„Delta” – matematyczno-fizyczno-astronomiczny miesięcznik popularny Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego,
wydawany przy poparciu Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Wydanie publikacji dofinansowane przez Komitet Badań Naukowych.

SPIS TREŚCI
NUMERU 8(255)

W następnym numerze:

Delta proponuje kanon wiedzy ogólnej

Okładkę i ilustracje wykonał
Bernard BADZIOCH

Wydawca:
Uniwersytet Warszawski

Adres Redakcji:
ul. Smyczkowa 5/7
02-678 Warszawa
tel. 43-02-43 wewn. 21
PAWELST@MIMUW.EDU.PL

Wydrukowano w Drukarni Naukowo-Technicznej w Warszawie, ul. Mińska 65
Skład systemem TEX wykonała Redakcja.

WARUNKI PRENUMERATY W FIRMIE AMOS

01-806 Warszawa, ul. Zuga 12 (tel. 34-65-21)
Wpłaty przyjmowane są non-stop, do 10. dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty. **Okres prenumeraty wynosi co najmniej trzy (3) miesiące**. Cena jednego numeru w 1995 roku wynosi 1 zł 50 gr. Przy wpłacie prosimy o zaznaczenie okresu prenumeraty.

W prenumeracie zagranicznej (też przez okres **co najmniej trzech miesięcy**) cena numeru wynosi w 1995 r. 3 zł. W przypadku życzenia dostawy drogą lotniczą odpowiednią dopłatę ponosi zamawiający.

Uwaga! Dla zamawiających minimum 10 egzemplarzy każdego numeru AMOS funduje dodatkowo jeden egzemplarz pisma.

Konto AMOS-u: **PKO VIII O/W-wa, nr 1586-77578-136**

WARUNKI PRENUMERATY W RUCH-u

1. Wpłaty na prenumeratę przyjmowane są tylko na okresy kwartalne.
2. Cena prenumeraty na IV kwartał 1995 r. wynosi 4 zł 50 gr.
3. Prenumerata ze zleceniem dostawy za granicę jest o 100% wyższa; w przypadku zlecenia dostawy drogą lotniczą – koszt dostawy lotniczej w pełni pokrywa prenumerator.
4. Wpłaty na prenumeratę przyjmują:
   – na teren kraju
     – jednostki kolportażowe „Ruch” S.A. właściwe dla miejsca zamieszkania lub siedziby prenumeratora; dostawa egzemplarzy następuje w uzgodniony sposób,
   – na zagranicę
     – „Ruch” S.A. Oddział Warszawa, 00-958 Warszawa, konto PBK XIII Oddział Warszawa 370044-1195-139-11 – **dostawa odbywa się pocztą zwykłą w ramach opłaconej prenumeraty**, z wyjątkiem zlecenia dostawy pocztą lotniczą do odbiorcy zagranicznego, której koszt w pełni pokrywa prenumerator.
5. Terminy przyjmowania prenumeraty:
   – na kraj i zagranicę – do 20 XI na I kwartał roku następnego
   do 20 II na II kwartał
   do 20 V na III kwartał
   do 20 VIII na IV kwartał.

Cena 1 egzemplarza 1 zł 50 gr, 15 000 zł

Nierówność Fejéra–Jacksona

Jarosław GÓRNICKI

Kilka lat temu od zaprzyjaźnionego matematyka niemieckiego otrzymałem wydaną w 1987 roku książkę pod znamiennym tytułem „Die 100 schönsten Aufgaben aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR mit eleganten Lösungen, Klassenstufen 11/12".

Przeglądając ją ostatnio zatrzymałem się na zadaniu 34:

Udowodnić, że dla wszystkich $x \in (0, \pi)$ prawdziwa jest nierówność

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x > 0 .$$

Zadanie jak zadanie – pomyślałem, wziąłem kartkę papieru i nierówność uzasadniłem. Wystarczyły standardowe wzory trygonometryczne na $\sin 2x$, $\sin 3x$ i kilka przekształceń – nic nadzwyczajnego. Sięgnąłem do rozwiązań autorów książki. Zainteresowała mnie uwaga mówiąca, że „prawdziwa jest ogólniejsza nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\sin kx > 0 \quad \text{dla} \quad x \in (0, \pi) \;\; \text{i} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

ale jej dowód jest dość skomplikowany".

Zabrzmiało to trochę jak wyzwanie. Po jakimś czasie miałem również i jej uzasadnienie. Dowód, wbrew zapowiedziom, nie okazał się trudny, wykorzystałem indukcję i proste fakty z rachunku różniczkowego dostępne dla uczniów szkół średnich.

Aby zobaczyć, jak nierówność ta jest uzasadniana w literaturze, sięgnąłem po książkę D.S. Mitrinovicia „Elementarne nierówności", PWN, Warszawa 1972. Znalazłem ją tam jako Problem 3.15 (str. 155). Ku mojemu zaskoczeniu proponowane tam uzasadnienie wymaga (zaawansowanej) umiejętności całkowania funkcji zespolonych po krzywych zamkniętych!

Zacząłem poszukiwać innych opublikowanych uzasadnień tej nierówności. Dowiedziałem się wtedy, iż w 1910 roku matematyk węgierski Lipót Fejér (1880–1959) badając szeregi trygonometryczne wykazał, że funkcja

$$S_n(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx , \quad x \in (0, \pi),$$

osiąga maksimum dla $x = \dfrac{\pi}{n+1}$, a ponadto spełnia warunki

$$S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > S_{n-1}\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad n \geq 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 1{,}85193 .$$

(Wykazanie tych zależności może być pouczającym ćwiczeniem.)

Fejér wyraził również przypuszczenie, że

$$S_n(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in (0, \pi) \;\; \text{i} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Powyższą hipotezę udowodnili niezależnie D. Jackson [1] w 1911 roku i T.H. Gronwall [2] w 1912 roku. W latach następnych pojawiały się dowody innych autorów, między innymi krótki dowód E. Landaua [3] z 1933 roku.

Metale z ciężkimi elektronami

Jan KARBOWSKI

Zapewne każdy ze szkoły pamięta, że masa elektronu jest około 2000 razy mniejsza od masy protonu. Każdy też wie, że prąd elektryczny w metalach jest strumieniem elektronów przewodnictwa oderwanych od macierzystych atomów (tzw. nośniki prądu elektrycznego). Zatem należałoby się spodziewać, że masa nośników prądu m oszacowana na podstawie wzoru

$$\frac{mv}{\tau} = eE \tag{1}$$

powinna być w przybliżeniu równa masie elektronu wziętej z tablic fizycznych. W powyższym wzorze v jest prędkością dryfu elektronów, τ – średnim czasem między rozproszeniami elektronów, e – ładunkiem elektronu, E zaś przyłożonym polem elektrycznym. Ewentualne drobne odstępstwa od wartości tablicowej można by próbować wytłumaczyć wpływem oddziaływania z siecią jonów (atomów, które utraciły elektrony). Powyższe rozumowanie zastosowane do metali alkalicznych rzeczywiście daje dobre oszacowanie.

Jednak pod koniec lat 70. i na początku 80. zaczęto syntetyzować nowe związki międzymetaliczne na bazie pierwiastków ceru i uranu, w których mierzone masy nośników prądu były niezwykle duże, rzędu 100 – 1000 mas elektronu. Krótko mówiąc, „elektrony przewodnictwa" w tych związkach są prawie tak ciężkie jak protony! Stąd też wzięła się nazwa „ciężkie fermiony" dla takich układów (słowo **fermiony** oznacza klasę cząstek o pewnych własnościach kwantowomechanicznych, do której należą, między innymi, elektrony, protony i neutrony; drugą klasę cząstek stanowią tzw. **bozony**, do której należy np. foton).

Spróbujmy zrozumieć, jaki jest mechanizm powstawania tak wielkich mas. Zanim zajmiemy się sytuacją w krysztale, poświęćmy parę zdań atomom. Wokół jądra izolowanego atomu (tzn. będącego daleko od pozostałych) elektrony poruszają się w pewien uporządkowany sposób, który jednak odbiega od klasycznych wyobrażeń. Nie wszystkie rodzaje ruchu są możliwe, lecz tylko pewne wyróżnione. Określony rodzaj ruchu jest związany ze stanem, w jakim znajduje się elektron. Stan taki nosi nazwę kwantowomechanicznego i może być opisywany tylko w kategoriach mechaniki kwantowej.

W krysztale atomy tworzą sieć krystaliczną, tzn. nie można już ich traktować jako izolowane. „Czują” one nawzajem swoją obecność. Efektem tej bliskości jest modyfikacja ruchów elektronowych (stanów kwantowych) dla elektronów z dala od jądra. Dla niektórych stanów może być ona znaczna, zmieniając całkowicie charakter ruchu, dla innych minimalna. W pierwszym przypadku elektrony mogą poruszać się pomiędzy atomami, tracąc więź z macierzystym atomem; następuje tzw. kolektywizacja elektronów, a stany takie nazywa się rozciągłymi. W drugim przypadku ruch elektronów pozostaje zasadniczo wewnątrzatomowy, bez możliwości przeskoku na inne atomy. Stany takie noszą nazwę zlokalizowanych.

W metalach alkalicznych, takich jak lit czy sód, stany elektronowe z powłok zewnętrznych atomów ulegają takim zmianom jak w pierwszym przypadku. Tworzą więc stany rozciągłe i elektrony mogą poruszać się swobodnie wzdłuż całego kryształu.

Istnieją też związki, w których realizowany jest drugi przypadek, tj. gdy stany elektronowe nie ulegają zasadniczym zmianom. Mimo że powłoki zewnętrzne nie są zapełnione (tak jak dla atomów metali alkalicznych), elektrony nie mają możliwości ruchu kolektywnego i po przyłożeniu napięcia otrzymujemy $v = 0$. Zgodnie ze wzorem (1) prowadzi to do wniosku, że masa efektywna nośników jest nieskończona. Tak więc potencjalny metal staje się izolatorem. Ten typ izolatora (w odróżnieniu od tradycyjnego, w którym powłoki zewnętrzne są zapełnione) nosi nazwę izolatora Motta–Hubbarda. Przykładem jest tu związek V_2O_3.

Najciekawsza sytuacja powstaje wtedy, gdy kryształ składa się jednocześnie z dwóch rodzajów atomów: rozciągających i lokalizujących stany elektronowe. Właśnie ten przypadek ma miejsce dla ciężkich fermionów. Rolę atomów lokalizujących ruch elektronów pełnią atomy ceru bądź uranu. Przykładowe związki z tej klasy materiałów to: UPt_3, UBe_{13}, UPd_2Al_3, $CeCu_2Si_2$ oraz $CeAl_3$. Aby w pełni zrozumieć ich własności, trzeba użyć formalizmu statystycznej teorii pola. My jednak postaramy się wytłumaczyć powstawanie dużych mas efektywnych przy użyciu znacznie skromniejszych środków. Ciężkie fermiony można rozpatrywać jako układ, w którym elektrony przebywają w dwóch stanach kwantowych: $|L\rangle$ (zlokalizowanym) i $|R\rangle$ (rozciągłym). Powyższe oznaczenie dla stanu

Twierdzenie 1 (nierówność Fejéra–Jacksona).
Jeżeli $x \in (0, \pi)$, to
$$S_n(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx > 0$$
dla $n = 1, 2, 3, \ldots$

Dowód. Dla $n = 1$ i $x \in (0, \pi)$ nierówność $S_1(x) = \sin x > 0$ jest oczywista. Gdy $n = 2$,
$$S_2(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x = \sin x \cdot (1 + \cos x) > 0$$
dla $x \in (0, \pi)$. Załóżmy, że dla $x \in (0, \pi)$ i ustalonego $n - 1 \geq 1$ mamy $S_{n-1}(x) > 0$. Wykażemy, że wówczas dla $x \in (0, \pi)$ prawdziwa jest nierówność
$$S_n(x) = S_{n-1}(x) + \frac{1}{n}\sin nx > 0\,.$$
Rozważmy przypadki:
1. Gdy $x \in \{y \in (0, \pi) : \sin ny \geq 0\}$, to oczywiście
$$S_n(x) \geq S_{n-1}(x) > 0\,.$$
2. Gdy $x \in \{y \in (0, \pi) : \sin ny < 0\} = B_n$, to korzystając z tożsamości $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\alpha - \sin\beta$, mamy następujący wzór na pochodną funkcji S_n:
$$\begin{aligned} S_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + \ldots + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) = \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\left(\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x\right) + \left(\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right) + \ldots + \right. \\ &\qquad \left. + \left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin nx \cdot \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} \cdot (\cos nx - 1)\right) < 0\,. \end{aligned}$$

Czytelnik, który nie pamięta tożsamości trygonometrycznych, lecz słyszał za to o funkcji wykładniczej w dziedzinie zespolonej, może zauważyć, że
$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{ikx}\right) = \mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ikx}$$
Dalej już jest łatwo – trzeba tylko umieć sumować ciąg geometryczny.

Zauważmy teraz, że zbiór B_n składa się ze skończonej liczby otwartych, rozłącznych przedziałów, np. $B_4 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$. Niech (a, b) będzie jednym z przedziałów tworzących zbiór B_n. Funkcja S_n jest:
1) malejąca w (a, b),
2) ciągła w punktach a i b,
3) $\sin nb = 0$.

