. Te hipotetyczne kulki zostały nazwane *jądrem atomowym*. Zaskoczenie było duże, gdyż powszechnie uważano, iż atom zbudowany jest jak ciasto z rodzynkami (model Thomsona) – rodzynki-elektrony tkwią wewnątrz czegoś o dodatnim ładunku elektrycznym.

Dziś wiemy, że model Rutherforda nie ma wiele wspólnego z rzeczywistością. Model, w którym kulki-cząstki alfa odbijają się od kulek-jąder atomowych, daje wyniki zgodne ze stanem faktycznym tylko przypadkowo. Jednak jego powstanie pozwoliło potem zbudować właściwy już model jądra środkami mechaniki kwantowej.

Jądro atomowe nie jest tworem prostym – składa się z dwóch rodzajów cząstek: dodatnich protonów i elektrycznie obojętnych neutronów związanych bardzo silnymi, choć krótkozasięgowymi siłami jądrowymi, o których mówi się *oddziaływania silne*. W szczególności są one silniejsze od odpychania elektrostatycznego protonów. Nie są jednak tak silne, by w niektórych przypadkach jądra nie rozpadały się tworząc jądra innych pierwiastków (promieniotwórczość).

Rozszczepienie jąder ciężkich pierwiastków, jak też synteza jąder lekkich jest najwydajniejszym ze znanych obecnie sposobów pozyskania energii. Na Ziemi wykorzystuje się ją w reaktorach lub bombach, w Kosmosie jest ona źródłem świecenia gwiazd.

Ile jest Wszechświata?

Gdy przyjmie się hipotezę Wielkiego Wybuchu, można na podstawie tempa rozbiegania się galaktyk obliczyć wiek Wszechświata. Uzyska się wtedy 15–20 mld lat. Daje to oczywiste oszacowanie rozmiaru Wszechświata – jest on nie większy niż 15–20 mld lat świetlnych, czyli ma objętość co najwyżej rzędu trzeciej potęgi tej wartości. Tyle jest Wszechświata „na objętość".

A ile jest „na wagę"? Najpierw trzeba oszacować liczbę galaktyk. I to się robi. Nie jest może istotne, ile ostatecznie uzyskuje się „sztuk galaktyk", bo są to oszacowania bardzo przybliżone. Dość że mnożąc te sztuki przez (również oszacowaną) średnią masę galaktyki, otrzymuje się nie mniej niż 10^{51} kg. Dotyczy to jednak tylko materii widocznej.

Ilość materii niewidocznej jest szacowana już zupełnie arbitralnie przez poszczególnych badaczy. No bo jak można realistycznie wypowiadać się na temat ilości czegoś, czego zaobserwować nie umiemy?

Wszelkie oszacowania wynikają z ogólnych założeń dotyczących fizyki Wszechświata, fizyki, którą naprawdę znamy tylko w obszarach parametrów odpowiadających naszemu najbliższemu otoczeniu.

A sprawa jest istotna. Wiadomo bowiem, że od średniej gęstości Wszechświata zależy, czy dalsza jego ewolucja będzie polegała na nieograniczonym rozszerzaniu (co tak czy inaczej zakończy się śmiercią cieplną, całkowitym bezruchem), czy też po ekspansji nastąpi coraz szybszy kolaps zakończony likwidującą Wszechświat Wielką Implozją. Graniczna gęstość Wszechświata oddzielająca te możliwości to $5 \cdot 10^{-27}$ kg/m^3.

Widoczna materia daje najwyżej 10% tej gęstości. A z niewiadomych przyczyn większość badaczy stara się tak oszacować ilość niewidocznej masy, by wskazywało to na perspektywę kolapsu (czyli wolą oni, by „ciemnej materii" było dużo). Ale naprawdę to nic pewnego obecnie nie wiadomo na ten temat.

Klasyfikacja rozmaitości

Jaka jest otaczająca nas przestrzeń? Pozornie odpowiedź jest prosta. Dowolny punkt może się swobodnie poruszać w trzech niezależnych kierunkach: przód–tył, lewo–prawo, góra–dół. Można by stąd wnosić, że żyjemy w trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej R^3.