Zatem
$$S_n(x) > S_n(b) = S_{n-1}(b) + \frac{1}{n}\sin nb = S_{n-1}(b) \geq 0$$
dla $x \in (a, b)$, a tym samym dla wszystkich $x \in B_n$. Wobec tego na podstawie zasady indukcji matematycznej nierówność $S_n(x) > 0$ jest prawdziwa dla $x \in (0, \pi)$ i wszystkich $n \in \mathbf{N}$. ■

W zupełnie analogiczny sposób można udowodnić „bliźniaczą" nierówność. Pojawia się ona, na przykład, jako zadanie 241 w „The Otto Dunkel Memorial Problem Book", *American Mathematical Monthly* 64, no 7, part II, 1957 (istnieje przekład na język rosyjski: „Izbrannyje zadaczi iz żurnała American Mathematical Monthly", Moskwa 1977). Zachęcam Czytelnika, by naśladując dowód z poprzedniej strony, udowodnił samodzielnie

Twierdzenie 2. *Jeżeli* $x \in (0, \pi)$, *to*

$$C_n(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{n}\cos nx > -1$$

dla $n = 1, 2, \ldots$

Uwaga 1. Jedynie dla $n = 1$ i $x = \pi$ ma miejsce równość $C_1(\pi) = -1$; ponadto

$$\liminf_{n\to\infty} \min_{0\le x\le\pi} C_n(x) = -\ln 2 \approx -0{,}693147\,.$$

Uwaga 2. Czytelnik znający teorię szeregów Fouriera bez trudu sprawdzi, że dla $x \in (0, \pi)$

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots = \frac{\pi - x}{2},$$

$$\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \ldots = -\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\,.$$

Literatura

[1] D. Jackson, „Über eine trigonometrische Summe", *Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo* 32 (1911), 257–262.
[2] T.H. Gronwall, „Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \ldots + \frac{1}{n}\sin nx$", *Math. Ann.* 72 (1912), 223–243.
[3] E. Landau, „Über eine trigonometrische Ungleichung", *Math. Zeitschr.* 37 (1933), 36.

Najnowszy 3,5-metrowy teleskop w Apache Point Observatory w Nowym Meksyku ma być dostępny dla wielu astronomów z całego świata bez potrzeby jechania do obserwatorium. W pełni zautomatyzowany teleskop będzie można kontrolować za pomocą sieci komputerowej Internet. Również siecią będą przesyłane wyniki obserwacji.

Po wieloletnich badaniach około 20 tysięcy zdjęć Saturna zrobionych przez Voyagera 2 w 1981 roku M. Gordon i C. Murray z Londynu doszli do wniosku, że Saturn ma o 7 księżyców więcej niż sądzono. Saturn jest więc w tej dziedzinie niewątpliwym rekordzistą z dwudziestoma księżycami. Następna okazja do zbadania okolic Saturna nastąpi w 2004 roku, gdy zbliży się do niego sonda kosmiczna Cassini.

Poszukiwania w zakresie optycznym galaktyki silnie emitującej fale radiowe doprowadziły do odkrycia najbardziej odległej galaktyki. Astronomowie z Wielkiej Brytanii, Holandii i USA za pomocą teleskopu Herschela, znajdującego się na Wyspach Kanaryjskich, odkryli w gwiazdozbiorze Draco galaktykę oznaczoną w katalogu radioźródeł symbolem 8C 1435+635. Galaktyka ta znajduje się w odległości około 8 miliardów lat świetlnych od Ziemi i w momencie, gdy obserwowane przez nas światło opuszczało galaktykę, Wszechświat był 5 razy mniejszy niż obecnie.

kwantowego znane jest pod nazwą notacji Diraca. Okazuje się, że np. elektron w stanie $|L\rangle$ może przejść w stan $|R\rangle$ i na odwrót. Innymi słowy, elektron, którego ruch początkowo był ograniczony do najbliższego otoczenia atomu, nagle może zmienić charakter swojego ruchu i poruszać się w całym krysztale. Powyższy proces nosi nazwę mieszania stanów kwantowych. Zamiast mówić o dwóch rodzajach stanów, wygodnie nieraz jest mówić o dwóch rodzajach elektronów A i B (oczywiście, w rzeczywistości istnieje tylko jeden rodzaj elektronów).

Po przyłożeniu napięcia elektrycznego przez metal zaczyna płynąć prąd, którego wartość przypadająca na jeden elektron j jest dana przez proporcjonalność:

$$(2) \qquad j \sim n_A v_A + n_B v_B\,,$$

gdzie v_A i v_B są prędkościami dryfu dla elektronów A i B, a n_A i n_B są ich odpowiednimi względnymi koncentracjami, przy czym $n_A + n_B = 1$.

Ostatnia równość oznacza, że elektron może znajdować się wyłącznie w stanie $|A\rangle$ lub $|B\rangle$. Załóżmy teraz, że elektron przebywa w stanie $|A\rangle$ część α swego czasu, a w stanie $|B\rangle$ część β. Jeśli tak, to powinna zachodzić równość $\alpha + \beta = 1$.

Zauważmy ponadto, że im dłużej elektrony przebywają w stanie $|A\rangle$, tym bardziej wydaje się, że jest ich więcej w tym stanie. Czyli mamy relacje

$$n_A \sim \alpha \quad \text{oraz} \quad n_B \sim \beta\,.$$

Wykorzystując teraz fakt, że wzór (1) jest słuszny dla obu rodzajów elektronów, tzn.

$$\frac{m_A v_A}{\tau_A} = eE = \frac{m_B v_B}{\tau_B}$$

i zakładając, że czas między rozproszeniami jest taki sam ($\tau_A = \tau_B = \tau$), możemy napisać, że prąd

$$(3) \qquad j \sim E\tau\left(\frac{\alpha}{m_A} + \frac{\beta}{m_B}\right)\,.$$

Z drugiej strony, zamiast mówić o dwóch rodzajach nośników, równoważnie możemy mieć do czynienia z jednym, który łączy w sobie cechy obu jednocześnie. Takie obiekty noszą nazwę kwazicząstek (efektywne nośniki) i przypisuje się im pewną masę efektywną m^*. Prąd elektryczny dla kwazicząstek opisuje ten sam wzór, co dla „prawdziwych" cząstek, tj.

$$(4) \qquad j \sim E\tau^*/m^*\,.$$

Porównując wzory (3) i (4) oraz zakładając znowu, że $\tau^* = \tau$, dostajemy dla masy efektywnej następujące wyrażenie

$$(5) \qquad m^* = \frac{m_A m_B}{\alpha m_A + \beta m_B}\,.$$

W szczególnym przypadku, gdy jeden z wyjściowych stanów jest całkowicie zlokalizowany, np. $|B\rangle$, wtedy $m_B = \infty$ i wzór (5) upraszcza się do $m^* = m_A/\alpha$. Jaki wniosek wypływa z tego prostego wzoru? Otóż w przypadku, gdy elektrony znaczną część czasu przebywają w stanie zlokalizowanym, α jest małe i masa efektywna nośników może być znacznie zwiększona. Na przykład, dla układów ciężkich fermionów, elektrony 99% i więcej czasu spędzają w stanach zlokalizowanych, a tylko 1% lub mniej w stanach rozciągłych. Wynika stąd, że $m^* \sim 100m_A - 1000m_A$.

Widać więc, że problem ogromnych mas efektywnych może być stosunkowo prosto wytłumaczony. Znacznie trudniej jest wyjaśnić inne własności ciężkich fermionów, takie jak ich niekonwencjonalne nadprzewodnictwo czy magnetyzm. Właśnie te dwie własności powodują, że układy te są intensywnie badane na świecie w ciągu ostatnich lat. Ale to temat na inne opowiadanie.

Dlaczego lustro zamienia prawą stronę z lewą, a nie górę z dołem?

Zbigniew SEMADENI

Zagadnienie lustra omawiane było już w *Delcie* czterokrotnie (w numerach 6/1977, 6/1979, 10/1987 i 7/1993), sądzę jednak, że warto dorzucić jeszcze kilka uwag.

Przede wszystkim chciałbym podkreślić, że odpowiedzi na postawione pytanie nie można udzielić opierając się wyłącznie na wiedzy z matematyki i fizyki. Przeprowadźmy następujący eksperyment myślowy (a jeśli ktoś woli – eksperyment prawdziwy). Bierzemy gruszkę (lub bryłę obrotową bez żadnych innych symetrii), zaznaczamy na niej kółko i obok krzyżyk. Stawiamy ją pionowo przed lustrem. Na obrazie gruszki w lustrze kółko i krzyżyk zamieniają się miejscami. Efekt jest taki, jakby lustro zamieniło stronę prawą z lewą, ale nie zamieniło góry z dołem. Matematycznie sprawa jest o tyle jasna, że symetria względem płaszczyzny lustra musi zmieniać orientację na przeciwną. Ale dlaczego właśnie zamienia lewą z prawą? Zmianę orientacji można uzyskać zarówno przez zamianę lewej z prawą, jak i przez zamianę góry z dołem (ale nie przez obie te zamiany razem). Być może pion jest jakoś wyróżniony dla lustra. Pion – to kierunek linii sił pola grawitacyjnego. Czy grawitacja ma jakiś związek z odbiciem promieni świetlnych?

Teraz kładziemy gruszkę poziomo i powtarzamy eksperyment. Znowu kółko i krzyżyk zamieniły się miejscami. Ale teraz wygląda to tak, jakby lustro zamieniło swoją górę ze swoim dołem, a nie swoją stronę prawą ze swoją lewą. A więc pion fizyczny nie jest tu istotny, lecz położenie osi symetrii gruszki. Tytułowe pytanie „Dlaczego?" staje się bardziej intrygujące.

Odpowiedzi, moim zdaniem, należy szukać w psychofizjologii ludzkiego spostrzegania. Promienie świetlne padają na siatkówkę oka ludzkiego. Zostają odebrane przez ponad 100 milionów komórek receptorowych i przetworzone na impulsy przekazywane do tzw. kory wzrokowej mózgu, gdzie są przetwarzane i interpretowane. Analogicznie działa kamera video sprzężona z komputerem. Kamera przetwarza impulsy świetlne na impulsy elektryczne, wysyłane do komputera. Tam są poddawane obróbce graficznej i przekazywane na monitor. Mózg jednak nie tylko przetwarza otrzymywane obrazy, ale je też interpretuje, np. rozpoznając gruszkę. W szczególności subtelne różnice obrazu na siatkówce lewego i prawego oka są przetwarzane w mózgu na obraz trójwymiarowy z głębią.

Ta umiejętność interpretacji obrazu nie jest człowiekowi dana wraz z urodzeniem. Początkowo niemowlę odróżnia tylko światło od ciemności, dopiero po wielu tygodniach zaczyna uczyć się rozpoznawania kształtów. Interpretacja obrazu rozwija się wraz z rozwojem rozumienia kształtu i wzajemnego położenia widzianych obiektów, wyobraźni przestrzennej i kształtowaniem się pojęć geometrycznych. Rysunki dzieci szalenie frapują artystów; prawdopodobnie wyrażają one jakoś sposób, w jaki mózg dziecka interpretuje spostrzegane obrazy. Jego siatkówka odbiera obraz zapewne tak jak i nasza, ale jego mózg inaczej przetwarza otrzymywane bodźce.

Patrz np. [2], rozdziały o rozwoju spostrzeżeń kolejno w wieku niemowlęcym, poniemowlęcym, przedszkolnym, młodszym wieku szkolnym i w wieku dorastania.

Gdy patrzymy z ukosa na kartkę papieru, widzimy ją w perspektywie. Aby zrozumieć, jaki obraz pada na siatkówkę oka, wyobraźmy sobie ostrosłup, którego podstawą jest obserwowany prostokąt, a wierzchołek znajduje się w środku oka. Obraz padający na siatkówkę otrzymamy – w przybliżeniu – biorąc przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną prostopadłą do prostej łączącej wierzchołek ostrosłupa ze środkiem podstawy. Łatwe rozumowanie geometryczne pokazuje, że obraz ten jest wprawdzie czworokątem, ale bynajmniej nie jest prostokątem, a mimo to w mózgu jest interpretowany jednoznacznie jako prostokąt, *bowiem wiemy lub podświadomie zakładamy, że kartka jest prostokątna*. Nawet matematycy bywają zaskoczeni efektem prostego eksperymentu: patrzymy na taki skośnie położony prostokąt (o wyraźnym, ale nie przesadnym skosie), wydaje się nam, że widzimy kąty proste, po czym przykładamy do oka ekierkę i przekonujemy się, że dwa z tych kątów widzimy jako ostre, a dwa – jako rozwarte. Podobnie, gdy patrzymy z ukosa na okrąg, do oka dociera kształt elipsy (przekrój odpowiedniego stożka, prostopadły do osi), ale mózg nasz interpretuje to jako okrąg.

Przyłóżmy do oka linijkę: okaże się, że linie pionowe (takie jak krawędzie ścian budynku), które wydają się nam równoległe, w rzeczywistości docierają do naszej siatkówki jako nierównoległe. Niby to wiemy, uczyliśmy się o perspektywie, ale możemy być zaskoczeni tym, co widzimy. Nasz mózg automatycznie interpretuje takie linie jako równoległe (podobnie jak obecnie, przy tworzeniu map, komputer przekształca skośne zdjęcia lotnicze na wyprostowane). Co więcej, matematycy nieraz kwestionują rysunki prostopadłościanu w perspektywie zbieżnej; wolą perspektywę równoległą. Innymi słowy, nieraz za naturalny uważają rysunek bryły nie taki, jak ją widzą, lecz taki, jak ją sobie wyobrażają.

Tego typu obserwacje są podstawą znanych złudzeń wzrokowych, wykorzystywanych m.in. z premedytacją (przez Eschera i innych) do tworzenia nieoczekiwanych efektów i sprzeczności wizualnych.

Warto dodać, że pion jest specjalnie wyróżniony w naszym spostrzeganiu. Hubel ([1], str. 105), pisze, że komórki korowe reagują przede wszystkim na ustawienie bodźca względem pionu, niezależnie od konkretnego położenia bodźca na siatkówce.

Jak wiemy ze szkolnej optyki, obraz na siatkówce jest odwrócony do góry nogami, podobnie jak obraz w aparacie fotograficznym. Nie zdajemy sobie jednak z tego sprawy, bowiem tak było zawsze od urodzenia. Mózg ucząc się interpretowania bodźców wizualnych zawsze miał wszystko odwrócone. Wiele lat temu czytałem, że w jakimś kraju dokonano następującego eksperymentu. Nałożono ochotnikowi specjalne okulary, w których wszystko było widać do góry nogami. Człowiek ten nosił stale te okulary, wolno mu je było zdjąć jedynie w ciemnościach. Nigdy nie miał prawa spoglądać normalnie. Jak się można domyśleć, człowiek ten początkowo miał kłopoty z funkcjonowaniem, w szczególności z chodzeniem, ale stopniowo nabrał wprawy i przyzwyczaił się. Coraz łatwiej wykonywał różne czynności. Po wielu miesiącach człowiek ten czuł się zupełnie swobodnie. Celem eksperymentu było przekonanie się, jak się zachowa ten człowiek po zdjęciu tych okularów. Okazało się, że w pierwszej chwili miał on wrażenie, że znowu wszystko jest do góry nogami. Od nowa musiał się przyzwyczajać do patrzenia bez tych okularów.

Podobną nieco sytuację przeżywałem w 1967 roku, gdy przez jakiś czas prowadziłem samochód w ruchu lewostronnym w Szwecji. Było to bardzo specyficzne przeżycie. Po tygodniu moje ruchy już się zautomatyzowały i potem zacząłem odważać się nawet wyprzedzać inne samochody z prawej strony na szosie. W końcu przyszedł czas na wjazd do Norwegii i musiałem z kolei – z mniejszą już trudnością – przyzwyczajać się do ruchu prawostronnego w Norwegii (wystarczyła na to niecała godzina).

Powszechnie sądzi się, że nie ma żadnego obiektywnego powodu, dla którego ruch prawostronny miałby być właściwszy od lewostronnego lub na odwrót. Wszystko, co istotne w tej sprawie, wydaje się w pełni symetryczne. Pewien Anglik podał mi jednak bardzo istotny argument za ruchem lewostronnym: jeżeli jeździec na koniu lub woźnica trzyma broń po swej prawej stronie, a lejce w lewej ręce, to powinien mijać nadjeżdżających jeźdźców od strony broni.

Wiele osób wykonując czynności przed kamerą telewizyjną i obserwując na bieżąco swoje ruchy na monitorze zauważyło, że bywa to mylące, np. zamiast przesunąć coś w prawo przesuwamy jeszcze bardziej w lewo. Monitor bowiem – w przeciwieństwie do lustra – nie zamienia lewej z prawą. Obraz na monitorze wygląda tak, jakby naprzeciwko nas znajdował się prawdziwy człowiek, a nie obraz odbity w lustrze, do którego jesteśmy przyzwyczajeni.

Kamerzyści telewizyjni nieraz muszą objąć daną sytuację z góry, np. przy pokazie manipulowania przedmiotami na stole. Aby nie umieszczać kamery w pionie nad stołem, co byłoby bardzo kłopotliwe, umieszcza się ją poziomo i nagrywa obraz blatu stołu poprzez skośnie zawieszone lustro umieszczone nad stołem. Trzeba potem zamienić prawą i lewą stronę na obrazie, czego dokonuje się elektronicznie.

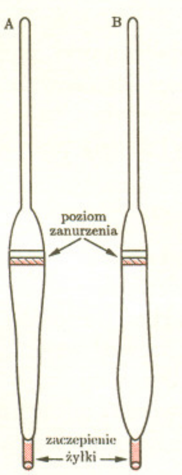
Po tych dygresjach przejdźmy do obrazu gruszki. Człowiek interpretuje docierający do jego oczu obraz gruszki. Normalną interpretacją jest zachowanie góry i dołu oglądanej gruszki. Wobec tego, z uwagi na zmianę orientacji, widzimy zamianę lewej z prawą, bo to jest taka interpretacja, do jakiej przyzwyczajony jest nasz mózg. Patrząc na obraz gruszki położonej poziomo też podświadomie odnosimy go do gruszki leżącej, obracamy ją jakby w myśli.

Literatura

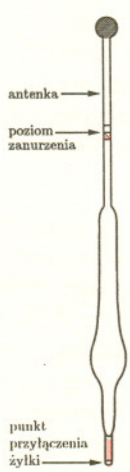
[1] David H. Hubel, *Kora wzrokowa w mózgu*, w: *Psychofizjologia*, Biblioteka Problemów, PWN, Warszawa 1971.

[2] Maria Żebrowska (red.), *Psychologia rozwojowa dzieci i młodzieży*, wyd. ósme, PWN, Warszawa 1977.

Archimedes i spławik



Rys. 1. Dwa spławiki A – marchewkowy, B – gruszkowy.



Rys. 2. Spławik o złożonych kształtach.

Jednym z podstawowych elementów wędki jest spławik. Skuteczność jego działania zależy w istotny sposób od jego kształtu. Na rysunku 1 przedstawiono dwa spławiki; tak zwany spławik gruszkowy i marchewkowy. Nazwa pochodzi od kształtu zanurzonej części. Głębokość jego zanurzenia jest regulowana ołowianymi obciążnikami znajdującymi się pomiędzy spławikiem a haczykiem. Kształt zastosowanego podczas połowu spławika zależy od gatunku ryby. Niektóre z nich (na przykład leszcz, karp, lin czy ukleja) po pochwyceniu przynęty wypływają ku powierzchni wody, inne zaś (takie jak płoć i okoń) uciekają w głąb. Kiedy ryba zaczyna „brać”, spławik powinien stawiać możliwie jak najmniejszy opór, tak by wędkarz mógł zaciąć wędką. Rysunek 2 przedstawia spławik, którego kształt jest złożeniem kształtu marchewkowego z gruszkowym. Przeprowadzone przez autorów doświadczenia wskazują na jego bardzo dużą czułość zarówno w momencie zanurzania, jak i wystawiania (wynurzania) przez rybę. Metodą prób i błędów tak dobrano wielkość zanurzenia, by przypadało ono w połowie „antenki” spławika.

Proponujemy następujący problem do rozważenia przez Czytelników *Delty*: z jakim spławikiem najlepiej jest łowić ryby wynurzające, a jakim zanurzające się podczas połowu? Jak rozmieszczenie ciężarka (może się on składać z kilku części) wpływa na czułość spławika?

Kazimierz MIKULSKI i Roman BILECKI

100 lat promieni Röntgena

W tym roku mija setna rocznica odkrycia przez Röntgena tajemniczych promieni nazwanych przez niego promieniami X. Bez wątpienia było to bardzo doniosłe odkrycie, które bardzo szybko znalazło zastosowania w różnych dziedzinach nauki, techniki i medycyny.

August Kundt (1839–1894) wsławił się pracami z dziedziny akustyki. Wykonał również pomiar liczby Avogadra. Jego nazwiskiem nazwano urządzenie do wytwarzania fal akustycznych stojących, przeznaczone głównie do pomiaru współczynnika pochłaniania dla różnych materiałów.

Wilhelm Conrad Röntgen urodził się w Lennep w pobliżu Düsseldorfu w roku 1845. Gdy miał trzy lata, jego rodzina wyjechała do Holandii (jego matka była Holenderką). Studiował najpierw w Holandii, potem na Politechnice w Zurychu, którą ukończył w 1868 r., a doktorat uzyskał na Uniwersytecie w Zurychu rok później. W 1870 r. powrócił do Niemiec, gdzie został asystentem profesora Kundta na Uniwersytecie w Würzburgu. W 1874 roku został docentem w Strasburgu, a w 1879 roku przeniósł się do Giessen. W 1888 roku objął katedrę w Uniwersytecie w Würzburgu. Na początku listopada 1895 r. Röntgen miał w swoim dorobku 48 prac naukowych. Wcześniejsze prace dotyczyły pomiarów ciepła właściwego gazów. W 1888 r. wykazał doświadczalnie, że prąd unoszonych ładunków jest taki sam, jak prąd przewodzenia. Dzisiaj to stwierdzenie wydaje się banalne, ale należy pamiętać, że wtedy nie było to oczywiste. Na przykład Faraday długo badał, czy prąd uzyskiwany z ogniw jest taki sam, jak prąd wytwarzany w maszynie elektrostatycznej. Te prace przyniosły Röntgenowi uznanie (Lorentz mówił o prądzie Röntgena dyskutując prąd unoszenia), chociaż obecnie są praktycznie zapomniane. Czterdziesta dziewiąta praca przyniosła mu sławę i trwałe miejsce w historii nauki.

Johann Hittorf (1824–1914) pierwszy zauważył cień rzucany przez obiekt umieszczony przed katodą w próżniowej rurze do wyładowań, co świadczyło, że źródłem promieni katodowych jest katoda. Termin „promienie katodowe" wprowadził E. Goldstein (1859–1930). Wielu fizyków uważało, że promienie katodowe są falą, mimo że już w 1858 r. Julius Plücker (1801–1868), nauczyciel Hittorfa, wykazał, że ich tor można odchylić za pomocą magnesu. Dopiero Jean Baptiste Perrin (1870–1942) wykazał w 1895 r. przez skierowanie ich do „wiaderka Faradaya", że jest to strumień ujemnie naładowanych cząstek.

Wieczorem 8 listopada 1895 r. Röntgen badał własności promieni katodowych (wtedy jeszcze nie było wiadomo, że są to elektrony) wytwarzanych za pomocą cewki Ruhmkorffa w próżniowej rurze Hittorfa. W szczególności Röntgena interesowało przechodzenie tych promieni poza rurę próżniową, co zostało wcześniej zaobserwowane przez Philippa Lenarda. W trakcie badań Röntgen osłonił rurę szczelnie czarną tekturą. Wtedy w kompletnej ciemności zauważył, że leżący nieopodal papier pokryty cyjanoplatyninem baru i służący jako ekran do śledzenia toru promieni katodowych fluoryzuje przy każdym wyładowaniu cewki Ruhmkorffa. Przez siedem tygodni Röntgen samotnie i w tajemnicy przed wszystkimi badał przyczynę świecenia. Doszedł do wniosku, że musi to być nowy typ promieniowania bardzo przenikliwego, który pobudza do świecenia związki cyjanoplatyninu baru. Nie udało mu się tych promieni ani odbić, ani załamać, ani odchylić za pomocą magnesu czy pola elektrycznego. Dopiero po uzyskaniu zdjęć (jak byśmy dzisiaj powiedzieli – rentgenowskich) swojej dłoni, ciężarków zamkniętych w drewnianym pudełku i innych przedmiotów Röntgen, w pełni przekonany o istnieniu nowych promieni, wręczył 28 grudnia 1895 r. swoją pracę sekretarzowi Towarzystwa Fizyczno-Medycznego w Würzburgu. 1 stycznia 1896 r. rozesłał odbitki swojej pracy wraz ze zdjęciami rentgenowskimi do wielu fizyków.

Luminescencja – świecenie towarzyszące przejściu układu wzbudzonego (atomu, jonu, cząsteczki) do stanu podstawowego, którego natężenie jest większe od promieniowania cieplnego w danej temperaturze i o czasie trwania dłuższym od okresu drgań emitowanej fali świetlnej. Jeśli czas wyświecania jest krótki, rzędu $10^{-5}-10^{-9}$ sekundy, to taki typ luminescencji nazywa się fluorescencją. Gdy stan wzbudzony jest stanem metatrwałym, to wyświecanie następuje z pewnym opóźnieniem, rzędu $10^{-3}-10^{1}$ sekund, i wtedy mówimy o fosforescencji.

Cyjanoplatynin baru ($Ba[Pt(CN)_4]\,4H_2O$) fluoryzuje pod wpływem promieni X i katodowych. Stosowany jest do powlekania ekranów w aparatach rentgenowskich.

Praca Röntgena wywołała olbrzymie poruszenie nie tylko w świecie nauki. Było to jedno z nielicznych odkryć „czystej" nauki, którego możliwości zastosowań były natychmiast widoczne – chociażby w medycynie, gdzie promienie (prześwietlające ciało ludzkie i zostawiające cień kości na kliszy) mogły pomóc w diagnostyce.

O doniosłości odkrycia Röntgena może świadczyć opublikowanie w samym 1896 r. ponad 50 książek i ponad 1000 artykułów naukowych i popularnonaukowych na ten temat. Już 13 stycznia 1896 r. Röntgen demonstrował swoje doświadczenie przed cesarzem Wilhelmem II w Berlinie. 23 stycznia 1896 r. dał swój jedyny wykład publiczny przed Towarzystwem Fizyczno-Medycznym w Würzburgu. Na zaproszenia z całego świata do wygłoszenia wykładów lub przeprowadzenia demonstracji odpowiadał odmownie, gdyż wolał czas swój poświęcić pracy w laboratorium. Nie wygłosił nawet wykładu noblowskiego po odebraniu Nagrody Nobla w 1901 r.