Otóż, taki wniosek jest zbyt pochopny, gdyż został wysnuty z obserwacji zaledwie niewielkiego (lub zbyt wielkiego) wycinka otaczającej nas przestrzeni. Zauważmy, że podobne rozumowanie w dwóch wymiarach prowadzi do konkluzji, że Ziemia jest płaska! Wolno nam jedynie twierdzić na podstawie obserwacji, że nasza przestrzeń wygląda *lokalnie* jak przestrzeń kartezjańska R^3.

Prowadzi nas to do pojęcia *n-wymiarowej rozmaitości topologicznej*. Jest to przestrzeń M^n o następującej własności: każdy punkt $x \in M^n$ ma otoczenie, które jest homeomorficzne (tj. topologicznie identyczne) z n-wymiarową przestrzenią kartezjańską R^n. To, że nie ograniczamy się do przypadku $n = 3$, wynika z powodów czysto praktycznych. Sytuacja w wymiarach $n = 1, 2$ pozwala wyrobić sobie właściwe intuicje, rozmaitości zaś wymiaru $n > 3$ pojawiają się w mechanice, układach dynamicznych, teorii foliacji, teorii względności itd.

Oczywiście, samo R^n jest rozmaitością, podobnie jak sfera S^2 (powierzchnia piłki) i torus T^2 (powierzchnia dętki). A jakie są inne? Sporządzenie listy–odpowiedzi na to pytanie to jedno z głównych zadań topologii.

Najważniejsze w zastosowaniach są rozmaitości *spójne* (czyli w jednym kawałku) i *zwarte* (czyli dające się umieścić w jakiejś przestrzeni kartezjańskiej jako podzbiór domknięty i ograniczony). Co wiemy o klasyfikacji takich rozmaitości?

Przypadek $n = 1$. Jest tylko jeden taki obiekt – okrąg.

Przypadek $n = 2$. Są to dwie serie: sfery „z uchami" i sfery z wklejonymi wstęgami Möbiusa.

Przypadek $n = 3$: Kompletna lista nie jest znana do dnia dzisiejszego. Znamy natomiast liczne przykłady rozmaitości trójwymiarowych oraz sposoby konstruowania następnych. Trwają intensywne prace badawcze.

Przypadek $n \geq 4$: Tu pełnej listy nie ma i, co ważniejsze, **nigdy nie będzie**! Markow udowodnił, że nie istnieje algorytm, który by w skończonym czasie potrafił dla każdej pary rozmaitości (spójnych i zwartych) rozstrzygnąć, czy są one homeomorficzne (takie same).

Unifikacja

W Starożytności popularny był pogląd, że materia składa się z czterech elementów: wody, ziemi, powietrza i ognia, pomiędzy którymi działają dwie siły: miłość i nienawiść. Podobną wizję roztacza współczesna fizyka: istnieje niewielka liczba elementarnych składników materii (trzy *leptony* – elektron, mion, taon, odpowiadające im trzy *neutrina* oraz sześć *kwarków* i sześć *antykwarków*, z których zbudowane są wszystkie cząstki cięższe) połączonych przez kilka oddziaływań.

Od chwili, gdy elektryczność i magnetyzm połączone zostały w jedno *oddziaływanie elektromagnetyczne*, istnieje silna pokusa, by wszelkie inne oddziaływania też przedstawiać jako szczególną postać jednego fundamentalnego oddziaływania.

Do połączenia są (poza elektromagnetycznymi odpowiadającymi za budowę atomu, cząsteczki chemicznej, kryształu) *oddziaływania grawitacyjne* (odpowiadające za budowę Wszechświata jako całości) oraz *silne i słabe* (odpowiadające za budowę jądra atomowego i cząstek elementarnych).

W latach sześćdziesiątych (Weinberg, Glashow, Salam) udało się wspólnie opisać – jako *elektrosłabe* – oddziaływania elektromagnetyczne i słabe jądrowe. Trwają prace nad połączeniem oddziaływań elektrosłabych i silnych jądrowych. Wygląda na to, że i tu będzie odniesiony sukces. Nie ma jednak na razie powszechnie akceptowanego pomysłu, jak można by próbować łączyć te oddziaływania z grawitacyjnymi.