Oliver Joseph Lodge (1851–1940) stwierdził w 1893 r., że prędkość światła nie ulega zmianie na skutek przejścia między ciężkimi tarczami stalowymi wirującymi z dużą prędkością kątową, co świadczyło o tym, że jeśli istnieje eter, to nie jest on wleczony. Doświadczenie Lodge'a przyczyniło się do odrzucenia hipotezy istnienia eteru.

George Francis Fitzgerald (1851–1901), na podstawie negatywnego wyniku doświadczenia Michelsona i Morleya wysunął hipotezę w 1892 r., zgodnie z którą ciała ulegają skróceniu w kierunku ich ruchu.

Warto może wspomnieć, że w swojej pierwszej pracy o odkryciu promieni X Röntgen wysunął hipotezę, że te promienie mogą być podłużnymi drganiami eteru; poprzeczne drgania miały być odpowiedzialne za światło. Nie był on

Karykatura Röntgena opublikowana około 1900 roku w *Lustigen Blättern*.

jedynym naukowcem uważającym, że podłużne drgania muszą istnieć. Podobne poglądy głosili również Fitzgerald, Boltzmann i Lodge. Opinie te świadczą o tym, że 20 lat po pojawieniu się pracy Maxwella teoria elektromagnetyzmu była daleka od zrozumienia.

Natychmiast po odkryciu wielu fizyków próbowało rozwikłać zagadkę dotyczącą natury promieni X. Jednym z nich był Henri Becquerel. Wyszedł on z założenia, że promienie X być może są przejawem wibracji, które powodują fosforescencję lub fluorescencję. Aby to sprawdzić, rozpoczął badania innych substancji fluorescencyjnych, w tym soli uranu. Chociaż jego hipoteza okazała się błędna, to w trakcie badań odkrył 1 marca 1896 r. inny typ promieniowania – naturalną promieniotwórczość. To odkrycie też zostało uhonorowane Nagrodą Nobla w 1903 r., którą Becquerel podzielił z małżeństwem Curie.

Natura promieni X została odkryta w kilka lat później. W 1906 r. Charles Barkla uzyskał ich częściową polaryzację. W 1912 r. Max von Laue wpadł na pomysł użycia kryształu jako siatki dyfrakcyjnej, co doświadczalnie zostało zrealizowane przez Waltera Friedricha i Paula Knippinga. Przy okazji tych badań okazało się, że promienie X pozwalają poznać przestrzenną budowę materii.

Chociaż od tamtych czasów wynaleziono nowe metody badania wnętrza ciała ludzkiego bez użycia skalpela (jądrowy rezonans magnetyczny, sondy ultradźwiękowe, tomografia komputerowa, tomografia pozytronowa), to dalej trudno sobie wyobrazić szpital lub przychodnię zdrowia bez aparatu rentgenowskiego.

J.K.

Zadania

Redaguje Krzysztof OLESZKIEWICZ

M 747. Dla dowolnej liczby dodatniej p niech $A_p = \{[np] : n \in \mathbf{N}\}$. Udowodnić, że jeśli $p, q > 1$ są takimi liczbami niewymiernymi, iż $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, to $A_p \cap A_q = \emptyset$ i $A_p \cup A_q = \mathbf{N}$. (Uwaga: $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie przekraczającą x; zera nie uważamy za liczbę naturalną.)
Rozwiązanie na str. 10

M 748. Udowodnić, że $\left|\sum_{n=1}^{k} (-1)^{[n\sqrt{2}]}\right| \leq 1 + 2\log_2 k$ dla dowolnej liczby naturalnej k.
Rozwiązanie na str. 12

M 749. Udowodnić, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n\sqrt{2}]}}{n}$ jest zbieżny.
Rozwiązanie na str. 13

Redaguje Adam KOROCIŃSKI

F 411. Czy światło padające na przezroczysty ośrodek może złamać zasadę zachowania pędu? Aby odpowiedzieć na to pytanie, rozważmy mały sześcian doskonale przezroczystego szkła pokrytego warstwą zapobiegającą odbiciu światła, umieszczony w próżni. Sześcian ten wisi pionowo na idealnej (nieważkiej) nici. Jeśli prostopadle do jednej ze ścianek sześcianu pada nań pozioma wiązka światła monochromatycznego, to z zasady zachowania pędu mamy

$$p_w + p_{sz} = p'_w + p'_{sz},$$

wielkości primowane odpowiadają przypadkowi, gdy światło przechodzi przez szkło, a p_w jest pędem wiązki, p_{sz} – pędem szkła. Jeśli teraz skorzystamy ze wzoru $p = h/\lambda$, to dostaniemy:

$$\frac{h}{\lambda} + 0 = \frac{h}{\lambda/n} + p'_{sz},$$

gdzie h – to stała Plancka, λ – długość fali padającej, a n – współczynnik załamania światła w szkle. Stąd dostajemy: $p'_{sz} = \frac{h}{\lambda}(1-n)$, co dla $n > 1$ daje $p'_{sz} < 0$, czyli sześcian cofnie się w kierunku, z którego nadbiega wiązka! Jest to jednak sprzeczne z idealnym charakterem przezroczystości szkła, czyli z brakiem wymiany energii i pędu. Wyjaśnić powyższą sprzeczność.
Rozwiązanie na str. 11

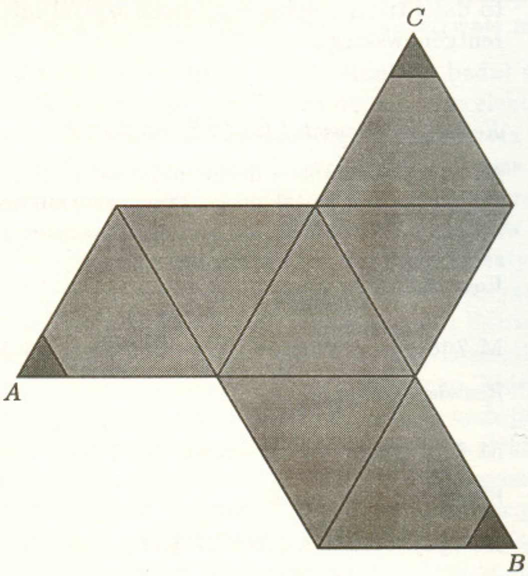
F 412. W którą stronę pojedzie rower, jeśli na dolny pedał podziałamy siłą skierowaną w tył roweru? Dla uproszczenia rozważyć najprostszy rower (monocykl): jedno koło połączone z pedałem bez przekładni, środek masy roweru pokrywa się ze środkiem koła. Zakładamy, że ruch odbywa się bez poślizgu.
Rozwiązanie na str. 11

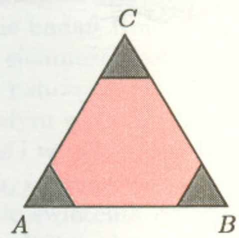
Nowy płaski wielościan

W *Małej Delcie* z numeru 4/1994 był przedstawiony model dwunastościanu foremnego. Model był z tekturki (plus jedna gumka-recepturka) i miał tę własność, że po naciśnięciu palcem stawał się płaski, gdy jednak zabrało się palec – znów był właściwej, trójwymiarowej postaci. Można go więc było przechowywać w zeszycie i oglądać w pełnej krasie po otwarciu tegoż. Zadałem tam pytanie, czy istnieją podobne modele innych wielościanów.

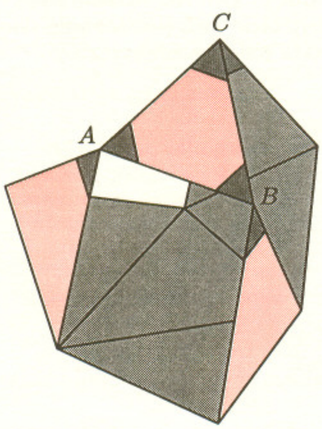
I oto podczas XIV Szkoły Matematyki Poglądowej, organizowanej przez Ośrodek Kultury Matematycznej w Mordach (warto by o nim napisać, ale to już innym razem), pan Eugeniusz Jakubas z Zamościa wręczył mi model ośmiościanu.

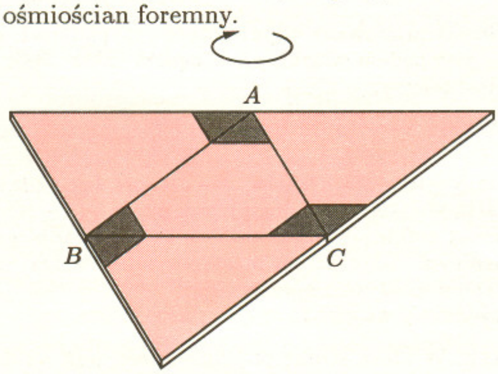
Składa się on z dwóch części. Pierwsza to siedem trójkątów równobocznych wykonanych z jednego kawałka tektury tak ponacinanego wzdłuż wskazanych linii, by można go było wzdłuż tych linii zginać. Druga część to jeden taki trójkąt. Obie części są połączone trzema żyłkowymi zawiasami (żyłkowy zawias to po prostu kawałek żyłki mocno przytwierdzony w odpowiadających sobie punktach – na rysunku A i A, B i B, C i C – pozwala on na dowolne obracanie jednej części względem drugiej).

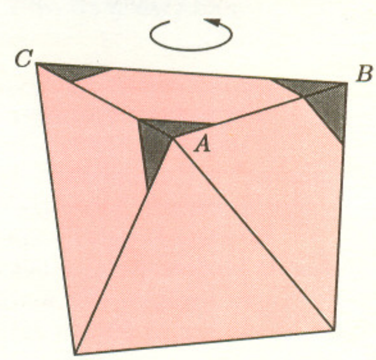




Model samorzutnie przybiera dość trudny do nazwania, ale łatwy do wyobrażenia kształt przedstawiony na rysunku obok. Gdy teraz (trzymając środkowy trójkąt pierwszej części nieruchomo) obrócimy drugą część zgodnie ze wskazówkami zegara, to model stanie się płaski – będzie to podwójny trójkąt równoboczny o dwa razy większym boku. Gdy zaś przeciwnie – uzyskamy ośmiościan foremny.







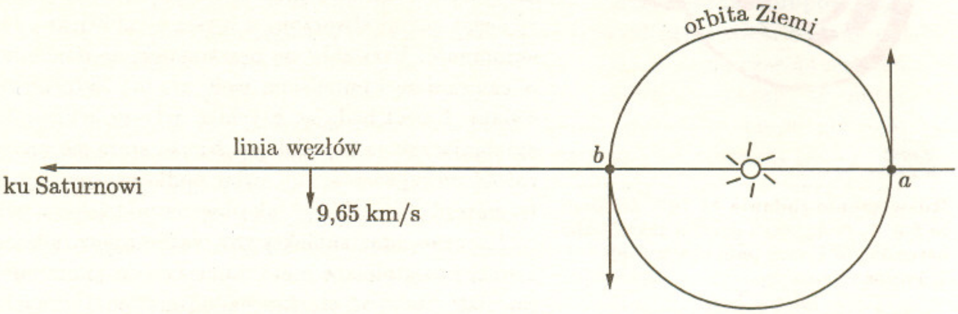
Jak widać, zasada działania jest inna niż w przypadku dwunastościanu, ale ogólna idea: zbudować model wielościanu, który da się – bez demontażu – przechowywać w zeszycie, została zrealizowana.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

Niebo przez lornetkę

Pisaliśmy w maju o przejściu Ziemi przez płaszczyznę pierścieni Saturna. Otóż Słońce przechodzi przez tę płaszczyznę, będącą zarazem równikową płaszczyzną Saturna, niewątpliwie, co pół saturnowego roku w chwili saturnowej równonocy, tak jak co pół roku (naszego, ziemskiego) przechodzi przez płaszczyznę równikową Ziemi. Ale Ziemia oglądana z Saturna dość szybko „kręci się” w pobliżu Słońca, zapewne więc jej ruch na saturnowym niebie jest trochę bardziej zawiły. Spróbujmy tę sprawę przemyśleć.

Nazwijmy linię przecięcia się płaszczyzny pierścieni z płaszczyzną orbity ziemskiej (tj. płaszczyzną ekliptyki) linią węzłów pierścieni. W każdej chwili przechodzi ona, oczywiście, przez Saturna i porusza się wraz z nim zachowując niezmienny kierunek w przestrzeni, a zniknięcie pierścieni obserwujemy, jeżeli trafi ona w Ziemię. Saturn obiega Słońce w średniej odległości 9,55 jednostek astronomicznych, jego prędkość orbitalna jest więc $\sqrt{9{,}55}$ razy mniejsza od orbitalnej prędkości Ziemi i wynosi 9,65 km/s. Linia węzłów przemiata zatem wnętrze orbity ziemskiej z mniej więcej stałą prędkością w czasie zbliżonym do 300 000 000/9,65 sekund, co wynosi w przybliżeniu rok.



Skoro tak, to sprawa się rzeczywiście komplikuje, bowiem w ciągu roku (oczywiście, niekoniecznie kalendarzowego, tylko rozumianego jako 365 dni) mogą się zrealizować dwie zasadniczo różne konfiguracje tej linii, Ziemi i Słońca. Jeżeli (położenie a) w chwili zniknięcia pierścieni Ziemia znajduje się gdzieś po przeciwnej stronie Słońca niż Saturn, to przetnie linię węzłów raz (pomijamy tu fakt, że wtedy Saturna w ogóle się nie zobaczy, bo będzie się znajdował na dziennym niebie). A jeżeli Ziemia przechodzi przez linię węzłów znajdując się po tej samej stronie Słońca co Saturn (położenie b), to oznacza, że kilka miesięcy wcześniej musiała już takie przejście wykonać i za kilka miesięcy musi wykonać jeszcze jedno. Innych możliwości nie ma. Przejście dwukrotne jest niemożliwe, bo z jednej strony pierścieni na drugą można przejść tylko nieparzystą liczbę razy, ale pięć razy już za długo by trwało, bo wskutek ruchu Saturna linia węzłów dawno przestałaby przecinać się z orbitą Ziemi.

Okazuje się, że w roku 1995 przechodzimy przez płaszczyznę pierścieni dwukrotnie: raz w maju, a drugi raz właśnie teraz w sierpniu. Trzecie w tej serii zjawisko nastąpi więc w przyszłym roku. Niestety, nie ukazał się jeszcze żaden rocznik astronomiczny na 1996 r., więc nie wiemy dokładnie, kiedy. Na pewno przed majem, ale przewidywanie „na oko” ma prawo być bardzo niedokładne, ponieważ Saturn nie porusza się dokładnie w płaszczyźnie ekliptyki, a więc linia węzłów pierścieni nie zachowuje dokładnie stałego kierunku, prędkości planet nie są stałe itd. Jednorazowe przejście przez płaszczyznę pierścieni Ziemia wykonała we wrześniu 1950 r. Poza tym w rocznikach, jakimi dysponuje warszawskie Obserwatorium Astronomiczne znajdowałem tylko przejścia trzykrotne, np. październik 1979 r. oraz marzec i lipiec 1980 r., kwiecień, październik i grudzień 1966 r. itd. A ile razy w jednej serii Ziemia może przejść przez płaszczyznę pierścieni Urana?

Tomasz KWAST

Po co puzoniście znać paradoks Olbersa?

czyli XIV Krakowska Letnia Szkoła Kosmologii w Łodzi

Konrad RUDNICKI

Grecka muza Euterpe opiekowała się poezją liryczną, inna, Polihymnia – śpiewami liturgicznymi, Klio – historią, a muza Urania – geometrią i astronomią. Ogółem muz reprezentujących różne świeckie oraz sakralne nauki i sztuki było dziewięć i wszystkie pod batutą samego Apolla uprawiały to, co od muz biorąc początek, do dziś się nazywa *muzyką*. Jeszcze w okresie renesansu zaliczano matematykę i astronomię do *sztuk* wyzwolonych, ale od XIX wieku przyjęło się uważać naukę za coś różnego od sztuki.

Jeśli się jeszcze mówiło o sztuce lekarskiej czy matematycznej, to tylko w znaczeniu przenośnym. Oczywiście, fizyk mógł kochać sztukę i do sformułowania jakiegoś nowego prawa mógł mu pomóc wysłuchany koncert lub obejrzana rzeźba, ale to ostatnie się zaliczało do przeżyć czysto osobistych. A zasadą było, aby przy badaniu natury świata zewnętrznego nie uwzględniać człowieka, a zwłaszcza jego świata odczuć, w tym – odczuć artystycznych. Wypadało badać świat *jako taki* tak, jakby człowieka na nim w ogóle nie było. Słowem, po wiekach przesadnej dumy, że świat został stworzony z myślą o człowieku, nastąpiła moda na przesadną ludzką skromność. Utrwaliło się przekonanie, że istnienie człowieka wraz z jego myśleniem, odczuwaniem i impulsami woli, nie ma żadnego znaczenia dla *obiektywnie* istniejącego świata. Nawet badając psychikę artysty, wypadało wykluczać artystyczne skłonności zgłębiającego ją psychologa. Nauka stała się *rzeczowa* i sucha. Tak jak Grecy dzielili całość rzeczywistości na świat podksiężycowy (z materii ważkiej) i ponadksiężycowy (z materii nieważkiej), tak obecnie podzielono świat na obiektywny, zawierający to, co fizyczne, oraz subiektywny, zawierający ludzkie odczucia artystyczne, wyobrażenia i inne, nie istniejące materialnie rzeczy. (Pomijam dla prostoty pytanie, gdzie w tym podziale umieścić obiekty badań matematycznych.)

Coś się zmieniło, kiedy odkryto zasadę antropiczną. Okazało się mianowicie, że aby we Wszechświecie mogły zaistnieć twory mające cechy ludzkie, a więc istoty inteligentne, mające pasję badawczą i do tego materialne (nie jacyś aniołowie!), muszą być spełnione określone warunki. W miarę postępu badań przekonano się, że są to bardzo ścisłe warunki określające wszystkie prawa fizyki, a nawet stałe fizyczne. Dało się to sformułować w paradoksalnej wypowiedzi, że dokładną wartość stałej grawitacji można wyprowadzić z faktu, iż ją znamy. Stało się wtedy jasne, że istnienie człowieka z jego psychicznym zamiłowaniem do badania rzeczywistości ma jakiś (nadający się do różnej interpretacji) związek z tej rzeczywistości istnieniem.

Był to jeden ze zwrotnych momentów w historii podejść badawczych. Zlał się on czasowo dość dokładnie z uświadomieniem sobie, że podział nauki na coraz węższe specjalności prowadzi do pojawienia się uczonych, co wiedzą coraz więcej w coraz węższym zakresie, czyli do takich, którzy *w granicy* będą wiedzieli wszystko o niczym. Aby tego uniknąć, stały się modne wszelkiego rodzaju badania i narady interdyscyplinarne, na przykład znane, krakowskie Konwersatoria Interdyscyplinarne prowadzone w ciągu wielu lat przez Michała Hellera i Józefa Życińskiego. Nieśmiało zaczęły się też pojawiać imprezy integrujące naukę ze sztuką. Pojawiło się przekonanie, że aby poznać rzeczywistość, należy ją nie tylko ująć rozumowo, ale i przeżyć artystycznie. Naprzeciw temu wyszli artyści twierdząc, że nauki takie, jak matematyka czy fizyka pozwalają im rozwinąć subtelniejsze poczucie piękna. Stąd, między innymi, Halina Tomasik wykładała przez lata teorię antyprzestrzeni i geometrię n-wymiarową dla rzeźbiarzy i architektów wnętrz w warszawskiej Akademii Sztuk Pięknych.

Zapoczątkowany w roku 1968 przez Jana Jerzego Kubikowskiego i Andrzeja Ziębę cykl odbywających się co dwa lata Krakowskich Szkół Kosmologii od początku nie stronił od ujęć niekonformistycznych. Szkoła XIII w roku 1992 była poświęcona hipotezom alternatywnym do hipotezy prawybuchu, a XIV, w 1994 r., pod tytułem „Struktura Czasu i Przestrzeni” omawiała problemy tej struktury z punktu widzenia matematyki, fizyki, astronomii, kosmologii, biologii (z uwzględnieniem medycyny), teologii, sztuk plastycznych i muzyki. Tak szerokie ujęcie problemu było eksperymentem, którego

Rozwiązanie zadania M 747. Załóżmy, że $k \in A_p \cap A_q$, czyli istnieją takie liczby naturalne m i n, że $[mp] = k = [nq]$. Wówczas

$$\begin{aligned} m+n &> \frac{[mp]}{p} + \frac{[nq]}{q} = \\ &= k\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right) = \\ &= k > \frac{mp-1}{p} + \frac{nq-1}{q} = \\ &= m+n-1, \end{aligned}$$

więc k znajduje się między dwiema kolejnymi liczbami naturalnymi. To jednak jest niemożliwe, bo k jest liczbą naturalną. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że $A_p \cap A_q = \emptyset$.

Załóżmy teraz, iż $k \in \mathbf{N} \setminus (A_p \cup A_q)$. Wśród liczb 1, 2, ..., k jest $\left[\frac{k+1}{p}\right]$ liczb ze zbioru A_p oraz $\left[\frac{k+1}{q}\right]$ liczb ze zbioru A_q, bowiem

$$mp \le k \Leftrightarrow mp < k+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow m < \frac{k+1}{p} \Leftrightarrow m \le \left[\frac{k+1}{p}\right].$$

Ponieważ dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi nierówność $[x]+[y] \ge [x+y]-1$, więc

$$\left[\frac{k+1}{p}\right] + \left[\frac{k+1}{q}\right] \ge$$
$$\ge \left[(k+1)\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right] - 1 = k.$$

Skoro k nie należy ani do A_p, ani do A_q, to któraś z liczb 1, 2, ..., $k-1$ musi należeć zarówno do A_p, jak i do A_q, co przeczy pierwszej części zadania. Zatem $A_p \cup A_q = \mathbf{N}$.

Uwaga: Czytelnik zechce w powyższym dowodzie wskazać wszystkie miejsca, w których wykorzystano niewymierność liczb p i q.

realizację podjęły: Wolna Europejska Akademia Nauk (z siedzibą w Uniwersytecie Erazma w Rotterdamie), Uniwersytet Łódzki oraz Fundacja Omega w Łodzi, korzystając częściowo z zasiłku Komitetu Badań Naukowych.

W dniach od 29 sierpnia do 3 września 1994, w Łodzi się zjechało nieco ponad 100 uczestników z 10 krajów (Anglia, Czechy, Francja, Holandia, Polska, Rosja, Stany Zjednoczone, Szwajcaria, Ukraina, Włochy) – w tym 22 wykładowców. W przeciwieństwie do niektórych poprzednich szkół z tej serii nie było tu żadnych rewelacyjnych, odkrywczych wykładów. Bo chociaż prawie wszyscy wykładowcy należeli do czołówki w swoich specjalnościach, starali się przede wszystkim przedstawić dokładnie aktualny stan świadomości (naukowej względnie artystycznej) w danej dziedzinie, nie siląc się na popis oryginalności, który mógłby być zrozumiany tylko przez małą część audytorium. Wszystkim też się udało uniknąć upraszczającej popularyzacji. Jeśli czasem popełniono błędy w sposobie przedstawiania problemów, to raczej przeciwnie – zakładano u słuchaczy zbyt głęboką znajomość spraw.

Można było stwierdzić, jak ściśle problemy sztuki stanowią przedłużenie ciągu problemów nauki, albo może odwrotnie – jak problemy naukowe są przedłużeniem artystycznych. Przedstawię przykład jednego takiego ciągu omówionego w czasie szkoły: W astronomii badania obiektów coraz to odleglejszych są zarazem wędrówką w czas coraz bardziej przeszły. W praktyce obserwacyjnej nie sposób tu całkiem oddzielić problemów czasowych od przestrzennych (mówili o tym Piotr Flin i Jerzy Machalski). Podobnie, w laboratoryjnych pomiarach wieku metodą izotopów węgla na efektywną ocenę wieku ma wpływ, **gdzie** się znajdował przez wieki badany obiekt (Roberto Gallino). Fizyka słusznie łączy przestrzeń i czas w jedną czasoprzestrzeń i to nie tylko w ogólnej teorii względności (Franco Selleri). Dalej się okazuje, że również taka, zdawałoby się, wyłącznie przestrzenna sztuka jak malarstwo, nie mogła rozwinąć skrzydeł, gdy usiłowała oddzielić kompozycję przestrzenną od czasowej (Jerzy Nowosielski), a muzyki nie sposób właściwie pojąć, gdy się w niej postrzega tylko następstwo czasowe dźwięków, a nie uwzględnia struktury przestrzennej (Wim Viersen i Christian Ginat). Właściwie dopiero po wysłuchaniu tych wszystkich referatów (i dopełniającego je koncertu!) człowiek zaczynał pojmować, że czasoprzestrzeń jest nie tylko abstrakcyjną ideą fizyków, ale czymś, z czym się spotykamy zarówno w konkretnych pomiarach, jak i w przeżyciach artystycznych. Podobne ciągi dotyczyły względności interwałów czasu (w teologii, fizyce, biologii, ginekologii i muzyce), względności odległości (w malarstwie i w astronomii pozagalaktycznej) i innych aspektach czasu i przestrzeni.

No dobrze, ale czy takie uzupełnienie świadomości naukowej świadomością artystyczną daje coś samej nauce, rozwija ją? Może pozwala na nowe odkrycia czy na lepsze sformułowania starych prawd? Odpowiedź zależy od celu, jaki nauce stawiamy. Jeśli chcemy, żeby nauka dawała tylko jak najdokładniejszy opis zjawiska (teoria, model, parametry), to niewątpliwie najlepiej można to wszystko zapisać na dysku komputera. Tam wzruszenia artystyczne nic nie są w stanie dodać. Ale przecież nie o to idzie, żeby „wiedziały" komputery, lecz żeby wyniki dotarły do świadomości człowieka. A tu już nie wolno nam powiedzieć, że świadomość artystyczna niczego nie daje. Wyniki nauki mają znaczenie praktyczne, pozwalają zwiększać dobrobyt ludzi (czasem przeciwnie – burzyć, ale nie komplikujmy sprawy). Jednak takie znaczenie praktyczne jest mało ważne. W dobrobycie potrafi żyć i do niego dążyć każde zwierzę. Wiele organizmów potrafi świetnie przetwarzać dane i dostosowywać się do nich. Pewne szczepy bakterii gnilnych potrafią w kilka godzin dostosować własną strukturę do rodzaju rozkładanej materii. Natomiast pojmować sens świata potrafi spośród istot materialnych (powtarzam: naukowców nie interesują aniołowie) tylko człowiek. W tym zadaniu pojmowania, uświadamiania sobie, nikt go nie zastąpi. I to jest zadanie człowieka. Nie tylko badaczy pierwszej linii, ale całej ludzkości. Powiecie, że to sztuczne postawienie celu człowieka? Że może nie warto niczego być świadomym? Może, ale tak stawiając sprawę, można przypuścić równie dobrze, że może nie warto żyć...

Tytuł tych rozważań postawiłem bałamutnie. Wśród uczestników szkoły nie zauważyłem ani jednego puzonisty (było paru skrzypków i pianistów). O paradoksie Olbersa też akurat nikt się nie rozwodził. Ale nie idzie o takie konkrety. Myślę, że nauka się rozwinie prawidłowo, kiedy całkiem praktycznie myślący hodowca karpi nie będzie miał wątpliwości, że poznając małe twierdzenie Fermata, regułę Oersteda czy prawo Hubble'a uczestniczy w rozwoju ludzkości.

Rozwiązanie zadania F 411. Podstawowymi równaniami dla fotonu, prawdziwymi zarówno w próżni, jak i w przezroczystym ośrodku są: $E = h \cdot f$ oraz $p = E/c$. Natomiast wzór $p = h/\lambda$ otrzymujemy korzystając z równania prędkości fali $c = \lambda \cdot f$:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h(c/\lambda)}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Jednak w ośrodku przezroczystym równanie prędkości to $u = \lambda' \cdot f$, gdzie u i λ' są odpowiednio prędkością i długością fali świetlnej w ośrodku. Częstość fali nie ulega zmianie przy przejściu do ośrodka. Poprzedni rachunek daje więc teraz

$$p' = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h \cdot (u/\lambda')}{c} = \frac{h}{(c/u) \cdot \lambda'} = \frac{h}{n\lambda'},$$

gdzie $n = c/u = \lambda/\lambda'$. Wstawiając to do równania na pęd dostajemy

$$p' = \frac{h}{(\lambda/\lambda') \cdot \lambda'} = \frac{h}{\lambda} = p,$$

czyli brak wymiany pędu między światłem a idealnym ośrodkiem, co wyjaśnia sprzeczność.

Rozwiązanie zadania F 412. Z prawa Newtona dla kierunku poziomego mamy

$$F - f = M \cdot a,$$

gdzie a jest przyspieszeniem środka masy roweru, M – jego masą, F – siłą przyłożoną do pedału, f – siłą tarcia działającą na koło. Dla ruchu obrotowego wokół środka masy (koła) mamy

$$bF - Rf = I \cdot \alpha,$$

gdzie α jest przyspieszeniem kątowym koła, b długością pedału (odległością od środka koła do punktu przyłożenia siły), R promieniem koła, I momentem bezwładności. Dla przyspieszeń mamy w tym przypadku związek $a = -\alpha R$. Wtedy

$$bF - R(F - M \cdot a) = -I\frac{a}{R},$$

co daje

$$a = \frac{1 - \frac{b}{R}}{M + \frac{I}{R^2}} F.$$

Wobec tego, jeśli tarcie jest dostatecznie duże, by zapobiec poślizgowi, mamy

$$R > b \Rightarrow a > 0,$$
$$R = b \Rightarrow a = 0,$$
$$R < b \Rightarrow a < R,$$

(Ostatni przypadek odpowiada przedłużonemu pedałowi, np. na równoważni.) W przypadku przedłużonego pedału ruch nastąpi w kierunku przeciwnym do kierunku działającej siły.

O broni jądrowej

Tomasz KRZYT

W 1995 roku mija 50 lat od użycia bomby atomowej. W ciągu tych lat coraz więcej państw stawało się posiadaczami tej broni, a sygnały o przemycaniu materiałów rozszczepialnych dowodzą, że w dalszym ciągu różnych chętnych na broń jądrową jest wielu. Spójrzmy bliżej na sprawę budowy broni jądrowej.

Bomba atomowa

Jak wiadomo, energia wyzwalana w bombie atomowej pochodzi z rozszczepienia przez neutrony jąder ciężkich pierwiastków (uranu ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ lub plutonu ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$). W wyniku rozszczepienia powstają lżejsze jądra i neutrony, które rozbijają kolejne jądra uranu lub plutonu i w ten sposób uzyskujemy reakcję łańcuchową. Aby spowodować wybuch, musimy spełnić kilka warunków. Przede wszystkim musimy starać się, aby niekontrolowana reakcja łańcuchowa, która zachodzi w bombie, rozwijała się jak najszybciej; dlatego materiał bomby musi być bardzo czysty. Domieszki bowiem pochłaniają neutrony potrzebne do rozszczepień. Dalej, bomba nie wybuchnie sama z siebie, dopóki nie zostanie przekroczona **masa krytyczna**, to jest wtedy, gdy na jeden neutron zużyty na rozszczepienie powstanie co najmniej jeden nowy neutron. Żadnym sposobem nie można doprowadzić do eksplozji ładunku mniejszego od wartości krytycznej. Nie można zatem zbudować małych bomb atomowych, można jedynie specjalnymi środkami nieco obniżyć procent zużywanego materiału rozszczepialnego. Przeciwnie, gdy tylko ładunek bomby osiągnie rozmiary krytyczne, bomba wybucha natychmiast.

Jednakowoż samo przekroczenie masy krytycznej nie wystarczy by wybuch ten był silny. Jeżeli powoli zetkniemy dwa kawałki materiału rozszczepialnego o sumarycznej masie większej od krytycznej, nastąpi słaba eksplozja, która odrzuci obie części i reakcja łańuchowa zostanie powstrzymana. Aby więc spowodować wybuch, masa krytyczna musi być przekroczona w sposób gwałtowny. Dlatego bomba atomowa składa się w istocie z dwóch ładunków materiału rozszczepialnego, umieszczonych na końcach długiej rury, a eksplozja jest wywoływana przez wystrzelenie ich naprzeciw siebie za pomocą zwykłego chemicznego ładunku wybuchowego. Oczywiście, energia wybuchu powoduje rozrzucenie masy reagującej we wszystkie strony i reakcja zostaje zatrzymana, zanim większość materiału zdąży wziąć w niej udział, ale i tak wydzielona energia wystarczy, aby wywołać ogromne zniszczenia. Ocenia się, że w reakcji faktycznie bierze udział tylko kilka procent całego ładunku. Reszta użytego materiału rozszczepialnego wyparowuje tworząc radioaktywne związki, tzw. promieniotwórcze popioły, powodujące skażenie i choroby popromienne.

Bomba wodorowa (H)

Bomba wodorowa ma podobne działanie niszczące jak bomba atomowa, jednakże wydzielanie energii następuje w wyniku reakcji syntezy lekkich pierwiastków. Synteza termojądrowa w różnych odmianach jest (jak to wykazał Hans Bethe) głównym źródłem energii gwiazd i Słońca. W bombie H wykorzystuje się kilka z podanych rodzajów reakcji: $\mathrm{D}+\mathrm{D} \to {}^3\mathrm{He}+\mathrm{n}$; $\mathrm{D}+\mathrm{T} \to {}^4\mathrm{He}+\mathrm{n}$; ${}^6\mathrm{Li}+\mathrm{D} \to {}^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He}$ itp. Reakcje te są znacznie wydajniejsze energetycznie od reakcji rozpadu, a ponadto najważniejszy składnik, deuter, jest łatwo dostępny – występuje dość powszechnie w zwykłej wodzie.

Powstają tu jednak inne trudności, bowiem reakcje termojądrowe przebiegają tylko w bardzo wysokich temperaturach (cząstki biorące udział w reakcji muszą przede wszystkim pokonać siły wzajemnego odpychania elektrostatycznego) i przy odpowiedniej gęstości reagentów. Próg osiągnięcia syntezy termojądrowej jest określany przez kryterium Lawsona:

$$n\tau > 10^{14}\ \mathrm{s/cm^3},$$

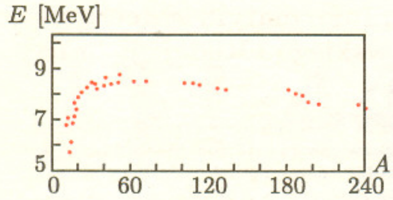
gdzie n oznacza liczbę cząstek w 1 cm^3 plazmy, a τ – czas jej utrzymania

Rozwiązanie zadania M 748. Przeprowadzimy dowód przez indukcję. Dla $k=1$ teza zadania jest oczywista. Załóżmy teraz, że jest prawdziwa dla wszystkich liczb naturalnych mniejszych od k. Ponieważ $\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{2+\sqrt2}=1$, więc z tezy zadania **747** i z nierówności trójkąta wynika, że

$$\left|\sum_{n=1}^{k}(-1)^{[n\sqrt2]}\right| = \left|\sum_{m=1}^{[k\sqrt2]}(-1)^m - \sum_{\substack{m\le[k\sqrt2]\\ m\in A_{2+\sqrt2}}}(-1)^m\right| \le 1+\left|\sum_{n=1}^{w_k}(-1)^{[n(2+\sqrt2)]}\right|,$$

gdzie w_k jest określone przez warunek $w_k\cdot(2+\sqrt2) < [k\sqrt2] < (w_k+1)\cdot(2+\sqrt2)$, czyli (jak łatwo sprawdzić) $w_k<k$, a nawet $w_k<k/\sqrt2$. Liczby $[n\sqrt2]$ i $[n(2+\sqrt2)]$ różnią się o $2n$, są więc tej samej parzystości. Możemy zatem skorzystać z założenia indukcyjnego i otrzymać

$$\left|\sum_{n=1}^{k}(-1)^{[n\sqrt2]}\right| \le 1+1+2\log_2 w_k \le 2+2\log_2\frac{k}{\sqrt2} = 1+2\log_2 k\,.$$



Zależność średniej energii wiązania E jednego nukleonu od liczby masowej A jądra.

w stanie ściśnięcia. Zatem, aby bomba wybuchła, trzeba ją podgrzać do około miliona stopni i jednocześnie silnie ścisnąć, a to można uzyskać tylko przez zastosowanie bomby atomowej jako zapalnika. Bomba H, w odróżnieniu od bomby atomowej, nie ma masy krytycznej i nawet największa nie wybuchnie samorzutnie. (Nie mówimy tu o normalnych gwiazdach, które świecą samorzutnie, ale nie wskutek wybuchu, lecz powolnego przebiegu reakcji syntezy, a ponadto wyposażone są w doskonały regulator – grawitację.) Tak więc, gdy siła wybuchu bomby atomowej jest ograniczona jej rozmiarami, to siła wybuchu bomby wodorowej jest teoretycznie nieograniczona, choć w czasie wybuchu przereagowuje zaledwie kilkanaście procent ładunku. Nie ma technicznych przeszkód w zwiększaniu siły bomb H. Znaczącym produktem ubocznym wybuchu bomby H jest duża ilość „radioaktywnych popiołów" i to nie tylko z tego powodu, że zapalnikiem jest bomba atomowa, ale też dlatego, że w samych reakcjach syntezy powstaje ogromna ilość neutronów, które przenikając do jąder innych pierwiastków intensywnie „produkują" radioaktywne izotopy.

Źródła materiałów rozszczepialnych

Jak już było wspomniane, jako materiału do budowy bomb atomowych używa się izotopu uranu 235 lub plutonu 239. Z nich tylko uran 235 występuje w naturze, ale w bardzo niewielkiej ilości, tak że na 1 atom uranu 235 przypada 140 atomów zwykłego uranu 238. Jedyną w zasadzie metodą oddzielenia pożądanego izotopu 235 od 238 jest **metoda dyfuzyjna** lub jej odmiany. Gazowy związek uranu przepuszcza się przez cienkie, porowate przegrody; dyfundując ulega on rozdzieleniu, gdyż lżejsze cząstki przenikają łatwiej niż cięższe. Jednak bardzo niewielka różnica mas izotopów powoduje, że aby otrzymać na końcu związek o wymaganej czystości, trzeba zbudować ogromną fabrykę liczącą kilka tysięcy przegród o powierzchni wielu hektarów, zużywającą w dodatku ogromne ilości energii elektrycznej do zasilania.

Pluton 239 nie występuje w skorupie ziemskiej tak jak uran, ponieważ ma znacznie krótszy okres połowicznego rozpadu (24 000 lat). Dlatego cały pluton na Ziemi musi pochodzić z reaktorów. Pluton 239 powstaje bowiem z uranu 238 przez wychwyt neutronu, co ma miejsce w reaktorze przy okazji rozszczepienia uranu 235. Jako wybuchowy materiał rozszczepialny pluton jest tak samo dobry jak uran 235. Jednak jego uzyskanie jest łatwiejsze, gdyż jako pierwiastek ma inne własności chemiczne, co pozwala wyekstrahować go dość łatwo metodami chemicznymi. Mogłoby się wydawać, że w takim razie nic prostszego, jak produkować pluton w zwykłych elektrowniach jądrowych. Jednak zabierając pluton z reaktora zubożamy materiał rozszczepialny, tak więc ten, kto chce produkować materiały wybuchowe do bomb wyłączając pluton z obiegu w reaktorze, czyni to kosztem produkcji mocy. Dlatego prawdziwe fabryki plutonu, nastawione na produkcję plutonu do bomb, nie produkują z reguły energii elektrycznej. Widać z tego, że produkcja materiałów rozszczepialnych do bomb jest czasochłonna, kosztowna i trudna do ukrycia.

Z podanych powyżej rozważań wynika, że najtrudniejszym etapem przy konstrukcji broni jądrowej jest uzyskanie odpowiedniej czystości materiału rozszczepialnego potrzebnego jako ładunek wybuchowy, a mając bomby atomowe można już łatwo uzyskać jeszcze silniejsze bomby wodorowe. Dlatego więc należy wszelkimi środkami przeciwdziałać niekontrolowanej sprzedaży i przemytowi materiałów rozszczepialnych (głównie plutonu), gdyż skutki mogą być tragiczne i nieodwracalne.

Wydzielanie ciepła w reakcjach chemicznych i jądrowych.

Rodzaj reakcji	Wydzielane ciepło (kcal/kg)
Wybuch dynamitu	1300
Spalanie węgla kamiennego	8 000
Rozpad alfa uranu	400 000 000
Rozpad alfa radu	460 000 000
Rozszczepienie jądra uranu	19 000 000 000
Synteza helu z wodoru	170 000 000 000

Rozwiązanie zadania M 749.
Udowodnimy, że zachodzi warunek konieczny i dostateczny zbieżności szeregu: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność

$$\left|\sum_{n=k}^{\ell}\frac{(-1)^{[n\sqrt{2}]}}{n}\right| < \varepsilon,$$

jeśli tylko ℓ i k są dostatecznie duże.

Oznaczmy $X_n = \sum_{m=1}^{n}(-1)^{[m\sqrt{2}]}$.

Dla dowolnych liczb naturalnych $\ell > k > 2$ uzyskujemy łatwo, posługując się nierównością trójkąta i tezą zadania M 748, następujące oszacowania:

$$\left|\sum_{n=k}^{\ell}\frac{(-1)^{[n\sqrt{2}]}}{n}\right| = \left|\sum_{n=k}^{\ell}\frac{X_n - X_{n-1}}{n}\right| \le$$

$$\le \frac{|X_{k-1}|}{k} + \left|\sum_{n=k}^{\ell-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)X_n\right| + \frac{|X_\ell|}{\ell} \le$$

$$\le 3\left(\frac{2\log_2 k}{k} + \sum_{n=k}^{\ell-1}\frac{\log_2 n}{n^2}\right).$$

Ponieważ $k^{-1}\log_2 k \to 0$ dla $k \to \infty$, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log_2 n}{n^2}$ jest zbieżny (oba fakty Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić), to prawa strona ostatniej nierówności może być dowolnie mała, jeśli tylko k jest dostatecznie duże oraz $\ell > k$.

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań:
30 XI 1995

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/1995.

Zadania z fizyki nr 201, 202

Redaguje Jerzy B. BROJAN

201. Koralik porusza się po wygiętym drucie, przy czym działa na niego tylko siła oddziaływania ze strony drutu (nie występuje np. siła ciężkości). Siła tarcia jest proporcjonalna do prostopadłej do drutu składowej siły oddziaływania, a stała proporcjonalności (współczynnik tarcia) jest równa $f = 0{,}1$. Zatem na prostoliniowych odcinkach drutu tarcie nie występuje. Jeśli kształt drutu jest taki, jak na rysunku, a początkowa prędkość wynosi $v_0 = 1$ m/s, to ile wynosi prędkość końcowa?

202. – Dostałem na urodziny nowy aparat fotograficzny – opowiadał kolegom Pstrykiewicz. – Są do niego dwa obiektywy, jeden o dłuższej, a drugi o krótszej ogniskowej. Ale można też je założyć jeden przed drugim, i wtedy otrzymuje się obiektyw o ogniskowej jeszcze krótszej!
Optycki spojrzał podejrzliwie, ale nie zdążył o nic zapytać, bo Fotończyk musiał, oczywiście, pochwalić się swoim cudem techniki:
– A mój aparat też ma dwa obiektywy, i też jeden ma krótszą, a drugi dłuższą ogniskową. A gdy zamontuje się oba jeden za drugim, to ogniskowa jest jeszcze dłuższa!
– Zaraz, zaraz – wykrzyknął Optycki. – Żartujecie, któryś z was...
W pół zdania przerwał mu Kamerański.
– E tam, do chrzanu są te wasze aparaty – oświadczył.
– Do mojego też są dwa obiektywy o różnych ogniskowych, i też można je zakładać jeden za drugim, ale można to robić w dowolnej kolejności – raz otrzymuje się obiektyw o najdłuższej ogniskowej, a jeśli się je zamieni miejscami, to o najkrótszej!
– Tego już za wiele! – wołał z gniewem Optycki.
– Nabieracie mnie, tak nie może być!

Czy miał rację, a jeśli tak, to który z kolegów przesadził z zaletami swojego aparatu?
Wskazówka. Ogniskową układu optycznego (niekoniecznie składającego się z cienkich soczewek położonych blisko siebie) można zdefiniować np. tak: niech na układ pada wiązka równoległa pod niewielkim kątem α do osi; jeśli skupi się ona w płaszczyźnie ogniskowej w odległości h od ogniska, to ogniskowa f jest dana wzorem $f = h/\alpha$.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1995

Przypominamy treść zadań:

197. Statek kosmiczny o masie m zaopatrzony jest w lustro odbijające światło. Jeśli na to lustro pada prostopadle wiązka światła z nieruchomego lasera o mocy P, to po jakim czasie statek zostanie rozpędzony ze spoczynku do prędkości v równej połowie prędkości światła? Siła grawitacji ani opory ruchu w zadaniu nie występują.

198. Szczelne naczynie z gazem jest przedzielone na dwie części o nierównych objętościach i izolowane termicznie. Grzałka elektryczna dostarcza do wnętrza pewną ustaloną ilość ciepła Q. W którym przypadku ciśnienie wzrośnie bardziej:
a) gdy podgrzejemy gaz w mniejszej części naczynia,
b) gdy podgrzejemy gaz w większej części naczynia,
c) gdy połowę ciepła dostarczymy mniejszej części, a połowę – większej?

197. W ciągu czasu $\mathrm{d}t$ laser wysyła światło o energii $\mathrm{d}E = P\,\mathrm{d}t$ i pędzie $\mathrm{d}p = \mathrm{d}E/\mathrm{c} = (1/\mathrm{c})P\,\mathrm{d}t$. Droga przebyta przez światło w tym czasie wynosi $\mathrm{c}\,\mathrm{d}t$, a przez statek $v\,\mathrm{d}t$, więc w czasie $\mathrm{d}t$ (mierzonym w układzie nieruchomym) odbije się od lustra tylko część wspomnianej „porcji” promieniowania, dana ułamkiem $(\mathrm{c}-v)/\mathrm{c}$. Aby obliczyć pęd światła odbitego, musimy najpierw przejść do układu odniesienia związanego ze statkiem. W tym układzie promień ma pęd mniejszy o czynnik $\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$, gdzie $\beta = v/\mathrm{c}$ (można to ustalić na podstawie transformacji Lorentza dla pędów, albo też skorzystać ze wzoru na relatywistyczny efekt Dopplera). Odbicie od lustra zmienia zwrot pędu, a w układzie nieruchomym promień odbity ma pęd mniejszy znów o ten sam czynnik. Podsumowując, zmiana pędu promienia (czyli także statku) jest dana wzorem

$$\mathrm{d}p_s = \frac{1}{\mathrm{c}}P\,\mathrm{d}t(1-\beta)\left(1+\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) = \frac{2}{\mathrm{c}}\frac{1-\beta}{1+\beta}P\,\mathrm{d}t\,.$$

Po wprowadzeniu „bezwymiarowego czasu” $\tau = Pt/(m\mathrm{c}^2)$ równanie ruchu statku przybiera postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 2\frac{1-\beta}{1+\beta}\,.$$

Równanie to można scałkować analitycznie, ale otrzymane wyrażenia są dość skomplikowane. Stwierdzamy, że przy warunku początkowym $\beta(0) = 0$ funkcja $\beta(\tau)$ przyjmuje wartość 1/2 dla $\tau = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{3} = 0{,}533$. Stąd szukany czas wynosi $t = 0{,}533\ m\mathrm{c}^2/P$.

198. Oznaczmy objętości obu części przez V_1 i V_2, ciśnienie początkowe przez p, końcowe przez p', temperatury początkowe przez T_1 i T_2, a końcowe przez T_1' i T_2'. Wprowadźmy też oznaczenia liczby moli: n_1 i n_2 na początku, a n_1' i n_2' na końcu. Z bilansu energii mamy równanie

$$\Delta U = Q = (n_1'T_1' + n_2'T_2' - n_1T_1 - n_2T_2)c_V\,,$$

gdzie c_V jest ciepłem molowym gazu przy stałej objętości. Podstawiając z równania Clapeyrona $nT = pV/\mathrm{R}$ otrzymujemy

$$p'V_1 + p'V_2 - pV_1 - pV_2 = Q\mathrm{R}/c_V\,.$$

Stąd widać, że końcowe ciśnienie p' zależy od Q i ciśnienia początkowego p, nie zależy natomiast od rozkładu temperatur. We wszystkich opisanych przypadkach ciśnienie końcowe będzie więc jednakowe.

$\sqrt[\otimes]{\sum!} = 44$

Zadania z matematyki nr 303, 304

Redaguje Marcin E. KUCZMA

303. Wielościan wypukły W (o wszystkich kątach dwuściennych ostrych) ma następującą własność: istnieją takie liczby naturalne $p, q \geq 3$, że każdy przekrój wielościanu W płaszczyzną przecinającą wnętrze W jest albo p-kątem albo q-kątem. Czy wielościan W musi być czworościanem?

304. Ciąg liczb (b_n) jest określony rekurencyjnie:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_n = (n+1)\left(\frac{b_{n-1}}{n} + \frac{b_{n-2}}{n-1}\right) \quad \text{dla } n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Obliczyć sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}$.

Zadanie **304** zaproponował pan Marcin Sarniak z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1995

Przypominamy treść zadań:

299. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite n, dla których suma

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$$

jest liczbą całkowitą.

300. Zbiór $S \subset \mathbf{R}$ jest sumą skończonej liczby przedziałów domkniętych (długości dodatniej, skończonej), parami rozłącznych. Dowieść, że dla każdej funkcji ciągłej $f\colon S \to S$ istnieje niepusty zbiór $A \subset S$ spełniający równość $f(A) = A$.

299. Ustalmy liczbę naturalną n i przyjmijmy

$$a_k = \frac{n - [\sqrt{k-1}]}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}.$$

Rozważana suma równa się

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_k = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=(m-1)^2+1}^{m^2} a_k.$$

Jeśli $(m-1)^2 + 1 \leq k \leq m^2$, to $[\sqrt{k-1}] = m - 1$, to

$$a_k = \frac{n - m + 1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = (n - m + 1)(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

Stąd

$$\sum_{k=(m-1)^2+1}^{m^2} a_k = (n - m + 1) \sum_{k=(m-1)^2+1}^{m^2} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) =$$
$$= (n - m + 1)(m - (m-1)) = n - m + 1,$$

i ostatecznie

$$\sum_{k=1}^{n^2} a_k = \sum_{m=1}^{n} (n - m + 1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dla każdego n jest to liczba całkowita!

300. Ponumerujmy przedziały będące składowymi rozważanego zbioru: $I_1, \ldots, I_m$. Niech $M = \{1, \ldots, m\}$. Dla każdego numeru $i \in M$ funkcja ciągła f przekształca przedział I_i na pewien przedział zawarty w zbiorze S, a więc zawarty w którymś przedziale I_j. Numer j zależy od i; oznaczmy go przez $\varphi(i)$. Została w ten sposób określona funkcja $\varphi\colon M \to M$ o tej własności, że

$$(*) \qquad f(I_i) \subset I_{\varphi(i)} \qquad \text{dla} \quad i \in M.$$

Weźmy pod uwagę następujący ciąg elementów zbioru M:

$$1,\ \varphi(1),\ \varphi^2(1),\ \varphi^3(1),\ \ldots,$$

gdzie symbol φ^k oznacza k-krotne złożenie $\varphi \circ \ldots \circ \varphi$. Zbiór M jest skończony, więc w ciągu tym muszą wystąpić powtórzenia. Zatem dla pewnych liczb całkowitych $k \geq 0$, $r \geq 1$ zachodzi równość $\varphi^k(1) = \varphi^{k+r}(1)$. Dla $j = 0, 1, \ldots, r$ oznaczmy przez J_j przedział I_i o numerze $i = \varphi^{k+j}(1)$. Tak więc $J_r = J_0$ oraz, w myśl zależności $(*)$,

$$f(J_{j-1}) \subset J_j \qquad \text{dla} \quad j = 1, \ldots, r.$$

W takim razie funkcja $f^r = f \circ \ldots \circ f$ (r-krotne złożenie) odwzorowuje przedział J_0 w ten sam przedział. Wobec ciągłości, istnieje punkt $x_0 \in J_0$, dla którego spełniona jest równość $f^r(x_0) = x_0$. Wystarczy teraz przyjąć

$$A = \{x_0,\ f(x_0),\ f^2(x_0),\ \ldots,\ f^{r-1}(x_0)\}.$$

Zbiór A jest przez funkcję f odwzorowywany (cyklicznie) na siebie.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 289 (WT=1,92) i 290 (WT=2,64) z numeru 11/1994

Waldemar Pompe	Warszawa	43,89
Mirosław Matlęga	Skoczów	43,59
Adam Czornik	Bytom	39,26
Tomasz Wietecha	Tarnów	37,98
Janusz Olszewski	Suwałki	36,44

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 189 (WT=2,05) i 190 (WT=3,10) z numeru 12/1994

Artur Gawryszczak	Dubeczno	29,31
Aleksander Surma	Myszków	28,53
Dariusz Wilk	Rzeszów	22,23
Przemysław Gadziński	Środa Śl.	17,96
Przemysław Gworys	Częstochowa	17,64

XLVII OLIMPIADA MATEMATYCZNA

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

1. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których równanie $2\sin nx = \operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x$ ma rozwiązania w liczbach rzeczywistych x.

2. Liczbą palindromiczną nazywamy taką liczbę naturalną, której zapis dziesiętny czytany od strony lewej do prawej jest taki sam, jak czytany od strony prawej do lewej. Niech (x_n) będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb palindromicznych. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze, które są dzielnikami co najmniej jednej z różnic $x_{n+1} - x_n$.

3. W pewnej grupie kn osób każda zna więcej niż $(k-1)n$ innych (k, n są liczbami naturalnymi). Wykazać, że można z tej grupy wybrać $k+1$ osób, z których każde dwie się znają.

Uwaga. Jeżeli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

4. Prosta styczna do okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny ABC przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach D i E. Dowieść, że $\dfrac{|AD|}{|DB|} + \dfrac{|AE|}{|EC|} = 1$.

II seria

5. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle CAB = \alpha > \frac{\pi}{2}$, oraz odcinek PQ, którego środkiem jest punkt A. Dowieść, że

$$(|BP| + |CQ|)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \geq |BC|.$$

6. Dane są dwa ciągi liczb całkowitych dodatnich: ciąg arytmetyczny o różnicy $r > 0$ i ciąg geometryczny o ilorazie $q > 1$; liczby r, q są względnie pierwsze. Udowodnić, że jeśli ciągi te mają jeden wspólny wyraz, to mają nieskończenie wiele wspólnych wyrazów.

7. Liczby nieujemne a, b, c, p, q, r spełniają warunki:

$$a + b + c = p + q + r = 1; \ p, q, r \leq \frac{1}{2}.$$

Dowieść, że $8abc \leq pa + qb + rc$, oraz rozstrzygnąć, kiedy zachodzi równość.

8. Ze środka kwadratu wybiega promień świetlny, który odbija się od boków kwadratu zgodnie z zasadą *kąt padania równy kątowi odbicia*. Po pewnym czasie promień wraca do środka kwadratu. Promień nigdy nie trafił w wierzchołek ani nie przeszedł wcześniej przez środek. Dowieść, że liczba odbić od boków kwadratu jest nieparzysta.

III seria

9. Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2 - 12x + 11$ resztę $990x - 889$. Wykazać, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

10. Wykazać, że równanie $x^x = y^3 + z^3$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

11. W konkursie skoków narciarskich uczestniczy 65 zawodników. Startują oni kolejno, według ustalonego wcześniej porządku. Każdy wykonuje jeden skok. Przyjmujemy, że uzyskane wyniki są różne, oraz że każda kolejność końcowa zawodników jest jednakowo prawdopodobna. W każdym momencie konkursu liderem nazywamy zawodnika, który do tego momentu uzyskał najlepszy wynik. Oznaczmy przez p prawdopodobieństwo tego, że w czasie całego konkursu dokładnie jeden raz nastąpiła zmiana lidera. Wykazać, że $p > \frac{1}{16}$.

12. Rozstrzygnąć, czy istnieją takie dwa przystające sześciany o wspólnym środku, że każda ściana pierwszego sześcianu ma punkt wspólny z każdą ścianą drugiego sześcianu.

Rozwiązania powyższych zadań (każde na osobnym arkuszu) mają być wysłane pod adresem **właściwego komitetu okręgowego Olimpiady** najpóźniej dnia

10 października 1995 r. — **10 listopada 1995 r.** — **10 grudnia 1995 r.**

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy komitetów okręgowych Olimpiady Matematycznej

Dla województwa elbląskiego, gdańskiego i słupskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Gdańsku, ul. Abrahama 18, 81-825 Sopot.

Dla województwa bielskiego, częstochowskiego i katowickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Śląskiego, ul. Bankowa 14, 40-007 Katowice.

Dla województwa krakowskiego, krośnieńskiego, nowosądeckiego i tarnowskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Jagiellońskiego, ul. Reymonta 4, 30-059 Kraków.

Dla województwa bialskopodlaskiego, chełmskiego, lubelskiego, przemyskiego, rzeszowskiego, siedleckiego, tarnobrzeskiego i zamojskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Oddział Lubelski Polskiego Towarzystwa Matematycznego, pl. Marii Skłodowskiej-Curie 1, pok. 310, 20-031 Lublin.

Dla województwa kieleckiego, łódzkiego, piotrkowskiego, radomskiego, sieradzkiego i skierniewickiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Łódzkiego, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź.

Dla województwa konińskiego, leszczyńskiego, pilskiego, poznańskiego i zielonogórskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Matejki 48/49, pok. 24, 60-769 Poznań.

Dla województwa gorzowskiego, koszalińskiego i szczecińskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej, ul. Wielkopolska 15, 70-251 Szczecin.

Dla województwa bydgoskiego, ciechanowskiego, olsztyńskiego, płockiego, toruńskiego i włocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, ul. Chopina 12/18, 87-100 Toruń.

Dla województwa białostockiego, łomżyńskiego, ostrołęckiego, suwalskiego i warszawskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny PAN, ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa.

Dla województwa jeleniogórskiego, kaliskiego, legnickiego, opolskiego, wałbrzyskiego i wrocławskiego:
Komitet Okręgowy Olimpiady Matematycznej – Instytut Matematyczny Uniwersytetu Wrocławskiego, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384 Wrocław.

epsilon

8/95
(54)

8 sierpnia 1900 roku na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu David Hilbert wygłosił swój słynny odczyt, w którym zaproponował problemy, mające inspirować rozwój matematyki w dwudziestym stuleciu – dziś mówimy o Problemach Hilberta.

Jeden z tych problemów, trzeci, został rozwiązany w tym samym roku przez Maxa Dehna. Problem dotyczył tego, czy dowolny wielościan można przekształcić w dowolny inny o tej samej objętości, tnąc go na skończenie wiele wielościanów i ustawiając te mniejsze wielościany w odpowiedni sposób. Pozytywne rozwiązanie podobnego zadania dla wielokątów znane było już w Starożytności. Okazało się, że dla wielościanów analogiczne twierdzenie nie jest prawdziwe.

A teraz cofnijmy się o prawie dwadzieścia lat. W dniu 12 czerwca 1882 Akademia Umiejętności w Krakowie ogłosiła (cytujemy za oryginalnymi źródłami) *dwa zadania podane przez Dra Wł. KRETKOWSKIEGO do nagrody przezeń przeznaczonéj: Jedno z tych zadań było z Algebry wyższéj z nagrodą 1000 franków, drugie z Geometryi z nagrodą 500 franków.* Treść zadania geometrycznego brzmiała: *Mając dwa czworościany równéj objętości zresztą najogólniejsze, przeciąć, jeżeli da się to wykonać, płaszczyznami jeden z nich na najmniejszą możliwą liczbę kawałków takich, aby przez stósowne tych kawałków zestawienie można było zbudować czworościan drugi. W razie, gdyby to dokonać się nie dało, lub było możliwém pod pewnemi zastrzeżeniami, d o w i e ś ć niemożności lub zastrzeżenia te dokładnie określić.*

Poznajemy? Tak, przecież to dokładnie to samo! A jakie były efekty konkursu Akademii Umiejętności? W sprawozdaniu przedstawionym przez prof. Franciszka Karlińskiego na posiedzeniu w dniu 20 lutego 1884 czytamy: *O piérwszą z tych nagród nikt się dotąd nie zgłosił, o drugą ubiega się d w ó c h jeometrów, którzy prace swe Akademii nadesłali. Jedna z tych prac opatrzona jest godłem „E u r e k a", druga ma za godło „'ΑΕΙ 'Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ".* Następnie w sprawozdaniu obie prace zostają dokładnie omówione, streszczone są szkice rozumowań. Jak czytamy po omówieniu pracy pierwszej *autor pracy z godłem „E u r e k a" nie pojął zadania w całéj ogólności i doniosłości tegoż, trafił na jeden możliwy przypadek i ten jeszcze bezpotrzebnie ograniczył. (...) Zupełnie inny, bo ściśle naukowy, zakrój ma praca IIga obejmująca (prócz tytułu i rysunku potrzebnego do zrozumienia rzeczy) 20 półarkuszy pisma, oraz figur 7. Autor dzieli pracę swą na trzy rozdziały.*

Potem w sprawozdaniu zostaje streszczone rozumowanie autora drugiej pracy konkursowej, a *z tego streszczonego przedstawienia rzeczy wynika, że praca IIga czyni w s p o s ó b z n a k o m i t y zadosyć warunkom konkursu, i z a s ł u g u j e n a n a g r o d ę.* W efekcie, jak czytamy w protokole posiedzenia, *Wydział uchwalił zgodnie z wnioskiem Sprawozdawców, iż wspomniona wyżéj nagroda ma być przyznaną Autorowi wypracowania z godłem* „'ΑΕΙ 'Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ", *tudzież postanowił tę uchwałę przedstawić na Walném posiedzeniu Akademii do zatwierdzenia.*

W protokole posiedzenia w dniu 20 lutego nie jest napisane, kto był autorem nagrodzonej pracy. (Swoją drogą, jakże inne były czasy – dziś jury wszelkiego rodzaju konkursów dotyczących prac naukowych wie, czyje prace ocenia.) Wkrótce potem jednak nie było to już tajemnicą – trzeci problem Hilberta został rozwiązany szesnaście lat przed wykładem w Paryżu przez Ludwika Antoniego Birkenmajera.

WIZUALIZACJA MATEMATYKI

Typy porządkowe

Nazwisko Birkenmajera znane jest świetnie wielu osobom, ale nie wszyscy chyba kojarzą je z matematyką... Zainteresowania miał Birkenmajer nad wyraz wszechstronne; sławny jest głównie dzięki swoim badaniom w dziedzinie geofizyki, morfologii Tatr oraz astronomii i historii nauki, a także – a może przede wszystkim – 700-stronicowej księdze „Mikołaj Kopernik. Część pierwsza", opublikowanej w roku 1900.

Ludwik Antoni Birkenmajer (1855-1929) doktoryzował się na Uniwersytecie Lwowskim w roku 1879, a jego praca doktorska była pracą matematyczną (tytuł: „O ogólnych metodach całkowania różniczek"). Habilitacja w roku 1880 dotyczyła fizyki matematycznej, od 1881 pracował na UJ, początkowo jako docent, a od 1897 r. jako profesor historii nauk matematycznych i fizycznych – tę katedrę, jedną z pierwszych tego rodzaju katedr w Europie, utworzono specjalnie dla niego. Opublikował Birkenmajer cztery prace matematyczne: trzy dotyczyły teorii liczb, jedna geometrii, nie była to jednak praca o podziale czworościanów. Być może, gdyby ten wynik został ogłoszony, mówilibyśmy dzisiaj o rozkładach Birkenmajera... Choć z drugiej strony zapewne problem ten nie byłby wówczas tak sławny, gdyż – jako rozwiązany – nie zostałby przez Hilberta wymieniony.

Warto też wspomnieć o Władysławie Kretkowskim, który problem postawił. Kretkowski był docentem Politechniki Lwowskiej, inżynierem, matematyką zajmował się w wolnych chwilach – i opublikował w czasopismach francuskich i polskich kilkanaście drobnych prac matematycznych, pod pseudonimem Władysława Trzaski. Wsławił się jednak przede wszystkim działalnością inną: niemal każdego roku ofiarowywał Uniwersytetowi Jagiellońskiemu zbiory cennych monet, książki, finansował stypendia dla młodych matematyków, konkursy matematyczne. W testamencie (zmarł w 1910 roku) przekazał Akademii Umiejętności ogromną sumę z przeznaczeniem na nowe uniwersyteckie wykłady matematyczne i fundusz stypendialny z matematyki, Uniwersytetowi zaś kolekcję książek i czasopism matematycznych, liczącą niemal dwa tysiące tomów.

I jeszcze jedno: hasło „'ΑΕΙ 'Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ" oznacza w wolnym przekładzie „Bóg tworzy geometrycznie". Pojawia się ono m.in. także na historycznym emblemacie Koła Matematyków Studentów UJ (zob. *EPSILON* 11/1994).

Krzysztof CIESIELSKI

Redakcja *EPSILONA*: Krzysztof Ciesielski (naczelny), Danuta Ciesielska, Zdzisław Pogoda, Ananiasz Pośmiechowski, Marcin Poźniak.
Adres do korespondencji: K. Ciesielski, Instytut Matematyki UJ, Reymonta 4, 30-059 Kraków, z dopiskiem ε.